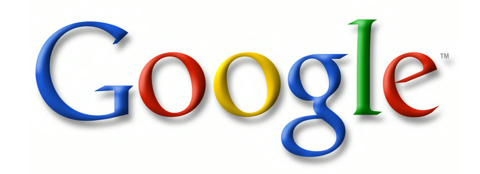
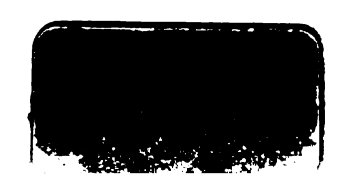
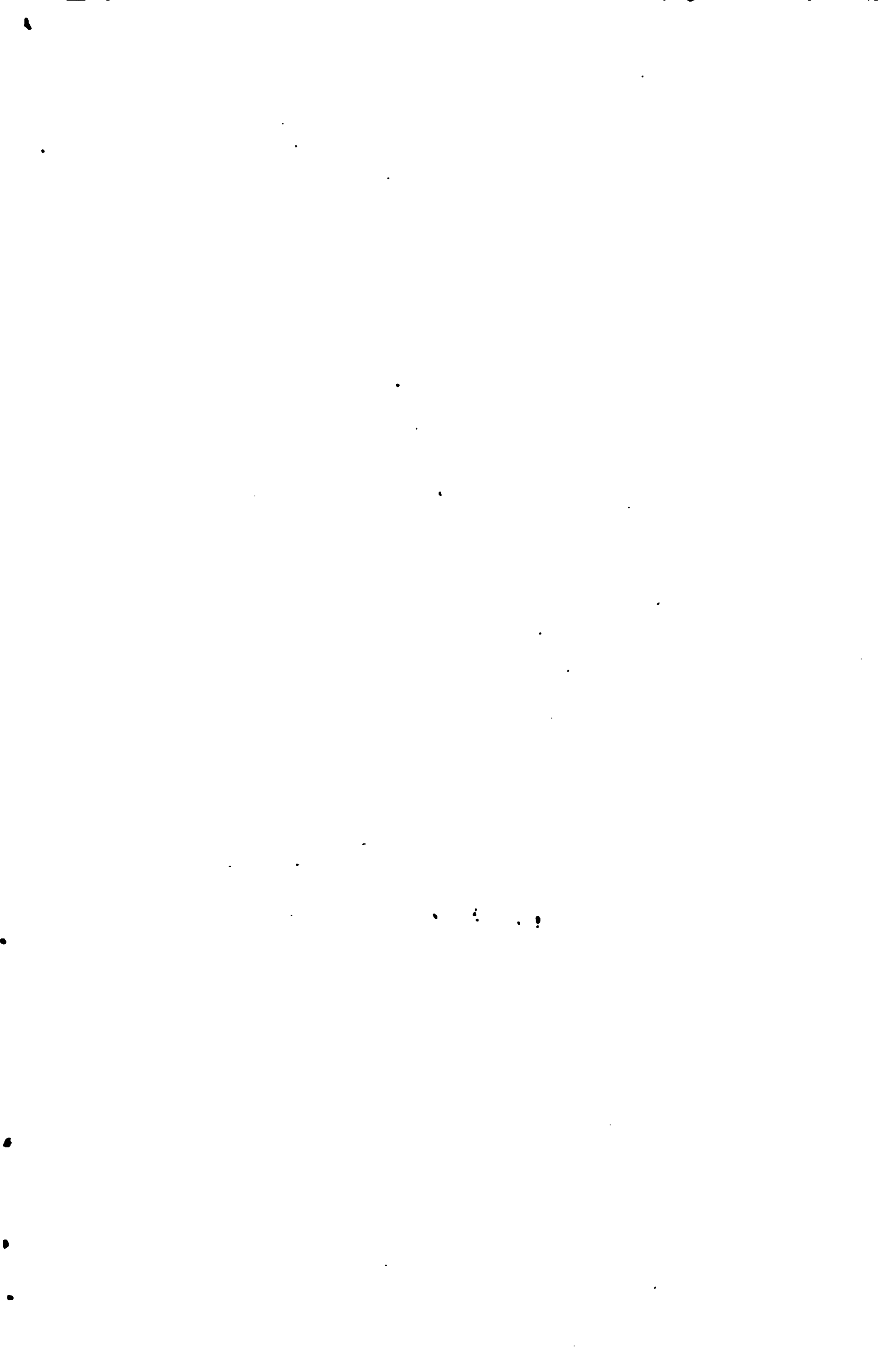














SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

NEUNZIGSTER BAND.

WIEN.
AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1885.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

XC. BAND. II. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1884. — HEFT I BIS V.

(Mit 3 Tafeln und 52 Holzschnitten.)

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1885.

INHALT.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XC. BAND. I. und II. HEFT.

Jahrgang 1884. — Juni und Juli.

(Mit 1 Tafel und 13 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1884.

INHALT

des 1. und 2. Heftes Juni und Juli 1884 des XC. Bandes, II. Abtheilung der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XC. Band. I. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

XV. SITZUNG VOM 13. JUNI 1884.

Herr Prof. Dr. F. Toula an der technischen Hochschule in Wien spricht den Dank aus für die ihm zur Fortsetzung seiner geologischen Forschungen im westlichen Balkan und in den angrenzenden Gebieten auch für das Jahr 1884 von der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften gewährte Reiseunterstützung, sowie für die ihm zu diesem Zwecke überdies erwirkte Staatssubvention.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach in Prag übersendet eine Mittheilung, betreffend die Fixirung einer sehr flüchtigen Erscheinung durch ein photographisches Momentbild.

Herr Prof. Dr. Eduard Tangl an der Universität Czernowitz übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Zur Lehre von der Continuität des Protoplasmas im Pflanzengewebe."

Herr Dr. M. Löwit, Privatdocent und Assistent am Institute für experim. Pathologie der deutschen Universität in Prag, übersendet eine zweite Mittheilung seiner „Beiträge zur Lehre von der Blutgerinnung: II. Über die Bedeutung der Blutplättchen".

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper in Räumen von beliebiger Dimension", von Herrn Prof. Dr. A. Puchta an der deutschen Universität in Prag.
2. „Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung". II. Abhandlung von Herrn Dr. L. Grossmann in Wien.

Ferner legt der Secretär zwei von Herrn Albert Cobenzl in Wiesbaden behufs Wahrung der Priorität eingesendete versiegelte Schreiben vor. Dieselben führen die Aufschriften:

1. „Über stickstoffhältige Derivate der Kohlehydrate“ (Nr. III).
2. „Über die Chinaalcaloide“ (Vorläufige Mittheilung).

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Berthold Schudel: „Über den Propylidendipropyläther.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia nacional de ciencias en Córdoba: Boletin. Tomo VI. Entrega 1ª. Buenos Aires, 1884; 8⁰.

Académie de Médecine: Bulletin. 48ᵉ année, 2ᵉ série, tome XIII. Nos. 19—22. Paris, 1884; 8⁰

Academy of Natural Sciences of Philadelphia: Proceedings. Part III. November and December, 1883. Philadelphia, 1884; 8⁰.

Akademie der Wissenschaften, königl. Bayerische: Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe. XIV. Band. III. Abtheilung. München, 1883; 4⁰.

— — — Von der Hesse'schen Determinante der Hesse'schen Fläche dritter Ordnung von Gustav Bauer. München, 1883; 4⁰.

— Neue Beobachtungen über die tägliche Periode barometrisch bestimmter Höhen, von Carl Max von Bauernfeind, München, 1883; 4⁰. — Das baierische Präcisions-Nivellement, VI. Mittheilung von Carl Max v. Bauernfeind. München, 1883; 4⁰. — Über die reducirte Länge eines geodätischen Bogens und die Bildung jener Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren, von A. v. Braunmühl. München, 1883; 4⁰. — Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels auf der Sternwarte zu Bogenhausen, von Carl v. Orff. München, 1883; 4⁰. — Über die Methoden in der botanischen Systematik, insbesondere die anatomische Methode. Festrede, von Ludwig Radlhofer, München, 1883; 4⁰.

— — Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe. 1883. Heft III. München, 1884; 8⁰.

Alterthums-Verein zu Wien: Berichte und Mittheilungen. Band XXII. Wien, 1883; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XXII. Jahrgang. Nr. 14—16. Wien, 1884; 8°.

Archivio per le scienze mediche. Vol. VII, fascicolo 4°. Torino, 1884; 8°.

Central-Commission. k. k. statistische: Statistisches Jahrbuch für das Jahr 1881, VIII. Heft. Wien, 1884; 8°.

— — Österreichische Statistik, V. Band, 1. Heft. Bewegung der Bevölkerung der im Reichsrathe vertretenen Königreiche und Länder in den Jahren 1881 und 1882. Wien, 1884; fol.

— — k. k. zur Erforschung und Erhaltung der Kunst- und historischen Denkmale: Mittheilungen. X. Band, 1. Heft. Wien, 1884; 4°.

Central-Station königl. meteorologische: Beobachtungen der meteorologischen Station im Königreiche Baiern. Jahrgang V. Heft, 4. München, 1883; 4°.

— — Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Baiern während des Februar, März und April 1884; folio.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VIII. Nr. 38 bis 41. Cöthen, 1884; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVIII. Nos. 19—21. Paris, 1884; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. V. Jahrgang, 1884. Heft V. Mai. Berlin, 1884; 4°.

Gesellschaft, Astronomische: Vierteljahresschrift. XIX. Jahrgang, 1. Heft. Leipzig, 1884; 8°.

— deutsche, chemische: Berichte. XVII. Jahrgang, Nr. 8. Berlin, 1884; 8°.

— naturforschende zu Leipzig: Sitzungsberichte, X. Jahrgang 1883. Leipzig, 1884; 8°.

— physikalisch-chemische: Journal. Band XVI. Nr. 3—5. St. Petersburg, 1884; 8°.

Institute, the Anthropological of Great Britain and Ireland: The Journal. Vol. XIII. Nr. 4. London, 1884; 8°.

Johns Hopkins University: American Journal of Mathematics. Vol. VI. Nr. 4. Baltimore, 1884; 4°.

Johns Hopkins University: American Chemical Journal. April, 1884. Baltimore; 8°.

Journal für praktische Chemie. N. F. Band XXIX. Nr. 6, 7 und 8. Leipzig, 1884; 8°.

Kiew: Universitäts-Nachrichten. Band XXIV. Nr. 1—4. Kiew, 1884; 8°.

Landes-Museum naturhistorisches von Kärnten: Jahrbuch. XVI. Heft. Klagenfurt, 1884; 8°.

— — Bericht über die Wirksamkeit 1883. Klagenfurt 1884; 8°.

— — Diagramme der magnetischen und meteorologischen Beobachtungen zu Klagenfurt von Ferd. Seeland. December 1882 bis Novembeer 1883. Klagenfurt; folio.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann. XXX. Band, 1884. V. und Ergänzungsheft Nr. 74. Gotha, 1884; 4°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 28e année, 3e série, tome XIV, 510e livraison. Juin 1884. Paris 4°.

Nature. Vol. XXX. Nos. 760—762. London, 1884; 8°.

Reichsanstalt k. k. meteorologische: Jahrbuch. Jahrgang 1884. XXXIV. Band. Nr. 2. April bis Juni. Wien, 1884: 8°.

Repertorium der Physik. XX. Band, 3. und 4. Heft. München und Leipzig, 1884; 8°.

Società Adriatica di Scienze naturali in Trieste: Bollettino. Vol. VIII. Trieste, 1883—84; 8°.

Sociéte Impériale des Amis d'histoire naturelle d'Anthropologie et d'Ethnographie. Moscou, 1883. 4°.

— Impériale des Naturalistes de Moscou: Bulletin: Année 1883. Nr. 3. Moscou, 1884; 8°.

— mathématique de France: Bulletin. Tome XII. Nr. 1. Paris, 1884; 8°.

Society the American philosophical: Proceedings. Vol. XX. Nr. 113. Philadelphia, 1883; 8°.

— — Transactions. Vol. XVI, New series. Part I. Phyladelphia, 1883; 4°.

Verein für Landeskunde von Niederösterreich: Blätter. N. F. XVII. Jahrgang, Nr. 1—12. Wien, 1883; 4°.

— — Topographie von Niederösterreich. II. Theil, 12. und 13. Heft. Wien, 1884; 4°.

Würzburg, Universität: Akademische Schriften pro 1882 bis 1883. 101 Stücke; 4° und 8°.

Über den Propylidendipropyläther.

Von **Berthold Schudel.**

(Aus dem k. k. Universitätslaboratorium des Prof. Lieben.)

Das erste Acetal wurde von Döbereiner[1] entdeckt und als „schwerer Sauerstoffäther" beschrieben. Jedoch erst Stas[2] erhielt eine reine Verbindung und ermittelte ihre Zusammensetzung. Die Constitution des Körpers als Äthylidendiäthyläther stellen hauptsächlich die Untersuchungen von Wurtz und Frapolli[3], ferner diejenigen von Beilstein[4] und von Geuther[5] fest. Gegenwärtig ist eine Anzahl ähnlich constituirter Verbindungen bekannt, welche unter dem Gattungsnamen „Acetale" zusammengefasst werden.

Zu der folgenden Untersuchung, die ein neues Acetal kennen lehrt, gab die Beobachtung eines acetalartigen, bei 160°—170° siedenden Productes Veranlassung, welches bei der Verarbeitung mehrerer Kilogramm normalen Propylalkohols zu Propionaldehyd nebenher erhalten wurde, und das, gleich den Acetalen, der Behandlung mit kochender Kalilauge widerstand. Ich zweifle nicht, dass dieser Körper Propylidendipropyläther war. Seine Darstellung auf synthetischem Wege ist in Folgendem beschrieben.

Darstellung und Eigenschaften des Propylidendipropyläthers.

Zur Bereitung des Propylidendipropyläthers versuchte ich vorerst die Einwirkung von gasförmigem Phosphorwasserstoff auf ein Gemenge von Propionaldehyd und Propylalkohol. Nach dem-

[1] Gmelin 4. 611, 805.

[2] Ann. 64. 322.

[3] Ann. 108. 223.

[4] Ann. 112. 239.

[5] Ann. 126, 62.

selben Verfahren hatten schon Engel und Girard[1] Acetale erhalten.

Normaler Propylalkohol wurde nach der Vorschrift von Lieben und Zeisel[2] durch Oxydation mit Chromsäuregemisch in Propionaldehyd verwandelt. In ein Volumen dieses Aldehyd, gemengt mit zwei Volumen gut getrocknetem normalem Propylalkohol leitete ich gasförmigen Phosphorwasserstoff. Letzterer durch Eintragen von gelbem Phosphor in alkoholische Kalilösung dargestellt, strich zuerst durch ein mit Wasser gefülltes, von Eis umgebenes Gefäss in einen leeren, ebenfalls gut gekühlten Ballon und gelangte nach vollständigem Trocknen über Chlorcalcium in das Aldehydgemisch. Der mit Wasser gefüllte, gekühlte Kolben, wie die darauffolgende leere Vorlage dienten zur Reinigung des gasförmigen Phosphorwasserstoffes von flüssigem. Die ganze Operation dauerte ungefähr 30 Stunden, während welcher Zeit sich das Gemenge erwärmte und eine syrupdicke Consistenz annahm. Nachdem das Einleiten unterbrochen, erhitzte ich das Endproduct am Rückflusskühler auf dem Wasserbade, während ein langsamer Kohlensäurestrom den sich entwickelnden Phosphorwasserstoff in die Flamme eines Bunsen'schen Brenners abführte. Später wurde das Gemisch der fractionirten Destillation unterworfen.

Die niedrigen Fractionen enthielten Aldehyd und Alkohol. Zwischen 100—110° trat plötzlich eine Trübung der früher klaren Flüssigkeit auf und es schied sich allmälig ein gelber pulveriger Niederschlag aus, welcher möglicherweise aus festem Phosphorwasserstoff bestand. Ausserdem fand eine lebhafte Abspaltung von gasförmigem Phosphorwasserstoff statt. Diese Erscheinungen berechtigen wohl zu dem Schlusse, dass organische Phosphorverbindungen entstanden sind, welche sich jedoch leicht wieder zersetzen. Der eigentliche Zweck des ganzen Versuches, den Propylidendipropyläther zu erhalten, wurde auf diese Weise jedenfalls nur ganz nebensächlich erreicht, indem diejenigen Fractionen, welche jenen Körper hätten enthalten können, sehr minimal entstanden und daher gar nicht weiter untersucht werden konnten.

---

[1] Comptes rend. 90. I. 692 und 91. II. 628.

[2] Monatshefte IV. 14.

Eine gute Ausbeute an Propylidendipropyläther lieferte folgendes Verfahren. 150 Grm. Propionaldehyd wurden mit 300 Grm. normalem Propylalkohol und 75 Grm. Essigsäure unter Kühlung gemischt in Röhren eingeschmolzen und während ungefähr 20 Stunden im Luftbade auf 100° erhitzt. Den Röhreninhalt, welcher nach dieser Behandlung aus Propionaldehyd, Propylalkohol, essigsaurem Propyl, Essigsäure und Propylidendipropyläther besteht, fractionirte ich ab, bis das Thermometer 110° zeigte. Dadurch wird nicht bloss der unverändert gebliebene Propionaldehyd zurückgewonnen, sondern auch der überschüssige Propylalkohol und grossentheils das essigsaure Propyl vom Hauptproduct getrennt. Um den Destillationsrückstand vollständig zu reinigen kochte ich denselben während einiger Stunden am Rückflusskühler im Silberkolben mit Kalilauge, wusch ihn mit Wasser, trocknete ihn mit Chlorcalcium und unterwarf ihn der fractionirten Destillation.

Es ist zweckmässig, gleich anfangs vom Röhreninhalt den Propionaldehyd in oben erwähnter Weise sorgfältig abzudestilliren, weil, selbst wenn Spuren desselben im Destillationsrückstande bleiben, bei nachheriger Behandlung des Letzteren mit Kalilauge ein Condensationsproduct von Propionaldehyd entsteht. Dieses dürfte nach seiner Siedetemperatur (130—140°) und seinem Geruch beurtheilt, das von Lieben und Zeisel dargestellte Methylacroleïn sein; es haftet hartnäckig an allen über 100° siedenden Fractionen und ist selbst durch wiederholtes Ausschütteln mit Natriumbisulfit schwer zu entfernen.

Das mit Kalilauge gereinigte Product ging nach dem Trocknen grossentheils zwischen 163—164° über.

Was die Ausbeute anbelangt, so habe ich von 225 Grm. Propionaldehyd, welche in zwei Operationen verarbeitet wurden, 160 Grm. Propionaldehyd zurückgewonnen, daher factisch aus 65 Grm. Propionaldehyd erhalten:

Fract. 162—163°	2 Grm.	Propylidendipropyläther.
Fract. 163—164°	65 „	
Fract. 164—168°	3 „	

Das Ergebniss einer Siedepunktbestimmung von Fract. 163 bis 164° war:

Corrigirter Siedepunkt 165·6° (die Correction für den hervorragenden Faden betrug 2·6°) bei auf 0° reducirtem Barometerstande von 747 Mm.

Beim Analysiren des reinen Productes im offenen Rohr mit Kupferoxyd bot sich die Schwierigkeit, dass schwer verbrennliche Kohle sich ausschied, wodurch stets ein Verlust von einigen Procenten Kohlenstoff entstand. Erst die mittelst Bleichromat im Bajonnetrohr ausgeführten Elementaranalysen lieferten befriedigende Resultate, welche zur Formel $C_9H_{20}O_2$ des Propylidendipropyläthers führen:

I. 0·3118 Grm. Substanz gaben 0·7700 Grm. Kohlensäure und 0·3620 Grm. Wasser.

II. 0·2423 Grm. Substanz gaben 0·5988 Grm. Kohlensäure und 0·2808 Grm. Wasser.

Daraus berechnen sich auf 100 Theile:

	I	II	Berechnet für $C_9H_{20}O_2$
C....	67·34	67·39	67·50
H....	12·89	12·87	12·50

Die Dampfdichtebestimmung führte ich nach dem Hofmann'schen Verfahren, modificirt von Brühl, unter Anwendung von Anilindampf aus:

	I	II
Gewicht der Substanz....	0·0568 Grm.	0·0217 Grm.
Volum des Dampfes	185·19 CC.	176·93 CC.
Druck	53·043 Mm.	22·262 Mm.
Temperatur...........	183·0°	183·0°

Gefundene Dampfdichte auf Luft bezogen:

I	II
5·664	5·55.

Gefundene Dampfdichte auf Wasserstoff bezogen:

I	II
81·78	80·14.

Für $C_9H_{20}O_2$ berechnete Dampfdichte auf Luft bezogen: 5·54.
Auf Wasserstoff bezogen: 80·00.

Specifisches Gewicht des Propylidendipropyläthers: 0·8495 bei 0° (Wasser von derselben Temperatur als 1 gesetzt.)

Um festzustellen, dass der neue Körper seiner Constitution nach wirklich ein Propylidendipropyläther ist, suchte ich denselben mit Essigsäureanhydrid zu zerlegen nach der Gleichung:

$$\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ CH \end{matrix}\!\!\left\langle\begin{matrix} OC_3H_7 \\ OC_3H_7 \end{matrix}\right. + 2\,\begin{matrix} CH_3CO \\ CH_3CO \end{matrix}\!\!\rangle O = 2CH_3COOC_3H_7 + \begin{matrix} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH \end{matrix}\!\!\left\langle\begin{matrix} OCOCH_3 \\ OCOCH_3 \end{matrix}\right.$$

Zu dem Behufe wurden 5 Grm. des reinen trockenen Öles mit 9 Grm. Essigsäureanhydrid in ein Rohr eingeschlossen, während 24 Stunden im Luftbad auf 180° erhitzt. Der Inhalt färbte sich dabei dunkel. Nach dem Öffnen des Rohres schüttelte ich das Product wiederholt mit Wasser. Die Waschwässer ergaben nach dem Entsäuern mit kohlensaurem Kalk, beim Destilliren etwas Öl, welches deutlich ammoniakalisches Silbernitrat reducirte. Von der mit Soda und Wasser gereinigten Hauptmenge erhielt ich nach dem Trocknen mit Chlorcalcium die Fractionen: 100—103°; 103—107°. Von 107° stieg der Quecksilberfaden im Thermometer rasch auf 170° und es gingen noch zwei kleine Fractionen: 170—200°, 200—240° über. Als Rückstand blieb ein schmieriger Rest. Die beiden höheren Destillationsproducte, welche sehr wahrscheinlich die Verbindung

$$CH_3—CH_2—CH\left\langle\begin{matrix} OCOCH_3 \\ OCOCH_3 \end{matrix}\right.$$

enthielten, konnten ihrer geringen Menge wegen nicht gereinigt werden. Desshalb verseifte ich sie mit Kalilauge und begnügte mich mit dem Nachweis von Essigsäure. Ein Silbersalz, durch Digeriren der flüchtigen organischen Säure mit Silberoxyd, auf dem Wasserbade dargestellt, gab folgendes Analysenresultat:

Verwendete Salzmenge.... = 0·0960 Grm.
Gefunden an Silber....... = 0·0619 „

Auf 100 Theile des Silbersalzes kommen 64·48 Ag.

Auf 100 Theile CH_3COOAg berechnet 64·66 Ag.

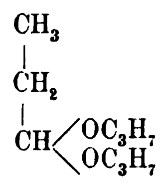
Über die Zusammensetzung der früher angeführten Fraction 100—103° gibt eine Elementaranalyse Aufschluss:

0·2270 Grm. gaben 0·4878 Grm. Kohlensäure und 0·1998 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

		Berechnet für essigs. Propyl
C	58·60	58·82
H	9·78	9·80

Propylidendipropyläther wird somit durch Essigsäureanhydrid in essigsaures Propyl gespalten, anderseits entsteht eine hochsiedende Verbindung, sehr wahrscheinlich Propylidendiacetat, welche durch Behandlung mit Kalilauge weiter in Essigsäure und Condensationsproducte des Propionaldehyd zerlegt wird. Diese Reactionen berechtigen für den Körper, der aus dem Zusammenwirken von normalem Propylalkohol, Propionaldehyd und Essigsäure hervorgeht, die Constitution anzunehmen:



Ich habe noch eine Reihe von Versuchen über die Einwirkung von Chlor auf das neue Acetal unternommen. Einige von den untersuchten Fractionen der Chlorderivate lieferten Analysenresultate, welche auf drei- und zehnfach gechlorte Körper schliessen lassen. Es ist mir jedoch nicht gelungen, reine Verbindungen zu isoliren. Ebenso wenig konnte durch Spaltung oder Reduction festgestellt werden, welcher Art jene Chlorproducte sind.

Schliesslich ist es mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, dem Herrn Prof. A. Lieben für die freundliche Unterstützung, welche er mir bei Ausführung vorliegender Arbeit zu Theil werden liess, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

XVI. SITZUNG VOM 19. JUNI 1884.

Das Curatorium der Schwestern Fröhlich-Stiftung in Wien übermittelt die von demselben veröffentlichte Kundmachung betreffs der Verleihung von Stipendien und Pensionen aus dieser Stiftung an Künstler oder Gelehrte.

Das c. M. Prof. Dr. R. Maly in Graz übersendet eine in seinem Laboratorium von Med. Dr. R. Herth ausgeführte grössere Arbeit, betitelt: „Untersuchungen über die Hemialbumose oder das Propepton“.

Herr Dr. Rudolf Scharizer, Assistent am mineralogischen Museum der Universität Wien, übersendet eine Abhandlung: „Über Mineralien und Gesteine von Jan Mayen“.

Der Secretär legt eine eingesendete Abhandlung: „Über die Extremitäten einer jungen Hatteria,“ von Herrn Dr. Franz Bayer, Gymnasiallehrer in Tábor, vor.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. Konrad Natterer: „Über die Anlagerung von Chlorwasserstoff an Dichlorcrotonaldehyd.“

Herr Dr. Leopold Tausch in Wien überreicht eine Arbeit: „Über einige Conchylien aus dem Tanganyika-See und deren fossile Verwandte.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie, Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique: Bulletin. 53e année, 3e série, tome 7. Nr. IV. Bruxelles, 1884; 8°.

— impériale des sciences de St. Pétersbourg: Bulletin. Tome XXIX. Nr. 2. St. Pétersbourg, 1883; 4°.

— — Mémoires. Tome XXXI, Nrs. 5—9. St. Pétersbourg, 1883; 4°.

Accademia, R. delle scienze di Torino: Atti. Vol. XIX, Disp. 2ª e 3ª. Torino, 8°.

Akademie der Wissenschaften, kaiserliche: Repertorium für Meteorologie. Band VIII. St. Petersburg, 1883; gr. 4°.

— königl. der Wissenschaften: Öfversigt af Förhandlingar. 40. de Årg. Nrs. 8, 9 & 10. Stockholm, 1884; 8°.

— königl. Vitterhets Historie och Antiquitets: Månadsblad. 11. Årgången 1882. Stockholm, 1883; 8°. — 12. Årgången 1883. Stockholm, 1883—84; 8°.

Archiv der Mathematik und Physik. Inhaltsverzeichniss zu Theil LV—LXX. Leipzig, 1884; 8°.

Association, the American for the Advancement of science: Proceedings. 31st meeting held at Montreal, Canada. August, 1882. Salem, 1883; 8°.

Ateneo veneto: Revista mensile di scienze, lettere ed arti. Ser. VII. Vol. II, Nrs. 3—6. Venezia, 1883; 8°. Serie VIII. Vol. I. Nrs. 1—2. Venezia, 1884; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3e période, tome XI. Nro. 5. — Genéve, Lausanne, Paris, 1884; 8°.

Central-Observatorium, physikalisches; Annalen. Jahrgang 1882. Theil. I. St. Petersburg, 1883; folio.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VIII. Nr. 42—45. Cöthen, 1884; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVIII. No. 22. Paris, 1884; 4°.

Geological Survey of India: Records. Vol. XVII, part 2. 1884. Calcutta; 8°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVII. Jahrgang. Nr. 9. Berlin, 1884; 8°.

— österreichische zur Förderung der chemischen Industrie; Berichte. VI. Jahrgang Nr. 1. Prag, 1884; 4°.

Halle — Wittenberg, Universität: Akademische Schriften pro 1883. — 131 Stücke 4° u. 8°.

Hydrographisches Amt, Marine-Bibliothek: Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Vol. XII. Nr. 3 u. 4. Pola, 1884; 8°.

Istituto Veneto, reale di scienze, lettere ed arti: Atti. Tomo I°, serie 6ª Dispensa 4—10. Venezia, 1882—83; 8°. — Tomo II°, serie 6ª Dispensa 1ª & 2ª. Venezia, 1883—84; 8°.

Kriegsmarine, k. k.: Kundmachungen für Seefahrer und Hydrographische Nachrichten. Jahrgang 1884. Heft 2 & 3. Pola, 1884; 8°.

Mittheilungen aus Justus Perthes geographischer Anstalt von Dr. A. Petermann. XXX. Band, 1884. VI. Gotha; 4°.

Nature. Vol. XXX. Nr. 763. London, 1884; 8°.

Naturforscher-Verein zu Riga: Correspondenzblatt. XXVI. Riga, 1883; 8°.

Observatoire impérial de Rio de Janeiro: Bullettin astronomique et méteorologique. Nr. 11. Rio de Janeiro, 1883; folio.

Osservatorio del real collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bollettino mensuale. Ser. II., Vol. III. Nos. 11 & 12. Torino, 1883; 4°. — Vol. IV. Nos. I & II, Torino, 1884; 4°.

Reichsanstalt k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 9. 1884. Wien, 8°.

Reichsforstverein, österreichischer: Österreichische Vierteljahresschrift für Forstwesen. N. F. II. Band. II. Quartal. Jahrgang 1884. Wien, 1884; 8°.

Repertorium der Physik. XX. Band, 5, Heft. München und Leipzig, 1884; 8°.

Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa: Atti. Vol. VI. Fasc. 1°. Pisa, 1884; 8°.

Society of Chemical Industry: The Journal. Vol. III. Nr. 5. Manchester, 1884; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXIV. Jahrgang. Nr. 19 bis 24. Wien, 1884; 4°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. V. Jahrgang, Nr. 6—8. Wien, 1884; 8°. Ausserordentliche Beilage Nr IV. Wien, 1884; 8°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. IV. Jahrgang 1884. 6. Heft. Juni. Berlin, 1884; 4°.

Über die Anlagerung von Chlorwasserstoff an $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd.

Von Dr. **Konrad Natterer.**

(Aus dem k. k. Universitätslaboratorium des Prof. A. Lieben.)

In einer in den Monatsheften für 1883 (p. 539—553) abgedruckten Abhandlung habe ich gezeigt, dass Monochloraldehyd unter dem Einfluss einer Temperatur von circa 100° und einer Spur Schwefelsäure unter Wasserabspaltung in einen hochsiedenden Körper übergeht, für den die Constitutionsformel

$$\begin{array}{c} CH_2Cl \\ \dot{C}H \\ \ddot{C}Cl \\ \dot{C}HO \end{array}$$

bewiesen wurde, wonach er als $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd zu bezeichnen ist.

Was das Chlorwasserstoff-Additionsproduct dieses ungesättigten Aldehydes anbelangt, so wurde schon damals seine durch quantitative Versuche erkannte Bildungsweise besprochen, nach welcher dasselbe ein Isomeres des Butylchloral ist, an das es einerseits dem Geruch nach täuschend erinnert, von dem es sich aber anderseits schon dadurch unterscheidet, dass es nicht im Stande ist, sich mit Wasser zu einem Hydrat zu verbinden.

Auch die durch Oxydation mittelst rauchender Salpetersäure aus dem ClH-Additionsproduct erhältliche Trichlorbuttersäure $C_4H_5O_2Cl_3$ wurde schon beschrieben.

Wie damals angedeutet, kann sich Chlorwasserstoff in zweierlei Weise an $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd anlagern, wie sich dies aus folgenden, neben einander gestellten Formeln[1] ergibt:

I		II
CH_2Cl		CH_2Cl
$\dot{C}HCl$	oder	$\dot{C}H\mathbf{H}$
$\dot{C}Cl\mathbf{H}$		$\dot{C}Cl\mathbf{Cl}$
$\dot{C}HO$		$\dot{C}HO$

in welchen die Chlor- und Wasserstoffatome des eintretenden Chlorwasserstoff fett gedruckt sind.

Würde dem ClH-Additionsproduct die Formel I zukommen, so wäre es dem ersten Gliede der Reihe der vieratomigen Alkohole, dem in einigen Flechten- und Algenarten vorkommenden Erythrit sehr nahe verwandt, indem es als das Aldehyd des Trichlorhydrins desselben aufzufassen wäre. Eine eventuelle Überführung des ClH-Additionsproductes in Erythrit, wäre also entscheidend für die Stellung der Chloratome, und wäre von Wichtigkeit wegen der synthetischen Darstellung einer in gewissen Pflanzen sich bildenden Zuckerart. Wie sich sogleich ergeben wird, ist diese Umwandlung nicht gelungen.

Behandlung des ClH-Additionsproductes mit kochendem Wasser und Ba CO_3.

In einen Liter kochenden Wassers wurden in halbstündigen Zwischenräumen kleine Mengen von Ba CO_3 und vom ClH-Additionsproduct gebracht, und durch häufiges Umschütteln in gleichmässiger Vertheilung erhalten. Hierbei reagirte das ClH-Additions-

[1] Zum Vergleiche will ich die durch die Arbeiten von Lieben und Zeisel (Monatshefte f. 1883 p. 531) und von Friedrich (Ann. f. Chemie 219, 368) bewiesene Constitutionsformel des Butylchloral hersetzen:

$$\begin{array}{c} CH_3 \\ \dot{C}HCl \\ \dot{C}ClCl \\ \dot{C}HO \end{array}$$

product unter schwacher Kohlensäureentwickelung und Umwandlung in lösliche Producte sehr regelmässig mit dem Wasser und Ba CO_3. Im Ganzen wurden circa 16 Grm. ClH-Additionsproduct eingetragen und wurde circa 30 Stunden gekocht. Dann wurde vom ungelösten Ba CO_3 abfiltrirt, das rothgefärbte nahezu geruchlose Filtrat zum Theil destillirt, wobei ins Destillat nur Wasser ging. Der Rückstand der Destillation wurde wiederholt mit dem gleichen Volumen Äther ausgeschüttelt. Der Äther hinterliess beim Abdestilliren circa 1 Grm. einer äusserst dicken, rothen, in Wasser und Äther gleich schwer löslichen, chlorhältigen Flüssigkeit, die kein Brom addirte und bei mehrstündigem Erhitzen mit Wasser und Ba CO_3 wieder Chlorbaryum gab, also wohl ein Zwischenproduct der Einwirkung von H_2O und Ba CO_3 auf das ClH-Additionsproduct war.

Nach dem Ausschütteln mit Äther wurde die wässerige Flüssigkeit durch vorsichtigen Zusatz einer Lösung von schwefelsaurem Silber fast ganz vom Baryumchlorid befreit, dann auf ein kleines Volumen abdestillirt, und der Destillationsrückstand im Vacuum über Schwefelsäure eindunsten gelassen, wo der anfangs sich zeigende Syrup nach und nach zu einer amorphen Masse eintrocknete, die zerrieben, ein braunes Pulver darstellte.

Dieses, etwas Chlorbaryum und ein Wenig eines organischen chlorhältigen Körpers enthaltende Pulver gab bei der Analyse Zahlen, die sich denen nähern, die einem Körper zukommen müssten, der aus dem Chlorwasserstoff-Additionsproduct nach der Formel II entstanden und nach der Constitutionsformel:

$$\begin{array}{l} CH_2 \cdot OH \\ \dot{C}H_2 \\ \dot{C}O \\ \dot{C}HO \end{array}$$

zusammengesetzt ist; sehr gross dagegen ist die Differenz zwischen den gefundenen Zahlen und denen des Trioxybutyraldehyds, der nach der Formel I zu erwarten ist. Nach der Zusammensetzung war also dieser Körper ein Kohlenhydrat; auch sonst zeigte er manche Übereinstimmung mit natürlich vorkommenden Kohlenhydraten.

Die analysirte Substanz löste sich sehr leicht in Wasser. Die wässrige Lösung hatte einen dem Süssholzextract ähnlichen Geruch und schäumte sehr stark beim Umschütteln; sie gab mit Bleiessig eine voluminöse Fällung, löste bei gewöhnlicher Temperatur viel Kalk und lieferte dann beim Erhitzen einen reichlichen Niederschlag, der sich durch Kohlensäure in Ca CO_3 und einen organischen Körper zerlegen liess, färbte sich beim Kochen mit Kalilauge prachtvoll roth, reducirte sehr stark Fehling'sche Lösung und kochende ammoniakalische Silberlösung; bei Zusatz von Fuchsin-Schwefligsäure trat keine Rothfärbung auf. Mit Hefe fand keine Gährung statt. Schon bei kurzem Verweilen an der Luft wurde das Pulver klebrig, zerfloss jedoch auch bei mehrtägigem Liegen nicht vollständig. In Äther, Chloroform und kaltem absolutem Alkohol war es unlöslich, löslich in verdünntem Alkohol. Beim Erhitzen am Platinblech schmolz das Pulver, es entwickelte sich Wasserdampf und Caramelgeruch trat auf; bei stärkerem Erhitzen fand Aufblähen und Verkohlen statt. Als etwas dieser Substanz in einem Röhrchen im Vacuum erhitzt wurde, entstand unter theilweiser Verkohlung (und Wasserbildung) ein braunes Destillat von Caramelgeruch; als dieses Destillat von Neuem im Vacuum erhitzt wurde, wiederholte sich der Vorgang u. s. w. bis Alles in eine kohlige Masse verwandelt war.

Eine grössere Menge dieses Körpers wurde mit Natriumamalgam reducirt. (Würde dem ClH-Additionsproduct die Formel I zukommen, so müsste hierbei Erythrit entstehen.) Die Operation musste in alkalischer Lösung durchgeführt werden, da die saure Lösung mit Natriumamalgam lebhaft Wasserstoff entwickelte. Die Reduction verlief durchaus nicht glatt. Beiläufig die Hälfte der angewandten Substanz wurde in Säure verwandelt (wohl durch die gleichzeitig oxydirend und reducirend wirkende Natronlauge). Das neutrale Product bildete einen, im Wasser leicht löslichen Syrup, der Fehling'sche Lösung stark reducirte. Durch Fällen mit Bleiessig konnte der reducirende Körper entfernt werden. Der bleibende Syrup war auch noch ein Gemenge, was man daran erkannte, dass sich nur ein Theil in kaltem Alkohol löste und dass blos das in Alkohol Lösliche (im Vacuum) unzersetzt destillirte.

Schon bei der Behandlung des ClH-Additionsproductes mit heissem Wasser und Ba CO_3 wurde bemerkt, dass ein Theil des Chlors nur schwierig reagirt. Diesbezügliches sagt auch folgender Versuch aus: 1 Grm. ClH-Additionsproduct wurde mit 3 Grm. trockenem Bleiacetat (statt 2·7 Grm. für 3 Mol. $Pb(C_2H_3O_2)_2$ auf 2 Mol. $C_4H_5Cl_3O$) und circa 6 Grm. Eisessig im Rohr 5 Stunden auf 110° erhitzt; hiernach war der grösste Theil des Bleiacetates noch unverändert und hatten blos 0·25 Grm. Chlor reagirt, während im angewandten ClH-Additionsproduct 0·607 Grm. Chlor zugegen waren.

Es hatte also in diesem Falle nur wenig mehr als der dritte Theil des gesammten Chlors reagirt.

Von Interesse war, zu erfahren, ob das Chlorwasserstoffadditionsproduct des $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyds analog dem, ihm so nahe stehenden Butylchloral durch Alkalien und Alkalicarbonate unter Abspaltung der CO-Gruppe und von ClH in einen ungesättigten Chlorkohlenwasserstoff verwandelt wird.

Dies ist nicht der Fall. Wird nämlich das ClH-Additionsproduct mit Wasser geschüttelt und Kalilauge (oder Sodalösung) zugesetzt, so tritt weder eine Trübung der wässerigen Schicht ein, noch verändert sich der Geruch; hingegen wird bei längerem Schütteln viel Alkali neutralisirt, das ganze Öl geht in Lösung, der Geruch verschwindet vollständig und die Flüssigkeit nimmt eine gelbe, beim Erhitzen in Roth übergehende Färbung an.

Verhalten der Trichlorbuttersäure gegen Zinkstaub und Wasser und gegen weingeistiges Jodkalium.

Ich habe noch auf einem anderen, von dem bisher Gesagten ganz unabhängigen Wege die Frage nach der Art der Anlagerung des Chlorwasserstoffs an $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd entschieden, nämlich durch Untersuchung des chemischen Verhaltens der Säure des ClH-Additionsproductes, der schon vor einem Jahre von mir beschriebenen Trichlorbuttersäure. Derselben können nach der Bildungsweise ebenfalls zwei Formeln zukommen, nämlich

I		II
CH_2Cl		CH_2Cl
$\dot{C}HCl$	oder	$\dot{C}H_2$
$\dot{C}HCl$		$\dot{C}Cl_2$
$\dot{C}O.OH$		$\dot{C}O.OH.$

Käme dieser Trichlorbuttersäure die Formel I zu, nach welcher die drei Chloratome an drei, aneinander gereihte Kohlenstoffatome gebunden sind, so müsste aus ihr sowohl beim Behandeln mit Zinkstaub und Wasser, als auch beim Erhitzen mit weingeistigem Jodkalium unter Abspaltung zweier benachbarter Chloratome eine einfach gechlorte, ungesättigte Säure (Monochlorcrotonsäure) entstehen. — Bei der Formel II ist gar keine Reaction mit den erwähnten Reagentien zu erwarten.

Circa 2 Grm. Trichlorbuttersäure wurden mit circa 10 Grm. Wasser und mit überschüssigem Zinkstaub geschüttelt, wobei unter gelinder Erwärmung die Säure (als Zinksalz) in Lösung ging; nach einer halben Stunde wurde die klare Flüssigkeit vom Zinkstaub abgegossen, mit Salzsäure versetzt und mit Äther ausgeschüttelt. Die so erhaltene ätherische Lösung wurde getheilt. Die eine Hälfte wurde mit Brom versetzt: schon nach Zusatz weniger Tröpfchen Brom trat Bromfärbung ein. Die andere Hälfte wurde in einer Glocke über Kalk (und Paraffin) eindunsten gelassen, wobei ein dickes Öl zurückblieb, das beim Stehen über Schwefelsäure vollständig in schönen Krystallen erstarrte. Diese Krystalle hatten den Geruch der Trichlorbuttersäure, schmolzen wie diese bei 71—74°. Ihre ätherische Lösung entfärbte kein Brom. — Da, wie oben bemerkt, der eine Theil der ätherischen Ausschüttelung ein wenig Brom addirt hatte, muss die geringe Menge der ungesättigten Säure sich beim Eindunsten der ätherischen Lösung verflüchtigt haben. Als der Kalk, über dem dieses Eindunsten stattgefunden, mit Schwefelsäure versetzt wurde, trat thatsächlich ein scharfer saurer Geruch auf. Man könnte meinen, dass das Auftreten dieser kleinen Menge ungesättigter Säure bedingt ist durch eine geringe Verunreinigung der Trichlorbuttersäure. Dem ist aber nicht so, da

die obigen Krystalle, welche die Behandlung mit Zinkstaub und Wasser schon durchgemacht hatten, bei abermaliger Behandlung damit wieder ein bischen einer ungesättigten Säure liefeiten, und zwar ebensoviel wie das erstemal. Wahrscheinlich wirkt der Zinkstaub ein wenig ClH-entziehend.

Ebenso wie bei der Behandlung mit Zinkstaub und Wasser konnte auch beim Stehenlassen einer wässerigen oder alkoholischen Lösung der Trichlorbuttersäure mit Zinkspähnen und bei der Einwirkung von Zink und Salzsäure nur eine spurenweise Bildung von ungesättigter Säure beobachtet werden. Analoges ergab sich beim Erhitzen mit weingeistigem Jodkalium.

Circa 0·5 Grm. Trichlorbuttersäure wurden mit einer kalt gesättigten Lösung von Jodkalium in verdünntèm Alkohol 5 Stunden auf 100° erhitzt, wonach eine schwache Jodfärbung eingetreten war und sich einige Krystalle vom Chlorkalium abgeschieden hatten. Die Menge des entstandenen Jods war so gering, dass einige Tropfen einer verdünnten schwefligen Säure genügten, um Entfärbung zu bewirken. Dann wurde mit Wasser verdünnt, mit etwas Salzsäure versetzt und mit Äther ausgeschüttelt. Die ätherische Ausschüttelung entfärbte kein Brom.

Diese Unfähigkeit mit Zinkstaub und Wasser und mit weingeistigem Jodkalium zu reagiren, beweist für die Trichlorbuttersäure, dass in ihr keine zwei Chloratome an benachbarte Kohlenstoffatome gebunden sind. Die Constitutionsformel dieser Trichlorbuttersäure ist demnach:

$$\begin{array}{l} CH_2Cl \\ \dot{C}H_2 \\ \dot{C}Cl_2 \\ CO.OH. \end{array}$$

Nach der eben bewiesenen Formel enthält die Trichlorbuttersäure die CCl_2-Gruppe. Auf die zwei Chloratome dieser Gruppe könnte Hydroxylamin gerade so reagiren wie auf die

zwei ähnlich gestellten Chloratome des unsymmetrischen Dichloracetons,[1] nämlich nach dem Schema:

$$\dot{\underset{\cdot}{C}}Cl_2 + H_2N.OH = 2ClH + \dot{\underset{\cdot}{C}}:N.OH.$$

Ein Gramm Trichlorbuttersäure (1 Mol.) wurde mit einer wässerigen Lösung von Hydroxylamin (6 Mol., aus dem Chlorhydrat durch die äquivalente Menge Soda freigemacht) 24 Stunden bei Zimmertemperatur stehen gelassen. Hernach wurde Salzsäure zugegeben und mit Äther ausgeschüttelt. Der Äther hinterliess beim Abdestilliren ein dickes Öl, das in einigen Stunden krystallinisch erstarrte; die Krystalle wogen 0·7 Grm., schmolzen bei 71—75°, enthielten keinen Stickstoff; — sie bestanden aus unveränderter Trichlorbuttersäure. — Nun wurde Trichlorbuttersäure mit einem Überschuss von salzsaurem Hydroxylamin in alkoholischer Lösung 7 Stunden auf 110° erhitzt. Auch hierbei entstand kein stickstoffhältiges Derivat; die Reaction beschränkte sich darauf, dass die Trichlorbuttersäure zum grössten Theil in Ester verwandelt wurde.

Über die Verschiedenheit im Verhalten der Chloratome der Trichlorbuttersäure.

Ich will gleich bemerken, dass sich durch die folgenden Versuche herausgestellt hat, dass in der Trichlorbuttersäure gerade so wie in ihrem Aldehyd, dem ClH-Additionsproduct des $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyds, ein Chloratom sehr leicht reagirt, während die beiden anderen nur schwierig, und zwar gleichzeitig substituirt werden. Von massgebendem Einfluss auf die Reactionen der Trichlorbuttersäure ist auch, dass das leicht reagirende Chloratom sich zur Carboxylgruppe in der γ-Stellung befindet, also eine Lactonbildung herbeiführen kann.

---

[1] Nach V. Meyer und Janny (Ber. XV. 1164) reagiren die genannten Substanzen in folgender Weise:

$$\begin{array}{ll} CH_3 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad CH_2 \\ CO + 2H_2N.OH = H_2O + 2ClH + & \dot{C}:N.OH \\ \dot{C}HCl_2 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dot{C}H:N.OH. \end{array}$$

Zunächst soll das Verhalten der Trichlorbuttersäure beim Neutralisiren beschrieben werden.

0·8388 Grm. Trichlorbuttersäure (2 Mol.) wurden in Wasser gelöst und mit einer Lösung von 0·2321 Grm. $Na_2 CO_3$ (1 Mol.) versetzt. Es entwickelte sich hierbei Kohlensäure und nach Zusatz der ganzen Menge $Na_2 CO_3$ war die Flüssigkeit nur mehr kohlensauer. Beim Stehen nahm die Flüssigkeit wieder eine stark saure Reaction an und es trat ein scharfer Geruch auf. Nach fünf Tagen wurde auf ein kleines Volumen eindestillirt. — Das Destillat enthielt ein Wenig Trichlorbuttersäure und etwas einer mit Wasserdampf schwer flüchtigen, geruchlosen Säure. Der Rückstand enthielt Chlornatrium und war geruchlos. Er wurde mit viel Schwefelsäure versetzt und erwärmt, wobei kein Geruch auftrat. Als ein kleiner Theil davon mit Kalilauge alkalisch gemacht wurde, färbte sich die Flüssigkeit intensiv roth; bei Zusatz von wenig Kupferlösung trat dann keine Fällung ein. Die Hauptmenge (der sauren Lösung) wurde mit Äther ausgeschüttelt; der Äther hinterliess beim Abdestilliren 0·3 Grm. eines schwach riechenden Öles. Von diesem Öl löste sich in Sodalösung nur der geringste Theil (unter Aufbrausen und Gelbfärbung der Sodalösung), das meiste blieb am Boden des Röhrchens ungelöst. Dieses in Sodalösung Unlösliche addirte kein Brom und löste sich in heissem Barytwasser; als die so erhaltene Lösung nach Entfernung des überschüssigen Baryts der freiwilligen Verdunstung überlassen wurde, blieb ein gummiartiges Baryumsalz, das über Schwefelsäure amorph eintrocknete. Das in Sodalösung unlösliche schwere Öl war also wohl ein gechlortes Lacton.

Bei einem anderen Versuch wurde jede Erwärmung vermieden. 3·084 Grm. Trichlorbuttersäure wurden wieder mit der äquivalenten Menge Soda (0·854 Grm.) neutralisirt, die Lösung nach zwei Tagen mit viel Schwefelsäure versetzt, wobei durch Ölabscheidung starke Trübung eintrat, und mit Äther ausgeschüttelt. — Nach dem Ausschütteln mit Äther war die wässerige Lösung frei von organischen Substanzen; ein Zehntel davon mit $Ag NO_3$ gefällt, gab 0·1085 Grm. Ag Cl (enthaltend 0·0268 Grm. Cl). Die angewandten 3·084 Grm. Trichlorbuttersäure gaben demnach beim blossen Stehen der wässrigen Lösung ihres Natriumsalzes 0·268 Grm. Chlor ab, während einem Atom

Chlor der Trichlorbuttersäure fast genau das Doppelte (nämlich 0·572 Grm. Cl) entspricht. Die Reaction bleibt also auf halbem Wege stehen, was wohl darin seinen Grund hat, dass das Natriumsalz der Trichlorbuttersäure nicht glattweg in NaCl und ein Lacton zerfällt, wie sich dies ja schon aus dem Auftreten der stark sauren Reaction ergibt.

Die ätherische Lösung hinterliess beim Abdestilliren des Äthers 3·7 Grm. einer gelb gefärbten, noch Äther enthaltenden, schwach sauer riechenden Flüssigkeit. Diese Flüssigkeit wurde mit circa 60 Grm. Wasser geschüttelt, wobei circa ein Fünftel (am Boden der Flasche) ungelöst blieb; die Lösung reagirte stark sauer. Nun wurde unter häufigem Umschütteln eine Lösung von 0·854 Grm. Soda (ebensoviel wie das erstemal) zufliessen gelassen; nach Zusatz der Hälfte davon reagirte die Flüssigkeit nur mehr schwach sauer; doch erst als die ganze Sodalösung zugegeben war, wobei das ganze Öl in Lösung ging, reagirte die Flüssigkeit neutral. Mit Äther ausgeschüttelt, trat schwach alkalische Reaction der wässrigen Lösung ein. Der farblose Ätherauszug gab beim Abdestilliren des Äthers blos 0·3 Grm. eines chlorhältigen, fast geruchlosen Öles, das sich in Sodalösung und kaltem Barytwasser nicht löste (Lacton). Die mit Äther ausgeschüttelte Flüssigkeit wurde bei zwölfstündigem Stehen wieder schwach sauer. Es wurde abermals eine Lösung von 0·844 Grm. Soda zugegeben und 24 Stunden stehen gelassen. In den ersten Stunden entwickelte sich ziemlich viel CO_2 und die Flüssigkeit nahm eine rothe Farbe an. Dann wurde die stark alkalische Lösung mit viel Schwefelsäure versetzt, wobei die Rothfärbung verschwand, und mit Äther ausgeschüttelt.

Die wässrige Lösung enthielt 0·3345 Grm. Cl (mit $AgNO_3$ fällbar) und fast nichts Organisches. Der ätherische Auszug gab 2 Grm. eines gelben, fast geruchlosen, in Wasser sehr schwer löslichen Öles. Wurde dieses Öl mit concentrirter Sodalösung geschüttelt, so fand nur ganz schwaches Aufbrausen statt, beinahe alles blieb ungelöst; erst bei mehrtägigem Stehen fand Lösung statt; sofortige Lösung (unter CO_2-Entwicklung) trat ein, wenn man die Sodalösung mit Wasser stark verdünnte. Beim Schütteln mit Barytwasser wurde viel Baryt neutralisirt, das Öl löste sich vollständig, die alkalische Lösung war roth und gab nach dem

Ansäuern (mit HNO_3) mit $Ag\,NO_3$ reichlich $Ag\,Cl$. Beim Destilliren des Öles fand unter Wasser- und Salzsäurebildung. Zersetzung statt. — Nach diesem Versuch gibt die Trichlorbuttersäure beim Stehen mit Sodalösung nur wenig mehr als den dritten Theil des Chlors ab; von den dabei auftretenden Producten zeigte jedoch blos das, was durch Ausschüttelung einer alkalischen Lösung gewonnen war, deutlich die Lactonnatur, während das aus saurer, nicht aufgekochter Lösung ausgezogene Öl nach dem Verhalten gegen concentrirte Sodalösung zum Theil aus Lacton bestand, sich aber doch (vielleicht durch Vermittlung der eigentlichen Säure) vollständig in kaltem Barytwasser und (unter CO_2-Entwickelung) in verdünnter Sodalösung löste.

Beim Eindunsten einer wässrigen Lösung des Calciumsalzes der Trichlorbuttersäure bildet sich $Ca\,Cl_2$.

Bei dem oben beschriebenen Hydroxylaminversuch konnte der grösste Theil der angewandten Trichlorbuttersäure unverändert zurückgewonnen werden; das Fehlende dürfte eine weitgehende Veränderung erlitten haben, nach welcher es einer wässerigen Lösung durch Äther nicht entzogen werden konnte.

Nach mehrtägigem Stehenlassen einer Lösung des Zinksalzes (bei Gegenwart von Zinkstaub) und nachträglichem Versetzen mit $H_2\,SO_4$ konnte Lactonbildung nachgewiesen werden.

1·055 Grm. Trichlorbuttersäure (2 Mol.) wurden in Wasser gelöst und 0·760 Grm. Silbercarbonat (1 Mol.) dazu gebracht; unter CO_2-Entwicklung löste sich circa die Hälfte des $Ag_2\,CO_3$; schon nach wenigen Minuten trübte sich die Flüssigkeit durch Abscheidung von $AgCl$ und die Menge des $AgCl$ nahm immer mehr zu. Nach zweitägigem Stehen (unter häufigem Umschütteln) war noch immer beiläufig die Hälfte des angewandten Ag_2CO_3 unverändert; nun wurde $^1/_2$ Stunde in kochendem Wasser erwärmt, wodurch ein einheitlich aussehender Niederschlag entstand, dann filtrirt. Der Niederschlag gab an heisse Salpetersäure nur Spuren von Silber ab, war also fast nur $Ag\,Cl$. Das Filtrat enthielt ziemlich viel Chlorwasserstoff; da die angewandte Menge Ag_2CO_3 hinreichte, um den dritten Theil des Chlors der Trichlorbuttersäure zu binden, beweist dieser Überschuss an entstandenem ClH, dass die Reaction (beim Erhitzen auf 100°) weiter gegangen ist, als beabsichtigt war. Das Filtrat wurde mit Äther ausge-

schüttelt; der ätherische Auszug gab 0·5 Grm. eines schwach riechenden Öles, das kein Brom addirte; dasselbe wurde mit Wasser und Ca CO_3 geschüttelt, dann (wegen Emulsion) Äther zugegeben und die wässrige Lösung wiederholt mit Äther ausgezogen. [Nach dem erschöpfenden Ausziehen mit Äther wurde die wässrige Lösung mit ClH stark angesäuert und mit Äther auszogen; der Äther gab einige Öltropfen, die sich in Sodalösung nur theilweise, in heissem Barytwasser vollständig lösten.]

Das aus der ätherischen Lösung erhaltene Öl (circa 0·2 Grm.) destillirte (in Kügelchen aus einem Metallbad) bei circa 210 bis 230°. im Rückstand etwas kohlige Substanz; das Destillat war wasserhell, enthielt nur äusserst wenig freien ClH, hatte sonst einen schwachen Geruch, addirte kein Brom, löste sich erst bei längerem Stehen in Sodalösung, war löslich in heissem Barytwasser, erstarrte zum Theil (in nadelförmigen, gekreuzten Krystallen); 0·1253 Grm. dieser Substanz lieferten (nach dem Glühen mit Kalk) 0·156 Grm. Ag Cl, entsprechend 30·8% Cl. Ein Dichlorbutyrolacton, das hier zu erwarten war, enthält aber 45·8% Cl. Vielleicht war die analysirte Substanz ein Gemenge des eben genannten Lactons mit einem (durch Cl_2-O-Substitution entstandenen) chlorfreien Lacton.

Wird eine ganz kleine Menge Trichlorbuttersäure in einem, einerseits zugeschmolzenen Glasrohr vorsichtig erhitzt, so schmilzt und destillirt sie vollkommen unzersetzt. — Als jedoch circa 5 Grm. im Kölbchen destillirt werden sollten, entwich ClH, kaum die Hälfte destillirte (bei circa 200—220°), das Meiste blieb im Rückstand als pechartige Masse. Das Destillat erstarrte über Schwefelsäure nicht vollständig, löste sich zum grössten Theil in Sodalösung; das in Sodalösung Unlösliche war vielleicht ein Lacton.

Durch langes Kochen mit Wasser wurde endlich eine vollständige Abspaltung des Chlors der Trichlorbuttersäure erreicht.

Eine Lösung von 10 Grm. Trichlorbuttersäure in einem Liter Wasser wurde am Rückflusskühler gekocht. Hierbei ging im Anfang reichlich Öl (Trichlorbuttersäure) in den Kühler, das nach und nach verschwand. Zugleich mit dem flüchtigen Öl war auch jedweder Geruch verschwunden. Kohlensäure entwickelte sich

nicht. Nachdem im Ganzen 4 Tage gekocht worden war, wurde die schwachgelb gefärbte Flüssigkeit zur Hälfte abdestillirt, wobei ins Destillat nur Wasser ging. Der Destillationsrückstand wurde zur Entfernung der Salzsäure mit Kupferoxydul geschüttelt, die Lösung abgehoben, durch Schwefelwasserstoff von Kupfer befreit und auf dem Wasserbad unter öfterem Erneuern des Wassers eingedampft, wobei eine dickliche braungelbe Flüssigkeit zurückblieb.

In diesem, eigenthümlich sauer schmeckenden, syrupösen Abdampfungsrückstand traten bei längerem Stehen über Schwefelsäure nur wenige (kreuzförmig angeordnete) Krystalle auf, der grösste Theil trocknete amorph ein. Die glasartige Masse war chlorfrei; beim Stehen an der Luft zerfloss sie wieder. Ihre wässerige Lösung besass stark saure Reaction; sie reducirte Fehling'sche Lösung und kochende ammoniakalische Silberlösung.

Beiläufig 1 Grm. dieser Substanz wurde in einigen Cubikcentimetern Wasser gelöst und die Lösung mit Barytwasser genau neutralisirt. Hierbei fiel ein flockiger Niederschlag heraus (anfangs braun, später rein weiss). Dieser Niederschlag wurde aufs Filter gebracht, das Filtrat auf dem Wasserbade bis auf wenige Cubikcentimeter eingedampft: beim Erkalten fiel dann wieder ein voluminöser Niederschlag heraus, von dem abfiltrirt wurde und der mit dem zuerst Gefällten vereinigt wurde. Niederschlag und Filtrat wurden gesondert untersucht. — Der Niederschlag wurde bei 100° getrocknet, wonach er ein graues Pulver darstellte. Dieses Pulver war in kaltem Wasser sehr schwer löslich, in heissem Wasser löste es sich ziemlich leicht. Beim Durchleiten von Kohlendioxid durch die wässerige Lösung und nachherigem Aufkochen enstand kein $BaCO_3$, es lag also kein basisches Salz vor. 0·1854 Grm. dieses schwerlöslichen Baryumsalzes, im Platinschiffchen verbrannt, gaben 0·184 Grm. CO_2 (hiervon 0·007 Grm. aus der Asche durch Lösen in verdünnter Salzsäure und Kochen ausgetrieben und im Kaliapparat gewogen), 0·0477 Grm. H_2O und (aus der Asche) 0·0513 Grm. $Ba\,SO_4$. Hiernach enthielt dieses Baryumsalz 16·23% Ba, 27·07% C, 2·86% H, woraus sich das Atomverhältniss $\frac{Ba}{2} : 9·5\,C : 12\,H$

ergibt. — Das Filtrat des eben besprochenen Niederschlages trocknete beim Stehen an der Luft zu einer gelben amorphen Masse ein. Dieselbe löste sich leicht in Wasser; ihre Lösung gab mit CO_2 kein $BaCO_3$. 0·3021 Grm. dieses leichtlöslichen Baryumsalzes (bei 100° getrocknet) lieferten beim Fällen der wässerigen Lösung mit Schwefelsäure 0·1202 Grm. $BaSO_4$, entsprechend 23·4% Ba.

Das Auftreten mehrerer Salze mit grösserem Kohlenstoffgehalt beim Neutralisiren mit Barytwasser erinnert sehr an das analoge Verhalten der Brenztraubensäure. Darnach, sowie nach den reducirenden Eigenschaften der obigen syrupösen Säure, [1] glaube ich, dass beim langen Kochen der wässerigen Lösung der Trichlorbuttersäure wirklich der von vornherein zu erwartende Körper

$$\begin{array}{l} CH_2.OH \\ \dot{C}H_2 \\ \dot{C}O \\ \dot{C}O.OH \end{array}$$

entstanden ist.

Das Hauptresultat der beschriebenen Versuche ist der Beweis, dass sich Chlorwasserstoff an $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd in folgender Weise anlagert:

$$\begin{array}{l} CH_2Cl \\ \dot{C}H \\ \ddot{C}Cl \\ \dot{C}HO \end{array} + ClH = \begin{array}{l} CH_2Cl \\ \dot{C}H_2 \\ \dot{C}Cl_2 \\ \dot{C}HO \end{array}$$

Dieser Beweis wurde am ClH-Additionsproduct selber in der Weise durchgeführt, dass gezeigt wurde, wie bei der Einwirkung von kochendem Wasser (und $BaCO_3$) ein syrupöser, amorph eintrocknender Körper entsteht, der sich durch Reduction nicht in

---

[1] Auch die Brenztraubensäure geht beim Stehen in der Kälte, rascher beim Erhitzen mit Wasser in einen nicht flüchtigen Syrup über.

Erythrit überführen lässt (was die andere mögliche Formel des ClH-Additionsproductes ausschliesst) und der höchst wahrscheinlich nach der Formel

$$\begin{array}{l} CH_2.OH \\ \dot{C}H_2 \\ \dot{C}O \\ \dot{C}HO \end{array}$$

zusammengesetzt ist. Dieser Körper zeigt in Eigenschaften und Reactionen grosse Ähnlichkeit mit natürlich vorkommenden Kohlenhydraten.

Aus dem Umstande, dass die aus dem ClH-Additionsproduct erhältliche Trichlorbuttersäure weder beim Behandeln mit Zinkstaub und Wasser, noch beim Erhitzen mit weingeistigem Jodkalium (durch Abspaltung zweier Chloratome) in eine ungesättigte Säure verwandelt werden konnte, ergibt sich in Übereinstimmung mit dem ersten Versuch für diese Trichlorbuttersäure die Formel:

$$\begin{array}{l} CH_2Cl \\ \dot{C}H_2 \\ \dot{C}Cl_2 \\ \dot{C}O.OH. \end{array}$$

Durch mehrere Versuche wurde festgestellt, dass in dieser Trichlorbuttersäure das in der γ-Stellung befindliche Chloratom sehr leicht durch Hydroxyl ersetzt wird, wobei nur theilweise Lactonbildung eintritt.

Bei längerem Erhitzen mit Wasser verwandelt sich die Trichlorbuttersäure in eine chlorfreie syrupöse Säure, die einigermassen an Brenztraubensäure erinnert.

SITZUNGSBERICHTE

DER

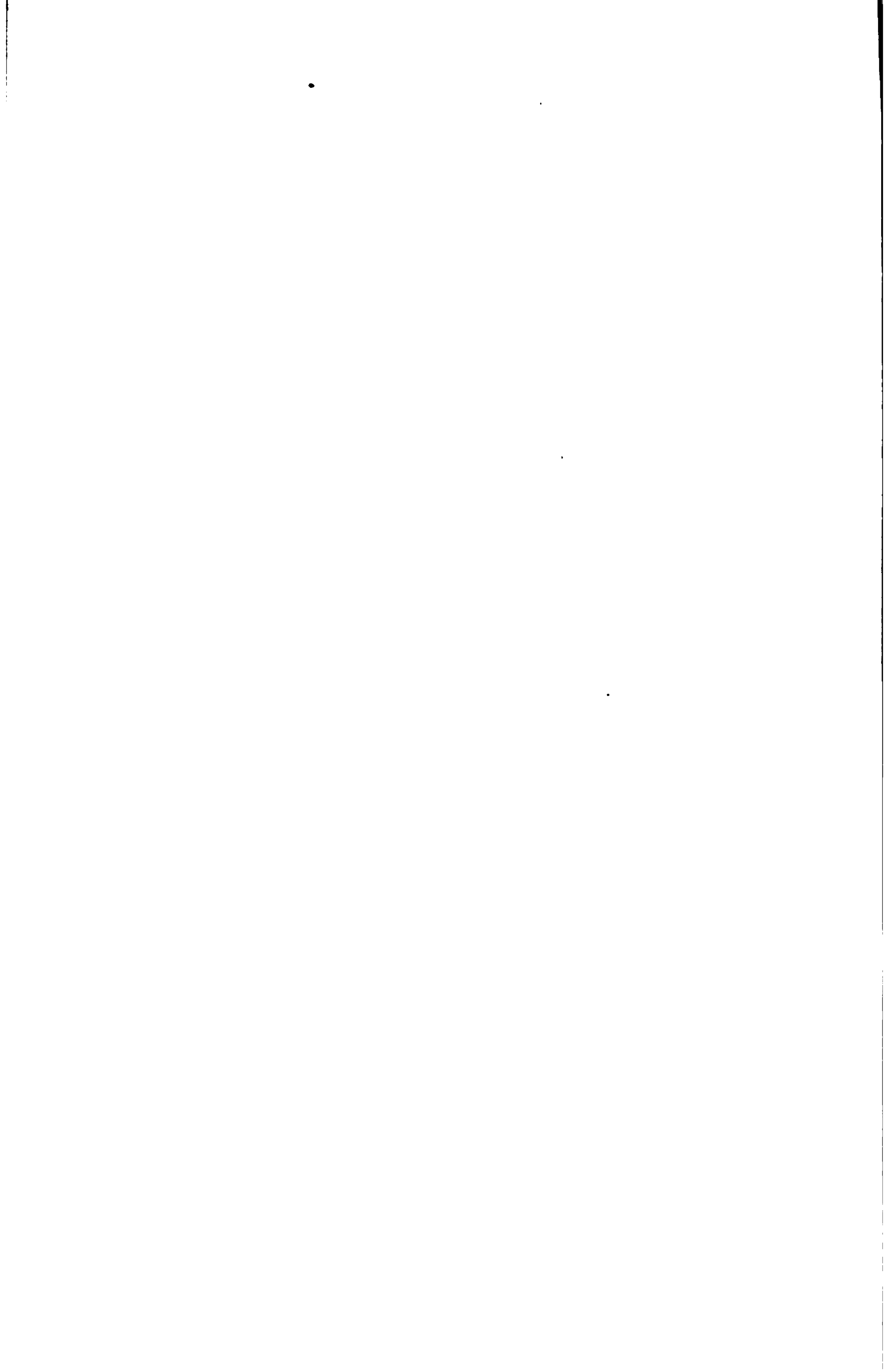
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XC. Band. II. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.



XVII. SITZUNG VOM 3. JULI 1884.

Das k. k. Ministerium des Innern übermittelt die von der oberösterreichischen Statthalterei eingelieferten graphischen Darstellungen der Eisverhältnisse an der Donau im Winter 1883/84 nach den Beobachtungen zu Aschach, Linz und Grein.

Das w. M. Herr Hofrath F. Ritter v. Hauer übermittelt für die akademische Bibliothek ein Exemplar der eben erschienenen vierten Auflage seiner Geologischen Karte von Österreich-Ungarn mit Bosnien und Montenegro auf Grundlage der Aufnahmen der k. k. geologischen Reichsanstalt zusammengestellt.

Der Secretär legt folgende eingesendete Autorwerke vor:

1. „Catalogue of 6415 Stars, for the Epoch 1870," entworfen nach Beobachtungen an der Sternwarte zu Glasgow in den Jahren 1860—1881, von dem Director derselben Herrn Dr. Robert Grant.
2. „Die freien in der reinen Erde und im süssen Wasser lebenden Nematoden der niederländischen Fauna." Eine systematisch-faunistische Monographie (mit 34 lithographirten Tafeln), von Herrn Dr. J. G. de Man, vormals Conservator am zoologischen Museum in Leiden.

Das c. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Über eine Wickelung des Gramme'schen Ringes mit entsprechend geformten Bürsten zur Schwächung der schädlichen Vorgänge in demselben", von Herrn Dr. H. Hammerl, Privatdocent an der Universität zu Innsbruck.

Herr Dr. Emil v. Marenzeller, Custos am k. k. zoologischen Hofcabinet, übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Südjapanische Anneliden." II.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über die Anwendbarkeit der Formeln von Wittstein und Kinkelin zu Volumsbestimmungen," von Herrn F. Bertolasi, suppl. Lehrer an der k. k. Handelsschule in Triest.
2. „Zur Kenntniss der Nervenfaserschichte der menschlichen Retina", Arbeit aus dem physiologischen Institute der Wiener Universität, von Herrn stud. med., St. Bernheimer.

Ferner legt der Secretär eine Mittheilung des Herrn Wilhelm Kaiser, d. Z. Rechtspraktikant beim k. k. Handelsgericht in Wien: „Über das Leuchten der Johanniskäfer" vor.

Das w. M. Herr Hofrath L. Schmarda überreicht eine vorläufige Mittheilung über eine Arbeit des Herrn Dr. Alfred Nalepa, Assistent der zoologischen Lehrkanzel an der Universität in Wien, betitelt: „Die Anatomie der Tyroglyphen".

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine Mittheilung des Herrn Prof. Dr. J. Habermann in Brünn: „Über Acetonhydrochinon."

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in dem Laboratorium des Herrn Prof. R. Přibram in Czernowitz ausgeführte Untersuchung des Herrn Josef Zehenter: Über die Einwirkung von Phenol und Schwefelsäure auf Hippursäure."

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. Ritter v. Oppolzer berichtet über die von ihm in diesem Jahre auf der Wiener Universitätssternwarte unternommene Bestimmung der Schwerkraft mit Hilfe zweier, der k. k. Gradmessung gehöriger Repsold'scher Reversionspendel von verschiedenem Gewichte.

Herr Dr. J. M. Pernter überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Beitrag zu den Windverhältnissen in höheren Luftschichten".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 48e année, 2e série. Tome XIII. Nrs. 23—25. Paris, 1884; 8°.

Académie Royale de Copenhague: Översigt over det Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder i Aaret 1883. Nr. 3. Kjøbenhavn, 1883; 8⁰. — 1884. Nr. 1. Kjøbenhavn, 1884; 8⁰.

Academy of Natural Sciences of Philadelphia: Proceedings. Part I. January — April, 1884. Philadelphia, 1884; 8⁰.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinische deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XX. Nrs. 7—8 und 9—10. Halle a. S., 1884; 4⁰.

Annales des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents. 4e année, 6e série, 4e cahier. Paris 1884; 8⁰.

— — Personnel. Paris, 1884; 8⁰.

Bonn, Universität: Akademische Schriften pro 1883. 56 Stücke. 4⁰ & 8⁰.

Central-Anstalt, schweizerische meteorologische: Annalen. XIX. Jahrgang. 1882. Zürich, 4⁰.

— — Beobachtungen. XVIII. Jahrgang 1881. V. Lieferung. Zürich; 4⁰. — Astronomische Mittheilungen von Dr. Rud. Wolf. LXI. Mittheilung. Zürich, 1884; 8⁰.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VIII, Nr. 46 und 47. Cöthen, 1884; 4⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVIII. Nrs. 23 & 24. Paris, 1884; 4⁰.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. V. Jahrgang. 1884. Heft VI. Juni. Berlin, 1884; 4⁰.

Gesellschaft, deutsche chemische. XVII. Jahrgang, Nr. 10. Berlin, 1883; 8⁰.

— deutsche morgenländische für Natur- und Völkerkunde Ostasiens. Mittheilungen. 30. Heft. Februar 1884. Yokohama; 4⁰.

— k. k. geographische in Wien. Mittheilungen. Band XXVII. Nr. 5. Wien, 1884; 8⁰.

— österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XIX. Band. Juni-Heft. 1884. Wien; 8⁰.

— naturforschende in Emden: LXVIII. Jahresbericht 1882/83. Emden, 1884; 8⁰.

Gesellschaft, naturforschende zu Freiburg i. B.: Festschrift der 56. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte. Freiburg i. B. und Tübingen, 1883; 8⁰.

Gesellschaft, physikalisch-medicinische zu Würzburg: Sitzungsberichte. Jahrgang 1883. Würzburg, 1883; 8°.

Instituut, koninklijk nederlandsch meteorologisch: Jaarboek voor 1883. XXXV. Jaargang. Utrecht, 1884; Quer-4°.

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie für 1882. 3. Heft. Giessen, 1884; 8°.

Journal, the American of Science. Vol. XXVII, Nr.162. New Haven, 1884; 8°.

— of nervous and mental disease. N. S. Vol. IX, Nr. 2. New York, 1884; 8°.

Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde: Programma van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem voor het jaar 1882 und 1883. — Naamlijst van Directeuren en Leden. Un cas de Leontiasis ossea (Craniosclerosis) observé et décrit par Doct. Med. C. E. Daniëls. Harlem, 1883; 4°.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Jahrgang 1884. 2, bis 5. Heft. Wien, 1884; 8°.

Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique: Bulletin. Tome II. Nrs. 1—4. Bruxelles, 1883; 8°. — Tome III. Nr. 1. Bruxelles, 1884; 8°.

— — Service de la carte géologique du Royaume: Explication des Feuilles de Natoye, de Dinant, de Clavier, de Bruxelles et de Bilsen. Bruxelles, 1883; 8°.

Musée Teyler: Archives. Série II, 4e partie. Harlem, Paris, Leipsic, 1883; 4°.

Nature. Vol. XXX. Nrs. 764 & 765. London, 1884; 8°.

Observatory, the: a monthly review of Astronomy. Nr. 86. London, 1884; 8°.

Prag, k. k. Sternwarte: Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen i. J. 1883. XLIV. Jahrg. Prag; 4°.

Société des Ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu de travaux. 37e année, 4e série, 3e et 4e cahiers, Paris, 1884; 8°.

Société Hollandaise des sciences à Harlem: Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XVIII, 2e—5e livraisons. Harlem, Paris, Leipsic, 1883; 8°. — Tome XIX, 1re livraison. Harlem, Paris. Leipsic, 1884; 8°.

Society, the American geographical: Bulletin. 1883. Nr. 5. New York; 8°. — 1884. Nr. 1. New York; 8°.
— the royal astronomical: Monthly Notices. Vol. XLIV. Nr. 7. May 1884. London; 8°.
— the royal geographical: Proceedings and Monthly Records of Geography. Vol. VI. Nr. 6. London, 1884; 8°.
— the royal microscopical: Journal. Ser. II. Vol. IV. Part 3. London & Edinburgh, 1884; 8°.
Vereeniging, koninklijke natuurkundige in Nederlandsch—Indie: Tijdschrift. Deel XLII. 8ste Serie. Deel III. Batavia, 's Gravenhage, 1883; 8°.
Verein, militär-wissenschaftlicher in Wien: Organ. XXVIII. Bd., 4. & 5. Heft. Wien, 1884; 8°.
— naturwissenschaftlicher von Neu-Vorpommern und Rügen in Greifswald: Mittheilungen. XV. Jahrg. Berlin, 1884; 8°.
— für Naturkunde zu Kassel: Statuten. Kassel, 1884; 8°.
— — XXXI. Bericht über das Vereinsjahr vom 18. April 1883 bis dahin 1884. Kassel, 1884; 8°.
— — Repertorium der landeskundlichen Literatur für den preussischen Regierungsbezirk Kassel. Kassel, 1884; 8°.
— — Bestimmung der erdmagnetischen Inclination von Kassel, von Dr. Karl Ackermann. 8°.
Vierteljahresschrift, österreichische, für wissenschaftliche Veterinärkunde. LXI. Band. I. Heft. (Jahrgang 1884 I.) Wien, 1884; 8°.
Zeitschrift für physiologische Chemie. VIII. Band. 4. & 5. Heft. Strassburg, 1884; 8°.

Über Acetonhydrochinon.

Von **S. Habermann.**

Übergiesst man gepulvertes Hydrochinon bei gewöhnlicher Temperatur mit einer nicht zu reichlichen Menge von reinem Aceton, so löst sich ein Theil des Pulvers zu einer farblosen Flüssigkeit, während ein anderer Theil zu einem harten, festen Krystallkuchen zusammenbackt. Erwärmt man das Ganze bis zum Sieden des Acetons, so löst sich der Kuchen, und aus der Lösung scheiden sich beim langsamen Abkühlen lebhaft glasglänzende, ungefärbte Krystallaggregate und einzelne Krystalle von grosser Schönheit und Regelmässigkeit aus, deren Formen sich unschwer als verschiedene von jenen des Hydrochinons erkennen lassen und welche insbesondere darin ein überaus charakteristisches Verhalten zeigen, dass sie aus der Mutterlauge herausgenommen, an der Luft schnell und vollständig ihre Durchsichtigkeit verlieren, rein weiss erscheinen, ohne an Härte und Festigkeit wesentlich eingebüsst zu haben. Nach vollendeter Verwitterung zeigen die Krystalle den Schmelzpunkt des Hydrochinons.

Zur Darstellung der Verbindung wurde zunächst in der Weise verfahren, dass ein Gewichtstheil Hydrochinon in einer solchen Menge Aceton unter Erwärmen gelöst wurde, dass beim Abkühlen nicht sofort Krystallbildung eintrat. Die Lösung wurde hierauf durch ein kleines Filterchen in ein enges Bechergläschen filtrirt, dieses mit einem Uhrgläschen lose bedeckt und beiseite gestellt. Je nach der Menge des Acetonüberschusses begann nach längerer oder kürzerer Zeit die Krystallbildung und konnten schon beim Verarbeiten von 5—10 Grm. Hydrochinon Krystallindividuen von mehr als einem Ctm. Seitenlänge und ausgezeichneter Regelmässigkeit ohne jede Schwierigkeit erhalten werden. Mit einem wesentlich geringeren Aufwande an Aceton erhält man

die Verbindung, wenn man je 1 Grm. Hydrochinon mit 3 CC. Aceton in ein Glasrohr einschmilzt, dieses bis zur vollständigen Lösung des Hydrochinons in einem geräumigen Wasserbade erwärmt und mit demselben erkalten lässt. Nur erhält man hiebei keine losen Krystallindividuen, sondern fast ausnahmslos in Drusen zusammengehäufte Krystalle, deren freiliegende Enden indessen tadellos schön ausgebildet sind.

Die Krystalle sind allem Anscheine nach monoklin, obwohl sie in der Gesammtheit ihrer Form und durch die fast regelmässig auftretende Streifung sehr lebhaft an die Krystalle des Natronsalpeters erinnern. Wie bereits erwähnt, verlieren die Krystalle von der Mutterlauge getrennt, beim Liegen an der Luft und ebenso im Vacuo über Schwefelsäure sehr schnell ihre Durchsichtigkeit und gleichzeitig nimmt das Gewicht so lange ab, bis die Verwitterung vollendet ist. Die Verbindung ist sehr leicht löslich in Aceton, Alkohol, Äther und in heissem Wasser. Durch das letztgenannte Lösungsmittel wird sie allem Anscheine nach vollständig zersetzt, worauf insbesondere der Umstand hinweist, dass die warme wässerige Lösung sehr deutlich nach Aceton riecht. Alle diese Wahrnehmungen lassen es als zweifellos erscheinen, dass die Krystalle eine Verbindung des Acetons mit Hydrochinon darstellen.

Die Ermittlung ihrer quantitativen Zusammensetzung erfolgte in der Weise, dass unmittelbar vor der Analyse die Acetonlauge von der festen Verbindung abgegossen, die Krystalle zwischen Leinwand und Filtrirpapier rasch abgedrückt, in ein tarirtes Wägefläschchen gefüllt und ihr Gewicht ermittelt wurde.

Hierauf wurde das Fläschchen geöffnet und so an einem staubfreien Orte bis zur eintretenden Gewichtsconstanz liegen gelassen, oder aber es wurde dasselbe unter eine Glasglocke über Schwefelsäure gebracht und die Zersetzung in der evacuirten Glocke durchgeführt. Selbstverständlich wurde in letzterem Falle die Gewichtsconstanz des Verwitterungsrückstandes in kürzerer Zeit erzielt als beim Liegen an der Luft. Die Resultate der in dieser Weise durchgeführten Analysen sind die folgenden:

I. 0·5731 Grm. Substanz verloren beim mehrtägigen Liegen an der Luft 0·1916 Grm. Aceton und hinterliessen 0·3815 Grm. Hydrochinon.

II. 1·6180 Grm. verloren im Vacuo über Schwefelsäure 0·5608 Grm. Aceton und lieferten 1·0572 Grm. Hydrochinon als Rückstand.

Nach diesen analytischen Werthen kommt der Verbindung die Formel

$$C_3H_6O \cdot C_6H_6O_2$$

zu, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

	Gefunden		Berechnet
	I.	II.	
Aceton........	33·43	34·66	34.52
Hydrochinon...	66.57	65·34	65·48

Das Acetonhydrochinon ist demnach analog dem Chinhydron zusammengesetzt, welchem nach O. Hesse (Ann. d. Chem. 200, p. 248) und Anderen die Formel

$$C_6H_4O_2 \cdot C_6H_6O_2$$

zukommt. Aber nicht allein in Beziehung auf die Zusammensetzung, sondern auch in mancher anderen Richtung, so namentlich in Bezug auf die geringe Beständigkeit, zeigen die beiderlei Verbindungen eine auffallende Ähnlichkeit, so dass es mir scheinen will, dass die neue Verbindung einen weiteren Beweis für die chemische Ähnlichkeit zwischen Aceton und Chinon, also auch für die Richtigkeit der Anschauung bildet, dass das Chinon den Sauerstoff in derselben Weise gebunden enthält wie das Aceton, eine Auffassung, welche in der neuesten Zeit wieder von A. Kekulé (Anm. d. Chem. 223, p. 170) vertreten wird.

Laboratorium der allgemeinen Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Brünn.

Über die Einwirkung von Phenol und Schwefelsäure auf Hippursäure.

I. Mittheilung.

Von **Joseph Zehenter.**

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. Dr. R. Přibram in Czernowitz.)

Die schönen Resultate, welche bei der Einwirkung von Phenol und Schwefelsäure oder Chlorzink auf verschiedene organische Substanzen erhalten wurden, liessen es wünschenswerth erscheinen, auch das Verhalten der Amidosäuren der Fettreihe zu obigen Stoffen kennen zu lernen, um so mehr, als die Möglichkeit vorlag, dabei zu Producten zu gelangen, welche im nahen Zusammenhange mit im Organismus sich bildenden Körpern stehen.

Die Versuche, welche ich in dieser Richtung mit Glycocoll und Alanin anstellte, haben allerdings bisher ein negatives Resultat ergeben und dieselben in ausgedehnterem Masse zu wiederholen, schien mir vorläufig mit Rücksicht auf den hohen Preis des Untersuchungsmaterials nicht entsprechend. Ich wählte desshalb lieber für die weiteren Versuche als Ausgangsmaterial die Hippursäure, da die Vermuthung nahe lag, dass diese Substanz, deren Beschaffung leicht mit geringeren Kosten möglich war, auch insoferne bessere Resultate verspreche, als sich das bei Einwirkung von Schwefelsäure, respective von Chlorzink, abspaltende Glycocoll gleichsam im Entstehungsmomente befindet, daher viel reactionsfähiger ist. Diese Voraussetzung wurde durch die Untersuchung, deren bisherige Ergebnisse ich mir im Folgenden vorzulegen erlaube, in vollem Masse bestätigt.

Die Versuche erstreckten sich zunächst auf die Einwirkung von Phenol auf Hippursäure bei Gegenwart von Schwefelsäure.

Erhitzt man gleiche Theile Hippursäure und Phenol mit der zwei-, bis dreifachen Menge reiner, concentrirter Schwefelsäure zunächst auf dem Wasserbade, so findet wohl vollkommene Lösung statt, allein eine mit der Reactionsflüssigkeit vorgenommene Probe zeigt noch einen starken Gehalt an Hippursäure an. Erst beim Erhitzen auf 140—145° C. findet vollständige Zerlegung der angewendeten Säure in Benzoesäure und Glycocoll statt, ohne dass, wie dies beim höheren Erhitzen auf 170—180° der Fall ist, eine starke Entwicklung von Kohlendioxyd stattfindet, in welchem Falle bereits eine weitergehende Zersetzung eintritt. Auch erweist es sich als vortheilhaft, immer nur geringe Mengen (20—30 Grm.) der Ausgangsmaterialien anzuwenden.

Das Versuchsproduct ist nach sechsstündigem Erhitzen auf die Temperatur von circa 140° braunroth gefärbt. Es wird zunächst mit Wasser stark verdünnt, wobei sich grosse Mengen mehr oder weniger roth gefärbter Benzoesäure ausscheiden, welche abfiltrirt und mit kaltem Wasser gewaschen werden. Aus dem Filtrate wird die noch in Lösung gebliebene Benzoesäure mit Äther entfernt. Die nach dem Abscheiden des Äthers rückbleibende wässerige Lösung wird nun durch Erwärmen von demselben befreit, hierauf in der Siedhitze mit fein geschlämmtem Bleicarbonat im Überschusse versetzt, heiss vom gebildeten schwefelsauren und unzersetzten kohlensauren Blei getrennt, mit Schwefelwasserstoff entbleit und nun zuerst auf einem schwach erwärmten Wasserbade, dann im Vacuum eingedampft, wobei sich aus der syrupösen, stark braun gefärbten Flüssigkeit deutliche würfel- oder plattenförmige Krystalle ausscheiden, die zunächst zur Entfernung der hartnäckig anhängenden Mutterlauge mit absolutem Alkohol gewaschen und hierauf zur vollständigen Reinigung mehrmals aus Wasser umkrystallisirt werden. Die Rohausbeute von diesem Producte ist eine ziemlich gute zu nennen, nur ist es schwer, aus den letzten stark syrupösen Mutterlaugen, welche hauptsächlich die beim Processe nebenher gebildeten Phenolsulfosäuren enthalten, reine Krystalle zu gewinnen.

Herr Dr. Becke, Professor der Mineralogie an der hiesigen Universität, hatte die besondere Freundlichkeit, die Bestimmung der Krystallform der erhaltenen Substanz vorzunehmen und theilte darüber Folgendes mit:

Krystallsystem: Monoklin.

Elemente: $a:b:c = 0\cdot929:1:1\cdot285$

$\beta = 60°30'$

Beobachtete Formen: (001).(110).(011).($\bar{1}$11).

Die Ausbildung der Krystalle ist entweder säulenförmig nach 110, wobei gewöhnlich als Endigung nur 001 auftritt oder tafelförmig nach 011. Letztere Krystalle zeigen gewöhnlich die Flächen 011 und 110 als Randflächen. $\bar{1}$11 tritt selten als äusserst schmale Abstumpfung der Kante 110.001 auf.

Winkelmessungen	gemessen	berechnet
110.1$\bar{1}$0	77°51′	77°54′
001.110	67°24′	67°29·1′
001.011	48° 5′	48°12′
$\bar{1}$10.$\bar{1}$11	33° 6′	33°29·8′

Auf den Endflächen beobachtet man im parallelen polarisirten Lichte Auslöschung parallel den Diagonalen, im convergenten Lichte sieht man am Rande des Gesichtsfeldes beide optischen Axen. Die Ebene der optischen Axen ist senkrecht zur Symmetrieebene und im richtig orientirten Krystall nach rückwärts geneigt. Der Axenwinkel ist klein. Die Mittellinie hat positiven Charakter der Doppelbrechung. Die Dispersion ist deutlich $\rho > v$, auch beobachtet man schwache horizontale Dispersion, die Axenebene für blaue Strahlen ist stärker nach rückwärts geneigt als die für rothe. Die Doppelbrechung ist energisch.

Die Analyse der durch mehrmaliges Umkrystallisiren aus Wasser sorgfältigst gereinigten Krystalle lieferte das Ergebniss, dass dieselben ausser Kohlenstoff, Wasserstoff, Sauerstoff auch noch Stickstoff und Schwefel enthalten, was auf eine ziemlich complicirte Reaction schliessen liess. Es wurden hiebei Zahlen erhalten, die für die Substanz die Formel $C_8H_{11}O_6NS$ ergaben.

	Berechnet	Gefunden					
		I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
C_8	38·55	38·62	38·30	—	—	—	—
H_{11}	4·42	4·49	4·86	—	—	—	—
N	5·62	—	—	5·36	5·52	—	—
S	12·85	—	—	—	—	12·89	12·90

Bei 150° getrocknet, zeigten die Krystalle keine Gewichtsabnahme, bei 160—170° tritt bereits Zersetzung ein, die sich durch das Auftreten eines phenolartigen Geruches zu erkennen gibt.

Die Substanz reagirt in wässeriger Lösung stark sauer und löst kohlensaure Salze unter Aufbrausen mit Leichtigkeit auf, daher selbe als eine Säure anzusprechen ist. Sie zeigt einen Schmelzpunkt von 183—185° C., zerfliesst an der Luft nicht, ist in kaltem Wasser und in siedendem Alkohol leicht löslich, unlöslich hingegen in kaltem, absoluten Alkohol und in Äther. Die wässerige Lösung gibt mit Eisenchlorid eine schwach violett-rothe Färbung, reducirt alkalische Kupferlösung nicht und wird sowohl von Bleizuckerlösung, als auch von Bleiessig nicht gefällt.

Zur Aufklärung der Constitution der Säure habe ich zunächst das Silber- und Barytsalz dargestellt und analysirt. Die dabei erhaltenen Zahlen stimmen am Besten für eine Substanz von der Formel $C_8H_9O_5NS$ mit einem Molekül Krystallwasser. Der bei der Wechselwirkung von Phenol und dem aus der Hippursäure sich abspaltenden Glycocoll stattfindende Vorgang liesse sich durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$CH_2.NH_2.CO_2H + C_6H_5.OH + H_2SO_4 = C_8H_9O_5NS + 2H_2O.$$

Die Voraussetzung einer solchen Reaction steht mit den bei der Analyse des Reactionsproductes erhaltenen Werthen, sowie auch mit den Resultaten der Untersuchung der Salze in Übereinstimmung und die oben erwähnte Substanz von der Zusammensetzung $C_8H_9O_5NS + H_2O$ würde vielleicht einem Sulfophenylglycocoll entsprechen.

Das Silbersalz wurde dargestellt durch Absättigen einer heissen wässerigen Lösung der freien Säure mit kohlensaurem Silber, nachherigem Filtriren und Einengen des Filtrates im Vacuum. Hiebei scheiden sich sehr gut ausgebildete, säulenförmige Krystalle aus, die äusserst lichtempfindlich sind. Bei 100° getrocknet findet Gewichtsabnahme statt, höher erhitzt tritt bereits Zersetzung ein.

Unter Annahme der früher erwähnten Zusammensetzung der Säure entspricht das Salz lufttrocken der Formel $C_8H_8O_5NSAg +$ $+ 3H_2O$. Die Gewichtsabnahme bei 100° entspricht dem Austritte von 1 Molekül Wasser.

	$C_8H_8O_5NSAg+3H_2O$	Gefunden
H_2O	4·59	4·88

Die Silber- und Stickstoffbestimmung des bei 100° getrockneten Salzes ergab:

	$C_8H_8O_5NSAg+2H_2O$	Gefunden
Ag	28·87	28·82
N	3·74	3·96

Barytsalz. Sättigt man eine siedend heisse Lösung der freien Säure mit kohlensaurem Baryt ab und filtrirt vom unzersetzten kohlensauren Salze, so scheiden sich aus dem schwach gelb gefärbten Filtrate beim Einengen im luftleeren Raume über Schwefelsäure gelb gefärbte, prismenförmige Krystalle aus, welche zur weiteren Reinigung in möglichst wenig Wasser gelöst werden. Aus dieser Lösung fällt überschüssiger, absoluter Alkohol nach kurzem Stehen feine, weisse, etwas verfilzte Nadeln aus, welche lufttrocken der Formel $C_8H_8O_5NS\frac{Ba}{2}+\frac{1}{2}H_2O$ entsprechen. Bei 125° getrocknet, verlieren sie ihr Krystallwasser.

	$C_8H_8O_5NS\frac{Ba}{2}+\frac{1}{2}H_2O$	Gefunden
H_2O	2·92	2·62

Die bei 125° getrocknete Substanz ergab bei der Analyse folgende Zahlen:

	$C_8H_8O_5NS\frac{Ba}{2}$	Gefunden		
		I.	II.	III.
C	32·16	31·54	—	—
H	2·68	3·17	—	—
S	10·72	—	11·01	—
Ba	22·96	23·09	—	22·76

Ausser diesen beiden Salzen habe ich auch noch das Kupfer- und Kalisalz dargestellt.

Das Kupfersalz, welches durch anhaltendes Digeriren einer heissen wässerigen Lösung der freien Säure mit frisch

bereitetem Kupferhydroxyd erhalten wurde, stellt warzige, blau gefärbte Krystallaggregate dar, die unter dem Mikroskope aus feinen, concentrisch gruppirten Nadeln zusammengesetzt erscheinen.

Das Kalisalz wird bereitet durch genaues Neutralisiren der in Wasser gelösten Säure mit Kalilauge. Beim Einengen scheiden sich prismenförmige, einheitlich aussehende Krystalle aus.

Erhitzt man die Säure in einer Retorte, so schmilzt sie und unter reichlicher Entwicklung von Schwefeldioxyd destillirt bei 200° eine schwach gelb gefärbte, deutlich nach Phenol riechende Flüssigkeit über, die sich in Wasser löst und deren wässerige Lösung mit Eisenchlorid eine violette Färbung, mit Bromwasser einen gelblich-weissen flockigen Niederschlag (Tribromphenol) und mit Ammoniak und Chlorkalklösung beim Erwärmen eine blaue Färbung gibt. Das Destillat dürfte daher unstreitig als Phenol zu betrachten sein. Der Rückstand in der Retorte stellte eine schwammige, theilweise verkohlte Masse dar, die zu keiner weiteren Untersuchung einlud.

Interessant ist auch das Verhalten der Säure zu Königswasser. Mischt man 1 Theil Säure mit der doppelten Menge Salzsäure und Salpetersäure, so tritt zunächst nur ein Rothwerden der Flüssigkeit ein. Erwärmt man nun schwach, so beginnt bald eine sehr stürmische Gasentwicklung, es entweichen rothbraune Dämpfe. Sobald diese Erscheinungen eintreten, unterbricht man das Erwärmen und lässt die Reaction bei gewöhnlicher Temperatur zu Ende gehen. Hiebei trübt sich die Flüssigkeit und am Boden des Gefässes scheidet sich allmälig eine ölige Substanz aus. Nachdem die Gasentwicklung vollständig aufgehört hat, verdünnt man mit viel Wasser und schüttelt mit Äther aus. Derselbe nimmt nun sowohl das bereits erstarrte Öl, als auch die durch das Wasser ausgeschiedenen Flocken vollständig auf und hinterlässt beim Verdunsten eine rothgelbe, aus Nadeln bestehende Masse, die zur weiteren Reinigung in wenig Alkohol gelöst und mit Wasser wieder ausgefällt wird. Es scheiden sich citronengelb gefärbte Nadeln aus, die abfiltrirt und mit kaltem Wasser gewaschen werden. Dieselben sind nur in heissem Wasser etwas löslich, hingegen leicht löslich in Alkohol, Äther und Benzol. Sie zeigen einen Schmelzpunkt von 100—102°, sind sublimirbar und färben

die Haut intensiv gelb. Durch Ammoniakdampf werden sie orangegelb gefärbt. Auf dem Platinblech erhitzt, verpuffen sie. Die wässerige Lösung gibt mit Eisenchlorid keine Färbung, ebenso mit Bleizuckerlösung oder Bleiessig keine Fällung. Die Krystalle haben einen sehr bitteren Geschmack, wie auch einen ziemlich scharfen Geruch. Wegen Materialmangel konnte ich eine eingehendere Untersuchung dieses Oxydationsproductes noch nicht anstellen und hoffe ich, dies in Kürze nachtragen zu können.

Mit Wasser durch mehrere Stunden gekocht, zersetzt sich die früher erwähnte Säure nicht, wie auch das zur näheren Bestimmung der Constitution vorgenommene Schmelzen mit Ätzkali bis jetzt zu keinem günstigen Resultate führte.

Ich hoffe aber, sobald ich mir neues Material nachgeschafft habe, über die Constitution der erhaltenen Säure Definitives mittheilen zu können und habe ich mich zu dieser in vieler Beziehung noch unvollständigen Veröffentlichung nur entschlossen, um mir die Möglichkeit des weiteren Studiums der erwähnten Reactionen auf einige Zeit zu sichern.

Auch über die Einwirkung höherer Phenole, wie z. B. des Kresols auf Hippursäure bei Gegenwart von Schwefelsäure sind bereits die Untersuchungen im Gange und dürften auch zu einem günstigen Resultate führen.

Anhangsweise möchte ich noch erwähnen, dass ich u. A. versucht habe, Phenol und Hippursäure bei Gegenwart von Wasser und erhöhtem Drucke und Temperatur auf einander wirken zu lassen, unter der Voraussetzung, dass vielleicht das aus der Hippursäure durch die Wasserwirkung sich abspaltende Glycocoll (Munk, Zeitschrift f. physiol. Chemie 1, 357) direct mit dem Phenol in Reaction treten würde. Das Ergebniss war jedoch negativ. Durch die Analyse wurde festgestellt, dass hiebei reines Glycocoll und Benzoesäure neben der angewendeten Phenolmenge resultirt.

Über eine Wickelung des Gramme'schen Ringes mit entsprechend geformten Bürsten zur Schwächung der schädlichen Vorgänge in demselben.

Von Dr. **Hermann Hammerl,**
Privatdocenten an der k. k. Universität Innsbruck.

(Mit 1 Tafel und 4 Holzschnitten.)

Vorbemerkungen.

Die dynamoelektrischen Maschinen haben in letzter Zeit eine Reihe von Verbesserungen[1] erfahren, die sich vor Allem auf die Form und die Wickelung des Elektromagneten beziehen um dadurch entweder Ströme von constanter Stärke oder von constanter Spannung zu erhalten. Der Ring hat die verschiedensten äusseren Formen erhalten, jedoch die Wickelungsweise desselben, so verschieden sie auch bei den bis jetzt construirten Maschinen ist, ist immer derart, dass vermittelst zweier Bürsten die in den einzelnen Drahtwindungen auftretenden Inductionsströme als Summenstrom abgeführt werden können.

Das Auftreten der Foucault'schen Ströme hat man soviel als möglich zu verhindern gesucht, aber die anderen schädlichen Vorgänge, die in demselben vor sich gehen, sei es dass die Maschine zur Erzeugung eines Stromes oder als Motor zur Kraftübertragung benützt wird, sind bisher noch nicht beseitigt[2].

---

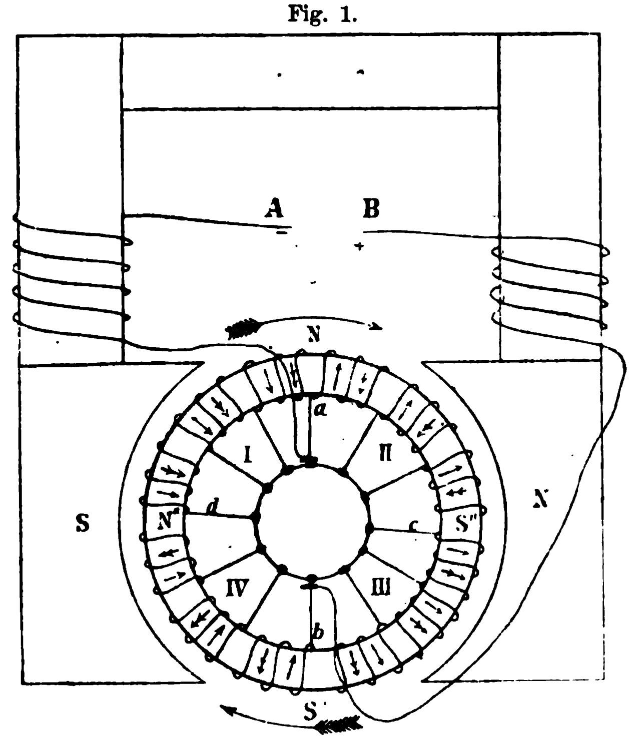
[1] Die magnet- und dynamoelektrischen Maschinen von H. Schellen Köln, 1884; Recent Progress in Dynomo-Elektric Machines by Prof. Silv. P. Thompson. A paper read before the applied Chem. and Phys. sect. of the s.c. of arts Febr. 28, 1884.

[2] Vorschläge in dieser Richtung enthält unter Anderen der Artikel: Über die Mantelringmaschine von Kravogl und deren Verhältniss zur

Über die im Ring einer dynamoelektrischen Maschine statthabenden, ihrer Leistungsfähigkeit schädlichen Vorgänge.

Wird eine dynamoelektrische Maschine zur Erzeugung eines Stromes in Bewegung gesetzt, so treten, wie bekannt, in den einzelnen Windungen des Ringes Inductionsströme auf, die in der schematischen Zeichnung Fig. 1. durch die einfachen Pfeile (↑)

Fig. 1.



angedeutet sind. Die Richtung dieses dadurch erzeugten Gesammt-, respective Hauptstromes ist nun eine solche, dass derselbe im Ringe selbst oben bei *a* einen Nordpol, und unten bei *b* einen Südpol zu erzeugen strebt. Bei der Drehung influenziren diese Pole in den Windungen Ströme, welche in der Figur durch die Doppelpfeile (↟) angedeutet sind.

Maschine von Pacinotti, Gramme nebst Vorschlägen zur Construction verbesserter dynamoelektrischer Maschinen von Prof Dr. L. Pfaundler, Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. LXXXVII. Bd. II. Abth. März 1883.

Wie man sieht, ist im I. und III. Quadranten die Richtung dieser Ströme dieselbe mit der des Hauptstromes, dagegen in den Quadranten II und IV wirken sie dem Hauptstrome gerade entgegen, schwächen denselben. Diese Windungen schwächen also den Hauptstrom einerseits durch ihren Widerstand, anderseits durch die in denselben auftretenden entgegengesetzt gerichteten Inductionsströme. [1]

Ich sehe hiebei ab von der inducirenden Einwirkung des durchströmten Ringes auf sich selbst [2].

Benützt man eine dynamoelektrische Maschine zur Kraftübertragung, so wird der Strom bei *A*, respective *a* hineingeleitet, er durchläuft die Windungen des Ringes in derselben Richtung wie der bei der Drehung erzeugte Hauptstrom, es entsteht dadurch bei *a* ein Nordpol und bei *b* ein Südpol, der Elektromagnet hat rechts den Nordpol und links den Südpol, und es tritt durch die Abstossung gleichnamiger und Anziehung ungleichnamiger Pole die Drehung ein.

Nun strebt der Elektromagnet wegen seiner Mächtigkeit gerade an den Indifferenzpunkten *c* und *d* des Ringes (Fig. 2) die entgegengesetzten Pole S'' und N'' zu influenziren, die Drehung wird also durch die Anziehung der ungleichnamigen Polpaare NS'' und SN'' geschwächt werden. [3]

---

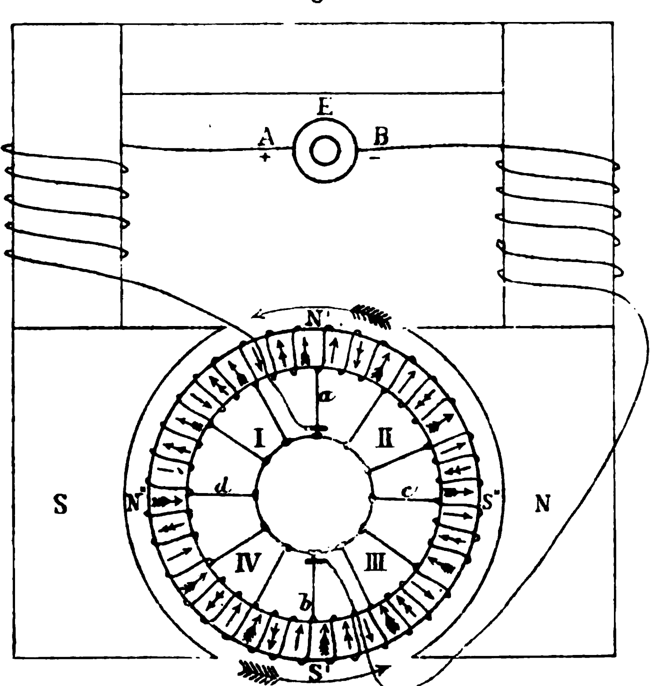
[1] Es kommt aber in den meisten Fällen nicht zur wirklichen Entstehung dieser Pole N' und S', sondern die Einwirkung des Stromes auf den Magnetismus des Ringes wird nur in einer Verdrehung und Schwächung desselben bestehen; ich behalte jedoch obige Darstellungsweise zum leichteren Verständniss in der Abhandlung bei, da es sich ja gleich bleibt, ob ich sage: Der Magnetismus des Ringes wird im II. und IV. Quadranten geschwächt oder es entstehen durch Pole N' und S' dem Hauptstrom entgegengesetzt gerichtete Inductionsströme.

[2] Näheres darüber in der Abhandlung: Zur Theorie der dynamoelektrischen Maschinen, von R. Clausius. Wiedem. Annal. Bd. XX. pag. 353, 1883.

[3] Natürlich kommen auch hier diese Pole N'' und S'' gegenüber den Elektromagneten in der Wirklichkeit selten zu Stande, aber für den Erfolg ist es ja gleich, ob ich sage: der Nordpol im II. und der Südpol im IV. Quadranten wird geschwächt und somit auch die Abstossung von N auf N' und von S auf S', oder es treten die Pole S'' und N'' auf, wodurch eine Anziehung von N auf S'' und von S auf N'' auftritt.

In Folge der Drehung treten im Ring noch Inductionsströme auf, die sogenannte elektromotorische Gegenkraft, und zwar haben wir hier zwei Inductionsströme zu unterscheiden, so dass eigentlich drei verschiedene Ströme im Ring zu berücksichtigen sind.

Fig. 2.



1. Der hineingeleitete Hauptstrom zur Hervorbringung der Rotation, angedeutet in Fig. 2 durch die einfachen Pfeile ↑; 2. der Inductionsstrom, der bei der Rotation durch die influenzirten Pole N'' und S'' auftritt und eine dem Hauptstrome entgegengesetzte Richtung hat, in der Figur durch die Doppelpfeile (↟) angedeutet; und 3. der Inductionsstrom, erzeugt durch die oben und unten im Ringe durch den Hauptstrom erzeugten Pole N' und S', dessen Richtung durch die gefiederten Pfeile (↥) angedeutet ist.

Die beiden Inductionsströme haben in den Quadranten II und IV die entgegengesetzte Richtung, in den Quadranten I und III jedoch gleiche Richtung, sind aber entgegengesetzt gerichtet

dem Hauptstrome, schwächen also die Bildung des Poles N' in der Weise, dass sie denselben mehr nach N'' zu verlegen suchen, wodurch eine Schwächung der Rotation eintreten muss.

Über die Wirkung einer Schaltungsweise mit vier Bürsten, Maschine benützt als Motor.

Ich habe nun mit einer von Fein in Stuttgart construirten dynamoelektrischen Maschine versucht, ob es nicht möglich wäre, die erwähnten schädlichen Vorgänge im Ring, wenn nicht ganz zu beseitigen, so doch bedeutend zu vermindern.

Zu diesem Zwecke habe ich die Maschine zunächst als Motor benützt und die Tourenzahl des leergehenden Ankers bestimmt, wenn der Maschine nacheinander Ströme von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8 Bunsen-Elementen zugeführt wurden. Zugleich wurde die elektromotorische Gegenkraft berechnet, die bei der Drehung auftritt, ausgehend von der Gleichung

$$J = \frac{E-e}{W+R},$$

worin E die elektromotorische Kraft der Bunsen-Elemente, e die elektromotorische Gegenkraft, W der Widerstand der Elemente, R der innere Widerstand der Maschine, bestehend aus r_m dem Widerstande des Elektromagneten und r_a dem Widerstande des Ankers oder Ringes. Bei der Maschine von Fein ist $r_a = 0{\cdot}59$ O. und $r_m = 0{\cdot}52$ O., zusammen $R = r_a + r_m = 1{\cdot}11$ Ohm.

Die elektromotorische Kraft eines Bunsen-Elementes wurde zu 1·9 Volt und dessen innerer Widerstand = 0·1 Ohm gefunden, so dass also für n Bunsen-Elemente obige Gleichung lautet:

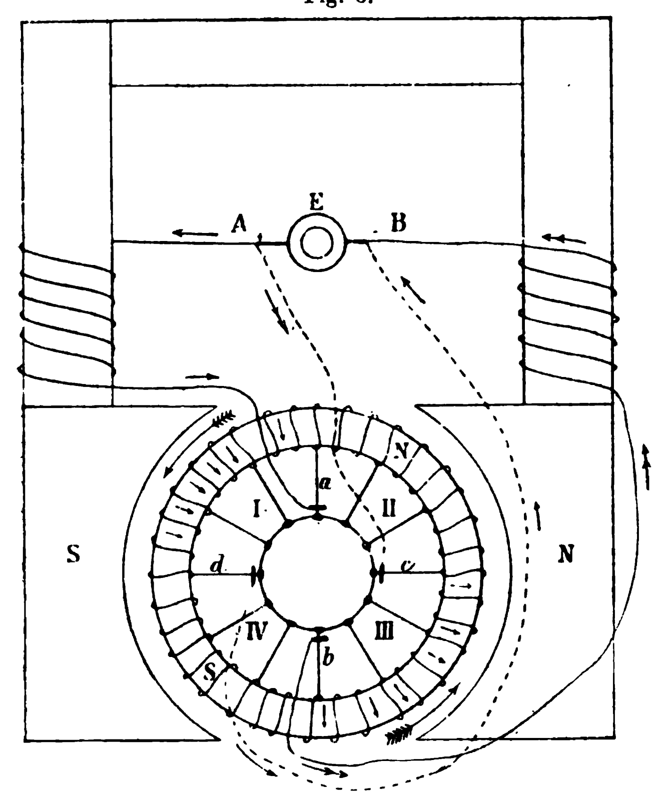
$$J = \frac{n \, . \, 1 \cdot 9 - e}{n \, . \, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 11}.$$

J wurde durch Einschaltung einer Tangentenbussole während der Rotation des Ankers bestimmt. Die auf diese Weise erhaltenen Resultate sind weiter unten (Seite 55) unter A mit anderen in einer Tabelle zusammengestellt. Es bedeutet dort E die elektromotorische Kraft der Bunsen-Elemente, e die elektro-

motorische Gegenkraft und n die dazugehörige Tourenzahl des Ankers per Minute.

Es fragt sich nun, welches ist das günstigste Verhältniss der im Ring und Elektromagneten geweckten Magnetismen, um den grössten Effect zu erzielen. Die zu starke Influenzwirkung des Elektromagneten auf den Ring könnte man vermindern, wenn man nur einen Theil des Stromes dem Magnet zuführen würde, also z. B. eine Nebenleitung zwischen *Aa* und *Bb* Fig. 2 anbringen würde, wodurch der grössere Theil des Stromes durch den Ring gehen würde; man müsste jedoch den Widerstand dieser Zweigleitung nach der Stärke des Stromes reguliren, damit

Fig. 3.



der Magnet doch genügend stark magnetisirt wird, um eine abstossende und anziehende Wirkung auf die Pole im Ring auszuüben; dadurch wird aber ein weiterer Widerstand in den Stromkreis eingeschaltet, der den Strom für sich wieder schwächt.

Ich glaubte jedoch eine grössere Leistungsfähigkeit der Maschine zu erhalten, wenn ich durch Anbringung von zwei Extrabürsten, um 90° abstehend von den vorhandenen, die Windungen des Ringes im II. und IV. Quadranten aus dem Stromkreis ausschalte, um dadurch die magnetisirende Wirkung der Stromes auf den Ring und den Elektromagnet im günstigen Sinne zu ändern.

Sind *c* und *d* (Fig. 3) die beiden Extrabürsten, so verband ich die rechtsliegende *c* mit *A* (Fig. 3) und die linksliegende *d* mit *B* vermittels einer kurzen Leitung. Der Strom, ausgehend von *A*, theilt sich dann in zwei gleiche Theile, ein Theil geht durch die Windungen des linken Schenkels des Elektromagneten, dann durch die Windungen des Ringes im I. Quadranten, und zum —Pol *B* der Elektricitätsquelle *E* zurück; der zweite Theil geht zuerst durch die Windungen des Ringes im III. Quadranten und dann durch die Windungen des rechten Schenkels des Elektromagneten und zum —Pol zurück.

Der Widerstand in jedem Zweig beträgt $\frac{r_m}{2} + r_a$, woraus sich die Stromstärke J berechnet zu:

$$J = \frac{nE}{n \times 0 \cdot 1 + \frac{\frac{r_m}{2} + r_a}{2}} = \frac{nE}{n \times 0 \cdot 1 + \frac{r_m + 2r_a}{4}}$$

$$= \frac{nE}{n \times 0 \cdot 1 + \frac{1 \cdot 70}{4}} = \frac{nE}{n \times 0 \cdot 1 + 0 \cdot 425}$$

Es wird durch diese Anordnung die Stromstärke für den Ring bedeutend grösser als früher, die Stromstärke für jeden Schenkel des Elektromagneten beträgt jedoch nur $J' = \frac{J}{2}$.

Es entstehen nun dadurch im Ringe zwei kräftige Pole, die um 45° von der gewöhnlichen Lage nach rechts verschoben sind und die schädliche Einwirkung des Elektromagneten ist dadurch bedeutend vermindert. Die Verschiebung der Pole nach rechts ist aber nicht für die Rotation zum Nachtheile, sondern im Gegentheile vortheilhaft, weil ja bei der Rotation eine Verschleppung der Pole nach links eintritt, die Pole werden dadurch gerade in

die günstigste Stellung für die abstossende und anziehende Wirkung gebracht.

Bezüglich des Inductionsstromes, der durch die Pole N' und S' im Ring erzeugt wird, ergibt sich, dass dessen Wirkung in den zwei Quadranten, welche der Strom durchläuft, fast gleich Null ist, denn wenn gar keine Verschiebung der Pole stattfinden würde, entstehen in jeder Hälfte des Quadranten I Inductionsströme, die entgegengesetzte Richtung haben, sich also aufheben, dasselbe gilt für den Quadranten III. In Folge der Verschiebung der Pole wird in jedem Quadranten ein schwacher, dem Hauptstrome entgegengesetzt gerichteter Inductionsstrom auftreten.

Die unter Anwendung der zwei Extrabürsten erhaltenen Resultate sind in der Tabelle unter *B* angeführt und wie man daraus ersieht, werden auf diese Weise grössere Tourenzahlen erzielt als mit der gewöhnlichen Anordnung von nur zwei Bürsten.

Die Tourenzahl *n* des Ankers per Minute beträgt bei derselben elektromotorischen Kraft *E* fast das Doppelte.

Tabelle.

A	*E*	1·9	3·8	5·7	7·6	9·5	11·4	13·3	15·2
mit 2	*e*	0·8	2·39	3·94	5·52	7·0	8·46	10·13	11·44
Bürsten	*n*	180	350	540	747	850	960	1045	1158
B	*E*	1·9	3·8	5·7	7·6	9·5	11·4	13·3	15·2
mit 4	*e*	0·84	1·85	2·71	4·03	4·96	5·87	6·79	7·92
Bürsten	*n*	220	545	845	1200	1385	1700	1930	2154

Berechnet man aus den erhaltenen Zahlen für *E* und *e* in beiden Fällen das Verhältniss E/e, so findet man, dass dieses Verhältniss bei der Schaltung mit vier Bürsten sehr nahe immer gleich 2 ist, d. h., es wird bei dieser Schaltungsweise die grösste Nutzarbeit erzielt. Nun es ist das wohl rein zufällig, dass man mit einer solchen Maschine von Fein bei der besprochenen Schaltungsweise mit vier Bürsten unter Anwendung Bunsen'scher Elemente mit einem inneren Widerstand = 0·1 Ohm gerade die grösste Nutzarbeit erhält.

Berechnet man aber für beide Fälle den Nutzeffect, so ergibt sich, dass die gewöhnliche Schaltungsweise der mit vier Bürsten bei weitem überlegen ist. Ist J die Intensität des Stromes, während der Anker sich bewegt und E die elektromotorische Kraft der Bunsenelemente, n die Tourenzahl des Ankers, so ist der Nutzeffect durch das Verhältniss $\frac{n}{EJ}$ gegeben. Dieses Verhältniss gibt nun für die gewöhnliche Schaltung immer grössere Werthe als für die mit vier Bürsten, woraus hervorgeht, dass es auf diese Weise nicht möglich ist, eine grössere Leistungsfähigkeit der Maschine zu erreichen.

Vorschlag zur Wickelung des Gramme'schen Ringes.

Aus dem Vorausgegangenen ergibt sich, dass bei Benützung einer dynamoelektrischen Maschine zur Kraftübertragung darauf geachtet werden muss, obwohl die Wickelung des Ringes und des Elektromagneten eine derartige ist, dass durch den Strom die zur Erreichung der kräftigsten Rotation günstigsten Magnetismen im Elektromagnet und Ring geweckt werden.

Soll die Maschine zur Erzeugung eines elektrischen Stromes dienen, so muss die Wickelung des Ringes eine derartige sein, dass die in den einzelnen Spulen auftretenden Ströme keine magnetisirende Wirkung auf den Ring ausüben, d. h., dass die magnetisirende Wirkung des aus den Spulen austretenden Gesammtstromes auf den Ring möglichst gleich Null ist.

Beides wird nun wenigstens annäherungsweise erreicht, wenn man den Ring so wickelt, dass jede beliebige Windung, respective Spule des Ringes in den Stromkreis ein- oder ausgeschaltet werden kann.

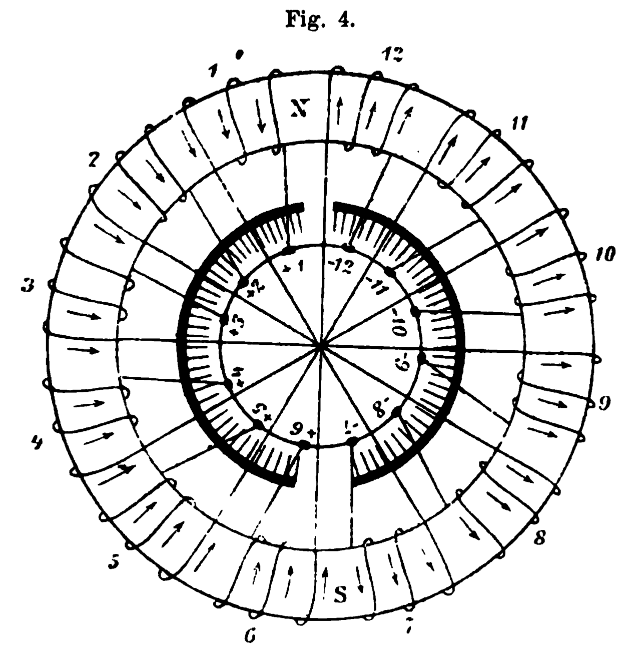
Bei der Gramme'schen Wickelungsart des Ringes bilden die Windungen desselben eine in sich geschlossene Spirale und die Collectoren stehen mit den aufeinanderfolgenden Windungen vermittels Zweigleitungen in Verbindung. Da eine einzige Umwickelung des Ringes eine zu wenig starke Wirkung hervorbringen würde, so sind eben mehrere Windungen zu einer Art Spule vereinigt. Ein in die Maschine hineingeleiteter Strom geht von a Fig. 1 aus, durchläuft die links- und rechtsseitige Anzahl der Spulen und vereinigt sich in b. Ist der Widerstand einer

Spule $= w$, so erfährt der Strom bei 12 Spulen einen Widerstand von 3 w.

Auf eine ganz einfache Weise lässt sich nun die Wickelung des Gramme'schen Ringes so abändern, dass man jede beliebige Anzahl von Spulen in den Stromkreis einschalten kann, wodurch also auch der innere Widerstand des Ringes innerhalb gewisser Grenzen vermehrt oder vermindert werden kann, was bei Änderungen des äusseren Widerstandes von grossem Vortheile sein wird.

Besteht die ganze Wickelung des Ringes z. B. aus zwölf aufeinanderfolgenden Spulen, so verbindet man, Fig. 4, ein Ende der Spule 1 mit dem Collector 1, das andere Ende geht isolirt

Fig. 4.



zur Spule 7, deren zweites Ende mit dem Collector 7 in Verbindung steht; ein Ende der Spule 2 mit Collector 2, das andere Ende führt zur Spule 8, deren zweites Ende mit Collector 8 in Verbindung steht, u. s. w. Man sieht die Art der Wickelung der einzelnen Spulen ist die gleiche, wie in Fig. 1, nur ist immer ein Ende der Spule mit einem Ende der gegenüberliegenden Spule verbunden, während die beiden anderen Enden derselben mit

den entsprechenden Collectoren in Verbindung stehen. Dadurch ist es möglich, vermittels entsprechend geformter Bürsten ein beliebiges Spulenpaar in den Stromkreis ein- und auszuschalten; vermittels **halbkreisförmiger Bürsten** kann man den Strom sechs Spiralen zugleich zuführen und von den andern sechs abführen. Der Strom hat dabei in den Spiralen die in der Figur 4 durch die Pfeile angedeutete Richtung. Der Widerstand beträgt in diesem Falle für den Strom $\frac{2w}{6} = \frac{w}{3}$, wenn w den Widerstand einer Spule bedeutet. Bei Benützung von 1, 2, 3, 4, 5 Spulenpaaren sind die entsprechenden Widerstände des Ringes $2w$, $\frac{2w}{2}$, $\frac{2w}{3}$, $\frac{2w}{4}$ und $\frac{2w}{5}$.

Um nun die magnetisirende Wirkung des Stromes auf den Ring zu studiren wenn derselbe die Windungen von 1, 2, 3, 4, 5, 6 Spulenpaaren (nebeneinander geschaltet) durchlauft, habe ich einen weichen Eisenring auf die soeben beschriebene Weise mit übersponnenem Drathe gewickelt. Die Stärke der in dem Ring entstandenen Pole wurde dadurch geprüft, dass die ablenkende Wirkung derselben auf eine Bussole bestimmt wurde, die in einer Entfernung von 35 Ctm. vom Mittelpunkt des Ringes so aufgestellt war, dass der Drehpunkt der Bussolennadel in der Verbindungslinie der Pole des Ringes sich befand. (Eine der Hauptlagen bei Bestimmung von $\frac{M}{T}$).

Die erhaltenen Resultate für vier verschiedene Stromquellen von 1, 2, 3 und 4 Bunsen-Elementen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Es übt natürlich auch der in den Windungen circulirende Strom für sich eine ablenkende Wirkung auf die Bussole aus. Da es sich aber hier doch nur um angenäherte relative Werthe handelt, so wurde diese Wirkung nicht zu eliminiren gesucht.

Wie man aus der Tabelle ersehen kann, tritt zuerst ein Steigen und dann ein Fallen der magnetisirenden Wirkung des Stromes ein, wenn in den Stromkreis immer mehr und mehr Spulenpaare eingeschaltet werden. Durchlauft der Strom die Windungen **eines** Spulenpaares z. B. $^3/_9$ (Fig. 4), d. h. tritt der Strom bei 3 ein und bei 9 aus, so sind die Ablenkungen der

Tabelle.

Stromquelle											
1 Bunsen-Element			2 Bunsen-Elemente			3 Bunsen-Elemente			4 Bunsen-Elemente		
Zahl der eingeschalteten Spulenpaare	Bussolen-Ablenkung	Stromstärke in Ampère	Zahl der eingeschalteten Spulenpaare	Bussolen-Ablenkung	Stromstärke in Ampère	Zahl der eingeschalteten Spulenpaare	Bussolen-Ablenkung	Stromstärke in Ampère	Zahl der eingeschalteten Spulenpaare	Bussolen-Ablenkung	Stromstärke in Ampère
1	10 °	2·79	1	17·1°	4·96	1	22·2°	6·5	1	26 °	7·65
2	14·2	4·24	2	24·3	7·48	2	29·4	9·44	2	34	11·0
3	16·5	5·13	3	27·0	8·75	3	32·5	11·03	3	36	12·54
4	17·2	5·78	4	27·6	9·9	4	32·7	11·9	4	36·2	13·61
5	16·2	6·34	5	26·0	10·66	5	30·8	12·62	5	34·2	14·3
6	14·5	6·75	6	24·0	11·1	6	27·5	13·1	6	30·5	14·85

Bussole aus dem magnetischen Meridian für die vier Stromquellen 10°, 17·1°, 22·2° und 26°. Durchlauft der Strom die Windungen zweier Spulenpaare, z.B. $^3/_9$ $^4/_{10}$, d.h. tritt der Strom zugleich in die Spulen 3 und 4 ein und aus den Spulen 9 und 10 aus, so sind die betreffenden Ablenkungen 14·2°, 24·3, 29·4 und 34°. Die magnetisirende Wirkung des Stromes ist am grössten, wenn er durch vier Spulenpaare, z. B. $^2/_8$, $^3/_9$, $^4/_{10}$, $^5/_{11}$ geht. Dagegen wird die Magnetisirung schwächer, wenn noch die Spulenpaare $^1/_7$ und $^6/_{12}$ hinzugenommen werden. Natürlich wurde bei den Versuchen der Ring immer so gedreht, dass die Verbindungslinie der entstandenen Pole des Ringes auf dem magnetischen Meridian der Bussolennadel senkrecht stand.

Sehr schön lässt sich die magnetisirende Wirkung des Stromes für die verschiedenen Fälle zeigen, wenn man auf den Ring ein mit Eisenfeile bestreutes Cartonblatt legt, während der Strom durch die Windungen der Spulenpaare geht. Wie man aus den beigelegten Abzügen (Taf. I) sieht, werden die entstehenden Pole stärker und dann schwächer und immer mehr und mehr nach oben und unten gedrängt, je mehr Spulenpaare in den Stromkreis eingeschaltet werden.

Wird also eine dynamoelektrische Maschine mit einem so gewickelten Ringe zur Kraftübertragung benützt, so wird man den Zu- und Ableitungsbürsten des Stromes nur die Grösse von einem Drittel des Collectorumfanges geben, um die stärkste magnetisirende Wirkung des Stromes auf den Ring hervorzubringen. Durch Drehung der Bürsten kann man den Polen im Ring jede gewünschte Lage geben.

Anders verhält es sich jedoch, wenn die dynamoelektrische Maschine zur Erzeugung eines Stromes dient.

In diesem Falle entstehen in Folge der durch den Elektromagnet im Ring influenzirten Pole Ströme in den einzelnen Spulen, deren Richtungen in der Fig. 4 durch die Pfeile angedeutet sind. Es müssen nun aber alle sechs Spulenpaare in den Stromkreis vermittels halbkreisförmiger Bürsten eingeschaltet werden, weil ja dadurch die magnetisirende Wirkung der in den Spulen circulirenden Ströme auf den Ring selbst geringer wird.

Die Versuche haben ja in diesem Falle ergeben, dass, obwohl die Gesammtströme von 6·75, 11·1, 13·1 und 14·85 Ampère

in den sechs Spulenpaaren circuliren, deren magnetisirende Wirkung auf den Ring klein ist.

Die magnetisirende Wirkung des Stromes auf den Ring kann aber noch bedeutend vermindert werden, wenn man die Anzahl der Spulen vermehrt; je grösser dieselbe ist, desto mehr wird der durch die Ströme erzeugte Nordpol und Südpol nach oben und unten gedrängt, so dass die durch den Elektromagneten influenzirten Pole rechts und links immer weniger und weniger von denselben geschwächt werden.

Bei unendlich vielen Spulenpaaren müsste der durch die in denselben entstehenden Ströme erzeugte Nord- und Südpol auf einen unendlich kleinen Raum auf der oberen und unteren Hälfte des Ringes sich beschränken.

Abgesehen nun davon, dass sich ein solcher Ring nicht ausführen lässt, kommt noch ein weiterer Umstand in Betracht.

Bisher wurde angenommen, dass die Ströme in den einzelnen Spulenpaaren gleich stark sind; das ist aber nicht der Fall. Die Stärke des Magnetismus der durch den Elektromagnet im Ring influenzirten Pole nimmt ja nach oben und nach unten hin ab, also auch die dadurch erzeugten Ströme. Die Ströme, welche in den einzelnen Spulenpaaren entstehen, sind an Stärke nicht einander gleich, z. B. die in den Spulenpaaren $^3/_9$ $^4/_{10}$ (Fig. 4) entstehen, werden stärker sein als die in den übrigen Spulenpaaren. Es kommt daher immer noch zu einer schwachen magnetisirenden Wirkung des Stromes auf den Ring, die aber doch nie von grossem Einflusse auf die starke Influenzwirkung des Elektromagneten werden kann.

Bei der gewöhnlichen Wickelungsweise des Ringes wird eben die magnetisirende Wirkung des Stromes eine so bedeutende, weil sich alle in den einzelnen Spulen entstehenden Ströme im Ring selbst zu einem Gesammtstrom vereinigen, der eine solche Richtung hat, dass er kräftige Pole oben und unten im Ring hervorzubringen sucht.

Bei der besprochenen neuen[1] Wickelungsart vereinigen sich die in den einzelnen Spulen auftre-

[1] Diese Wickelungsweise des Ringes ist als solche nicht neu, denn z. B. bei der Maschine von Brush hat der Ring dieselbe Verbindungsweis

tenden Ströme ausserhalb des Ringes in den halbkreisförmigen Bürsten zu einem Gesammtstrom und die magnetisirenden Wirkungen dieser Ströme heben sich, wenn nicht vollständig, so doch beinahe auf.

Durch diese Nebeneinanderschaltung der Spulen wird freilich die elektromotorische Kraft des Stromes sehr gering, aber durch Vermehrung der Windungen in jeder Spule und durch die Vermehrung der Anzahl derselben ist es ja möglich, die elektromotorische Kraft beliebig zu steigern.

Bei der practischen Ausführung des Ringes und des dazugehörigen Collectors muss man natürlich darauf achten, dass nie eine kurze Verbindung der beiden halbkreisförmigen Bürsten durch einen Collectorstreifen eintritt.

---

der Spulen, nur werden durch einen Commutator die Spulen so hintereinander geschaltet, dass wieder vermittels zweier Bürsten der Gesammtstrom aus dem Ring fortgeleitet werden kann.

XVIII. SITZUNG VOM 10. JULI 1884.

Das w. M. Herr Prof. E. Linnemann übersendet eine Abhandlung des Herrn Prof. Dr. J. Lerch an der deutschen Universität zu Prag, betitelt: „Untersuchung über Chelidonsäure".

Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: „Über Determinanten höheren Ranges".

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn L. Haitinger ausgeführte Arbeit „Über Chelidonsäure".

Herr Prof. Lieben überreicht ferner eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit „Über Camphoronsäure", von den Herren Dr. J. Kachler und Dr. F. V. Spitzer.

Herr Dr. Hans Molisch, Assistent am pflanzenphysiologischen Institut der Wiener Universität, überreicht eine in diesem Institute ausgeführte Arbeit: „Über die Ablenkung der Wurzeln von ihrer normalen Wachsthumsrichtung durch Gase (Aërotropismus)."

An Druckschriften wurden vorgelegt.

Academia, Real de ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Entrega 237 & 238. Tomo XX. Habana, 1884; 8°.

— Romana: Analele. Ser. II. — Tomulu V. Bucuresci, 1884; 4°.

— — Ore-Cari Dispositiuni noue din Cabinetulŭ de Fisică alŭ universitatiĭ din Bucuresci de Em. Bacaloglu. Bucuresci, 1884; 4°.

— Vegetaţiunea Dobrogeĭ de Dr. Demetriu Brandza. Bucuresci, 1884; 4°.

— — Systèmes monétaires primitifs de l'Asie mineur et de la Grèce par Michel C. Soutzo. Bucharest, 1884; 4°.

Académie des inscriptions et belles-lettres: Comptes rendus. 4 série, Tome XII. Bulletin de Janvier—Février—Mars. Paris, 1884; 8°.

Central-Commission, k. k. statistische: Statistisches Jahrbuch für das Jahr 1881. VI. und X. Heft. Wien, 1883; 8°.

— — Statistik des Sanitätswesens der im Reichsrathe vertretenen Königreiche und Länder für das Jahr 1881. V. Band, 2. Heft. Wien, 1884; Folio.

— — Nachrichten über Industrie, Handel und Verkehr. XXVI. Band, 5. Heft und XXVIII. Band. Wien, 1884; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVIII. No. 25. Paris, 1884; 4°.

Duval, E.: La Fièvre typhoïde et ses divers traitements et la Doctrine Pasteur à l'Académie de médecine. Paris, 1883; 8°.

Greifswald, Universität: Akademische Schriften pro 1883. 53 Stücke; 4° u. 8°.

Institute, the North of England of Mining and mechanical Engineers. Transactions. Vol. XXIII, part IV. Newcastle-upon-Tyne, 1884; 8°.

Journal of nervous and mental disease. N. S. Vol. IX. Nr. 1. New York, 1884; 8°.

Kiew, Universität: Universitäts-Nachrichten. XXIV. Band. Nr. 5. Kiew, 1884; 8°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. XXVIIIe année, 3e série, tome XIV, 511e livraison. Juillet 1884. Paris; 4°.

Nature. Vol. XXX, No. 766. London, 1884; 8°.

Observatoire royal de Bruxelles: Annales. N. S. Tome V. 1er fascicule. Bruxelles, 1884; 4°.

Observatory, the: A monthly review of Astronomy. No. 87. London, 1884; 8°.

Società italiana di Antropologia, Etnologia e Psicologia comparata: Archivio per l'Antropologia e la Etnologia. XIV. Volume, fascicolo 1°. Firenze, 1884; 4°.

— I. R. agraria di Gorizia: Atti e Memorie: Anno XXI. N. S, Nos. 7, 10—11 e 12. Gorizia, 1882; 8°. — Anno XXII. N. S. Nos. 1, 4—5, 6—12. Gorizia, 1883; 8°. — Anno XXIII. Nos. 1—6. Gorizia, 1884; 8°.

Société de Biologie: Comptes rendus des séances et Mémoires. Tome III[e] de la 7[e] série. Année 1881. Paris, 1882; 8⁰.

Society of Chemical Industry: The Journal. Vol. III. Nr. 6. Manchester, 1884; 8⁰.

Stossich, Michele: Animali rari e nuovi per il Mare Adriatico. Parte 4⁰ & 5⁰. Trieste, 1882—83; 8⁰. Serie 1[a]. Brani di Elmintologia Tergestina. Trieste, 1883; 8⁰.

Verein, naturwissenschaftlicher, für Sachsen und Thüringen: Zeitschrift IV. Folge, III. Band, 2. Heft. Halle a. S., 1884; 8⁰.

— Siebenbürgischer, für Naturwissenschaften in Hermannstadt: Verhandlungen und Mittheilungen. XXXIV. Jahrgang. Hermannstadt, 1884; 8⁰.

Wiener Medizinische Wochenschrift: XXXIV. Jahrgang. Nr. 25 und 26. Wien, 1884; 4⁰.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. V. Jahrgang. Nr. 9. Wien, 1884; 8⁰.

Untersuchungen über Chelidonsäure.

Von L. Haitinger und Ad. Lieben.

(I. Abhandlung.)

Historisches.

Die Chelidonsäure wurde 1839 von Probst[1] entdeckt, der ihre Darstellung aus dem Saft von *Chelidonium majus* beschreibt und eine Anzahl Salze dargestellt hat. Lerch[2] ermittelte 1846 ihre Zusammensetzung und die einer langen Reihe von Salzen. Nach ihm ist Chelidonsäure eine dreibasische Säure von der Zusammensetzung $C_{14}H_5O_{13}$ (C=6, H=1, O=8). Ihre Krystalle enthalten je nach den Umständen, unter denen die Krystallisation erfolgt, noch 1 oder 2 HO als Krystallwasser, geben jedoch beim Trocknen bei 100° nicht nur ihr Krystallwasser ab, sondern verlieren auch noch 1 HO, das zur Constitution gehört. Die getrocknete Säure entspricht daher der Formel $C_{14}H_4O_{12}$ und stellt, wie man etwa heute sagen würde, ein erstes Anhydrid der dreibasischen Chelidonsäure $C_{14}H_5O_{13}$ dar. Auf Lerch's Untersuchung gestützt, hat man seither die Chelidonsäure als dreibasische Säure betrachtet, ihr aber doch zugleich statt der Formel $C_{14}H_5O_{13}$, vielmehr die der getrockneten Säure $C_{14}H_4O_{12}=C_7H_4O_6$ (C=12, H=1, O=16) beigelegt.

Eine interessante Zersetzung der Chelidonsäure lehrte Wilde[3] 1863 kennen, indem er nachwies, dass sie durch Brom bei Gegenwart von Wasser in Oxalsäure und einen Körper von der Zusammensetzung des Pentabromacetons, nebst etwas Bromoform, gespalten wird. Auch untersuchte er das Verhalten der Chelidon-

---

[1] Annalen der Pharm. 29, p. 116.

[2] Annal. d. Chem. u. Pharm. 57, p. 273.

[3] Annal. d. Chem. u. Pharm. 127, p. 164.

säure bei höherer Temperatur, worüber bereits einige Angaben von Lerch vorlagen, gelangte jedoch nicht zu präcisen Resultaten.

Sandow,[1] der 1872 die Einwirkung von Brom und Chlor auf Chelidonsäure untersuchte, ohne, wie es scheint, von Wilde's Versuchen Kenntniss zu haben, erhielt wie dieser durch Brom Oxalsäure und Bromoform, statt des Pentabromacetons aber das sogenannte Bromaxoform $C_3HBr_5O_2$ (wohl nur unreines Pentabromaceton). Sandow stellte ferner die drei Äther dar, die man von der dreibasischen Chelidonsäure erwarten durfte, doch haben sich seine bezüglichen Angaben bei unserer Untersuchung als unrichtig herausgestellt.

Die letzte Arbeit über Chelidonsäure rührt von Lietzenmayer[2] her, der, anknüpfend an die Angaben von Probst und Lerch, sowie an eine darauf bezügliche Notiz von Hutstein[3] zunächst die Bereitungsweise der Chelidonsäure verbesserte und einige neue Salze darstellte. Die Darstellung der dreibasischen Salze Lerch's gelang ihm nicht und er betrachtet die Chelidonsäure daher als zweibasische Säure. Die Salze, die mehr Metall enthalten als dem neutralen Salz entspricht, fasst er als basische Salze auf. Ein weiteres Argument gegen die dreibasische Natur der Chelidonsäure findet Lietzenmayer in dem Verhalten zu Salzsäure, durch deren Einwirkung selbst bei langem Kochen oder bei 170° keine Kohlensäure abgespalten wird, vielmehr die Chelidonsäure, bis auf die Bildung eines rothen Nebenproductes, im Wesentlichen unverändert bleibt. Durch Reduction mittelst Natriumamalgam erhielt Lietzenmayer nur einen gelblichen, sauren Syrup, der zu einer gummiartigen Masse eintrocknete und zur Analyse nicht geeignet schien. Von grösserer Wichtigkeit ist die Beobachtung, dass Chelidonsäure durch Kochen mit Ammoniak in eine neue, sehr stabile zweibasische Säure von der Zusammensetzung $C_7H_7O_6N$ übergeführt wird, von der der Verfasser auch mehrere Salze dargestellt hat.

Wir werden in der folgenden Darlegung unserer Untersuchungen noch Gelegenheit haben, auf einzelne Angaben der

---

[1] Inauguraldissertation. Jena 1872.

[2] Inauguraldissertation. Erlangen 1878.

[3] Chem. Centralbl. (1851), p. 490.

genannten Autoren zurückzukommen. In fast allen Arbeiten wird auf die wahrscheinlich nahe Beziehung zwischen Chelidonsäure und Meconsäure hingewiesen, doch ist keinerlei experimenteller Beweis für einen derartigen Zusammenhang erbracht worden, wie denn überhaupt die angeführten Untersuchungen noch keine Anhaltspunkte zur Beurtheilung der Constitution der Chelidonsäure an die Hand geben.

Darstellung von Chelidonsäure.

Wir haben im Laufe mehrerer Jahre alle bisher angegebenen Methoden zur Bereitung von Chelidonsäure angewendet, sind aber schliesslich bei der von Lietzenmayer empfohlenen stehen geblieben. Nachdem die betreffende Abhandlung in keine der verbreiteten Zeitschriften, noch auch in die chemischen Handbücher übergegangen ist, wollen wir die wesentlichen Punkte der dort angegebenen Darstellungsmethode hier kurz mittheilen. Es wird der ausgepresste, durch Aufkochen mit Eiweiss und Coliren geklärte Saft mit Salpetersäure (6—8 Grm. vom specifischen Gewichte 1·3 für je 1 Kilo Saft) angesäuert und so lange mit Bleinitrat versetzt, als ein Niederschlag entsteht. Dieser wird gut gewaschen, dann mit etwa der zehnfachen Menge Wassers angerührt und mit einer Lösung von Calciumhydrosulfid zersetzt, was leicht und schnell von Statten geht. Die Lösung des Calciumchelidonats wird sofort abfiltrirt, mit Salzsäure angesäuert, mit Thierkohle gekocht und zur Krystallisation eingedampft. Das erhaltene Kalksalz wird, wenn es noch etwas gelblich gefärbt sein sollte, aus Wasser unter Zusatz von Salzsäure und Thierkohle umkrystallisirt. Sodann löst man es bei Kochhitze in salpetersäurehältigem Wasser und setzt die berechnete Menge Silbernitrat hinzu. Beim Abkühlen scheidet sich Silberchelidonat ab, das abgesaugt, gewaschen, in heissem Wasser suspendirt, mit Salzsäure zerlegt wird. Man filtrirt vom Chlorsilber ab und erhält beim Erkalten sofort reine Chelidonsäure.

Wir stellten nach diesem Verfahren mehrmals grössere Mengen der Säure dar und erhielten jedesmal ein reines, farbloses Product, sofern wir nicht verabsäumten schon das Calciumchelidonat vollkommen farblos darzustellen. Falls dieses auch nur schwach gefärbt ist, wird nur eine bräunliche Säure erhalten

und diese lässt sich weder durch Umkrystallisiren für sich, noch auch durch Behandlung mit Thierkohle vollständig entfärben.

Was die Ausbeute an Calciumchelidonat anlangt, so erhielten wir Mengen, die zwischen 0·6—1·0 Grm. per Kilogramm des frischen Krautes variirten. Aus einem Gramm Calciumsalz erhält man 0·7 Grm. Chelidonsäure. Dass in dem Safte von *Chelidonium majus* ausser Chelidonsäure auch Citronensäure und gewöhnliche Äpfelsäure (nicht ein Isomeres derselben) enthalten ist, hat der Eine von uns schon früher nachgewiesen.[1] Ausserdem wurden erhebliche Mengen Phosphorsäure, Kalium, sowie auch Calcium und Magnesium in dem Krautsafte gefunden.

Ätherification der Chelidonsäure.

Behufs Darstellung der Äther der Chelidonsäure wurde dieselbe in der 10—12fachen Menge absoluten Alkohols suspendirt und dieser mit Salzsäuregas gesättigt. Dabei trat, in dem Maasse als sich die Ätherbildung vollzog, Lösung der Säure ein, so dass nach etwa zweitägigem Stehen eine klare Flüssigkeit resultirte. Diese wurde durch Destillation aus dem Wasserbade von Salzsäure und Alkohol befreit, und der dickliche Rückstand in wenig heissem Alkohol aufgenommen. Beim Abkühlen schieden sich dann blass-rosa gefärbte, körnige Krystalle ab, die abgesaugt und mit kaltem Alkohol, worin sie sich wenig löslich erwiesen, gewaschen wurden. Sie betrugen dem Gewichte nach etwa ein Viertel der angewandten Chelidonsäuremenge und bestanden, wie weiter unten gezeigt werden wird, aus primärem Äthylchelidonat.

Die gelblich gefärbte Mutterlauge wurde, nachdem neuerdings der grösste Theil des Alkohols verjagt worden war, mit Wasser geschüttelt, wodurch der neutrale Chelidonsäureäther als ölige, nach kurzer Zeit zu Krystallen erstarrende Flüssigkeit abgeschieden wurde, während im Wasser der letzte Rest anhängender Salzsäure und geringe Mengen unveränderter Chelidonsäure, sowie des sauren Äthers gelöst blieben.

Der ausgefällte Äther konnte durch Umkrystallisiren aus heissem verdünntem Alkohol leicht rein erhalten werden, wobei es sich als zweckmässig erwies, die ersten Krystallisationen durch

---

[1] Monatsh. f. Ch. (1881) p. 485.

Umrühren zu stören, da andernfalls die häufig hohlen Krystalle viel der etwas gelblich gefärbten Mutterlauge einschliessen.

Chelidonsäurediäthyläther. Der reine Äther krystallisirt aus Alkohol in grossen, nur sehr schwach gelblich gefärbten Prismen und schmilzt bei 62·7° (corrigirt). Er ist leicht löslich in heissem Alkohol und Äther, unlöslich in Wasser, ertheilt aber diesem schon nach kurzem Kochen eine schwach saure Reaction, was jedenfalls auf eine beginnende Zersetzung zurückzuführen ist, um so mehr, als auch im Destillate Spuren von Alkohol (durch die Jodoformreaction) nachweisbar sind.

Die Elementaranalyse ergab folgende Werthe:

0·2761 Grm. Substanz gaben nach Kopfer verbrannt 0·5590 Grm. CO_2 und 0·1310 Grm. H_2O.

Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $(C_2H_5)_2C_7H_2O_6$
C......55·22	55·00
H...... 5·27	5·00

In wässeriger Kalilauge ist der Äther ziemlich leicht und mit gelblicher Farbe löslich, wahrscheinlich unter Bildung eines Derivates der später zu beschreibenden Xanthochelidonsäure. Die Lösung bleibt auf Essigsäurezusatz klar, gibt aber mit Bleiacetat einen gelben Niederschlag. Auf eine weitere Untersuchung desselben wurde verzichtet, da schon in der Kälte eine theilweise Verseifung, respective Abscheidung von Alkohol beobachtet werden konnte.

Eine alkoholische Lösung des Äthers gibt mit alkoholischem Ammoniak versetzt, sofort eine krystallinische Fällung, die jedenfalls aus dem Amid der Chelidonsäure besteht. Versetzt man eine Lösung des Äthers mit Brom, so bleibt die rothe Bromfärbung selbst durch längere Zeit sichtbar; es scheint also kein Additionsproduct zu entstehen. Dessgleichen bleibt Chelidonsäureäther mit concentrirter Natriumbisulfitlösung geschüttelt, oder selbst erwärmt, vollkommen unverändert.

Chelidonsäuremonoäthyläther. Die oben erwähnten, bei der Ätherification der Chelidonsäure zuerst erhaltenen Krystalle liessen sich durch Umkrystallisiren aus heissem Alkohol unter Zuhilfenahme von Thierkohle leicht von ihrer röthlichen Färbung

befreien. Ihr Schmelzpunkt, der auch durch neuerliches Umkrystallisiren nicht mehr verändert wird, liegt bei 223—224°, doch ist bei dieser Temperatur schon eine nicht unbedeutende Zersetzung bemerkbar. Die Substanz ist sehr schwer löslich in Wasser oder Äther, etwas leichter in kaltem und ziemlich leicht in kochendem Alkohol. Die Elementaranalyse ergab:

0·3187 Grm. Substanz nach Kopfer verbrannt, gaben 0·5973 Grm. CO_2 und 0·1136 Grm. H_2O.

	Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $(C_2H_5)C_7H_3O_6$
C	51·11	50·94
H	3·96	3·77

Ihrer Zusammensetzung nach muss die Substanz die Eigenschaften einer Säure besitzen, ihre Lösungen zeigen thatsächlich eine saure Reaction, auch gibt sie in Alkohol gelöst und mit Bleiacetat versetzt, eine starke Fällung, während der oben beschriebene Diäthyläther dieses Verhalten nicht zeigt. Mit Alkalien gibt sie wie jener eine gelbe Lösung.

Den Resultaten unserer Untersuchungen zufolge bildet die Chelidonsäure demnach einen Mono- und einen Diäthyläther, was vollkommen im Widerspruch mit den von Sandow erhaltenen Ergebnissen steht. Sandow erhielt, indem er wie wir Chelidonsäure, Alkohol und Salzsäure auf einander einwirken liess, drei Körper, die er der damals herrschenden Ansicht gemäss als Mono-, Di- und Triäthyläther der Chelidonsäure auffasst. Mono- und Diäthyläther wurden von ihm durch Umkrystallisiren aus Wasser getrennt, wobei aber jedenfalls eine theilweise Verseifung erfolgen musste.

Der angebliche Triäthyläther wird als lauchartig riechende, auf Wasser schwimmende Flüssigkeit von sehr hohem Siedepunkte beschrieben. Wir waren nicht im Stande ein derartiges Product aufzufinden und stehen nicht an zu glauben, dass Sandow bloss unreine Substanzen in Händen hatte, um so mehr als die seinerseits beigebrachten analytischen Belege (nur die Metallbestimmungen der Salze der Monoäthyläthersäure lieferten mit der Theorie übereinstimmende Zahlen) äusserst lückenhaft sind.

Zersetzung der Chelidonsäure durch Basen in der Hitze.

Chelidonsäure, mit starken Basen im Überschuss versetzt, nimmt eine intensiv gelbe Färbung an, die beim Kochen mehr oder minder vollständig wieder verschwindet. Wie wir schon vor längerer Zeit in unserer vorläufigen Mittheilung[1] berichtet haben, wird Chelidonsäure beim Kochen mit Alkalien oder besonders glatt beim Kochen mit alkalischen Erden im Sinne folgender Gleichung gespalten:

$$C_7H_4O_6 + 3H_2O = 2C_2O_4H_2 + C_3H_6O.$$

Da diese Reaction zur Beurtheilung der Constitution der Chelidonsäure von besonderer Wichtigkeit ist, so war es nöthig, sich nicht allein mit einem sorgfältigen qualitativen Nachweise der Spaltungsproducte zu begnügen, sondern auch festzustellen, dass wirklich zwei Moleküle Oxalsäure und ein Molekül Aceton und keinerlei andere Nebenproducte dabei entstehen.

Zum qualitativen Nachweise des Acetons wurde chelidonsaurer Kalk in einem Silberkolben mit Kalilauge übergossen. Dabei schwillt das Salz nach kurzem Stehen zu einer klaren, gelben, gelatinartigen Masse auf, die wahrscheinlich eine Verbindung der später zu beschreibenden Xanthochelidonsäure darstellt. Schon nach kurzem Erwärmen wurde die Mischung wieder dünnflüssig, worauf sie etwa 10 Stunden unter Rückflusskühlung gekocht wurde. Hienach wurde etwa die Hälfte abdestillirt, das Destillat neuerdings destillirt und so fort, indem jedesmal die flüchtigsten Antheile separat aufgefangen und mit calcinirter Pottasche versetzt wurden. Im Ganzen wurde derart etwa 1 Gramm einer leicht beweglichen Flüssigkeit von specifischem Acetongeruche erhalten. Diese wurde mit geschmolzener Pottasche völlig entwässert und destillirt, wobei sie vollständig zwischen 56·5° und 57·0° (der Siedetemperatur des Acetons) überging. Eine damit ausgeführte Elementaranalyse lieferte folgende Werthe:

---

[1] Monatshefte f. Chemie (1883) p. 273. Wir haben daselbst erwähnt, dass nach einer mündlichen Mittheilung von Lerch auch er bei der Zersetzung der Chelidonsäure durch kochende Alkalien stets einen eigenthümlichen, an Aceton erinnernden Geruch beobachtet hat. In Folge unserer Publication hat uns Lerch seither mitgetheilt, dass er sich nicht mit dem Geruch begnügt, sondern schon vor langer Zeit eine Analyse des Acetons ausgeführt habe.

0·2480 Grm. Substanz gaben mit CaO verbrannt 0·5603 Grm. CO_2 und 0·2299 Grm. H_2O.

Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für C_3H_6O
C........61·62	62·07
H ....10·30	10·34

Auch sonst zeigte der Körper alle Eigenschaften des Acetons als Löslichkeit in Wasser, Bildung einer krystallinischen Bisulfitverbindung, Abscheidung von Jodoform mit Jod und Kalilauge etc. Er wirkte nicht reducirend auf ammoniakalische Silberlösung, enthielt also keinen aldehydartigen Körper.

Zur quantitativen Bestimmung des gebildeten Acetons benutzten wir die von Krämer[1] angegebene Methode der Überführung desselben in Jodoform.[2] Zu dem Ende kochten wir 1·0990 Grm. bei 110° getrockneter, also wasserfreier Chelidonsäure mit überschüssiger Kalkmilch durch 20 Stunden. Hierauf wurde abdestillirt und von dem auf 100 CC. gebrachten Destillate aliquote Theile zur Acetonbestimmung verwendet. Aus dem Mittel mehrerer befriedigend übereinstimmender Einzelbestimmungen berechnet sich für das ganze Destillat: 0·313 Grm. Aceton. Dies entspricht 28·48 Percent der angewendeten Menge Chelidonsäure, während nach der oben aufgestellten Zersetzungsgleichung 31·52 Percent entstehen sollten. Bei der Flüchtigkeit des Acetons und den der Bestimmungsmethode anhaftenden Unsicherheiten ist die Übereinstimmung jedenfalls genügend.

Beim selben Versuch wurde auch die gebildete Oxalsäuremenge quantitativ ermittelt. Hierzu wurde der nach dem Abdestilliren des Acetons verbleibende Rückstand in warmer Salzsäure gelöst, von einem flockigen Niederschlag (Kieselsäure aus dem Kalk?) abfiltrirt, mit Ammoniak alkalisch gemacht und mit Essigsäure wieder übersäuert. Der ausgefallene oxalsaure Kalk wurde auf einem Filter gesammelt und getrocknet. Um nicht nur seine Menge, sondern auch seine Zusammensetzung zu ermitteln,

---

[1] Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft. 1880. 1000.

[2] Die Methode ist, soferne nicht der allerhöchste Grad der Genauigkeit verlangt wird, recht brauchbar und bietet auch in der Ausführung keine besonderen Schwierigkeiten. Sehr wesentlich ist aber ein grosser Überschuss von Kalilauge und Jodlösung, da nur dann unter einander übereinstimmende Zahlen erhalten werden.

wurde zuerst ein aliquoter Theil bei 100° bis zu constantem Gewicht getrocknet und für sich geglüht. 1·6413 Grm. lieferten derart 0·6303 Grm. CaO, d. i. 38·40 Percent, während $CaC_2O_4 + H_2O$ theoretisch 38·36 Percent CaO liefern sollte. Zu dem erhaltenen Ätzkalk wurde der Rest des Oxalates sammt der Filterasche gebracht, neuerdings geglüht und in Summa 0·6730 CaO erhalten. Dieses entspricht 1·0816 Grm. Oxalsäure, d. i. 98·42 Percent der angewandten Chelidonsäuremenge, während der Bildung zweier Moleküle Oxalsäure aus einem Molekül Chelidonsäure 97·83 Percent vom Gewichte der letzteren entsprechen würde.

Wir haben uns endlich noch durch besondere Versuche überzeugt, dass bei der beschriebenen Zersetzung keine Kohlensäure entsteht, wodurch Lietzenmayer's Angabe, dass dabei neben Oxalsäure, die schon Lerch beobachtet hat, auch Kohlensäure gebildet wird, widerlegt erscheint.

Es zeigen diese verschiedenen Bestimmungen klar und unzweifelhaft, dass die eingangs angeführte Reactionsgleichung vollständig den Thatsachen entspricht. Dies ist jedoch nur in Bezug auf die Einwirkung von alkalischen Erden absolut richtig. Kocht man Chelidonsäure mit Kalilauge, so entsteht neben Oxalsäure immer Etwas einer gelben Substanz, die selbst durch lange fortgesetztes Kochen nicht zerlegt wird und ihre Gegenwart durch das Eintreten der Jodoformreaction auf Zusatz von Jod kundgibt. Ammoniak wirkt, wie dies schon Lietzenmayer darthat, in ganz anderem Sinne unter Bildung einer stickstoffhältigen Säure.

Einwirkung von Basen auf Chelidonsäure in der Kälte.

Wir haben schon in unserer vorläufigen Mittheilung angegeben, dass die von Lerch beschriebenen dreibasischen Salze nicht mehr der Chelidonsäure entsprechen, sondern einer anderen, aus dieser durch Wasseraufnahme hervorgehenden neuen Säure. Versetzt man nämlich Chelidonsäure mit überschüssiger Kalilauge und neutralisirt die gelb gewordene durch einige Zeit bei gewöhnlicher Temperatur gestandene Lösung mit Essigsäure, so erhält man auf Zusatz von Metallsalzen Niederschläge, welche von denen der chelidonsauren Salze ganz verschieden sind.

Wir haben einige der so erhaltenen Fällungen untersucht und gefunden, dass sie, selbst wenn aus essigsaurer Lösung dargestellt, auf sieben Atome Kohlenstoff mehr als zwei Atome eines einwerthigen, respective ein Atom eines zweiwerthigen Metalles enthalten. Durch die Einwirkung der Kalilauge wird daher die Chelidonsäure derart verändert, dass sie eine Zunahme ihrer Basicität erfährt.

Sehr klar tritt diese Zunahme beim Titriren der Chelidonsäure mit Kalilauge zu Tage. Lässt man nämlich tropfenweise Kalilauge zu einer Lösung von Chelidonsäure zufliessen, so bewirkt jeder einfallende Tropfen an der Berührungsstelle eine momentane Gelbfärbung, die beim Umschütteln wieder verschwindet. Sobald sich aber in der Lösung auf ein Molekül Chelidonsäure nur eine Spur mehr als zwei Moleküle Kaliumhydroxyd befindet, bleibt die Flüssigkeit gelb gefärbt. Sie röthet dann blaues Lakmuspapier nicht mehr, zeigt aber auch keine Einwirkung auf rothes. Setzt man nun mehr Kalilauge hinzu, so wird die Reaction alkalisch, macht aber nach kurzem Stehen wieder der neutralen Platz. Fährt man mit dem Zusatze der Kalilauge fort, so muss man immer länger bis zum Verschwinden der alkalischen Reaction warten, bis endlich nach Zusatz von mehr als 3 Mol. Kaliumhydroxyd die Flüssigkeit bleibend alkalisch wird.

Das dreibasische Salz der neuen Säure — wir wollen sie der gelben Farbe ihrer Salze wegen Xanthochelidonsäure nennen — reagirt wohl neutral. Gleichwohl besitzt die Xanthochelidonsäure vier durch Metalle vertretbare Wasserstoffatome, wie aus der Untersuchung des **xanthochelidonsauren Bleies** hervorgeht. Wir stellten diese Verbindung dar, indem wir Chelidonsäure mit überschüssiger Kalilauge versetzten, nach einiger Zeit mit Essigsäure stark ansäuerten und Bleiacetat hinzufügten. Es entstand eine reichliche gelbe, voluminöse Fällung, die nach einigem Stehen etwas dichter wurde. Sie wurde auf einem Filter gesammelt und reichlich mit kaltem Wasser gewaschen. Selbst die letzten Waschwässer enthielten immer noch Spuren von Blei. Doch ist das Salz in Wasser und selbst in kochender Essigsäure nur sehr wenig löslich. Zur Analyse wurde es im Vacuum über Schwefelsäure getrocknet.

0·7118 Grm. lieferten nach Kopfer verbrannt 0·0370 Grm. H_2O und 0·4939 Grm. eines Gemisches von Bleioxyd und Blei, welches mit verdünnter Essigsäure ausgezogen 0·1779 Grm. Pb hinterliessen (CO_2-Bestimmung wurde verloren).

0·7797 Grm. Substanz lieferten ebenso 0·3886 CO_2, 0·0391 H_2O, 0·5504 PbO+Pb und daraus 0·0333 Pb.

0·2009 Grm. Substanz verloren beim Erhitzen auf 160° langsam 0·0053 Grm (doch scheint dabei schon eine sehr geringe Zersetzung einzutreten) und lieferten 0·1941 Grm. $PbSO_4$.

	Gefunden in 100 Theilen			Berechnet für $C_7H_2Pb_2O_7+H_2O$
C	—	13·59	—	13·36
H	0·58	0·56	—	0·64
Pb	66·20	65·83	65·94	65·65
H_2O	—	—	2·64	2·86

Da die Xanthochelidonsäure, wie wir sogleich des Näheren darlegen werden, leicht in Chelidonsäure zurückverwandelt werden kann, muss man auch in ihr sieben Atome Kohlenstoff annehmen. Dann aber folgt aus der Zusammensetzung dieses Bleisalzes, welches seiner Entstehung in saurer Lösung nach keinesfalls als wirklich basisches Salz aufzufassen ist, dass sie eine vierbasische Säure $C_7H_6O_7$ ist.

Als vierbasische Salze der Xanthochelidonsäure muss man wohl auch die von Lietzenmayer dargestellten Salze $C_7H_2O_6(BaOH)(CaOH)+5^1/_2H_2O$, $C_7H_2O_6(CaOH)_2+8H_2O$ ansehen, welche dieser, wie dies die angeführten Formeln andeuten, für basische Salze der Chelidonsäure hielt.

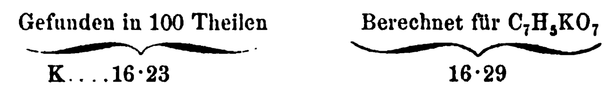
Wir haben uns bemüht, dem beschriebenen Bleisalze analoge Calcium- oder Silbersalze darzustellen, erhielten aber, indem wir wie bei jenem verfuhren, Niederschläge, die man eher als Gemische von drei- und vierbasischen Salzen betrachten kann. Zu der Schwierigkeit einheitliche Körper zu erhalten, gesellt sich noch eine andere. Einige der Salze der Xanthochelidonsäure — wir haben die Erscheinungen am genauesten am Bleisalz studirt — zersetzen sich beim blossen Aufbewahren. Als nachweisbares Spaltungsproduct ist Oxalsäure bemerkbar, während vermuthlich auch Aceton gebildet wird.

Die Zersetzung verläuft bei gewöhnlicher Temperatur allerdings sehr langsam, viel rascher aber beim Erhitzen im feuchten Zustande. Dies ist auch der Grund, warum zum Waschen des

rohen xanthochelidonsauren Bleies nur kaltes Wasser verwendet werden darf.

Ein einbasisches Salz der Xanthochelidonsäure wurde im reinen Zustande erhalten, als eine mit Kalilauge versetzte Chelidonsäurelösung nach 2—3 Stunden vorsichtig mit Salpetersäure angesäuert wurde. Dabei scheidet sich alsbald ein deutlich krystallinischer, nur schwach lichtgelb gefärbter Niederschlag ab, der vor der Pumpe filtrirt und mit wenig kaltem Wasser gewaschen wurde. Er besteht aus **saurem xanthochelidonsauren Kalium.** Dieses ist ziemlich schwer in kaltem, dagegen leicht löslich in heissem Wasser, dessgleichen in kalten verdünnten Säuren. Es zeigt sämmtliche, weiter unten zu beschreibenden Reactionen der Xanthochelidonsäure und entspricht der Formel $C_7H_5KO_7$.

0·3101 Grm. der über Schwefelsäure getrockneten Substanz verloren nichts bei 100°, nur wenig bei 140°, erlitten erst bei 180° einen kleinen, stetig andauernden Gewichtsverlust (jedenfalls schon unter Zersetzung) und gaben 0·1121 Grm. K_2SO_4.



Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $C_7H_5KO_7$
K....16·23	16·29

Reactionen der Xanthochelidonsäure. Neutralisirt man eine alkalische Lösung von Xanthochelidonsäure (durch Stehenlassen von Chelidonsäure mit Kalilauge zu erhalten) mit Salpetersäure, so zeigt sie folgende Reactionen: Mit Blei, Silber, Merkurosalzen gibt sie starke, gelbe Niederschläge, dessgleichen mit Barium-, Calcium- und Zinksalzen, doch sind die letzteren in Wasser erheblich löslich. Der Silberniederschlag wird durch Kochen mit Ammoniak reducirt. Kupfersalze bewirken eine grünlichgelbe Fällung. Durch Eisenchlorid entsteht eine braune flockige Fällung, die aber bei Gegenwart von etwas Alkali oder sehr wenig Säure einer braunen, beziehungsweise rothbraunen Färbung Platz macht. Dies Verhalten sowie die Fällung mit Bleisalz kann als empfindliche Reaction auf Xanthochelidonsäure benützt werden.

Ein höchst merkwürdiges Aussehen bietet eine Calciumkaliumverbindung der Xanthochelidonsäure dar, die man durch Zusammenbringen von Calciumchelidonat mit Kalilauge erhält. Sie bildet, wie schon oben erwähnt, eine weiche, durchsichtige

lichtgelbe Masse vom Aussehen erstarrter Leimlösungen. Sie hält sich sehr lange Zeit unverändert im selben Zustande, wird durch die Kohlensäure der Luft nicht merklich zersetzt, gibt aber bei monatelangem Aufbewahren geringe Mengen von Oxalsäure. Auch bei langem Stehen von Chelidonsäure mit überschüssiger Kalilauge entstehen allmälig kleine Mengen von Oxalsäure. — Xanthochelidonsaure Salze mit Salpetersäure gekocht, liefern reichlich Oxalsäure.

Eigenschaften der freien Xanthochelidonsäure und ihre Rückverwandlung in Chelidonsäure. Es mag wohl befremdlich erscheinen, dass die xanthochelidonsauren Salze so lange Zeit als Verbindungen der Chelidonsäure angesehen wurden. Es dürfte dies nicht allein durch die leichte Entstehung derselben aus chelidonsauren Salzen verursacht worden sein, sondern auch in der leichten Rückbildung der Chelidonsäure aus der Xanthochelidonverbindung seinen Grund haben. Versucht man nämlich freie Xanthochelidonsäure aus ihren Salzen etwa durch Ansäuern mit Schwefelsäure und Ausschütteln mit Äther darzustellen, so nimmt der letztere wohl eine gelbliche Substanz auf, die mit Eisenchlorid eine rothbraune Färbung und mit Bleisalz eine gelbe Fällung gibt, die aber doch schon Chelidonsäure enthält. Keine besseren Resultate erhält man durch Zersetzung des xanthochelidonsauren Bleies mit Schwefelwasserstoff. Concentrirt man die erhaltene gelbliche Lösung durch Abdunsten im Vacuum oder Abdampfen im Wasserbade, so scheidet sie allmälig weisse Krystalle ab, die durch ihre Reactionen leicht als Chelidonsäure erkannt werden können. Schliesslich hinterbleibt mehr oder weniger, aber nie sehr viel einer dicken rothbraunen Mutterlauge, über deren Natur wir keine weiteren Untersuchungen vorgenommen haben.

Glatt erfolgt die Rückbildung der Xanthochelidonsäure in Chelidonsäure, wenn man die gelbe alkalische Lösung der ersteren mit Salzsäure ansäuert und bei gewöhnlicher Temperatur bis zu vollständiger Entfärbung stehen lässt.

Um die aus xanthochelidonsaurem Blei entstehende Chelidonsäure in einer jeden Zweifel ausschliessenden Weise zu identificiren, digerirten wir eine grössere Menge desselben mit verdünnter Salzsäure durch längere Zeit. Dabei wird die anfangs

fast farblose Mischung allmälig gelb bis dunkelroth. Sodann wurde die überschüssige Salzsäure durch Abdampfen in flachen Schalen vertrieben, mit Wasser aufgenommen und nach Ausfällung des mitgelösten Bleies durch Schwefelwasserstoff neuerlich eingedampft. Beim Abkühlen schieden sich sodann aus einer braunrothen, etwas Oxalsäure enthaltenden Mutterlauge bräunlich gefärbte Krystalle ab. Diese wurden abgesaugt, in Wasser gelöst, mit Calciumacetat versetzt und mit Thierkohle gekocht. Es wurde so ein vollkommen weisses Calciumsalz erhalten, dessen Aussehen und Zusammensetzung vollkommen mit dem des neutralen Calciumchelidonates übereinstimmte.

Seine wässerige Lösung gab mit Metallsalzen sämmtliche für Chelidonsäure charakteristische Reactionen, auch gab es mit Kalilauge übergossen die oben erwähnte gelatinartige Substanz.

0·3724 Grm. des zwischen Papier ausgepressten Salzes verloren bei 195° 0·0721 Grm. und gaben 0·0763 Grm. CaO.

Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für das von Lietzenmayer beschriebene Salz $CaC_7H_2O_6+3H_2O$
H_2O....19·36	19·57
Ca.....14·63	14·49

Reduction der Chelidonsäure.

Unterwirft man Chelidonsäure der Einwirkung von Reductionsmitteln, so erhält man je nach der Natur derselben und der Art der Einwirkung verschiedene Producte. Das letzte Endproduct, wie man es durch Behandlung mit concentrirter Jodwasserstoffsäure bei hoher Temperatur erhält, ist Pimelinsäure (höchst wahrscheinlich die normale). Führt man dagegen die Reduction mit Zink und Essigsäure durch, so wird eine Säure $C_7H_{10}O_5$ erhalten, die man als Ätheranhydrid einer Dioxypimelinsäure auffassen kann und die unter dem Einflusse von JH ebenfalls Pimelinsäure liefert. Reducirt man endlich die oben erwähnte, durch Einwirken von Alkalien aus Chelidonsäure entstehende Xanthochelidonsäure durch Natriumamalgam, so erhält man eine dritte Säure, deren Untersuchung leider auf mannigfache Schwierigkeiten stösst, so dass wir ihr nur vermuthungsweise die Zusammensetzung $C_7H_{12}O_7$ einer Trioxypimelinsäure zuschreiben dürfen. Auch sie gibt mit HJ erhitzt Pimelinsäure.

Reduction mit Zink und Essigsäure.

Versetzt man Chelidonsäure, die mit einer zur vollständigen Lösung ungenügenden Menge Wasser angerührt ist, mit Zinkspänen, so bemerkt man nur eine sehr spärliche Wasserstoffentwicklung. Gleichwohl wird das Zink angegriffen und auch die Chelidonsäure löst sich allmälig unter vorübergehender Bräunung der Flüssigkeit.

Zur Erzielung einer möglichst vollständigen Reduction erhitzten wir ein Gemisch von Chelidonsäure, verdünnter Essigsäure und Zink durch etwa 30 Stunden am Rückflusskühler, wobei zeitweise etwas Essigsäure hinzugefügt wurde. Sonderbarerweise entweichen dabei fortwährend geringe Mengen von Kohlendioxyd. Wir haben letzteres in der Meinung, dass es ein wesentliches Reactionsproduct sei, mehrmals mit besonderer Sorgfalt quantitativ bestimmt, konnten aber constatiren, dass es dem Gewichte nach nie mehr als etwa $1^1/_2$ Percent der angewandten Chelidonsäuremenge betrug, und daher nur einem secundären Processe entstammen kann. Unterwirft man das Rohproduct einer Destillation, so macht sich in den ersten Antheilen des Destillates manchmal die Gegenwart von Spuren eines flüchtigen Körpers durch einen schwachen acetonartigen Geruch und durch die Bildung geringer Mengen von Jodoform bei der Behandlung mit Jod und Kalilauge geltend.[1] Das eigentliche Reductionsproduct der Chelidonsäure befindet sich als Zinksalz neben viel Zinkacetat im Rückstande der Destillation. Es kann daraus durch Einleiten von Schwefelwasserstoff, Abfiltriren vom Schwefelzink und Eindampfen, respective Verjagen der Essigsäure gewonnen werden. Man gewinnt derart eine braune Krystallmasse — rohe Hydrochelidonsäure — im annähernden Gewicht der angewandten Chelidonsäure.

Die Reinigung derselben bot anfangs nicht geringe Schwierigkeiten. Es gelingt zwar leicht durch Umkrystallisiren aus heissem

---

[1] Jedenfalls entsteht Aceton, wenn solches wirklich vorlag, nur spurenweise und zwar wahrscheinlich durch Einwirkung der Lösung von essigsaurem Zink auf unveränderte Chelidonsäure. Ein besonderer Versuch zeigte nämlich, dass Chelidonsäure mit concentrirter Zinkacetatlösung gekocht, ebenfalls ein jodoformgebendes Destillat neben Spuren von Oxalsäure liefert.

Wasser nur mehr schwach bräunlich gefärbte harte Krystalle von einer geringen Menge einer dicken syrupösen Mutterlauge zu sondern, aber die vollständige Entfärbung der ersteren gelingt weder durch neuerliches Umkrystallisiren, noch auch durch Behandlung mit Thierkohle. Schliesslich benutzten wir folgendes Verfahren:

Die schon annähernd reinen bräunlichen Krystalle werden in Wasser gelöst und einige Zeit mit Zink digerirt, doch ohne dabei die Säure vollständig zu neutralisiren, da sich sonst ein basisches Zinksalz abscheiden würde. Leitet man nun Schwefelwasserstoff ein, so reisst das ausfallende Schwefelzink die färbenden Verunreinigungen mit nieder und das eingedampfte Filtrat liefert beim Abkühlen eine reichliche Krystallisation von weisser Hydrochelidonsäure. Die noch etwas gefärbten Mutterlaugen können neuerdings derselben Behandlung unterworfen werden.

Hydrochelidonsäure krystallisirt im reinen Zustande aus einer heiss gesättigten, wässerigen Lösung in farblosen, zu grösseren Aggregaten vereinigten Blättern und schmilzt unzersetzt bei 142° (corrigirt). Bei stärkerem Erhitzen scheint sie fast unverändert zu destilliren. Sie ist löslich in Alkohol, wenig löslich in Äther und sehr schwer löslich in Benzol. Die Elementaranalyse ergab für die Formel $C_7H_{10}O_5$ stimmende Werthe.

0·3434 Grm. Substanz mit Kupferoxyd verbrannt, gaben 0·6048 Grm. CO_2 und 0·1836 Grm. H_2O.

	Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $C_7H_{10}O_5$
C	48·03	48·28
K	5·94	5·75

Das Studium der Calcium-, Silber- und Zinksalze bestätigte vollkommen die für die freie Säure gefundene Zusammensetzung und lehrte gleichzeitig, dass dieselbe zwei durch Metalle ersetzbare Wasserstoffatome enthalte. Auch wurde nachgewiesen, dass man ein und dasselbe Calciumsalz erhält, gleichgiltig, ob man zur Darstellung desselben Calciumcarbonat oder Calciumhydroxyd verwendet, was den Gedanken an eine lactonartige Atomgruppe in der Hydrochelidonsäure ausschliesst.

Hydrochelidonsaures Zink wurde von uns gelegentlich der Reinigung der rohen Hydrochelidonsäure durch Digestion

derselben mit Zink erhalten. Es bildet kleine, harte, glänzende Täfelchen, die in kaltem Wasser sehr schwer, in heissem nur unter Abscheidung von etwas basischem Salze löslich sind. Leicht löslich ist es in heisser wässeriger Hydrochelidonsäurelösung und krystallisirt aus dieser beim Erkalten, oft mit freier Säure gemengt aus. Zur Analyse wurde es mit kaltem Wasser gewaschen und zwischen Papier abgepresst. Es enthält zwei Moleküle Krystallwasser, die beim Liegen über Schwefelsäure nicht, wohl aber beim Erhitzen auf 100° weggehen.

0·2623 Grm. Zinksalz verloren bei 100° 0·0341 Grm. H_2O, bei 200° nichts mehr und lieferten bei sehr vorsichtigem Erhitzen und nachherigem Abrauchen mit HNO_3 0·0783 Grm. ZnO.

Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $ZnC_7H_8O_5 + 2H_2O$
H_2O ....13·00	13·19
Zn .....23·95	23·81

Herr Hofrath Prof. v. Zepharovich hatte die Güte, eine krystallographische Untersuchung des Salzes vorzunehmen; er theilte uns darüber Folgendes mit.

Krystallsystem: Monosymmetrisch.

$$a:b:c = 1\cdot0292:1:1\cdot737$$
$$\beta = 80°\ 7^1/_2{}'$$

Sechseitige Täfelchen, welche höchstens 1 Mm. in der grössten Dimension erreichen und vorwaltend von $oP(c), \infty P\infty(a)$ und $\infty P2(p)$ begrenzt werden. Untergeordnet als äusserst schmale Flächen erscheinen $-P\infty(r)$, $P\infty(r')$ und $P2(o')$; da eine von diesen zur Berechnung der c-Axe dienen musste, ist diese mit einiger Unsicherheit behaftet. Die wichtigsten Kantenwinkel sind:

		Gemessen	(z)	Berechnet
$ac =$	*	80° 10	15	80° $7^1/_2{}'$
$a'c =$	*	99 55	15	99 $52^1/_2$
$pc =$		85 36	18	85 39
$pa =$	*	63 46	12	63 45
$pp' =$	*	52 35	6	52 30
$r'a' =$	*	32 57 (a)	5	33 0
$r'c =$	*	66 50 (a)	8	66 $52^1/_2$
$o'p' =$		28 40 (a)	1	28 $35^2/_3$

Spaltbarkeit ziemlich gut nach $\infty P \infty$ und $\infty P \infty$. Die Hauptauslöschungen parallel und senkrecht zur Kante *ca*, die Ebene der optischen Axen ist (010); ihr Winkel im Mohnöl im Mittel von 10 Bestimmungen für gelb 77° 15½′. Die negative erste Bissectrix ist unter 1½° gegen die Normale auf (001) nach vorne (im stumpfen Winkel der Krystallaxen) geneigt.

Hydrochelidonsaures Calcium wurde sowohl durch Behandlung der Hydrochelidonsäure mit Calciumcarbonat und Abdunsten im Vacuum, als auch durch Kochen der Säure mit Kalkmilch, nachherigem Einleiten von Kohlendioxyd etc. dargestellt. In beiden Fällen wurde es in Form weisser, sehr undeutlich krystallinischer Krusten erhalten, die in kaltem und heissem Wasser beinahe gleich löslich sind. Es enthält ein Molekül Krystallwasser, das erst zwischen 150° und 195° entweicht.

a) 0·2005 Grm. des mit $CaCO_3$ bereiteten über H_2SO_4 getrockneten Salzes verloren bis 150° erhitzt nur Spuren, bis 195° erhitzt 0·0155 Grm. und gaben beim Glühen 0·0489 Grm. CaO.

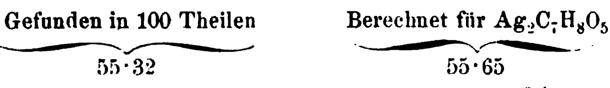
0·2634 Grm. desselben Salzes über H_2SO_4 getrocknet, gaben mit CuO verbrannt 0·3093 CO_2, 0·1069 Grm. H_2O und 0·1115 Grm. Rückstand, der beim Glühen 0·0433 Grm. CO_2 verlor. Zur Bestimmung des Calciumoxyds war der Rückstand durch hineingefallenes CuO untauglich geworden.

b) 0·2446 Grm. des mit $Ca(OH)_2$ bereiteten Salzes gaben beim Glühen 0·0600 Grm. CaO.

	Gefunden in 100 Theilen		Berechnet für $CaC_7H_8O_5 + H_2O$
	a	b	
H_2O	7·73	—	7·83
C	36·51	—	36·52
H	4·51	—	4·35
Ca	17·42	17·52	17·39

Hydrochelidonsaures Silber. Zur Darstellung dieses Salzes wurde eine kalte, wässerige Lösung des eben beschriebenen Calciumsalzes mit Silbernitrat gefällt und der flockige gelatinöse Niederschlag gut gewaschen. Derselbe ist in kaltem Wasser sehr wenig löslich und besitzt über Schwefelsäure oder bei 100° getrocknet die Zusammensetzung $Ag_2C_7H_8O_5$.

0·2464 Grm. gaben beim Glühen 0·1363 Grm. Ag.



Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $Ag_2C_7H_8O_5$
55·32	55·65

Als krystallinischer Körper wird das Silbersalz durch Fällung der freien Säure mit Silbernitrat erhalten, doch ist es so dargestellt nicht vollkommen rein und enthält vielleicht noch etwas eines sauren Salzes. Wir fanden in einem solchen Präparate 54·87% Ag.

Das Kupfersalz schied sich beim Stehen einer mit Kupfernitrat versetzten Lösung des Calciumsalzes als blaugrüner, mikrokrystallinischer Niederschlag ab, der sich auf Essigsäurezusatz löst.

Das ebenfalls krystallinische **Bleisalz** fällt beim Zusammenbringen der freien Säure mit Bleizuckerlösung als weisser Niederschlag aus.

Mit Mercuronitrat gibt das Calciumsalz einen weissen, in Essigsäure unlöslichen, mit Ferrichlorid einen voluminösen gelbbraunen, in Essigsäure löslichen Niederschlag.

Die Hydrochelidonsäure zeigt die Jodoformreaction nicht, während Chelidonsäure und Xanthochelidonsäure sie zeigen.

Oxydation der Hydrochelidonsäure. Fügt man zu einer mit überschüssigem Alkali versetzten Lösung von Hydrochelidonsäure nach und nach verdünnte Chamäleonlösung, so wird letztere schon bei gewöhnlicher Temperatur ziemlich rasch reducirt. Später geht die Reaction träger vor sich; wir betrachteten sie als beendet, wenn sich die Flüssigkeit selbst in zwei Stunden nicht mehr entfärbte. Sodann wurde von dem reichlich abgeschiedenen braunen Niederschlage abfiltrirt, mit Schwefelsäure angesäuert und mit Äther ausgeschüttelt. Dieser hinterliess beim Verdampfen einen krystallinischen Rückstand, in dem die Gegenwart von Oxalsäure mit Sicherheit nachgewiesen werden konnte. Flüchtige Säuren, wie Ameisensäure oder Essigsäure waren nicht gebildet worden, dieselben hätten sich durch einen sauren Geruch des Ätherextractes bemerkbar machen müssen. Wurde dieser letztere dagegen zur Entfernung der Oxalsäure mit essigsaurem Calcium und Essigsäure versetzt und die vom herausgefallenen Calciumoxalat abfiltrirte Lösung nach dem Ansäuern mit Schwefelsäure neuerdings mit Äther geschüttelt, so nahm dieser doch wieder einen krystallinischen Körper auf.

Derselbe schmolz nach dem Umkrystallisiren aus heissem Wasser unter theilweiser Sublimation bei 179·7—181·2, entwickelte bei stärkerem Erhitzen stark zum Husten reizende

Dämpfe und zeigte mit Eisen-, Silber-, Barium-, Blei- und Quecksilbersalzen sämmtliche Reactionen der gewöhnlichen Bernsteinsäure.

Als Producte der Oxydation von Hydrochelidonsäure durch Kaliumpermanganat in alkalischer Lösung und bei gewöhnlicher Temperatur wurden demnach Oxalsäure und Bernsteinsäure nachgewiesen, ausserdem dürfte wohl auch noch Kohlensäure gebildet worden sein. Die Reaction verläuft wahrscheinlich nach der Gleichung

$$C_7H_{10}O_5 + 6O = C_2O_4H_2 + C_4H_6O_4 + CO_2 + H_2O.$$

Die Menge des verbrauchten Sauerstoffs und der gebildeten Oxalsäure wurde wie folgt quantitativ ermittelt.

0·1492 Grm. Hydrochelidonsäure verbrauchten 130 CC. Chamäleonlösung (vom Titre 1CC = 0·007737 Fe) statt der für 6 Atome O berechneten 124·2 CC. und lieferten durch Glühen des mittelst Calciumacetat und Essigsäure gefällten Oxalates 0·0480 Grm. CaO. Wäre genau ein Molekül Oxalsäure entstanden, so hätten 0·048 Grm. CaO erhalten werden müssen.

Reduction der Hydrochelidonsäure mit Jodwasserstoff. Erhitzt man Hydrochelidonsäure mit Jodwasserstoffsäure vom Sp. 127° in zugeschmolzenen Röhren auf 180°, so erfolgt keinerlei Einwirkung. Erhitzt man hingegen mit einem bedeutenden Überschuss von bei gewöhnlicher Temperatur gesättigter Jodwasserstoffsäure durch 10—12 Sunden auf 200—210°, so wird viel Jod abgeschieden und ein kleiner Theil der Säure wird, wie es scheint, bis zu Kohlenwasserstoff reducirt, während die Hauptmenge derselben in eine neue Säure $C_7H_{12}O_4$, in Pimelinsäure verwandelt wird. Wir destillirten zunächst das in dieser Weise erhaltene Reactionsproduct mit etwas Wasser, um den gebildeten petroleumartig riechenden Körper zu gewinnen, erhielten aber von letzterem zu wenig, um auf eine nähere Untersuchung eingehen zu können. Aus dem Destillationsrückstand wurde nach Entfernung der Jodwasserstoffsäure und des Jodes durch Abdampfen auf flachen Schalen die Pimelinsäure, fast ohne weiteres rein gewonnen. Durch Umkrystallisiren aus heissem Wasser erhielten wir sie in tafelförmigen Krystallen. Diese wurden noch aus siedendem Benzol (in welchem sie im Gegensatze zur Hydrochelidonsäure leicht löslich sind) umkrystallisirt und schmolzen dann

bei 102·9—103·9° (corr.). Neuerliches Umkrystallisiren aus Wasser veränderte den Schmelzpunkt nicht mehr. Die Elementaranalyse ergab die Formel $C_7H_{12}O_4$.

0·3211 Grm. der zwischen Papier abgepressten Substanz verloren nichts beim Stehen über Schwefelsäure und gaben 0·2179 Grm. H_2O und 0·6154 Grm. CO_2.

	Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $C_7H_{12}O_4$
C	52·27	52·49
H	7·56	7·52

Eine concentrirte, mit Ammoniak neutralisirte Lösung der Säure gibt mit Chlorbarium keine Fällung, mit Chlorcalcium in der Kälte ebenfalls keine, wohl aber beim Erwärmen. Mit Kupfernitrat oder Zinkacetat entstehen krystallinische Niederschläge, ebenso mit Silbernitrat. Der letztere ist lichtbeständig.

Herr Prof. v. Lang hatte die Güte, Krystalle der freien Säure, die wir durch Verdunstung ihrer wässerigen Lösung erhalten hatten, zu untersuchen und theilt uns darüber Folgendes mit:

Krystallsystem monoklinisch.

Elemente $a:b:c = 3·691:1:2·058$

$ac = 103°\ 33'$

Beobachtete Formen (100), (001), (110), (111).

Die Krystalle sind tafelförmig durch das Vorherrschen der Flächen (100).

Von den bisher bekannten Pimelinsäuren stimmt die hier beschriebene am besten mit der von Dale und Schorlemmer[1] aus Suberon, ferner von Baeyer[2] aus Furonsäure erhaltenen überein, welche gewöhnlich als die normale Säure betrachtet wird.

Reduction der Chelidonsäure durch HJ.

Zur erschöpfenden directen Hydrogenisirung der Chelidonsäure schlossen wir dieselbe mit einem grossen Überschusse von Jodwasserstoffsäure (wir verwendeten die 100fache Gewichts-

[1] Ber. d. deutschen ch. Ges. 7. p. 806.

[2] Daselbst 10. p. 1358.

menge) in ein Rohr ein und erhitzten dieses durch 10—12 Stunden auf 200—210°. Nach dem Erkalten war der Rohrinhalt stark braun gefärbt, während einzelne Öltröpfchen auf der Flüssigkeit schwammen. Durch Destillation mit Wasser konnte eine sehr geringe Menge eines petroleumartig riechenden Körpers erhalten werden, der wohl identisch ist mit dem gelegentlich der Reduction der Hydrochelidonsäure erhaltenen Producte. Die weitere Verarbeitung des Destillationsrückstandes geschah genau in der schon früher beschriebenen Weise und lieferte auch denselben Körper: Pimelinsäure, die an Aussehen, Löslichkeit und Schmelzpunkt als solche erkannt wurde.

Reduction der Xanthochelidonsäure durch Natriumamalgam.

Wir haben schon früher angeführt, dass Lietzenmayer ein Reductionsproduct der Chelidonsäure durch Behandlung derselben mit Natriumamalgam und Wasser, unter theilweiser Abstumpfung des Alkalis zu erhalten suchte. Er beschreibt die von ihm derart dargestellte Substanz als eine in Wasser sehr leicht lösliche syrupöse Säure. Es gelang ihm nicht, dieselbe oder auch nur eines ihrer übrigens nicht krystallisirenden Salze in analysirbaren Zustand zu bringen. Die folgenden Versuche machen es wahrscheinlich, dass Lietzenmayer's Product im Wesentlichen aus Hydroxanthochelidonsäure bestand.

Wir trugen behufs Reduction der Xanthochelidonsäure Natriumamalgam portionenweise in die gelbe Lösung ein, die man durch Stehenlassen von Chelidonsäure mit überschüssiger Natronlauge erhält, und liessen die Reaction sich bei gewöhnlicher Temperatur vollziehen, bis nach etwa zwei bis drei Tagen die Flüssigkeit vollständig farblos geworden war.

Das vom Quecksilber abgegossene Reactionsproduct wurde nun mit Essigsäure neutralisirt, eingedampft und der dickliche, viel essigsaures Natron enthaltende Rückstand reichlich mit Alkohol versetzt. Dieser bewirkte eine starke flockige Fällung, die sich nach einiger Zeit zu zähen, halbflüssigen Tröpfchen vereinigte. Die klare, alkoholische Lösung, die Hauptmenge des essigsauren Natrons enthaltend, wurde abgegossen, die Fällung in wenig heissem Wasser gelöst und wieder mit Alkohol gefällt.

Nach zwei- bis dreimaliger Wiederholung dieser Operationen war der Niederschlag frei von Natriumacetat, er löste sich ausserordentlich leicht in Wasser und bestand aus einem neutral reagirenden Natronsalz. Seine wässerige Lösung gab weisse, amorphe Niederschläge mit Blei-, Silber- und Mercurosalzen, reducirte weder Fehling'sche Lösung, noch auch eine mit Ammoniak versetzte Silberlösung. Bemerkenswerth ist eine blaue Färbung, welche auf Zusatz von Kalilauge und Kupfersulfat entsteht, ein Verhalten, welches an das der Weinsäure erinnert.

Ein Theil des Natriumsalzes wurde einer fractionirten Fällung mit Silbernitrat unterworfen und in den vier erhaltenen Silbersalzfractionen Metallbestimmungen ausgeführt. Es gaben:

0·2135 Grm. der ersten Fraction 0·1155 Grm. Ag, das ist 54·10%.
0·2186 Grm. derselben Fraction 0·1186 Grm. Ag, das ist 54·25%.
0·1878 Grm. der zweiten Fraction 0·0956 Grm. Ag, das ist 50·91%.
0·2626 Grm. der dritten Fraction 0·1327 Grm. Ag, das ist 50·53%.
0·1334 Grm. der sehr kleinen vierten Fraction 0·0678 Grm. Ag, das ist 50·82%.

Es zeigte also der zuerst ausfallende Niederschlag einen weit höheren Silbergehalt als die folgenden. Die Ursache mag in der Gegenwart von etwas Oxalsäure liegen, welche Säure in der durch Zersetzung des Silbersalzes mit Schwefelwasserstoff erhaltenen Lösung leicht durch ihre charakteristischen Reactionen erkannt werden konnte.

Nachdem die letzten Silbersalzfractionen annähernd den gleichen Metallgehalt aufwiesen, schien der eingeschlagene Weg zu einer Reindarstellung des Reductionsproductes geeignet und wir unterwarfen desshalb eine etwas grössere Menge des Natriumsalzes derselben Behandlung. Wir stellten drei Fractionen dar, von denen wir die erste, als jedenfalls Oxalsäure enthaltend, beseitigten und die zweite und dritte wieder der Analyse unterzogen.

0·2567 Grm. der über Schwefelsäure getrockneten zweiten Fraction gaben 0·1332 Grm. Ag.
0·2936 Grm. der ebenfalls über H_2SO_4 getrockneten dritten Fraction gaben nach Kopfer verbraunt 0·2209 Grm. CO_2, 0·0644 Grm. H_2O und 0·1491 Grm. Ag.
0·3597 Grm. derselben Substanz gaben ebenso 0·2690 Grm. CO_2, 0·0772 Grm. H_2O und 0·1821 Grm. Ag.

	Gefunden in 100 Theilen			Berechnet für $Ag_2C_7H_{10}O_7$
	II. Fraction	III. Fraction		
Ag	51·89	50·78	50·63	51·16
C	—	20·52	20·40	19·91
H	—	2·44	2·39	2·37

Die Analysen stimmen annähernd auf ein Silbersalz $Ag_2C_7H_{10}O_7$, entsprechend einer Säure $C_7H_{12}O_7$, welche man als Trioxypimelinsäure auffassen könnte. Durch Zerlegung des Silbersalzes mittelst Schwefelwasserstoff erhielten wir die freie Säure, wir wollen sie vorläufig Hydroxanthochelidonsäure nennen, in Gestalt eines ganz farblosen, zähen Syrups, der selbst bei langem Stehen an der Luft, oder über Schwefelsäure keine Spur von Krystallisation zeigte. Eine Reihe von Versuchen, die wir zur Klarstellung ihrer Constitution unternommen haben, scheiterte an der Unmöglichkeit irgend eines der Derivate krystallisirt zu erhalten. Die Einwirkung von Jodwasserstoff zeigte jedoch, dass die Säure wohl dieselbe Kohlenstoffverkettung besitzt wie die Hydrochelidonsäure.

Reduction der Hydroxanthochelidonsäure durch HJ. Wir erhitzten etwas Natriumsalz der Hydroxanthochelidonsäure mit einem grossen Überschuss von gesättigter Jodwasserstoffsäure durch etwa 10 Stunden auf 200—210°. Auch hierbei wurde etwas des petroleumartig riechenden Körpers, der schon bei der Reduction der Hydrochelidonsäure erwähnt worden ist, gebildet. Das Reactionsproduct wurde zur Entfernung dieses letzteren mit etwas Wasser destillirt, hierauf durch Abdampfen von Jod und Jodwasserstoffsäure befreit, in etwas Wasser aufgenommen, mit Schwefelsäure angesäuert und mit Äther ausgeschüttelt. Der Ätherextract lieferte aus Wasser umkrystallisirt eine Substanz vom Aussehen der schon früher beschriebenen Pimelinsäure, deren Schmelzpunkt bei 103° gefunden wurde.

Trockene Destillation der Chelidonsäure.

Es wurde eingangs erwähnt, dass die beim Erhitzen der Chelidonsäure auftretenden Spaltungsproducte schon von früheren Forschern bemerkt wurden. Man hat aber seine Aufmerksamkeit gewöhnlich auf die nicht flüchtigen Körper gerichtet. That-

sächlich entsteht aber aus der Chelidonsäure bei circa 240° unter Abspaltung von zwei Molekülen Kohlensäure eine destillirbare, schon unter 240° siedende Substanz, während nur wenig einer kohligen Materie zurückbleibt. Vielleicht dürfte es gelingen, durch genauere Regulirung der Temperatur ein durch Eliminirung von einem Molekül CO_2 aus Chelidonsäure entstehendes Product zu erlangen, worauf auch verschiedene, von uns gemachte Beobachtungen hinweisen. Die Ausführung unserer Versuche geschah in folgender Weise. 10 Grm. Chelidonsäure wurden in einer kleinen Retorte im Metallbad auf circa 240° erhitzt. Es entwickelten sich alsbald Ströme von Kohlendioxyd und es begann eine dickliche, farblose, stark lichtbrechende Flüssigkeit überzudestilliren. Gleichzeitig war in der Retorte die vorübergehende Bildung eines weissen krystallinischen Sublimates zu beobachten, das jedoch gegen Ende der Operation wieder vollständig verschwand und vielleicht aus dem erwähnten Zwischenproducte bestehen mochte. Die Menge des erhaltenen Destillates betrug etwa 3·5 Grm.; es wurde aus einem kleinem Kölbchen für sich destillirt, wobei es bei etwa 215° unter Rücklassung eines geringen kohligen Rückstandes überging. Es erstarrte alsbald krystallinisch und zeigte dann einen Schmelzpunkt von circa 32·5 (uncorrigirt). Der Körper ist ausserordentlich leicht löslich in Wasser, besitzt neutrale Reaction, wird durch KOH gelb gefärbt, gibt beim Erwärmen mit letzterem und etwas Jod Jodoform und reducirt Fehling'sche Lösung. Mit wässerigem Ammoniak abgedampft, liefert er Oxypyridin, welches wir auch auf anderem Wege aus Chelidonsäure erhalten und über welches wir schon in einer vorläufigen Mittheilung kurz berichtet haben.[1] Die Übereinstimmung des Siede- und Schmelzpunktes unserer neuen Substanz mit den von Ost für das aus Komansäure erhaltene Pyrokoman[2] gefundenen macht zweifellos, dass wir denselben Körper in Händen hatten. Nachdem Ost mit der Untersuchung dieser Substanz beschäftigt ist, verzichteten wir vorläufig auf ein weiteres Studium dieses interessanten Körpers.

---

[1] Monatshefte (1883) p. 339.

[2] Journ. f. pr. Ch. 29, p. 63.

Constitution der Chelidonsäure.

Wenn die vorstehenden Resultate auch noch keineswegs die Untersuchung der Chelidonsäure abschliessen oder erschöpfen, so lassen sich doch, wie uns scheint, schon mit vieler Wahrscheinlichkeit einige Schlüsse auf die Constitution der untersuchten Säure darauf gründen.

Die Chelidonsäure ist eine zweibasische Säure. Es ergibt sich dies nicht nur daraus, dass alle Argumente, die in früherer Zeit für ihre Tribasicität aus der Existenz der gelben, angeblich dreibasischen Salze abgeleitet wurden, hinfällig geworden sind, seitdem wir gezeigt haben, dass diese Salze nicht der Chelidonsäure, sondern einer anderen Säure (Xanthochelidonsäure) entsprechen, sondern auch aus der Darstellung der beiden Äther, des neutralen Äthers und der Äthersäure und endlich aus dem Nachweise, dass die durch Reduction in glatter Weise daraus hervorgehenden Säuren (Hydrochelidonsäure und Pimelinsäure) zweibasische Säuren sind.

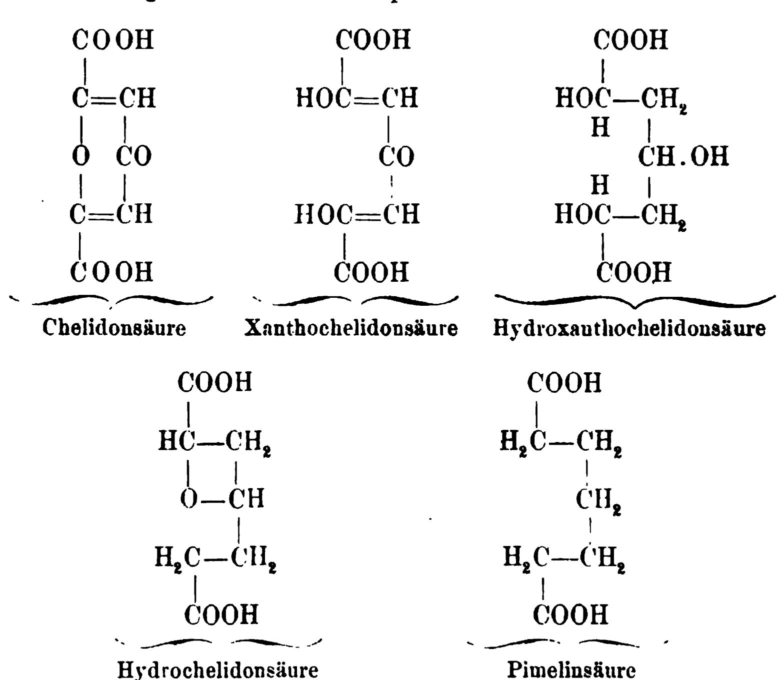
Die Reduction zu Pimelinsäure, für welche eine normale Structur mit vieler Wahrscheinlichkeit anzunehmen ist, lässt ferner den Schluss zu, dass in der Chelidonsäure die Kohlenstoffatome zu einer einfachen Kette (ohne Seitenketten) angeordnet sind.

Die Spaltung der Chelidonsäure beim Kochen mit Kalk in zwei Moleküle Oxalsäure und ein Molekül Aceton lässt sich schwerlich in einfacherer Weise erklären, als wenn man annimmt, dass die beiden Kohlenstoffatome, die zunächst an die beiden Carboxyle gebunden sind, mit diesen als Oxalsäure austreten, sobald durch eine Anlagerung der Elemente des Wassers ihnen die dazu nöthigen Atome zugeführt werden, während zugleich bei demselben Hergang die von dem Chelidonsäuremolekül noch restirenden 3C sich als Aceton abspalten. Damit aber dies möglich sei, muss der Sauerstoff im Chelidonsäuremolekül in geeigneter Weise vertheilt und in diesem das Aceton wie die Oxalsäure gewissermassen schon vorgebildet enthalten sein.

Endlich muss eine Formel der Chelidonsäure auch der Bedingung genugthun, dass sie die Umwandlung in Xanthochelidonsäure durch Anlagerung der Elemente des Wassers ver-

stehen lässt, und dass dabei letztere Säure als vierbasische Säure erscheint, die so beschaffen ist, dass sie ausnehmend leicht in Aceton und zwei Moleküle Oxalsäure zerfallen kann.

Allen diesen Bedingungen scheint uns die in unserer vorläufigen Mittheilung bereits vorgeschlagene Chelidonsäureformel zu entsprechen, neben die wir die wahrscheinlichen Formeln ihrer wichtigsten vorstehend besprochenen Derivate stellen.



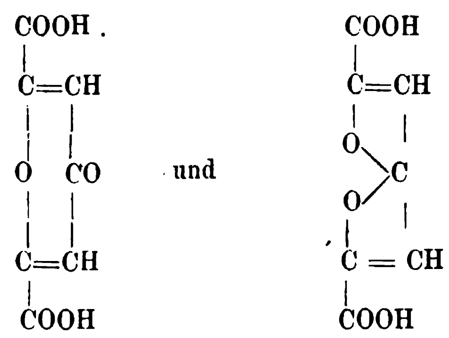
Dass die Xanthochelidonsäure sich leicht wieder in Chelidonsäure verwandeln lässt, dass sie sich wie eine schwache vierbasische Säure verhält, dass sie endlich unter dem Einfluss von Basen sich in zwei Moleküle Oxalsäure und Aceton spaltet, ist nach dem gegebenen Ausdruck ihrer Constitution leicht zu verstehen.

Die vielleicht etwas auffällige Formel der Hydrochelidonsäure findet in der Betrachtung ihrer Oxydationsproducte, als welche wir Oxalsäure und Bernsteinsäure nachgewiesen haben, eine Unterstützung.

Auffallend kann es vielleicht erscheinen, dass wir zwei doppelte Bindungen in der Chelidonsäure annehmen, während

doch weder die Säure noch ihr Äther Brom additionell zu binden vermögen. Doch mag daran erinnert werden, dass derselbe Einwurf sich auch gegen die üblichen Formeln des Benzols und Thiophens erheben lässt. Nimmt man aber bei diesen Körpern durchaus einfache Kohlenstoffbindungen (die sogenannte Prismenformel des Benzols) an, so lassen sich dann analoge Betrachtungen auch auf die Chelidonsäure anwenden.

Als sicher festgestellt betrachten wir natürlich die oben gegebene Chelidonsäureformel noch nicht. Namentlich ist es einleuchtend, dass es sehr schwer hält zwischen solchen Formeln eine Auswahl zu treffen, die sehr nahe dasselbe ausdrücken und doch in einzelnen Punkten sich unterscheiden, wie dies z. B. von den folgenden Formeln gilt:



Wir werden in der Fortsetzung unserer Untersuchungen darauf zurückkommen.

Was den längst vermutheten Zusammenhang von Chelidonsäure mit Mekonsäure anlangt, so liefert die vorstehende Untersuchung dafür einen experimentellen Beleg, insofern der durch trockene Destillation von Chelidonsäure erhaltene Körper offenbar mit Ost's Pyrokoman (indirect aus Mekonsäure gewonnen) identisch ist. Ein weiterer Beleg liegt in dem Umstande, dass Ost von Mekonsäure ausgehend zu demselben Oxypyridin gekommen ist, das wir früher aus Chelidonsäure erhalten haben. Die Vorstellung, die wir uns von der Constitution des Pyrokomans machen, ist aus der angeführten Chelidonsäureformel unmittelbar ersichtlich.

Untersuchung über Chelidonsäure.

Von **Jos. Ud. Lerch.**

In den Annalen der Chemie und Pharmacie LVII. publicirte ich eine Arbeit über Chelidonsäure, und habe die Zusammensetzung derselben aus den Analysen des Säurehydrates und ihre Salze zu bestimmen gesucht.

Die bei 100° C. getrocknete Säure führte zu der Formel $C_7H_4O_6$. Mit Basen erhielt ich zweierlei durch ihre Färbung sich wesentlich von einander unterscheidende Salze. Die einen waren farblos oder weiss, die anderen gelb gefärbt.

Ich schloss damals aus den Analysen der Salze, dass die Chelidonsäure eine dreibasische Säure sei, und dass die ungefärbten Salze die zweibasischen und die gelbgefärbten, die dreibasischen Salze der Chelidonsäure darstellen. Bei einer später darnach vorgenommenen Wiederholung der Versuche mit den gelben Salzen ergab sich jedoch, dass die damals dargestellten, als dreibasisch angenommenen Salze theils Doppelsalze, theils Salzgemenge waren (auf deren leichte Bildung ich schon in meiner damaligen Abhandlung wohl hinwies), und dass diese gelben Salze n reinem Zustande Verbindungen darstellen, welche nicht mehr der Chelidonsäure, sondern einer anderen aus ihr entstandenen gelbgefärbten Säure zukommen, und somit die Chelidonsäure keine dreibasische, sondern blos eine zweibasische Säure sei.

Diese Erkenntniss bewog mich, die Untersuchung in dieser Richtung wieder aufzunehmen und auch noch weitere Studien behufs einer näheren Kenntniss der Chelidonsäure, ihrer Derivate und Zersetzungsproducte vorzunehmen.

Ich arbeitete seit damals an dieser mir gestellten Aufgabe weiter, leider mit häufig länger andauernden Unterbrechungen, welche durch anderweitige amtliche Arbeiten und nicht minder

auch aus Mangel an dem kostspieligen Material veranlasst wurden.

Ich sammelte seit dieser Zeit interessante Untersuchungsresultate, häufte sie in meinen Arbeitsbüchern auf, um das Ende dieser meiner wissenschaftlichen Thätigkeit womöglich mit einer möglichst vollständigen Kenntniss der Chelidonsäure und ihrer etwaigen Beziehung zur Mekonsäure abzuschliessen.

Dies war auch der Grund, warum ich diese Arbeit nicht partienweise — wie dies häufig von den Chemikern behufs Sicherstellung der Priorität geübt wird — publicirte, und desshalb liessen mich auch die inzwischen erschienenen Publicationen von Hutstein,[1] Wilde,[2] Sandov,[3] Lietzenmayer[4] über Chelidonsäure ruhig, obgleich ich zum Theil zu denselben, zum Theil zu abweichenden Resultaten gelangt war. Sämmtliche von ihnen angegebene Facta waren jedoch schon mehrere Jahre vorher in meinen Arbeitsprotokollen deponirt.

Ich betrachtete diese Arbeit auch nicht als ein Geheimniss, und theilte sie mehreren befreundeten Chemikern, darunter auch meinem verehrten Herrn Collegen Prof. Lieben mit, als er im Jahre 1871 nach Prag kam; ich nahm namentlich ihm gegenüber keinen Anstand, eingehende Mittheilungen zu machen und ihm auch sämmtliche bereits analysirten Präparate vorzuzeigen und mit denselben sogar einzelne charakteristische Reactionen — und zwar den Zerfall der Chelidonsäure in Aceton und Oxalsäure durch Ätzkali und die rothe Färbung der Bromchelidammsäure mit Eisenchlorid — auszuführen.

Obgleich ich damals schon erkannte, dass mein ursprüngliches Programm für diese Arbeit zu weit gefasst war, so hätte ich mich noch immer nicht entschliessen können, die Resultate dieser heute noch nicht beendeten und desshalb auch lückenhaften Arbeit zusammenzufassen und sie zu veröffentlichen, wenn ich nicht, durch die vorläufige Mittheilung von Adolf Lieben[5] etwas unangenehm berührt, dazu gedrängt worden wäre, in denen ein

---

[1] Centralblatt 1851, S. 400.

[2] Annalen d. Chem. u. Pharm. Bd. CXXVII, S. 160.

[3] und [4] Inauguraldissertation.

[5] Berichte d. deutsch. chem. Gesellschaft 1883, Nr. 9.

wesentlicher Theil meiner Arbeit, welcher ihm aus meinen gemachten Mittheilungen und den vorgewiesenen Präparaten bekannt geworden war, deponirt wäre, deren Priorität er sich durch die vorläufigen Mittheilungen zu vindiciren keinen Anstand nahm.[1]

Die Untersuchung nahm eine lange Zeit in Anspruch, da sich die Chelidonsäure als ein Atomcomplex erwies, welcher die Entstehung einer Reihe interessanter Derivate und Zersetzungsproducte bedingt, deren nähere Kenntniss aber nothwendig war, um endlich ein klares Bild über die Constitution desselben zu erlangen.

Die Chelidonsäure wird nämlich:

1. Durch Alkalien leicht in eine andere gelbgefärbte Säure, welche mit Eisenchlorid eine der Mekonsäure ähnliche Reaction gibt und die ich Chelihydronsäure nennen will, umgewandelt, zerfällt aber ebenso leicht in Oxalsäure und Aceton.

2. Die Einwirkung von Haloiden bewirkt ebenfalls einen analogen Zerfall in Oxalsäure und entsprechende Acetone oder auch in Jodoform.

3. Durch Ammoniak entsteht eine stickstoffhaltige Säure: Chelidammsäure — Lieben und Haitinger bezeichnen sie als Oxypyridindicarbonsäure — welche so wie deren Haloidderivate mit Ausnahme der Jodchelidammsäure bei höherer Temperatur in Kohlensäure und die entsprechenden Amide (Chelamide Oxypyridine) zerfallen. Mit Anilin entsteht ein analoges Anilid.

4. Wendet man bei der Umwandlung der Chelidonsäure statt Ammoniak Schwefelammonium an, so bildet sich neben der Chelidammsäure eine schwefelhaltige Säure in kleiner Menge, deren Kalksalz sich durch seine grüne Farbe auszeichnet.

5. Bei der Abscheidung der Säure aus den gelben, nämlich den chelihydronsauren Salzen, entsteht wieder eine andere schwefelhaltige Säure, deren Salze durch ihre rothe Farbe markirt sind, und endlich

6. bildet sich eine dritte schwefelhaltige Verbindung bei der Behandlung des chelidonsauren Kalkes mit Calciumhydrosulfid,

---

[1] Lange vor dieser Zeit war die Untersuchung über den Zerfall der Chelidonsäure in Aceton oder Bromaceton und Oxalsäure, über die Chelidammsäure sowie ihre Brom-, Chlor- und Jodderivate, das Amid (Oxypyridin) und Anilid etc. beendet und A. Lieben von mir bekannt.

deren krystallisirtes Kalksalz durch Säuren in oxalsauren Kalk und einen flüchtigen, stark nach Asa foetida riechenden Körper zerfällt, welcher soeben untersucht wird und möglicherweise Schwefelaceton (?) ist.

7. Bei der Behandlung der Chelidonsäure mit Jodwasserstoffsäure und amorphem Phosphor entsteht eine in schönen Prismen krystallisirte Hydrochelidonsäure.

8. Bei der trockenen Destillation zerfällt die Chelidonsäure in Kohlensäure und das Anhydrid einer Pyrosäure, welche ich Chelsäure nennen will; diese gibt mit Eisenchlorid gleiche Reactionen wie die Mekonsäure und wie die Chelihydronsäure. Aus dem Anhydrid lässt sich mit Ammoniak auch das Chelamid — Oxypyridin — darstellen und ich glaube nicht zu irren, wenn ich annehme, dass auf dessen Rechnung das Entstehen des Chelamids aus der Chelidammsäure zu stehen kommt.

Die meisten dieser Producte sind bereits untersucht, und behalte mir die Untersuchung und die Publication in dem späteren Abschnitte meiner Abhandlung vor.

Als Material zu dieser ganzen nachfolgenden Arbeit habe ich mir die Chelidonsäure nach der ursprünglichen von Probst angegebenen Methode wiederholt dargestellt.

Als die günstigsten Verhältnisse bei der Fällung des aus dem zerstossenen Chelidoniumkraute ausgepressten coagulirten und filtrirten Saftes erwiesen sich auf 1 Liter Saft 40 CC. mit gleichen Theilen Wasser verdünnter Salpetersäure zum Ansäuren des Saftes und 120 CC. kalt gesättigte Lösung von Bleinitrat als Fällungsmittel.

Das krystallinisch ausgeschiedene und mit Wasser, welches mit etwas Salpetersäure angesäuert war, ausgewaschene chelidonsaure Blei wurde mit Schwefelwasserstoff zersetzt, mit Kreide neutralisirt und das umkrystallisirte Kalksalz mittelst eines Überschusses von Salzsäure zersetzt und durch Umkrystallisiren die Säure rein erhalten.

Die Zersetzung des Bleisalzes mit Schwefelwasserstoff geht wohl langsam vor sich, sie ist aber vorzuziehen der Behandlung mittelst Schwefelcalcium oder Schwefelammon, weil hiebei leicht die Zersetzung der Säure in Aceton und Oxalsäure oder die Bildung der stickstoffhältigen Chelidammsäure stattfindet. Die

Ausbeute an reiner Säure war nicht jedesmal gleich gross, sie betrug aber immer etwas mehr als 1 Grm. aus einem Kilo des Saftes.

Chelidonsaurer Äthyläther.

Die Chelidonsäure gibt mit Äthyl zwei Verbindungen: einen neutralen und einen sauer reagirenden Äther. Sie entstehen leicht nach den gewöhnlichen Darstellungsweisen, entweder durch Einleiten von Chlorwasserstoff in ein Gemenge von Alkohol und Chelidonsäure oder durch Erhitzen einer Mischung von Chelidonsäure, Schwefelsäure und Alkohol.

Ich befolgte die zweite Methode. Es wurden gleiche Theile von Chelidonsäure und Schwefelsäure gemischt, eine entsprechende Menge Alkohol zugesetzt und das Ganze eine kurze Zeit bei mässiger Siedhitze erhalten. Die dickliche, schwach gebräunte Flüssigkeit wurde dann mit Wasser versetzt, wobei sie zu einem Brei von Krystallen erstarrte. Die von der Mutterlauge getrennten Krystalle wurden in Wasser gelöst, mit Natriumcarbonat entsäuert, in Äthyläther aufgenommen und der auskrystallisirte Äther aus Weingeist umkrystallisirt.

Der Äther krystallisirt in ungefärbten Nadeln oder grösseren rhombischen Prismen; er ist in Äther, Alkohol und Wasser leicht löslich und reagirt neutral.

Der Schmelzpunkt desselben liegt bei 62° C. und erstarrt erst bei nahezu 30° C.

Die Analyse des im Vacuum getrockneten Äthers, wobei er an Gewicht nichts verlor, ergab:

0·2815 Grm. Substanz, 0·568 Grm. CO_2 und 0·132 Grm. H_2O.

	Berechnet für $C_7H_2O_6(C_2H_5)_2$	Gefunden
C =	55·00%	55·02%
H =	5·00	5·21

Äthylchelidonsäure.

Entsteht beim Kochen der wässerigen Lösung des neutralen Äthers. Wird nämlich die wässerige Lösung längere Zeit in der Siedhitze erhalten, so nimmt sie bald eine saure Reaction an und

enthält dann die Ätherchelidonsäure, welche beim Abdampfen in ungefärbten Nadeln herauskrystallisirt.

Die Äthylchelidonsäure bildet sich auch manchmal bei der Bereitung des neutralen Äthers nebenbei, und stellt jenen Theil des Productes dar, welcher bei der Auflösung des Äthers in Schwefeläther als schwerlöslich zurückbleibt.

Die Äthylchelidonsäure krystallisirt in ungefärbten Nadeln, sie schmilzt zwischen 182—184° C. und ist in Äther schwerlöslich, in heissem Wasser und Alkohol löst sie sich in beträchtlicher Menge auf und krystallisirt beim Abkühlen wieder in Nadeln heraus.

Die Lösungen reagiren sauer und geben mit Silbernitrat schief rhombische Prismen des äthylchelidonsauren Silbers, welches in Wasser löslich ist und sich ohne Zersetzung umkrystallisiren lässt.

Mit Bleizuckerlösung entsteht in der warmen wässerigen Lösung kein Niederschlag, die Flüssigkeit nimmt dabei einen Stich ins Gelbe und beim Abkühlen krystallisiren lange, verfilzte Nadeln des Äthylchelidonbleis heraus, welches mit Ammoniak gelb gefärbt wird.

Die Analyse des Silbersalzes, welches bei 100° getrocknet nichts an Gewicht verlor, ergab:

0·490 Grm. Substanz, 0·162 Grm. Ag.

Berechnet für $C_7H_2O_6\begin{cases}C_2H_5\\Ag\end{cases}$	Gefunden
Ag = 33·85%	33·06%

Wird das neutrale Äthylchelidonat in Alkohol unter Zusatz von wenig Äther gelöst und die Lösung mit einem gleichen Volum Wasser gemischt und dann etwas Ammoniak zugesetzt, so nimmt die Flüssigkeit sofort eine gelbliche Färbung an; auf grösseren Zusatz von Ammoniak wird sie stärker gelb gefärbt und dichroitisch. In kurzer Zeit trübt sie sich und es scheiden sich aus ihr weisse, sternförmig vereinigte Nadeln, welche, mit Wasser und Alkohol gewaschen, das Amid der Chelidonsäure darstellen.

Dieses bildet feine, weisse Nadeln, es ist in Wasser, Alkohol und Äther unlöslich, von Salpetersäure wird es nicht angegriffen, Schwefelsäure löst es in der Wärme auf, durch Zusatz von Wasser scheidet es sich wieder aus.

Mit Kalilauge behandelt, wird es unter Ammoniakentwicklung zersetzt und in eine morgenrothe Flüssigkeit, dem Kaliumsalze der Chelihydronsäure, umgewandelt.

Die Analyse der mir zu Gebote stehenden Substanz verunglückte, und ich kann daher leider keine analytischen Resultate ihrer Zusammensetzung, welche der Formel:

$$C_7H_2O_4\begin{cases}NH_2\\NH_2\end{cases}$$

entsprechen würde, geben.

Einwirkung der Alkalien auf Chelidonsäure und Bildung der Chelihydronsäure $C_7H_6O_7$.

Wie bereits oben erwähnt, wird die Chelidonsäure durch Einwirkung fixer Alkalien in eine andere Säure überführt, deren Salze gefärbt sind.

Neutralisirt man die Chelidonsäure genau mit Alkalien, zum Beispiel mit kohlensaurem Kali oder Ätzkali, so entsteht das ungefärbte und in Nadeln krystallisirte Kaliumsalz $C_7H_2O_6 + 2K$ derselben.

Wird dagegen ein Überschuss von Ätzkali zugesetzt, so nimmt die ungefärbte Lösung schon auf einen kleinen Überschuss des Alkalis eine gelbe Farbe an, und erlangt bei hinlänglichem Zusatze, beiläufig der doppelten Menge der Kalilauge, nach kurzem Stehen bei gewöhnlicher Temperatur eine dunkel gelbrothe Farbe, nicht unähnlich einer concentrirten Lösung von Kaliumbichromat.

In diesem Zustande enthält sie keine Chelidonsäure mehr, sondern das Kaliumsalz der durch Aufnahme der Elemente von H_2O neu entstandenen gelben Säure der Chelihydronsäure.

Lässt man die alkalische Lösung längere Zeit stehen, so verblasst nach und nach die gelbe Farbe derselben, es tritt Zersetzung ein, erkennbar an dem sich entwickelnden Geruche von Aceton und daran, dass sich in der Flüssigkeit Oxalsäure befindet;

bei längerem Stehen wird die Lösung ganz ungefärbt und endlich krystallisirt oxalsaures Kalium allein heraus.

Bei diesem Processe zerfällt sie unter Aufnahme von $3H_2O$ glatt in Aceton und Oxalsäure

$$C_7H_4O_6+3H_2O=C_3H_6O+2C_2O_4H_2.$$

Dieser Zerfall der Chelidonsäure geht beim Erwärmen rascher vor sich. Behufs der Constatirung des Acetons wurde die Zersetzung der Chelidonsäure mittelst Ätzkalilauge in einem Kolben vorgenommen, das gebildete Aceton abdestillirt und mittelst Trocknens über Chlorcalcium und Rectification rein erhalten.

Das Destillat hatte alle chemischen und physikalischen Eigenschaften des Acetons; der Siedepunkt lag bei 57° C. Mit Natriumsulfit entstand die für Aceton charakteristische in Schuppen krystallisirte Verbindung.

Diese Analyse,[1] ausgeführt im Jahre 1855 am 23. Februar, ergab:

I. 0·1373 Grm. Substanz,	0·3098 Grm. CO_2,	0·128 Grm. H_2O.
II. 0·124 „ „	0·282 „ „	0·1166 „ „

und führte zu der Formel C_3H_6O.

Berechnet	Gefunden I	Gefunden II
C = 62·07%	61·54%	62·02%
H = 10·34	10·36	10·45

Eine analoge Zersetzung der Chelidonsäure, wie sie beim Überschuss von Ätzkali in Oxalsäure und Aceton stattfindet,

[1] Lieben führt in seinen vorläufigen Mittheilungen an: Ich hätte ihm die Beobachtung mitgetheilt, dass sich bei der Zersetzung der Chelidonsäure durch Alkalien ein eigenthümlicher, einigermassen acetonähnlicher Geruch entwickelt.

Diesen Passus will ich gerne auf Rechnung einer leicht möglichen Vergesslichkeit des Herrn Lieben stellen und bemerke, dass ich bei der mündlichen Mittheilung im Jahre 1871 über die Natur des Geruches keinen Zweifel haben konnte, nachdem ich das bei dem Zerfall der Chelidonsäure durch Alkalien sich bildende Aceton bereits im Jahre 1855 untersucht und als solches constatirt habe.

erfolgt auch bei der Behandlung derselben mit Brom und Chlor. Neben Oxalsäure treten gechlorte und gebromte Acetone auf.

Ein auch im Jahre 1855 mit 2 Grm. Chelidonsäure quantitativ vorgenommener Versuch, welchen auch Wilde ausgeführt hat,[1] ergab neben Pentabromaceton C_3HBr_5O 2·05 Grm. Oxalsäure. Die Theorie erfordert 2·0 Grm.; der Zerfall geht wie bei der Zersetzung mit KOH glatt vor sich.

Analog den Ätzalkalien wirken auch die alkalischen Erden auf die Säure zersetzend ein; wird nämlich die Säure oder ihre Salze mit Kalk oder Barytwasser im Überschuss behandelt, so entstehen ebenfalls citrongelbe Verbindungen. Das Kalksalz scheidet sich in kugelförmigen, den Stärkemehlkörnern ähnlichen Formen aus. Bei längerer Einwirkung oder Anwendung von Wärme tritt aber auch der Zerfall derselben in Aceton und oxalsaurem Kalk oder Baryt auf.

Näher bemerkenswerth ist die Einwirkung von Kalilauge auf das chelidonsaure Calcium. Wird dieses Salz in Wasser angerührt und eine dem Salze nahezu gleiche Menge in Wasser gelösten Ätzkalis nach und nach zugesetzt, so färbt sich dasselbe an den mit der Kalilauge berührten Stellen sofort gelb, und löst sich auf hinreichenden Zusatz der Kalilauge nach und nach vollständig auf.

Die Lösung nimmt in dem Verhältnisse, als sich das Kalksalz löst, eine gelbe Färbung und eine dicke, schleimige, dem Eiweiss nicht unähnliche Consistenz an, und ist endlich dasselbe in der Kalilauge vollständig gelöst, so stellt das Ganze eine gelbe, durchsichtige, geléeartige Masse dar; dieses Gelée lässt sich schneiden.

Wird es in diesem Zustande längere Zeit liegen gelassen, so treten an mehreren Stellen derselben weisse Punkte auf, die sich nach und nach vermehren, und endlich verwandelt sie sich in eine gelblichweisse, emailartige Masse.

Dieser Vorgang ist nicht unähnlich der Coagulation des Eiweisses und die Masse äusserlich vom coagulirten Eiweisse kaum zu unterscheiden.

Das Gelée ist in Wasser vollständig löslich; auf den Zusatz fünf- bis zehnfacher Wassermenge bleibt die Flüssigkeit noch

---

[1] Wilde, Annal. d. Chem. Bd. 127, S. 164.

dickflüssig wie Gummischleim, erst nach hinreichendem Zusatz von Wasser wird die Lösung dünnflüssig.

Die Lösung ist blass gelb gefärbt, dichroitisch, riecht nicht nach Aceton und enthält auch keine Oxalsäure. Der Zerfall der Chelidonsäure tritt hiebei nicht so rasch ein, wie es bei der Einwirkung der Kalilauge auf die Chelidonsäure der Fall ist; das gebildete Kalikalksalz ist widerstandsfähiger. Wird nun die alkalisch reagirende Lösung mit Säuren, Essig- oder Salpetersäure neutralisirt, so entstehen in derselben mit Silber-, Blei-, Baryt- und Kalksalzen etc. schön citrongelb gefärbte Fällungen, Verbindungen der neu entstandenen Chelihydronsäure genau so, wie mit der gelben Flüssigkeit nach Behandlung der Chelidonsäure mit Kalilauge.

Die Umwandlung des chelidonsauren Calciums $C_7H_2O_6Ca$ in die gelbgefärbte Verbindung der Chelihydronsäure wird einfach durch die Aufnahme von Kaliumhydroxyd bedingt.

Diese Kalikalkverbindung fand ich als geeignetes Material zu der Abscheidung der gelben Säure und Darstellung ihrer Salze, weil sie schwerer zersetzbar ist, und die eventuell eintretende Zersetzung durch die Abscheidung von oxalsaurem Kalk leicht in Erscheinung tritt, wogegen bei der aus Chelidonsäure mit Kalilauge entstandenen gelben Kaliumverbindung die Zersetzung in Aceton und Oxalsäure rascher eintritt und der Beginn derselben äusserlich nicht oder erst zu spät beobachtet werden kann.

Die Überführung der Chelidonsäure in die gelbe Säure findet aber nicht allein statt durch Einwirkung von Ätzalkalien, sondern sie erfolgt auch schon bei der Behandlung derselben mit kohlensauren Alkalien.

Wird Chelidonsäure mit Kalium oder Natriumcarbonat neutralisirt und zur ungefärbten Lösung noch ein Überschuss von dem Carbonate zugesetzt und längere Zeit stehen gelassen, so nimmt die ungefärbte Lösung nach und nach ebenfalls eine gelbe Farbe an, und erlangt dieselbe morgenrothe Färbung wie bei der Behandlung mit Kalilauge.

Beim Erwärmen geht die Umwandlung ebenfalls rascher vor sich, aber auch der Zerfall in Aceton und Oxalsäure tritt hiebei rasch auf.

Endlich lässt sich die Chelidonsäure auch durch Einwirkung von Bleihydroxyd in die gelbe Säure überführen. Versetzt man nämlich ein chelidonsaures Alkalisalz mit Bleiessig und bringt das Ganze zum Kochen, so wird der entstandene Niederschlag auch citronengelb gefärbt und in chelihydronsaures Blei umgewandeit.

Abscheidung der Chelihydronsäure aus den gelben Salzen.

In meiner ersten Abhandlung habe ich angeführt, dass die gelbgefärbten Salze der Chelidonsäure durch Säuren wieder entfärbt und in die zweibasischen umgewandelt werden und dass bei hinreichendem Säurezusatz die Chelidonsäure wieder unverändert herauskrystallisirt; dieses Verhalten bewog mich damals zu der Annahme der dreibasischen Natur der Chelidonsäure. Diese Erscheinung beobachtete ich auch später bei der Wiederaufnahme der Untersuchung, fand aber, dass, wo ich mit etwas grösseren Mengen arbeitete, die von den Krystallen der Chelidonsäure abgeschiedene saure Mutterlauge stets gelblich gefärbt war, auf Zusatz von Alkali sich satt gelb färbte, somit auch die Säure der gelben Salze enthalte und auch darstellbar sein dürfte.

Die Versuche, die Säure aus dem gelben Kalisalze, nämlich aus der durch Behandlung der Chelidonsäure mit einem Überschuss von Kalilauge entstandenen morgenrothen Lösung, durch Zersetzung mit Schwefelsäure und Ausschüttelung mit Äther zu gewinnen, misslang; beim Verdunsten des Äthers krystallisirte zumeist wieder Chelidonsäure heraus.

Dasselbe Resultat gaben die Blei-, Kalk- und Barytsalze bei analoger Behandlung. Nur die Mutterlaugen blieben stets gelb gefärbt und enthielten kleine Mengen der gelb gefärbten Säure.

Wird dagegen der abgehobene, schwach gelblich gefärbte Äther mit Ammoniak versetzt und geschüttelt, so nimmt das Ammoniak eine morgenrothe Farbe an, und hinterlässt beim Abdampfen das chelihydronsaure Ammoniak in orangegelben Krystallen zurück, in denen aber auch einzelne ungefärbte Nadeln, offenbar chelidonsaures Ammoniak, vorkommen.

Ferner versuchte ich die Säure aus dem gelben Bleisalze mit Schwefelwasserstoff abzuscheiden und darzustellen. Die

abgeschiedene Säure ist aber keine Chelihydronsäure, sondern eine andere schwefelhaltige Säure, die gelb- und rothgefärbte Salze gibt und später besprochen wird.

Ein etwas besseres Resultat erzielte ich bei der Zersetzung des geléeartigen Kalikalksalzes mittelst Schwefelsäure und Ausschüttelung mit alkoholartigem Äther.

Nur aus den ersten Ausschüttelungen krystallisirte eine kleine Menge unveränderter Chelidonsäure heraus. Die weiteren Ausschüttelungen waren von Chelidonsäure frei, sie erschienen blassgelb gefärbt und liessen beim Verdunsten des Äthers die Säure in Form einer amorphen, schwach gelb gefärbten Masse zurück, der aber immer etwas nebenbei gebildete Ätherverbindung beigemengt war.

Die auf diese Weise erhaltene Chelihydronsäure krystallisirt nicht, ihre Lösungen trocknen zu einer gelblichen, durchscheinenden, spröden, hydroskopischen Masse ein.

Im Wasser und Alkohol ist die Säure leicht löslich, schwerer in Äther löslich. Die Lösungen reagiren stark sauer, sie sind lichtgelb, die wässerigen satter gelb gefärbt.

Im Exsicator trocknen sie ohne Zersetzung und Abscheidung von Chelidonsäure wieder ein.

Die wässerige Lösung der Säure gibt mit Basen citrongelb gefärbte in Wasser schwer oder unlösliche Niederschläge. Mit Eisenchlorid entsteht eine dunkelrothe Färbung, die von der Eisenreaction der Mekonsäure nicht zu unterscheiden ist; Eisenvitriol gibt sogleich keine Reaction, beim Stehen wird die Flüssigkeit ebenfalls roth gefärbt. Interessant ist die Reaction mit Silbernitrat: Versetzt man die mit Ammoniak neutralisirte morgenrothe Lösung der Säure mit Silbernitrat, so entsteht ebenfalls ein citronengelber, in viel Wasser löslicher Niederschlag, welcher sich aber beim Kochen chocoladebraun färbt. Wird vor Beendigung der vollständigen Umwandlung kochend heiss filtrirt, so scheidet sich beim Abkühlen aus dem gelblichen Filtrate ein schwach gelbes, krystallinisches Silbersalz ab. Der chocoladebraune Niederschlag löst sich vollständig in Ammoniak zu einer gelbrothen Flüssigkeit auf. Im Wasser ist er ebenfalls löslich, die Lösung ist roth gefärbt. Dieselbe Erscheinung tritt auch auf bei der Fällung des geléeartigen Kalikalksalzes mit Silbernitrat.

Der gelbe Niederschlag ist ein Doppelsalz aus chelihydronsaurem Silberkalk bestehend; die Braunfärbung tritt auch dann ein, wenn das abfiltrirte ausgewaschene und getrocknete gelbe Silbersalz einer Temperatur über 140° C. ausgesetzt wird.

Behufs Bestimmung der Zusammensetzung dieser gelben Säure habe ich das Säurehydrat wegen seines weniger geeigneten Zustandes der Analyse nicht unterworfen, und musste mich darauf beschränken, die Formel derselben aus der Analyse der Salze zu ermitteln und, nachdem ich zur Darstellung der Salze aus Mangel an Säurehydrat das geléeartige Kalikalkdoppelsalz verwenden musste, so hatte ich es ausser einem Kalksalze zumeist mit Doppelsalzen zu thun, in denen, wie die Analysen ergeben, ein Molekül Säure mit 3 *M'* und auch mit 4 *M'* gebunden waren.

Chelihydronsaures Calcium $C_7H_2O_7 . Ca_2$.

Dieses Kalksalz erhielt ich aus der alkalischen, geléeartigen Kalikalkverbindung durch Neutralisation einer concentrirten Lösung derselben mit Essigsäure.

Nach kurzem Stehen schied sich aus der Lösung ein citrongelber Niederschlag ab. Dieser wurde abfiltrirt, ausgewaschen und hatte im trockenen Zustande alle Eigenschaften jenes gelben Kalksalzes, welches sich aus der Lösung des chelidonsauren Calciums auf Zusatz von Kalkwasser beim Erhitzen abscheidet, in welchem aber stets oxalsaurer Kalk vorkommt und wesshalb es sich auf diese Weise nicht rein darstellen lässt.

Es bildet ein zartes, leicht bewegliches, citronengelb gefärbtes Pulver; unter dem Mikroskop betrachtet, stellt es gelbe, durchsichtige Kügelchen, nicht unähnlich den Stärkekörnern, dar. In Wasser ist es schwer löslich; die Lösung ist gelblich gefärbt.

Nachdem dieses Salz ein reines Kalksalz war, so fand ich dieses allein geeignet zur eingehenden Analyse, welche nachstehende Zahlen ergab:

I. 0·706 Grm. des bei 150° C. getrockneten Salzes gaben 0·286 Grm. CaO.

II. 0·601 Grm. des bei 150° C. getrockneten Salzes gaben 0·659 Grm. CO_2, 0·044 Grm. H_2O.

Berechnet für $C_7H_2O_7 . Ca_2$	Gefunden I	Gefunden II
C = 30·22%	—	29·91%
H = 0·71	—	0·81
O = 40·29	—	—
Ca = 28·78	28·89%	—

Chelihydronsaures Silber.

Die Chelihydronsäure gibt mit Silber zwei Verbindungen, ein gelbes und ein chocoladebraunes Salz.

Wird die Säure mit Ammoniak neutralisirt — wodurch die gelbe Lösung der Säure morgenroth gefärbt wird — und dann mit Silbernitrat versetzt, so entsteht ein gelber Niederschlag, welcher, wenn die Flüssigkeit zum Kochen gebracht, in einen chocoladebraunen Niederschlag umgewandelt wird.

Beide Fällungen sind in Wasser löslich. Die Lösung des gelben Niederschlages ist gelblich, jene des chocoladebraunen roth gefärbt.

Die Löslichkeit des chocoladebraunen Silbersalzes beginnt erst dann, wenn der Niederschlag von dem Fällungsmittel zum grössten Theile befreit ist und hinterlässt im Vacuum abgedampft das Salz undeutlich krystallinisch zurück.

Beide Salze lösen sich in Ammoniak vollständig zu einer dunkelgelben Flüssigkeit auf. Wird das chocoladebraune Silbersalz in Salpetersäure gelöst und die gelbliche Lösung mit Ammoniak neutralisirt, so scheidet sich aus derselben wieder das ursprüngliche gelbe Silbersalz aus, und kann beim Kochen wieder in das chocoladebraune umgewandelt werden.

Wird dagegen statt der Säure das mehrfach besprochene Kalikalksalz zur Darstellung der Silbersalze verwendet, so treten analoge Erscheinungen auf. Mit Silbernitrat entsteht in der neutralen Lösung des Kalikalksalzes eine citronengelbe Fällung, welche beim Kochen ebenfalls in einen chocoladebraunen Niederschlag umgewandelt wird.

Diese Niederschläge enthalten aber neben Silber auch noch Kalk, sind daher Doppelsalze.

Die folgenden zwei der Analyse unterworfenen Silberverbindungen erhielt ich aus der mit Ammoniak neutralisirten Chelihydronsäure durch Fällung mit Silbernitrat, Kochen bis zur chocoladebraunen Färbung des Niederschlages und Filtration der heissen Flüssigkeit.

Das Filtrat war gelb gefärbt, beim Abkühlen fiel daraus ein gelblich gefärbtes krystallinisches Salz, welches ausgewaschen, getrocknet, der Untersuchung unterzogen wurde.

Der am Filtrum gesammelte chocoladebraune Niederschlag wurde ausgewaschen, bis er sich zu lösen anfing, dann getrocknet und das Silber bestimmt.

Ich hatte von den beiden Verbindungen nur so viel, um die Silberbestimmung vornehmen zu können.

Bei der Analyse erhielt ich nachstehende Zahlen:

I. Gelbes Silbersalz.[1]

0·245 Grm. der bei 100° C. getrockneten Substanz verloren 12.24% H_2O.

0·215 Grm. der bei 100° C. getrockneten Substanz gaben 0·1765 Grm. AgCl.

	Berechnet für $C_7H_3O_7.3Ag+4H_2O$	Gefunden
Ag	= 61·76%	61·95%
$4H_2O$	= 12·10	12·24%

II. Chocoladebraunes Silbersalz.[1]

0·601 Grm. Substanz gaben 0·533 Grm. AgCl.

	Berechnet für $C_7H_2O_7.4Ag$	Gefunden
Ag	= 69·26%	68·56%

Die durch Fällung des Kalikalksalzes mit Silbernitrat erhaltenen Niederschläge waren Doppelsalze und ergaben bei der Analyse Werthe, welche nicht genau übereinstimmen, offenbar

[1] Neuerliche Bereitung behufs eingehender Analyse dieser Salze wird eben vorgenommen.

desshalb, weil die Niederschläge beim Auswaschen nicht unveränderlich sind.

III. Gelbes Doppelsalz.

1·019 Grm. Substanz, bei 100° getrocknet, gaben 0·633 Grm. AgCl, 0·061 Grm. CaO.

Berechnet für $C_7H_3O_7.2Ag\,{}^1/_2Ca + 2H_2O$	Gefunden
Ag = 45·86%	46·75%
Ca = 4·24	4·34

IV. Chocoladebraunes Doppelsalz.

0·792 Grm. der bei 100° C. getrockneten Substanz gaben 0·653 Grm. AgCl, 0·028 Grm. CaO.

Berechnet für $C_7H_3O_7.3Ag.{}^1/_2Ca$	Gefunden
Ag = 59·77%	62·17%
$^1/_2$Ca = 3·69	3·54

Die durch Fällung des Kalikalksalzes mit Bleizucker, ferner mit Chlorbarium erhaltenen citronengelben Niederschläge erwiesen sich auch als Doppelsalze und gaben bei der Analyse folgende Werthe:

V. Bleicalciumsalz.

0·848 Grm. Substanz, bei 120° C. getrocknet, gaben 0·591 Grm. $PbSO_4$, 0·0789 Grm. CaO.

Berechnet für $2(C_7H_2O_7).pb\,5\,ca\,3 + 6H_2O$	Gefunden
Pb = 47·85%	47·61%
Ca = 5·64	6·57

VI. Baryumcalciumsalz.

0·756 Grm. bei 140° C. getrocknete Substanz gaben 0·459 Grm. $BaSO_4$, 0·097 Grm. CaO.

	Berechnet für $C_7H_2O_7BaCa$	Gefunden
Ba	= 36·53%	35·72%
Ca	= 10·66	9·16

VII. Kaliumcalciumsalz.

Endlich habe ich noch das geléeartige Kalikalksalz der Analyse unterzogen und zu diesem Zwecke die alkalische Lösung desselben mit Essigsäure neutralisirt, mit Alkohol gefällt, abermals in Wasser gelöst und mit Alkohol gefällt und diesen Process so lange wiederholt, bis der Weingeist nichts Fixes mehr aufnahm.

Diese Verbindung bildete ein blassgelbliches leichtes Pulver. Die Analyse ergab folgende Resultate:

0·639 Grm. Substanz, bei 120° C. getrocknet, gaben 0·151 Grm. CaO, 0·130 Grm. K_2SO_4.

	Berechnet für $C_7H_2O_7.3ca.K+2H_2O$	Gefunden
Ca	= 18·01%	17·90%
K	= 11·70	11·00

Aus den vorstehenden Analysen ergibt sich, namentlich aus dem der Elementaranalyse unterworfenen wasserfreien Calciumsalze $C_7H_2O_7.Ca_2$ die Formel der Chelihydronsäure = $C_7H_6O_7$, welche durch die Untersuchung der anderen Verbindungen bestätigt wird, in denen drei oder vier H im Säuremolekül durch Metalle ersetzt sind.

Darnach würde sich die aus der Chelidonsäure durch Einwirkung von alkalischen Hydroxyden entstandene gelbe Säure, die Chelihydronsäure, von der Chelidonsäure nur durch die Elemente des H_2O unterscheiden.

Einwirkung von Ammoniak auf Chelidonsäure und Bildung der Chelidammsäure. $C_7H_5NO_5$.

Die Chelidammsäure entsteht aus der Chelidonsäure, wenn Lösungen derselben mit Überschuss von Ammoniak abgedampft werden. Die abgedampfte Salzmasse enthält dann keine Chelidonsäure mehr, sondern das Ammonsalz der neu entstandenen

stickstoffhaltigen Säure, welche auch von Lietzenmayer dargestellt wurde, und die von Lieben und Haitinger als Oxypyridincarbonsäure angesehen wird.

Sie ist $C_7H_5NO_5$ zusammengesetzt. Ihre Bildung wird durch die Gleichung

$$C_7H_4O_6 + NH_3 = C_7H_5NO_5 + H_2O$$

ersichtlich.

Diese stickstoffhältige Säure, respective ihre Salze bilden sich auch leicht, wenn chelidonsaure Salze mit Ammoniak behandelt werden.

Übergiesst man nämlich neutrales chelidonsaures Blei-Silber oder das Kalksalz etc. mit Ammoniak und lässt es längere Zeit bei gewöhnlicher Temperatur auf die Salze einwirken, so werden die ungefärbten Salze vorübergehend gelblich gefärbt; das Blei- und Silbersalz lösen sich nach und nach endlich vollständig in der ammoniakalischen Flüssigkeit zu einer ungefärbten Lösung auf, aus welcher beim Abdampfen ungefärbte Krystalle der Doppelsalze von chelidammsaurem Blei- oder Silberammon herausfallen. Der Vorgang bei der Behandlung des chelidonsauren Calciums ist ein etwas anderer; die ungefärbten Nadeln des chelidonsauren Calciums werden bei der Behandlung mit Ammoniak schwach gelblich gefärbt, sie lösen sich aber in der Ammoniakflüssigkeit nicht auf, wie es bei dem Blei- oder dem Silbersalz der Fall ist, sondern verändern dabei nur ihre Krystallform; sie verwandeln sich nämlich in schwach gelblich gefärbte durchsichtige grössere und kleinere, gewöhnlich zu Drusen zusammenhängende Prismen und stellen die Verbindung der Chelidammsäure mit Ammon und Calcium dar. Dieses Doppelsalz ist in Wasser schwer löslich, beim Kochen löst es sich unter Entwicklung von Ammoniak auf, und aus der Lösung krystallisirt beim Abdampfen das in Wasser leicht lösliche, in ungefärbten Nadeln krystallisirende zweibasische Kalksalz der Chelidammsäure heraus.

Beim Erwärmen geht diese Umwandlung der chelidonsauren Salze schneller vor sich.

Die Chelidonsäure lässt sich auch in dem Safte des Chelidonkrautes mittelst Ammoniak in Chelidammsäure überführen und direct aus dem Safte darstellen.

Wird der ausgepresste und coagulirte Saft mit Ammoniak in Überschuss versetzt und eine Zeit lang stehen gelassen, dann filtrirt, auf etwa die Hälfte des Volums abgedampft und mit Salzsäure übersättigt, so fällt die Chelidammsäure aus der Flüssigkeit krystallinisch heraus, und wird durch Umkrystallisiren rein erhalten.

Die auf die eine oder die andere Weise entstandenen chelidammsauren Salze wurden behufs der Abscheidung der Säure in warmem Wasser gelöst und die Lösung mit Salzsäure übersäuert, das herausgefallene Krystallmehl in kochendem Wasser gelöst, und die beim Erkalten abgeschiedenen Krystalle durch nochmaliges Umkrystallisiren gereinigt.

Die auf diese Weise, und zwar zumeist aus dem Ammonkalksalz gewonnene Säure krystallisirte in schwach gelblichen sechsseitigen Prismen und wurde von mir anfangs als das reine Säurehydrat betrachtet und desshalb auch der Analyse unterworfen.

Die Analysen (im Jahre 1854) der bei 100° C. getrockneten Säure gaben nachstehende Werthe:

I.	0·3295	Grm.	Substanz,	0·516	Grm.	CO_2,	0·1147	Grm.	H_2O.
II.	0·2217	„	„	0·350	„	CO_2,	0·0755	„	H_2O.
III.	0·353	„	„	0·560	„	CO_2,	0·1235	„	H_2O.
IV.	0·3625	„	„	0·574	„	CO_2,	0·124	„	H_2O.
V.	0·525	„	„	0·424	„	Pt.			

Diese analytischen Resultate führten nicht zu der Formel der Chelidammsäure $C_7H_5NO_5$, wie sich dieselbe aus der Untersuchung der Salze und des Äthers ergeben hat, sondern liessen dieselbe als eine Zusammensetzung aus $C_{14}H_{13}N_3O_{10}$ annehmen.

Berechnet	Gefunden				
	I	II	III	IV	V
C=42·97%	42·88%	43·04%	43·34%	43·19%	—
H= 3·45	3·88	3·78	3·89	3·84	—
N=11·14	—	—	—	—	11·44%

Vergleicht man die Zusammensetzung dieser Säure mit jener des reinen Chelidammsäurehydrates, und zwar mit 2 Mol. desselben $= C_{14}H_{10}N_2O_{10}$, dann erscheint in der fraglichen Säure ein Plus von NH_3 enthalten.

Und es liesse sich die Säure als eine Verbindung von Chelidammsäure mit saurem chelidammsauren Ammon

$$C_7H_5NO_5 + C_7H_4NO_5 . NH_4$$

betrachten.

Diese Annahme würde dadurch eine Begründung erlangen, weil sich bei dem Kochen der Säure mit überschüssiger Kalilauge Ammoniak entwickelt.

Nachdem jedoch das Kalkammonsalz, aus dem die Säure abgeschieden wurde, eine ähnliche Zusammensetzung wie die Säure zeigte, und annähernd zu der Formel

$$(C_{14}H_8N_3O_{10} . 5ca) + 4H_2O$$

führte, so ist es nicht unmöglich, dass diese Säure eine Art Doppelsäure sei, worin die 3N auch auf doppelte Weise, nämlich ein N auch als NH_2 darin gebunden vorkommt.

Dass nämlich durch die Ammoniakeinwirkung auf das chelidonsaure Calcium 2 Mol. Chelidonsäure sich in Chelidammsäure umwandeln, 1 Mol. davon aber noch amidirt wird,

$$C_7H_5NO_5 + C_7H_4(NH_2)O_4 + H_2O,$$

welche mit Überschuss von Kalilauge gekocht unter Ammoniakentwicklung in 2 Mol. Chelidammsäure zerfallen könnte.

Zur Begründung dieser Hypothese fehlen aber weitere Belege und ich lasse die Erklärung hierüber vorläufig in Frage, und bemerke nur, dass Lietzenmayer bei der Analyse dieser Säure ebenfalls ähnliche Resultate erhielt, und weil er sich die Differenz nicht erklären konnte, sie in Fehlerquellen der Verbrennung suchte.

Rein — ammoniakfrei — erhält man die Chelidammsäure, wenn das durch Salzsäure abgeschiedene Krystallmehl derselben noch mit Kalilauge so lange in der Kochhitze behandelt wird, als sich noch Ammoniak entwickelt. Dann scheidet Salzsäure die reine Säure ab.

Unmittelbar gleich chemisch rein wird die Säure dargestellt durch Zersetzung der zweibasischen Salze mit ClH, am besten aus dem in Nadeln krystallisirten Kalksalz $C_7H_3NO_5 . Ca$ und einmaliges Umkrystallisiren derselben.

Die Analyse der aus diesem Kalksalze dargestellten, in rhombischen Prismen krystallisirten und bei 100° C. getrockneten Säure ergab:

I. 0·3316 Grm. Substanz, 0·5154 Grm. CO_2, 0·1037 Grm. H_2O.
II. 0·5605 „ „ 0·253 „ Pt.
III. 0·252 „ „ 0·252 „ Pt.

Berechnet für $C_7H_7NO_6$	Gefunden I	Gefunden II	Gefunden III
C = 41·79%	42·09%	—	—
H = 3·48	3·50	—	—
N = 6·97	—	7·06%	6·39%

Die Analyse der bei 100° C. getrockneten Säure führt zu der Formel $C_7H_7NO_6$. Aus der Zusammensetzung des Äthers und der Salze ergibt sich, dass die bei 100° C. getrocknete Säure 1 Mol. Krystallwasser enthält und die Formel des Säurehydrat $C_7H_5NO_5$ ist. Trocknet man die Säure bei 130—140° C., so erleidet sie einen Gewichtsverlust, der 1 Mol. H_2O gleichkommt.

Diese zwei Säuren, nämlich die reine aus dem chelidammsauren Kalksalze und jene aus dem chelidammsauren Ammonkalksalze abgeschiedene ammonhältige Säure, unterscheiden sich von einander auch durch ihre Krystallgestalt und durch die Löslichkeit im Wasser.

Das reine Chelidammsäurehydrat krystallisirt in geraden rhombischen Prismen und löst sich in 637 Theilen Wasser auf, wogegen die ammonhältige Säure zu ihrer Lösung 1576 Theile Wasser benöthigt und in sechsseitigen schiefen Prismen krystallisirt.

In Alkohol ist die Säure sehr schwer löslich, in Äther fast unlöslich. In warmen Wasser löst sie sich in grösserer Menge als in kaltem auf und fällt bei dem Erkalten zum grossen Theile krystallisirt heraus. Die Lösung der Säure gibt mit Eisenvitriol und Eisenchlorid eine morgenrothe Färbung; eine gleiche, nur gesättigtere Färbung entsteht, wenn die Säure mit Ammoniak neutralisirt wird. Die gelbrothe Reaction mit Eisenvitriol verändert sich aber bald und geht endlich in eine dunkel purpurrothe Färbung über.

In Mineralsäuren löst sie sich leicht auf, fällt aber bei dem Verdünnen mit Wasser wieder unverändert heraus.

Durch Ätzalkalien wird sie ebenfalls nicht angegriffen. Mit Ätzalkalilauge gekocht, tritt der N nicht als Ammoniak heraus, ebensowenig lässt sich derselbe durch salpetrige Säure eliminiren. Wird aber die Säure mit geschmolzenem Ätzalkali behandelt, so lässt sich der N in der Schmelze als Cyan nachweisen.

Beim Erhitzen mit rauchender Salzsäure in zugeschmolzener Röhre durch 36 Stunden spaltet sich der Stickstoff auch nicht als Ammon ab.

Mit Kaliumpermanganat — in alkalischen Lösungen — erfolgt aber die Zersetzung der Säure unter Entwicklung von Ammoniak und Bildung von Oxalsäure.

Wird die Säure für sich einer höheren Temperatur ausgesetzt, so spalten sich $2CO_2$ ab, und es destillirt eine ungefärbte Flüssigkeit, welche zu Krystallen erstarrt und das Chelamid C_5H_5NO (Oxypyridin) darstellt.

Bei der Behandlung mit Haloiden treten in das Molekül der Chelidammsäure zwei Atome von Br, Cl, oder J ein, und indem sie 2H vertreten, entstehen leicht krystallisirbare Säuren, deren Lösungen mit Eisenchlorid eine schöne rothe Reaction geben, woraus sich dann die bezüglichen Eisensalze in rothgefärbten Nadeln abscheiden.

Chelidammsaurer Äthyläther

$$C_7H_3NO_5 \left\{ \begin{matrix} C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix} \right. + H_2O.$$

Wird Chelidammsäure mit etwa gleichen Theilen Schwefelsäure erwärmt und nach der erfolgten Lösung Alkohol hinzugesetzt, so entsteht der Äther fast augenblicklich; setzt man dann der Flüssigkeit Wasser bis zum Eintritt einer leichten Trübung zu, so krystallisirt beim Erkalten der Äther in grossen wasserhellen Säulen heraus.

Behufs der Reindarstellung des Äthers wurde die saure Flüssigkeit mit Natroncarbonat neutralisirt und mit Äthyläther ausgeschüttelt.

Die ätherische Lösung setzt nach dem Verdunsten eine ungefärbte krystallinische Masse ab, aus welcher mittelst Lösen in Wasser oder Weingeist feine Nadeln herauskrystallisiren. Nach einmaligem Umkrystallisiren wird der Äther rein gewonnen.

Der Äther krystallisirt in langen, seidenglänzenden Nadeln. Er schmilzt bei 80—81° C. zu einer ungefärbten Flüssigkeit, die unter 80° C. abgekühlt, schnell zu einer Krystallmasse erstarrt.

Im Vacuum getrocknet, werden die Krystalle zuerst weich, gummiartig, nach längerem Trocknen verlieren sie wieder das gummiartige Aussehen und werden fest, weiss, emailartig.

In Wasser, Alkohol und Äther ist das Äthylchelidammat leicht löslich.

Beim längeren Kochen mit Wasser wird es zersetzt, es bildet sich wie bei dem chelidonsauren Äthyl eine Äthylsäure, welche in Wasser schwerer löslich ist, in kurzen, dicken garbenförmig vereinigten Säulen krystallisirt und erst über 200° C. schmilzt.

Ammoniak ist sowohl in der alkohol-ätherischen als auch wässerigen Lösung ohne Einwirkung auf den Äther, ebenso indifferent verhält sich die salpetrige Säure.

Die Analyse des luftrockenen Äthers gab:

0·2325 Grm. Substanz, 0·4365 Grm. CO_2, 0·1255 Grm. H_2O. und führte zu der summarischen Zusammensetzung $C_{11}H_{15}NO_6$.

	Berechnet	Gefunden
C =	51·36%	51·21%
H =	5·83	5·99

Der im Vacuum getrocknete Äther gab:

I. 0·238 Grm. Substanz, 0·480 Grm. CO_2, 0·1195 Grm. H_2O.

II. 0·2635 Grm. Substanz verloren beim Trocknen 0·019 H_2O.

Dies entspricht der Zusammensetzung

$$C_7H_3NO_5\begin{cases}C_2H_5\\C_2H_5\end{cases}$$

	Berechnet	Gefunden
C =	55·23%	55·01%
H =	5·44	5·58
H_2O =	7·00	7·12

Chelidammsaure Salze.

Die Chelidammsäure gibt mit Basen, obgleich sie nur zwei an Carboxyl gebundene Hydroxyle enthält, doch drei Reihen von Salzen, von denen ich einige, namentlich die mich näher interessirenden Doppelsalze darstellte und analysirte.

Chelidammsaures Bleiammon. $C_7H_2NO_5.Pb.NH_4$.

Wird chelidonsaures Blei mit Ammoniak übergossen und längere Zeit stehen gelassen — wie bereits im Eingange über Chelidammsäure angeführt, — so wird das ungefärbte Salz schwach gelblich gefärbt. Die gelbe Färbung verschwindet bald, das Salz geht in Lösung über, aus welcher bei dem Verdunsten das Doppelsalz herauskrystallisirt.

Es bildet ungefärbte, durchsichtige Nadeln, welche an der Luft leicht verwittern und weiss werden. In Wasser ist es leicht löslich. Die Lösung reagirt neutral. Wird dieselbe längere Zeit gekocht, so entwickelt sich Ammoniak, und es scheidet sich das zweibasische chelidammsaure Blei aus der Lösung ab. Dasselbe geschieht auf Zusatz einer Säure.

Durch Bleizuckerlösung entsteht eine Fällung von dreibasischem chelidammsauren Blei.

Die Analyse des bei 100° C. getrockneten Salzes gab:

I. 0·4488 Grm. Substanz, 0·2655 Grm. Pb.

II. 0·4625 „ „ 0·3494 „ CO_2, 0·060 Grm. H_2O.

	Berechnet für $C_7H_2NO_5PbNH_4$	Gefunden
C	= 20·74%	20·60%
H	= 1·48	1·44
Pb	= 51·11	51·23

Dreibasisches chelidammsaures Blei $(C_7H_2NO_5)_2Pb_3$.

Das vorangehende Doppelsalz wurde in Wasser gelöst und mit Bleizucker gefällt. Der entstandene Niederschlag hatte anfänglich die Form weisser käseartiger Flocken; diese Form ändert sich in kurzer Zeit, die Flocken verwandeln sich in lange, seidenglänzende Nadeln, welche sich in heissem Wasser lösen

und bei dem Abkühlen wieder in denselben seidenglänzenden Nadeln herausfallen. Das Salz ist auch in Ätzkalilauge leicht löslich.

Das Salz bei 100° C. getrocknet, gab:

I. 0·508 Grm. Substanz, 0·320 Grm. Pb.

II. 0·736 „ „ 0·466 „ CO_2, 0·051 Grm. H_2O.

	Berechnet für $(C_7H_2NO_5)_2.3Pb$	Gefunden
C	= 17·13%	17·26%
H	= 0·40	0·76
Pb	= 63·31	62·99

Zweibasisches chelidammsaures Blei $C_7H_3NO_5.Pb$.

Eine verdünnte wässerige Lösung des Bleiammonsalzes wurde im Überschusse mit Essigsäure versetzt. Es enstand ein weisser, schwerer, sich schnell absetzender Niederschlag. Diese Verbindung bildet ein feines, schneeweisses, zart anzufühlendes Pulver, welches unter dem Mikroskope betrachtet, aus durchsichtigen Prismen oder feinen, kreuzförmig zusammenhängenden Nadeln besteht.

In Wasser und Essigsäure ist es fast unlöslich, es löst sich dagegen in reinen, und unter Entwicklung von Kohlensäure auch in kohlensauren Alkalien leicht auf und verhält sich darnach gegen die Carbonate wie eine Säure.

Die Analyse des bei 100° C. getrockneten Salzes gab:

I. 0·652 Grm. Substanz, 0·3449 Grm. Pb.

II. 0·688 „ „ 0·544 „ CO_2, 0·0535 Grm. H_2O.

	Berechnet für $C_7H_3NO_5.Pb$	Gefunden
C	= 21·65%	21·57%
H	= 0·77	0·86
Pb	= 53·35	52·90

Diese drei vorbeschriebenen Bleisalze werden bei dem Erhitzen über 250° C. zersetzt und es destillirt unter Entwicklung von Kohlensäure das Spaltungsproduct der Chelidammsäure,

welches im Retortenhalse krystallinisch erstarrt und auf diesem Wege gleich vollständig rein erhalten werden kann.

Chelidammsaures Bleisilber $C_7H_2NO_5.PbAg$.

Diese Verbindung wurde durch Fällung der verdünnten Lösung des Bleiammonsalzes mit Silbernitrat dargestellt.

Der gebildete Niederschlag stellt ein weisses, schweres, in Wasser unlösliches Pulver dar, aus welchem sich bei dem Erhitzen über 250° C. ebenfalls CO_2 abspaltet und das Amid überdestillirt.

Die Analyse des bei 100° C. getrockneten Salzes gab:

I. 0·556 Grm. Substanz, 0·264 Grm. PbS, 0·162 Grm. AgO.
II. 0·8325 „ „ 0·528 „ CO_2 0·044 „ H_2Cl.

	Berechnet für $C_7H_2NO_5PbAg$	Gefunden
C	= 16·97%	17·29%
H	= 0·40	0·58
Pb	= 41·82	41·14
Ag	= 21·82	21·94

Chelidammsaures Bleibaryum $(C_7H_2NO_5)_2Pb_2Ba + 3H_2O$.

Das zur Analyse verwendete Salz wurde erhalten durch Vermischung heisser Lösungen von dem Bleiammonsalze mit Chlorbaryum. Beim Abkühlen krystallisirten feine, kurze Nadeln heraus, welche mittelst Waschen mit Wasser von überschüssigem Chlorbaryum befreit wurden. Beim freiwilligen Verdampfen einer gesättigten Lösung des Salzes krystallisiren lange, ungefärbte, rhombische Säulen heraus. Das Salz ist in kaltem Wasser schwer, in warmem leicht löslich.

Die Analyse des bei 100° C. getrockneten Salzes gab:

I. 1·161 Grm. Substanz, 0·603 Grm. PbS, 0·289 Grm. $BaS.O_4$.
II. 4·028 Grm. Substanz verloren beim Trocknen 5·71% H_2O.

	Berechnet für $(C_7H_2NO_5)_2Pb_2Ba$	Gefunden
Pb	= 45·44%	44·97%
Ba	= 15·04	15·00

Das Krystallwasser betrug $3H_2O$.

Chelidammsaures Bleikalium $C_7H_2NO_5.PbK + 3H_2O$.

Wie vorne bereits bemerkt, löst sich zweibasisches chelidammsaures Blei nicht blos in Alkalien auf, sondern ist im Stande, kohlensaures Kali selbst zu zersetzen.

Es wurde zur Darstellung dieser Doppelverbindung zweibasisches chelidammsaures Blei mit warmem Wasser angerührt und kohlensaures Kalium so lange zugesetzt, bis eine vollständige Lösung erfolgte und die Flüssigkeit eine alkalische Reaction annahm. Beim Abkühlen krystallisirt die grösste Menge des Doppelsalzes heraus und wurde durch einmaliges Umkrystallisiren rein erhalten.

Das Salz ist in kaltem Wasser schwer, in warmem leicht löslich. Durch anhaltendes Kochen im Wasser wird es wieder zersetzt; zweibasisches chelidammsaures Blei fällt heraus und die Lösung nimmt eine alkalische Reation an.

Die Analyse des bei 100° C. getrockneten Salzes ergab:

I. 1·164 Grm. Substanz, 0·6465 Grm. PbS, 0·240 Grm. K_2SO_4.
II. 3·248 Grm. lufttrockenen Salzes verlor bei 100° 0·356 Grm. H_2O.

	Berechnet für $C_7H_2NO_5.PbK$	Gefunden
Pb	= 48·57%	48·10%
K	= 9·20	9·26

Das Salz krystallisirt mit $3H_2O$.

Chelidammsaures Silber $C_7H_3NO_5.Ag_2$.

Wurde durch Fällung der Chelidammsäure mit Silbernitrat erhalten. Es bildet einen gallertartigen, dem Thonerdehydrat ähnlichen Niederschlag, welcher schwer auszuwaschen ist. In kochendem Wasser ist es löslich, beim Abkühlen fällt das Salz wieder gallertartig heraus.

Die Analyse des bei 100° C. getrockneten Salzes ergab:

I. 0·325 Grm. Substanz, 0·2305 Grm. AgCl.
II. 0·5975 „ „ 0·461 „ CO_2, 0·060 Grm. H_2O

Berechnet für $C_7H_3NO_5 . Ag_2$	Gefunden
$C = 21 \cdot 16\%$	$21 \cdot 04\%$
$H = 0 \cdot 75$	$1 \cdot 11$
$Ag = 54 \cdot 41$	$53 \cdot 40$

Kalksalze der Chelidammsäure.

Ich habe drei Kalkverbindungen der Chelidammsäure dargestellt und untersucht, und zwar:

$$C_7H_3NO_5Ca$$
$$(C_7H_2NO_5)_2Ca_3$$
$$C_7H_2NO_5Ca . NH_4$$

und endlich existirt noch eine Kalkammoniumverbindung, deren Analyse zu der Zusammensetzung führte:

$$\left.\begin{matrix} C_7H_2NO_5 . 2caNH_4 \\ C_7H_2NO_5 . 3ca \end{matrix}\right\} + 4H_2O,$$

welche aber auch als eine Verbindung der vorne betrachteten Doppelsäure $C_{14}H_{13}N_3O_{10}$ angesehen werden kann.

$$C_{14}H_8N_3O_{10} . 2^1/_2Ca + 4H_2O.$$

Werden Krystalle von chelidonsaurem Calcium in einem Kolben im Überschuss mit Ammoniak übergossen, und längere Zeit bei gewöhnlicher Temperatur stehen gelassen, so treten ähnliche Erscheinungen auf, wie bei der Behandlung des chelidonsauren Bleies mit Ammoniak.

Die Flüssigkeit färbt sich nach und nach gelblich, die nadelförmigen Krystalle des Kalksalzes verlieren ihre Form und verwandeln sich anfangs in vierseitige Prismen und nach etwa vier bis sechs Tagen ist das ganze Kalksalz der Chelidonsäure in ungleich sechsseitigen Prismen von schwach gelblicher Färbung umgewandelt.

Die von Ammoniak befreiten und mit Wasser gewaschenen Krystalle stellen ein schwach gelblich gefärbtes Krystallmehl dar, welches bei dem Erwärmen sich gelb färbt. Dieses ist in Wasser sehr schwer löslich. Wird es in Wasser anhaltend

gekocht, so zersetzt es sich unter Ammoniakentwicklung, es entsteht eine ungefärbte Lösung, aus der beim Abdampfen ungefärbte Nadeln des zweibasischen chelidammsauren Calciums herauskrystallisiren.

Die Analyse der im Vacuum getrockneten Verbindung ergab:

I. 0·4726 Grm. Substanz, 0·3168 Grm. CO_2, 0·331 Grm. H_2O.

II. 0·303 Grm. Substanz, im Vacuum 0·0954 Grm. H_2O.

Diese Zahlen würden der Formel einer Doppelverbindung entsprechen, welche betrachtet werden kann, bestehend aus:

$$\left.\begin{matrix} C_7H_2NO_5 . 2ca . NH_4 \\ C_7H_2NO_5 . 3ca \end{matrix}\right\} + 4H_2O$$

oder

$$(C_{14}H_8N_3O_{10} . 2^1/_2 Ca) + 4H_2O.$$

Berechnet dafür	Gefunden
C = 30·55%	29·79%
H = 2·92	3·49
Ca = 18·18	19·92

Zweibasisches chelidammsaures Calcium

$$C_7H_3NO_5 . Ca + 2H_2O.$$

Wird das vorangeführte Doppelsalz mit Wasser anhaltend gekocht, so geht es, wie bereits bemerkt, unter Ammoniakentwicklung in Lösung, aus welcher bei dem Abdampfen ungefärbte büschelförmig angereihte Nadeln herausfallen, welche durch Umkrystallisiren rein erhalten werden. Das Salz bildet seidenglänzende, nadelförmige Krystalle, welche unter dem Mikroskope betrachtet, aus sechsseitigen Säulen bestehen.

In heissem Wasser ist es leichter löslich als in kaltem.

Die Analyse des bei 100° C. getrockneten Salzes ergab:

I. 0·3872 Grm. Substanz, 0·2048 Grm. $CaSO_4$.

II. 0·3138 „ „ 0·3752 „ CO_2, 0·0796 Grm. H_2O.

Berechnet für $C_7H_3NO_5 . Ca + 2H_2O$	Gefunden
C = 32·68%	32·61%
H = 2·72	3·18
Ca = 15·56	15·56

Dreibasisches chelidammsaures Calcium
$(C_7H_2NO_5)_2Ca_3$.

Wird eine concentrirte Lösung des vorher beschriebenen zweibasischen chelidammsauren Calciums in einem verschlossenen Gefässe mit Kalkwasser versetzt, so nimmt die farblose Flüssigkeit eine gelbliche Färbung an, und nach etwa 24stündigem Stehen krystallisiren aus derselben durchsichtige, schwach gelblich gefärbte Prismen heraus, welche mit Wasser gewaschen, darin kaum löslich sind.

Wird das Salz mit Wasser anhaltend gekocht, so scheidet sich Kalk ab, und aus der Lösung krystallisirt das zweibasische Salz heraus.

Die Analyse des bei 100° C. getrockneten Salzes ergab:

I. 0·310 Grm. Substanz, 0·2206 Grm. $CaSO_4$.

II. 0·4062 „ „ 0·397 „ CO_2, 0·117 Grm. H_2O.

	Berechnet für $(C_7H_2NO_5)_2Ca3+8H_2O$	Gefunden
C	26·92%	26·67%
H	3·20	3·02
Ca	19·23	19·80

Chelidammsaures Calciumammonium
$C_7H_2NO_5Ca.NH_4 + 2H_2O$.

Dieses Doppelsalz entsteht, wenn eine Lösung von chelidammsaurem Ammon mit einer Lösung von Chlorcalcium vermischt wird. Setzt man dann zu der Flüssigkeit noch einige Tropfen von Ammoniak bis zur schwach alkalischen Reaction, so gesteht die Flüssigkeit zu einem Krystallbrei.

Im Vacuum und bei 100° C. getrocknetes, nach zwei Bereitungen, ergab bei der Analyse:

I. 0·3133 Grm. Substanz, 0·111 Grm. $CaCO_3$.

II. 0·2654 „ „ 0·095 „ „

	Berechnet für $C_7H_2NO_5.Ca.NH_4+2H_2O$	Gefunden I	Gefunden II
Ca	14·32%	14·17%	14·32%

Aus der vorstehenden Untersuchung der Verbindungen der Chelidammsäure ergibt sich die Formel des Säurehydrates $C_7H_5NO_5$ und mit H_2O krystallisirt $C_7H_5NO_5 + H_2O$.

Danach enthält sie drei Hydroxile, von denen nur zwei Säurehydroxile sind. Es lassen sich aber — wie die Untersuchung der Salze zeigte — sogar alle drei durch M' ersetzen und liefern daher eine Reihe ein- bis zwei- und dreibasischer einfacher oder Doppelsalze.

Bemerkenswerth ist die Eigenschaft des zweibasischen chelidammsauren Bleies, welches sich wie eine Säure verhält, indem es kohlensaure Alkalien unter Entwicklung von CO_2 zersetzt.

Halogenderivate der Chelidammsäure.

In der Chelidammsäure lassen sich 2H durch Haloide ersetzen und es entstehen die entsprechenden Substitutionsproducte, die Brom-, Chlor- und Jodchelidammsäure. Bei der directen Behandlung der Chelidammsäure mit Cl, Br, J ergab sich, dass am leichtesten die Bromirung der Säure vor sich gehe. Das Brom wirkt unmittelbar auf die in Wasser vertheilte Säure ein, und verwandelt sie in kurzer Zeit unter Bildung von Bromwasserstoff in die Bromchelidammsäure.

Das Chlor steht in seiner Wirkung dem Brom nach; die Chlorirung findet nur langsam statt, wenn auf die in Wasser vertheilte Säure Chlorgas eingeleitet wird.

Chlorkalk oder Salzsäure und Salpetersäure wirken dagegen energischer, es treten aber leicht Zersetzungsproducte auf, und zwar Chloraceton und Oxalsäure. Jod ist dagegen auf die Säure ohne Einwirkung.

Es lassen sich die zwei letzteren Substitutionsproducte doch auch leicht darstellen, wenn die Chelidammsäure in alkalischen Lösungen mit Chlor und Jod behandelt wird.

Alle drei Säuren kennzeichnen sich durch die Eigenschaft, mit Eisenchlorid eine purpurrothe Färbung zu geben.

Bromchelidammsäure $C_7H_3Br_2NO_5 + 2H_2O$.

Die Chelidammsäure wurde mit wenig Wasser angerührt und nach und nach Brom zugesetzt.

Das Brom verschwand rasch unter Temperaturserhöhung und Bildung von Bromwasserstoff und das Krystallmehl der Chelidammsäure verwandelt sich in kurzer Zeit in feine, ungefärbte Nadeln. Setzt man auf einmal grössere Mengen von Brom zu und lässt es eine Zeit lang stehen, so erstarrt das Ganze zu einer krystallinischen Masse.

Werden dann die Krystalle von der Mutterlauge getrennt und umkrystallisirt, so erhält man die Säure rein.

Die Säure krystallisirt aus heissen Lösungen und bilde grössere, mit dem blossen Auge bestimmbare Krystallformen.

In kaltem Wasser ist sie etwas schwer, in warmem dagegen leicht löslich. Der grösste Theil krystallisirt aus einer warmgesättigten Lösung entweder in langen, ungefärbten Nadeln oder grösseren Prismen heraus.

Die Krystalle verwittern an der Luft und werden asbestähnlich. In Alkohol ist sie schwer löslich. In warmer Salz- oder Schwefelsäure löst sich die Säure unverändert auf. Bei dem Erkalten oder Verdünnen mit Wasser fällt sie wieder unverändert heraus.

Beim Erhitzen verhält sich die Säure wie Chelidammsäure, es entsteht unter Abspaltung von Kohlensäure ein gebromtes Amid, welches, wenn vorsichtig erhitzt wird, leicht sublimirt und aus perlmutterglänzenden Blättchen besteht, welche, unter dem Mikroskope betrachtet, rhombische, dem Cholesterin ähnliche Tafeln darstellen.

Mit Basen gibt sie theils in Wasser lösliche, theils unlösliche Salze. Mit Eisenchlorid entsteht eine purpurrothe Färbung, aus concentrirten Lösungen scheiden sich sofort lange rothgefärbte Nadeln des Eisensalzes ab.

Untersucht wurde nur die Säure und das Silbersalz.

Die Säure lieferte bei der Analyse folgende Werthe:

I. 3·1226 Grm. bei 100° C. getrocknete Substanz gaben 0·6268 Ag Br.

II. 0·6012 Grm. Substanz gaben 0·5416 Grm. CO_2 0·0554 Grm. H_2O.

III. 3·1226 Grm. lufttrockene Säure verlor bei 100° C. 0·3116 Grm. H_2O.

Berechnet für $C_7H_3Br_2NO_5 + 2H_2O$	Gefunden
C = 24·64%	24·57%
H = 0·88	1·03
Br = 46·92	46·84
$2H_2O$ = 9·55	9·98

Bromchelidammsaures Silber $C_7HBr_2NO_5Ag_2$.

Bromchelidammsäure wurde in Wasser gelöst und mit Silbernitrat gefällt, der entstandene aus gebogenen verfilzten Nadeln bestehende Niederschlag mit Wasser ausgewaschen und bei 100° C. getrocknet. Die Säure wird hiebei fast vollständig ausgefällt und der Niederschlag ist im Wasser fast unlöslich.

Die Analyse ergab:

I. 0·8525 Grm. Substanz 0·436 Grm. AgBr.

II. 0·5344 Grm. Substanz 0·2933 Grm. CO_2 0·0119 Grm. H_2O

Berechnet für $C_7HBr_2NO_5Ag_2$	Gefunden
C = 15·13%	14·97%
H = 0·18	0·23
Ag = 38·92	38·50

Chlorchelidammsäure $C_7H_3Cl_2NO_5 . H_2O$.

Behufs der Darstellung dieses Substitutionsproductes wurde die Chelidonsäure im Überschuss von Ätzkalilauge gelöst und in die Lösungen Chlorgas geleitet.

Die mittelst Erwärmens von Chlor befreite Flüssigkeit wurde dann mit Salzsäure übersäuert, die herauskrystallisirte Säure in Wasser gelöst und durch wiederholtes Umkrystallisiren gereinigt.

Die Säure krystallisirt in feinen durchsichtigen, büschelförmig angereihten Nadeln, welche aus schief rhombischen Säulen bestehen.

An der Luft verwittern die Krystalle und erhalten ein asbestartiges Aussehen.

In Wasser, namentlich in warmem, löst sich die Säure leicht auf, etwas schwerer löslich ist sie in Alkohol.

Ihr chemisches Verhalten ist jenem der Bromchelidammsäure gleich.

Bei höherer Temperatur spaltet sich Kohlensäure unter Bildung von gechlortem, in Nadeln sublimirbaren Amid. Mit Eisenchlorid entsteht dieselbe purpurrothe Reaction wie mit der Bromchelidammsäure. Mit Silbernitrat oder Bleiacetat entstehen weisse, flockige Niederschläge, welche beim Erwärmen krystallinisch werden, sich in kochendem Wasser lösen und in Nadeln herauskrystallisiren.

Die Analyse gab:

I. 0·508 Grm. lufttrockener Säure verlor bei 100° C. 0·034 Grm. H_2O.

II. 0·2365 Grm. Substanz der bei 100° getrockneten Säure 0·2776 Grm. CO_2, 0·0386 Grm. H_2O.

III. 0·419 Grm. Substanz 0·505 Grm. AgCl.

Berechnet für $C_7H_3Cl_2NO_5+H_2O$	Gefunden I	Gefunden II	Gefunden III
C = 32·06%	—	32·01%	—
H = 1·14	—	1·11	—
Cl = 30·92	—	—	29·79%
H_2O = 6·66	6·69%	—	—

Chlorchelidammsaures Silber $C_7Cl_2NO_5.Ag_3$.

Die wässerige Lösung der Säure wurde mit Ammoniak neutralisirt und mit Silbernitrat versetzt, der entstandene Niederschlag mittelst Aufkochens in Lösung gebracht und das beim Abkühlen in feinen Nadeln herauskrystallisirte Salz durch Umkrystallisiren gereinigt.

Die Analyse des bei 100° getrockneten Salzes gab:

I. 0·516 Grm. Substanz 0·290 Grm. CO_2, 0·249 Grm. H_2O.

II. 0·412 Grm. Substanz 0·220 Grm. CO_2, 0·008 Grm. H_2O.

Berechnet für $C_7Cl_2NO_5Ag_3$	Gefunden I	Gefunden II
C = 14·66%	—	14·56%
H = —	—	0·20
Cl = 12·39	11·94%	—
Ag = 56·55	56·20	—

Chlorchelidammsaures Blei $2(C_7Cl_2NO_5)Pb_3$.

Wurde wie das Silbersalz mittelst Fällung der Säure mit Bleizuckerlösung und Lösung des krystallinischen Niederschlages und Umkrystallisiren erhalten.

In dem bei 100° C. getrockneten Bleisalz wurde bloss das Blei bestimmt. 0·2796 Grm. Salz gaben 0·2249 Grm. $PbSO_4$.

	Berechnet für $2(C_7Cl_2NO_5)Pb$	Gefunden
Pb	55·49%	54·80%

Die Zusammensetzung der Chlorchelidammsäure ist gleich dem Bromderivat. Die zwei dargestellten Silbersalze unterscheiden sich von einander insofern, als in der Bromchelidammsäure zwei Atome und in der Chlorchelidammsäure drei Atome Silber vorkommen.

Jodchelidammsäure $C_7H_3J_2NO_5$.

Jod für sich oder in Lösung von Jodkalium greift die Chelidammsäure nicht an.

Wird dagegen die Säure im Überschuss von Kalilauge gelöst und Jod zugesetzt, bis die Lösung kein Jod mehr aufnimmt, und die noch warme gelbliche Flüssigkeit mit Salzsäure übersäuert, so erstarrt sie zu einer filzartigen, aus langen, feinen Nadeln bestehenden Masse.

Werden die von der Mutterlauge getrennten Krystalle zweimal umkrystallisirt, so ist die Säure bereits rein.

Die Säure ist in kaltem und in warmem Wasser leicht löslich. Die in der Wärme bewirkte Lösung erstarrt stets zu einer filzartigen Krystallmasse. In Alkohol ist sie schwerer löslich, noch unlöslicher in Äther.

Sie gibt die Reactionen der vorangehenden zwei Halogenderivate, namentlich entsteht die rothe farbige Reaction mit Eisenchlorid. Das Eisensalz krystallisirt ebenfalls in feinen, rothen Nadeln, und Silber- oder Bleisalze fällen weisse Niederschläge heraus.

Bei höherer Temperatur wird sie zersetzt, es entwickeln sich violette Dämpfe von Jod, und es kann nicht — wie bei den

früheren Halogenderivaten — das entsprechende Jodchelamin durch Sublimation dargestellt werden.

Die Bestimmung des Jod bestätigte eine analoge Zusammensetzung der Säure mit den zwei vorangehenden Halogenderivaten.

I. 0·639 Grm. der Säure lufttrocken, verlieren bei 100° C. 0·046 Grm. H_2O.

II. 0·593 Grm. Säure gaben 0·635 Grm. AgJ.

Berechnet für $C_7H_3J_2NO_5$	Gefunden
J = 58·39%	57·84%

Chelamin (Oxypiridin) C_5H_5NO.

Das Chelamin entsteht, sobald die Chelidammsäure einer höheren Temperatur ausgesetzt wird, oder auch, wenn die später einzuführende Pyrosäure (Chelsäure), welche man bei der trockenen Destillation der Chelidonsäure als Anhydrid erhält, mit Ammoniak behandelt wird.

Erhitzt man nämlich die Chelidammsäure nach und nach höher, so fängt sie bei 250° C. an zu schmelzen, wird gelblich gefärbt und nun beginnt unter bedeutendem Aufschäumen eine beträchtliche Gasentwicklung.

Das Gas ist Kohlensäure. Diese Reaction dauert eine Zeit lang an, dann hört die Gasentwicklung auf und die früher zähe, stark schäumende Masse wird dünnflüssig.

Wird sie nun weiter erhitzt, so kommt sie ins Kochen, und wird die Operation in einer Retorte vorgenommen, so destillirt eine ungefärbte Flüssigkeit über, welche schon im Retortenhalse krystallinisch erstarrt.

Bei vorsichtiger Destillation bleibt nur eine Spur Kohle zurück. Zu Ende der Destillation tritt ein schwacher Geruch nach Bittermandelöl auf.

Dieses zu einer Krystallmasse erstarrte Destillat wird in Wasser oder Alkohol gelöst, woraus es rein herauskrystallisirt.

Bei der Bereitung kann die Destillation auch ganz wegfallen. Man erhitzt die Säure in einer Schale auf etwa 250° C.,

wo die Zersetzung beginnt und dann bei niedriger Temperatur fortschreitet. Der Process ist beendet, wenn der Inhalt dünnflüssig wird, ruhig schmilzt und sich keine Kohlensäure mehr entwickelt. Aus der erkalteten krystallinischen Masse erhält man das Amid durch Umkrystallisiren rein.

Gleich unmittelbar rein erhält man dasselbe, wenn statt der Säure das chelidammsaure Blei einer Destillation unterworfen wird.

Die Zersetzung des Salzes beginnt unter Entwicklung von kohlensaurem Gas, bei 280—300° C. und das Amid destillirt als eine vollkommen ungefärbte Flüssigkeit über, welche zu einer ungefärbten, aus Nadeln bestehenden Masse erstarrt.

Bei der Bereitung des Chelamids aus der Pyrosäure wird das gewöhnlich ungefärbte Destillat, welches — wenn es wasserfrei ist — neutral reagirt, mit concentrirtem Ammoniak in Überschuss versetzt, und die schön morgenroth gefärbte Flüssigkeit bis zur Krystallisation abgedampft, wobei sie zu einer gelbgefärbten, von ungefärbten Krystallen durchsetzten Masse erstarrt. Sie wird dann mit Alkohol behandelt. Die ungefärbten, das Chelamid darstellenden Krystalle lösen sich in Alkohol auf und werden durch Umkrystallisiren gereinigt.

Das auf die eine oder die andere Art erhaltene Chelamid krystallisirt in ungefärbten Nadeln oder grösseren Prismen, welche bei 62° C. schmelzen und an der Luft leicht verwittern. Das vom Krystallwasser befreite Amid schmilzt auch noch unter 100° C. etwa bei 95—96° C.

Neuester Zeit wurden mehrere Oxypyridine von gleicher Zusammensetzung C_5H_5NO aber abweichenden Eigenschaften, namentlich was den Schmelzpunkt betrifft, untersucht und bekannt gemacht.

So schmilzt das von Ost untersuchte bei 148° C. Das von Fischer und Körner bei 123·5° C. und König's und Geigy's Oxypyridin bei 107° C.

Daraus ergibt sich, dass unser Oxypyridin mit dem vorangeführten nicht identisch ist.

Es ist in Wasser und Alkohol leicht, in Äther schwer löslich. Wasser löst bei 15° C. gleiche Theile auf. Warm gemachte Lösungen erstarren beim Abkühlen zu einer Krystallmasse.

Die Reaction ist neutral. Mit Säuren stellt es schön und leicht krystallisirende Verbindungen dar. Dies gilt aber insbesonders für die Salpetersäureverbindung.

Mit Platinchlorid gibt es ein in grossen Krystallen schön krystallisirtes Platindoppelsalz, mit Quecksilber zwei Verbindungen, und vereinigt sich auch mit Silbernitrat.

Mit Zinkstaub erhitzt, wird es, wie Lieben bereits zeigte, zu Pyridin reducirt.

Es lässt sich leicht bromiren und gibt ein in Wasser schwerer lösliches krystallisirtes Bromchelamid, welches leicht sublimirt und mit Zinkstaub ebenfalls Pyridin entwickelt.

Die Analyse (im Jahre 1855 ausgeführt) ergab folgende Resultate:

I. 0·590 Grm. lufttrockener Substanz verlor beim Trocknen im Vacuum 0·100 Grm. H_2O.
II. 0·335 Grm. gaben 0·340 Grm. Pt.
III. 0·2605 „ „ 0·602 „ CO_2, 0·124 Grm. H_2O.
IV. 0·209 „ „ 0·4862 „ CO_2, 0·100 „ H_2O.
V. 0·2238 „ „ 0·5225 „ CO_2, 0·115 „ H_2O.

Berechnet für $C_5H_5NO+H_2O$	Gefunden				
	I	II	III	IV	V
C = 63·16%	—	—	63·03%	63·44%	63·67%
H = 5·26	—	—	5·29	5·31	5·71
N = 14·74	—	14·37%	—	—	—
H_2O = 15·93	16·95%	—	—	—	—

Platinverbindung $(C_5H_5NO.ClH)_2PtCl_4+H_2O$.

Die Platinverbindung wurde erhalten durch Versetzen einer mit Salzsäure schwach angesäuerten, wässerigen Lösung des Amids mit Platinchlorid, Abdampfen bis zur Krystallisation und Reinigen der Krystalle durch Umkrystallisiren.

Es stellt ziemlich grosse rhombische Säulen von dunkelgelber Farbe dar, welche an der Luft verwittern, in Wasser ist es leicht löslich.

Die Analyse des bei 100° C. getrockneten Platinats ergab:

I.	0·504 Grm. Substanz	0·372 Grm. CO_2,	0·094 Grm. H_2O.
II.	0·5775 „ „	0·189 „	Pt.
III.	0·550 „ „	0·178 „	Pt.
IV.	0·540 „ „	0·1755 „	Pt.
V.	2·097 „ „	verlor beim Trocknen 0·136 Grm. H_2O	

Berechnet für $(C_5H_5NO.ClH)_2PtCl_4+$ $+H_2O$	Gefunden				
	I	II	III	IV	V
C = 19·91%	20·12%	—	—	—	—
H = 1·99	2·07	—	—	—	—
N = 4·65	—	4·63%	—	—	—
Pt = 32·75	—	—	32·40%	32·51%	—
H_2O = 5·63	—	—	—	—	6·10%

Quecksilberverbindungen.

Das Amid gibt mit Quecksilberchlorid zwei Verbindungen; die eine entsteht, wenn Sublimatlösung mit Chelamid gefällt wird und bildet einen weissen krystallinischen, in Wasser schwer löslichen Niederschlag.

Die Bestimmung des Chlors und des Quecksilbers führte zu der Formel $C_5H_5NOHgCl_2$.

0·381 Grm. Substanz gaben 0·156 Grm. AgCl, 0·136 Grm. Hg S.

Berechnet für $C_5H_5NOHgCl_2$	Gefunden
Cl = 30·77%	30·79%
Hg = 10·92	10·12

Die zweite Verbindung wurde durch Fällung des salzsauren Chelamids mit Sublimat, Lösen des krystallinischen Niederschlages in Wasser, woraus es in langen, weissen Nadeln herauskrystallisirte, erhalten, und verlor im Vacuum getrocknet 12·17% H_2O.

Die Analyse ergab:

0·9606 Grm. Substanz, 0·993 Grm. $AgCl$, 0·649 Grm. HgS.

Berechnet für $C_5H_5NO\ ClH.2HgCl_2$	Gefunden
$Cl = 26·35\%$	$25·56\%$
$Hg = 59·39$	$58·24$

Silberverbindung $C_5H_5NO.NO_3H.NO_3Ag$.

Das Chelamid verbindet sich mit Silbernitrat zu einer in Wasser löslichen, in rhombischen Tafeln krystallisirenden Verbindung, aus welcher bei längerem Kochen Silber reducirt wird. Beim Erhitzen schmilzt es und explodirt endlich.

Die Analyse ergab:

0·387 Grm. Substanz, 0·174 Grm. $AgCl$.

Berechnet für $C_5H_5NO.NO_3H.NO_3Ag$	Gefunden
$Ag = 32·93\%$	$33·85\%$

Salzsaures Chelamid $C_5H_5NO.ClH$.

Das salzsaure Chelamid wurde erhalten durch Lösen des Amides im Überschusse von Salzsäure, Abdampfen und Trocknen bei 100° C. bis kein Gewichtsverlust stattfand.

Beim Trocknen färbte sich die Verbindung schwach roth. Wird sie einer höheren Temperatur ausgesetzt, so schmilzt sie zu einer rothen Masse und verdunstet dann. Die Analyse ergab:

I. 0·539 Grm. Chelamid gab salzsaures Chelamid 0·738 Grm., nahm daher 0·199 $ClH = 27·00\%$ auf.

II. 0·4105 salzsaures Chelamid gab 0·441 $AgCl$.

Berechnet für $C_5H_5NO.ClH$	Gefunden
$ClH = 27·76\%$	$27·30\%$

Chelidonsäure und Anilin.

Ich versuchte, ob das Anilin gleichwie das Ammoniak auf Chelidonsäure einwirke.

Wird Chelidonsäure mit Anilin zusammengebracht, so erwärmt sich das Gemenge beträchtlich und erstarrt kurz darauf zu einer harten, krystallinischen Masse von Chelidonsauren-Anilin, welches in Wasser gelöst und abgedampft, in ziemlich grossen ungefärbten durchsichtigen Säulen krystallisirt. Die Verbindung reagirt sauer, auch dann, wenn die wässerige Lösung von Chelidonsäure mit einem grossen Anilinüberschusse behandelt wurde.

Das chelidonsaure Anilin schmilzt beim Erhitzen. Beim gelinden Erwärmen wird es roth, endlich dunkelpäonienroth gefärbt, steigert man die Temperatur, so schmilzt es; es entwickelt sich Kohlensäure, nud die Reaction ist als beendet anzusehen, wenn sich keine Gasblasen mehr entwickeln.

In diesem Zustande ist die gelbe Schmelze dünnflüssig, braun gefärbt, und erstarrt beim Abkühlen zu einer aus concentrisch vereinigten Nadeln bestehenden Masse.

Wird die Masse in warmem Wasser gelöst, so krystallisiren beim Abkühlen aus der schwach gelblich gefärbten Flüssigkeit lange, ungefärbte Nadeln, die durch einmaliges Umkrystallisiren chemisch rein erhalten werden.

Die Verbindung stellt ein dem Chelamid entsprechendes Anilid dar. Es krystallisirt in langen, ungefärbten Nadeln. In kaltem Wasser ist es schwerer löslich. Warmes Wasser löst beträchtliche Mengen davon auf; eine heiss gesättigte Lösung erstarrt zu einem Krystallbrei. In Alkohol ist es auch leicht löslich, schwerer löslich in Äther.

Es scheint mit anderen Körpern keine Verbindungen einzugehen. Versetzt man heiss gesättigte Lösungen mit Sublimat, Silbernitrat und mit Platinchlorid, so krystallisirt das unveränderte Anilid wieder in Nadeln heraus.

In Säuren löst es sich ohne Veränderung auf, durch Verdünnen mit Wasser und Abdampfen scheidet es sich wieder in ungefärbten Nadeln heraus.

In kalter Kalilauge sind die Krystalle unlöslich, in warmen lösen sie sich auf und fallen beim Abkühlen wieder heraus.

Beim Abdampfen der kalischen Lösung wird die Masse intensiv gelb gefärbt, es tritt Zersetzung, Gasblasen und der Geruch nach Anilin ein.

Die Analyse der getrockneten Verbindung gab:

I. 1·6505 Grm. lufttrockene Substanz verlor im Vacuum 0·2895 Grm. H_2O.

II. 0·2778 Grm. Substanz gab 0·787 Grm. CO_2, 0·1398 Grm. H_2O

Berechnet für $C_{11}H_{19}NO + 2H_2O$	Gefunden
C = 77·19%	77·25%
H = 5·26	5·55
H_2O = 17·39	17·39

Das Anilid krystallisirt mit $2H_2O$.

Was nun die Constitution der Chelidonsäure und ihrer Derivate betrifft, so kann dieselbe aus den bisherigen Ergebnissen der Untersuchung noch nicht mit Bestimmtheit deducirt werden, und es erscheint vielmehr ein weiteres Studium zur Feststellung ihrer Structurformel nothwendig. Erwägt man jedoch einzelne prägnante Reactionen der Chelidonsäure, namentlich die leichte Bildung der Chelihydronsäure aus derselben unter Aufnahme der Elemente des H_2O, nämlich die Umwandlung der neutralen chelidonsauren Salze bei ihrer Behandlung mit Hydroxyden, wobei sie MOH aufnehmen, und dann die gelbgefärbten Salze der Chelihydronsäure darstellen, so lässt nachstehende Hypothese eine plausible Erklärung und den Einblick in den Vorgang dieses Processes dann zu, wenn in dem Molekül der Chelidonsäure $C_7H_4O_6$ folgende drei Atomgruppen angenommen werden.

$$\begin{matrix} CO.OH \\ CO.OH, \end{matrix} C_3H_2 \text{ oder } \begin{matrix} CH \\ \| \\ C \\ \| \\ CH \end{matrix} \text{ und } \begin{matrix} | \\ C \\ | \end{matrix}\!\!\left\langle\begin{matrix} O \\ | \\ C = O \end{matrix}\right.$$

nämlich ausser den der zweibasischen Chelidonsäure zukommenden zwei Carboxylgruppen, ein scheinbar vorgebildetes Acetonskelett, und die Gruppe

$$\begin{matrix} | \\ C \\ | \end{matrix}\!\!\left\langle\begin{matrix} O \\ C = O, \end{matrix}\right.$$

welcher die Rolle eines lactidartigen Anhydrides zukommt, und welches den Anlass gibt:

1. Zu der Bildung der chelihydronsauren Salze bei der Behandlung der chelidonsauren Salze mit Hydroxyden.

$$\begin{array}{l} |\ \diagup O \\ C \langle\ \ | \\ |\ \diagdown C = O \end{array} + KOH = \begin{array}{l} |\ \diagup OH \\ C \langle \\ |\ \diagdown CO.OK \end{array}$$

2. Ferner zu dem ebenso leichten Entstehen der Chelidammsäure aus der Chelidonsäure durch NH_3

$$\begin{array}{l} |\ \diagup O \\ C \langle\ \ | \\ |\ \diagdown C = O \end{array} + NH_3 = \begin{array}{l} |\ \diagup N \\ C \langle\ \ \| \\ |\ \diagdown C—OH \end{array} + H_2O$$

3. und einer schwefelhaltigen zweibasischen Säure der Thiochelidonsäure durch SH_2

$$\begin{array}{l} |\ \diagup O \\ C \langle\ \ | \\ |\ \diagdown C = O \end{array} + SH_2 = \begin{array}{l} |\ \diagup O \\ C \langle\ \ | \\ |\ \diagdown C = S \end{array} + H_2O$$

4. Diese Annahme würde nicht minder auch die anderen Verhältnisse der Chelidonsäure, so den Zerfall derselben in Oxalsäure und Aceton:

$$\begin{array}{l} —CO\ .\ OH \\ —CO\ .\ OH \\ \hline —CH \\ \quad | \\ \quad C \\ \quad \| \\ —CH \\ \hline \quad \diagup O \\ = C \langle\ \ | \\ \quad \diagdown C = O \end{array} + 3H_2O = \begin{array}{l} C_2O_4H_2 \\ \\ CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_3 \\ \\ C_2O_4H_2 \end{array}$$

erklären, und ferner auch die Bildung der Pyrosäure $C_5H_4O_2$ durch Abspaltung von $2CO_2$ bei der trockenen Destillation der Chelidonsäure anschaulich machen.

Mit den Gruppen

```
          | ,O              | ,N
C3H2;  C<  |      und    C<  ||
          | `C = O          | `C—OH
```

wären endlich auch die Bedingungen zu dem Entstehen eines Pyridinkernes aus der Chelidonsäure und der Chelidammsäure durch Einwirkung höherer Temperatur gegeben, und somit auch die Bildung des Oxypyridins, sowohl aus der Pyrosäure mittelst Ammoniak, als auch aus der Chelidammsäure durch Abspaltung von Kohlensäure in der Hitze ermöglicht.

Darnach könnte die Constitution dieser Säuren durch folgende Formeln ausgedrückt werden:

```
Chelidonsäure        Chelihydronsäure      Chelidammsäure
CO.H                 CO.OH                 CO.OH
|                    |                     |
CH                   CH                    CH
|                    ||                    |
C                    C                     C
||                   |                     ||
CH                   CH                    CH
| ,O                 | ,OH                 | ,N
C<  |                C<                    C<  ||
| `C = O             | `CO.OH              | `C—OH
CO.OH                CO.OH                 CO.OH
```

Die Formeln versinnlichen weiter, dass zu Folge der Anzahl der Carboxyle, die Chelidonsäure und die Chelidammsäure zweibasische Säuren sind, die Chelihydronsäure aber eine dreibasische Säure darstellt.

Die Chelidonsäure gibt auch nur zwei Reihen von Salzen, dagegen lassen sich mit der Chelihydronsäure und der Chelidammsäure, Salze darstellen, z. B. $C_7H_2O_7.2Ca$ chelihydronsaures Calcium, und $C_7H_2NO_5.1^1/_2$ Ca chelidammsaures Calcium, in denen 4 und 3 M′ enthalten sind, da sich der H, des an C gebundenen OH ebenfalls durch M′ leicht ersetzen lässt, was namentlich die Chelidammsäure besonders dadurch charakterisirt, dass auch ein dreibasisches Kalksalz entsteht.

Weiter wäre daraus ersichtlich, dass nur die Chelidonsäure und ihre Salze sich in eine stickstoffhältige Säure, beziehungs-

weise die chelidammsauren Salze umwandeln können, die Chelihydronsäure dieser Umwandlung aber nicht mehr fähig ist, weil die Atomgruppe

$$\begin{array}{l} |\diagup O \\ C \quad | \\ |\diagdown C = O \end{array}$$

als solche darin nicht mehr besteht. Und in der That kann man auf das chelihydronsaure Blei oder Calcium durch lange Zeit Ammoniak einwirken lassen, ohne dass sich dieselben verändern würden, wogegen die chelidonsauren Salze, namentlich das chelidonsaure Blei schon nach kurzem Stehen sich verändert und in Lösung geht, aus welcher sich dann Krystalle von chelidammsaurem Bleiammon

$$C_7H_2NO_5 \left\{ \begin{array}{l} Pb \\ NH_4 \end{array} \right.$$

abscheiden.

Lieben und Haitinger haben für die Chelidonsäure die rationelle Formel aufgestellt:

$$\begin{array}{lcl} CO.OH & & \\ | & & \\ C & = & CH \\ | & & | \\ O & & CO \\ | & & | \\ C & = & CH \\ | & & \\ CO.OH & & \end{array}$$

Diese Formel würde wohl den Zerfall der Chelidonsäure in Oxalsäure und Aceton anschaulich machen, aber nur schwierig das andere Verhalten derselben erklären.

Ost dagegen gibt der Chelidonsäure die Formel

$$C_5H_2O_2 \left\{ \begin{array}{l} CO.OH \\ CO.OH \end{array} \right.$$

und hält sie für carboxylirte

$$C_5H_3O_2.CO.OH$$

Komansäure, was nicht allein in dem Ausdruck ihrer Formeln, sondern auch wegen der analogen Eigenschaften beider Säuren eine Berechtigung zu haben scheint. Man kann aber mit demselben Rechte annehmen, dass in der Komansäure auch die in der Chelidonsäure angenommenen Atomgruppen, nämlich das Acetonskelett und die Anhydridgruppe vorkommen, und ihr eine der Chelidonsäure analoge Constitution zukommen dürfte.

```
Komansäure              Chelidonsäure
CH2                     CO.OH
 ||                      |
 C                       CH
 |                       ||
 CH                      C
 |  /O                   |
 C<  |                   CH
 |  \C = O               |  /O
 CO.OH                   C<  |
                         |  \C = O
                         CO.OH
```

Diese Annahme würde auch die Eigenschaften der Komansäure von Ost und das Wesen des Vorganges bei ihrer Zersetzung und Umsetzung erklären, namentlich:

1. Ihre Umwandlung durch Alkalien in eine andere Säure, offenbar in eine durch die Aufnahme der Elemente von Wasser entstehende zweibasische der Chelihydronsäure analoge Komanhydronsäure $C_6H_6O_5$,

2. ihre Zersetzung in Aceton und Oxalsäure,

3. ferner die leichte Umbildung derselben durch Ammoniak in die stickstoffhaltige Oxypicolinsäure $C_6H_5NO_3$ und endlich

4. ihr Zerfall bei höherer Temperatur in Pyrokoman $C_5H_4O_2$, welches offenbar dasselbe Pyroproduct ist, welches bei höherer Temperatur aus der Chelidonsäure entsteht, und das ich als das Anhydrid $C_5H_4O_2$ — Chelidan — ansehe.

Alle Verhältnisse der Komansäure stimmen mit jenen der Chelidonsäure vollkommen überein, und die letztere könnte als carboxylirte Komansäure betrachtet werden.

Der Gedanke liegt nahe, dass durch Abspaltung von nur einem CO_2 aus der Chelidonsäure Komansäure entstehen müsste; die in dieser Richtung mit Chelidonsäure bei verschieden hoher

Temperatur bisher vorgenommenen Versuche ergaben jedoch die Abspaltung von 2 CO_2.

Was weiter die Constitution der Chelidammsäure betrifft, so wäre die Formel derselben, wie oben bereits besprochen zu betrachten.

In Folge ihres leichten Entstehens durch Ammoniak ist die Anhydridgruppe in der Chelidonsäure von selbst geboten; und man kann auch die weiteren Componenten der Chelidonsäure in der Chelidammsäure annehmen und schliesslich die Gruppe

$$\begin{array}{l} \mid \;\; \diagup N \\ C \qquad \mid \\ \mid \;\; \diagdown C-OH \end{array}$$

als wahrscheinlich vorhanden zulassen, in welcher der Stickstoff, weil mit zwei Kohlenstoffen gebunden der Eliminirung durch die gewöhnlichen Agentien widersteht und dem Hydroxyl ein mehr sauerer Charakter zufällt.

Lieben und Haitinger betrachten die Säure als Oxypiridindicarbonsäure

$$C_5H_3NO \left\{ \begin{array}{l} CO.OH \\ CO.OH \end{array} \right.$$

was mit der Anschauung Ost's, der sie für carboxylirte Oxypicolinsäure

$$C_5H_2NO \left\{ \begin{array}{l} OH \\ CO.OH \\ CO.OH \end{array} \right.$$

hält, zusammenfällt, — und zwar nur aus dem Grunde, weil sie sich bei höherer Temperatur in Oxypiridin und CO_2 spaltet und bei der Destillation mit Zinkstaub Pyridin liefert.

Ob der Chelidammsäure in der That diese Constitution zukommt oder nicht, und sie als eine Pyridinsäure anzusehen ist lasse ich vorläufig als fraglich dahingestellt, weil diese Annahme voraussetzt, dass in dem Molekül der Säure das Pyridin bereits vorgebildet ist, und sie nur ein Derivat des Pyridins C_5H_5N darstellt, in dem 3H durch 2CO.OH und durch ein OH ersetzt sind. Dagegen spricht der Zerfall derselben mit Kaliumpermanganat in Ammoniak, Oxalsäure und eine noch nicht näher

bestimmte Säure, — deren Silbersalz leicht reducirt wird — vielleicht Propargylsäure?

Es ist ferner, wegen Entstehens des Pyridins und Oxypiridins aus der Chelidammsäure nicht nothwendig, dass das Pyridin darin bereits vorgebildet sei, wenn man erwägt, dass die Bildung und das Auftreten von Pyridin vielen stickstoffhältigen Kohlenstoffverbindungen zukommt, wenn sie höherer Temperatur ausgesetzt werden. In der Chelidonsäure kommen Atomcomplexe vor, die der Bildung von Pyridin durch Umlagerung ihrer Atome — wie dies häufig bei der Einwirkung höherer Temperatur stattfindet — nicht entgegen stehen.

Dagegen ist das aus der Chelidammsäure durch trockene Destillation erhaltene, von mir ursprünglich als Amid betrachtete Chelamid als Oxypyridin aufzufassen, und es dürfte auch das aus der Chelidonsäure, ebenfalls durch trockene Destillation, entstehende Pyrosäureanhydrid $C_5H_4O_2$ — Chelidan — Ost's Koman — der eigentliche, dem Benzol und Pyridin analog construirte Kern sein,

```
     CH                 CH                 CH
    /  \\              /  \\              /  \\
  HC    CH           HC    CH           HC    CH
   :    |            ||    |            ||    |
  HC    CO           HC    C.OH         HC    CH
    \  /               \  //              \  //
     O                  N                  N
  Chelidan          Oxypyridin          Pyridin
  (Koman)
```

von dem die verschiedenen Oxypyridine sich deriviren lassen und welchem dann der Namen Pyrigen zufallen sollte.

Der Pyridinkern ist jedoch weder in der Chelidonsäure noch in der Mekonsäure als vorgebildet anzunehmen, sondern als das Product der Einwirkung höherer Temperatur auf diese Säuren und ihre Ammonderivate anzusehen, und dürften daher diese Säuren — als solche — mit den Pyridinen in keinem anderen, oder näheren Nexus stehen.

Über Camphoronsäure.

(Vorläufige Mittheilung.)

Von **J. Kachler** und **F. V. Spitzer.**

(Aus dem Laboratorium des Prof. A. Lieben.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Juli 1884.)

Im Anschlusse an unsere Arbeiten über Campherderivate, schien es uns von Interesse, auch mit den aus Campher entstehenden Säuren weitere Reactionen auszuführen und wir haben zunächst mit der sogenannten Camphoronsäure Versuche gemacht.

Schon vor längerer Zeit hat der eine von uns die Camphoronsäure unter den aus Campher durch Oxydation mit Salpetersäure entstehenden Producten isolirt und näher beschrieben[1].

Damals wurde ihre Zusammensetzung, der Formel $C_9H_{12}O_5 + H_2O$ entsprechend, aufgefasst.

Dem gegenüber hat R. Kissling[2] in einer Abhandlung über die Constitution der Camphoronsäure behauptet, dass die Verbindung $C_9H_{12}O_5$ als ein Esteranhydrid aufzufassen sei und der Camphoronsäure eigentlich die Formel $C_9H_{14}O_6$ zukomme.

Wir haben die Eigenschaften derselben, die Bildungsweise und Zusammensetzung ihrer Salze neuerdings festgestellt, ferner Acetylchlorid, Phosphorchlorid etc. einwirken lassen und ausserdem Oxydationsversuche ausgeführt.

Wir wollen vorläufig nur anführen, dass aus Camphoronsäure durch fortgesetzte Einwirkung von Königswasser, neben einer mit der Salpetersäure flüchtigen chlorhaltigen Substanz (wahrscheinlich $C_6H_9ClO_4$), hauptsächlich zwei isomere Verbindungen

---

[1] Annal. d. Chem. u. Pharm. 159, 286. Sitzungsb. d. k. Akad. d. Wissensch. II. Abth. Juliheft 1871.

[2] Inaugural-Dissert., Würzburg 1878.

$C_9H_{12}O_6$ gebildet werden, wovon eine derselben als die sogenannte Oxycamphoronsäure[1] erkannt wurde.

Durch Oxydation mittelst übermangansaurem Kali und Schwefelsäure entsteht neben Kohlensäure und Essigsäure eine neue, schön krystallisirende Substanz, welcher nach den bisherigen Resultaten die Formel $C_8H_{12}O_4$ zukommt. Dieselbe schmilzt bei 222° C. (uncor.) unter Abspaltung von Kohlensäure, sublimirt unverändert und bildet Salze, von welchen bisher das Silbersalz $C_8H_{11}AgO_4$ und die Baryumsalze $C_8H_{11}b\dot{a}O_4 + H_2O$ und $C_8H_{10}B\ddot{a}O_4 + 5H_2O$ analysirt wurden.

Wir werden selbstverständlich die angeführten Reactionen weiter verfolgen und die dabei entstehenden Verbindungen genau untersuchen.

---

[1] Annal. d. Chem. u. Pharm. 159, 296.

Über die regelmässigen Körper höherer Dimension.

Von Dr. **Otto Biermann,**
Privatdocenten an der deutschen Universität in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. Mai 1884.)

Herr Rudel hat in einer Abhandlung „Vom Körper höherer Dimensionen“ (Kaiserslautern 1882) zwei regelmässige Körper im n-dimensionalen Raume bestimmt und ferner an der Hand der verallgemeinerten Euler'schen Formel die sechs regelmässigen Körper vierter Dimension definirt, ohne aber die Anzahl der einzelnen Grenzgebilde anzugeben. Diese Lücke haben die Herren Hoppe[1] und Schlegel[2] durch die Betrachtung des polyëdrischen Netzes ausgefüllt.

In den folgenden Untersuchungen, die ich beinahe durchgehends angestellt habe, bevor mir die genannten Arbeiten bekannt waren, werden die Betrachtungen Rudel's in gewissem Sinne verallgemeinert, ferner die drei regelmässigen Körper im Raume von fünf Dimensionen bestimmt und endlich wird der dritte und letzte Körper im mehr als fünfdimensionalen Raume angegeben.

Die Arbeit des Herrn Stringham,[3] welcher nach der Aussage Schlegel's die vollständigste Behandlung des Problems der regulären n-dimensionalen Gebilde vorgenommen hat, ist mir leider nicht zugänglich gewesen, doch verrathen Schlegel's Angaben, dass Stringham einen andern Weg eingeschlagen hat, als den hier gewählten.

---

[1] Grunert's Archiv. Bd. 67.

[2] Nova acta der kais. Leop. Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher. Bd. 44.

[3] „Regular figures in n-dimensional space.“ American Journ. of Math. Vol. III.

Die Bedeutung der regelmässigen Körper höherer Dimension wird bei unserer Behandlungsweise ebenso wenig hervortreten, als in den genannten Arbeiten; doch die analytische Behandlung — wie sie Herr Puchta in seiner, die vierdimensionalen Körper betreffenden (demnächst in Druck gehenden) Schrift vorgenommen hat — führt auf eine Reihe von Sätzen der Substitutionstheorie und eröffnet den Ausblick auf Betrachtungen, die denjenigen von Klein an dem regelmässigen Körper dritter Dimension analog sind.

Unter einem regelmässigen Körper n^{ter} Dimension versteht man ein n-dimensionales Gebilde, welches von lauter congruenten regelmässigen Körpern $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension vollständig begrenzt wird, und zwar so, dass in jeder Ecke, Kante, Fläche u. s. w., endlich in jedem Grenzgebilde $(n-2)^{\text{ter}}$ Dimension eine endliche Anzahl und gleich viele begrenzende Körper $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension zusammentreffen. Für die Anzahlen der Grenzgebilde $0, 1, 2 \ldots . (n-1)^{\text{ter}}$ Dimension besteht erstens die „verallgemeinerte Euler'sche Formel", und ausserdem gibt es $n-1$ von einander unabhängige, lineare Beziehungen zwischen diesen n-Grössen.

Bezeichnet man den regelmässigen Körper n^{ter} Dimension im n-dimensionalen Raume R_n mit K_n, die Anzahl der in der Grenze befindlichen regelmässigen m-dimensionalen Gebilde mit $K_{m,n}$, endlich die Anzahl der in einem μ-dimensionalen Grenzgebilde von K_n zusammentreffenden Körper ν^{ter} Dimension mit $a^{(n)}_{\mu\nu}$, so lautet die Euler'sche Gleichung:[1]

$$K_{0n} - K_{1n} + K_{2n} - \ldots . + (-1)^{n-1} K_{n-1,n} = 0, 2,$$

je nachdem

$$n \equiv 1, 0 \pmod 2)$$

ist, oder wenn man den einen Körper K_n in die Relation aufnimmt:

$$K_{0n} - K_{1n} + K_{2n} - \ldots . + (-1)^{n-1} K_{n-1,n} + (-1)^n K_n = 1, \qquad \text{I)}$$

und jenen $(n-1)$ Beziehungen zwischen $K_{0n}, K_{1n} \ldots K_{n-1,n}$ kann man die Gestalt geben:

---

[1] H. Durège, Sitzungsberichte der k. Akad. der Wissenschaften zu Wien. Bd. 83.

$$a^{(n)}_{k,\,n-1} K_{k,n} = K_{k,\,n-1} K_{n-1,\,n} \; (k = 0, 1, 2 \dots n-2) \qquad \text{II)}$$

Zum Beweis derselben steige man successive von den zwei zu den n-dimensionalen Raumgebilden auf.

Die regelmässigen Gebilde K_2 sind einzig und allein durch die Gleichungen

$$K_{02} - K_{12} = 0, \quad a^{(2)}_{01} = 2 \qquad 1)$$

charakterisirt, darum gibt es auch unendlich viele regelmässige Polygone.

Für die Gebilde K_3 gelten die Bezeichnungen:

$$K_{03} - K_{13} + K_{23} = 2$$
$$a^{(3)}_{02} K_{03} = K_{02} K_{23}, \quad a^{(3)}_{12} K_{13} = K_{12} K_{13}, \qquad 2)$$

und wegen $K_{02} = K_{12}$ ist auch

$$a^{(3)}_{12} K_{13} = a^{(3)}_{02} K_{03}.$$

$a^{(3)}_{12}$ ist gleich zwei, $a^{(3)}_{02}$ mindestens gleich drei und $a^{(3)}_{01} = a^{(3)}_{02}$.

Um zu den Körpern K_4 aufzusteigen, übersetze man jede der in den Gleichungen (2) vorkommenden Grössen in die um eine Einheit höher dimensionale, lasse also an Stelle der Ecke, Kante und Fläche die Kante, Fläche und das Polyeder treten, dann bestehen neben der Euler'schen Gleichung:

$$K_{04} - K_{14} + K_{21} - K_{34} = 0$$

die zwei Relationen:

$$a^{(4)}_{13} K_{14} = K_{13} K_{34}, \quad a^{(4)}_{23} K_{24} = K_{23} K_{34},$$

denen wir eine dritte neu hinzufügen:

$$a^{(4)}_{03} K_{04} = K_{03} K_{34}.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2) kann man diese Beziehungen in die folgenden umsetzen:

$$a^{(4)}_{03} K_{04} = K_{03} K_{34}; \quad a^{(4)}_{13} a^{(3)}_{12} K_{14} = a^{(4)}_{03} a^{(3)}_{02} K_{04};$$
$$a^{(4)}_{23} K_{02} K_{24} = a^{(4)}_{03} a^{(3)}_{02} K_{04}$$

und die Richtigkeit dieser zu beweisen suchen.

Man beachte, dass — wie im Raume R_2 und R_3 jede Ecke respective Kante immer zweien Kanten, respective Flächen gemeinsam war — an dem Körper K_4 jede Fläche zweien Polyedern angehören muss, dass also $a_{23}^{(4)} = 2$ ist. Dann kann man sagen:

In jeder Ecke von K_4 stossen $a_{03}^{(4)}$ Polyeder zusammen, also gibt es $a_{03}^{(4)} K_4$ solche; da jedoch jedes in seinen K_{03} Ecken gezählt ist, gilt

$$K_{34} = \frac{a_{03}^{(4)} K_{04}}{K_{03}}.$$

In jeder Ecke stossen $a_{03}^{(4)} a_{02}^{(3)}$ Flächen zusammen. Da sich diese paarweise decken und jede Fläche in ihren K_{02} Ecken gezählt ist, folgt:

$$K_{24} = \frac{a_{03}^{(4)} a_{02}^{(3)} K_{04}}{2K_{02}}$$

Weil endlich in jeder Ecke $a_{03}^{(4)} a_{02}^{(3)}$ Kanten zusammentreffen eine Kante $a_{13}^{(4)}$ mal und noch in ihren zwei Ecken gezählt ist, besteht auch die Beziehung:

$$K_{14} = \frac{a_{03}^{(4)} a_{02}^{(3)} K_{04}}{2a_{13}^{(4)}}$$

In gleicher Weise kann man fortfahren und endlich durch den Schluss von n auf $n+1$ die allgemeine Giltigkeit der $(n-1)$ Gleichungen II) beweisen. Dazu bemerken wir, dass

$$a_{n-1,n-1}^{(n)} = 1; \quad a_{n-2,n-1}^{(n)} = 2$$

ist, dass die Grössen $a_{\varkappa\lambda}^{(n)}$ — wo $\varkappa < \lambda$, und $\varkappa$ respective λ die Werthe $0, 1, 2 \ldots n-1$, respectivel , $2 \ldots n-1$ besitzen — in folgender Weise zusammenhängen:

$$a_{\varkappa,\lambda}^{(n)} = \frac{a_{\varkappa,n-1}^{(n)} \cdot a_{\varkappa\lambda}^{(n-1)}}{a_{\lambda,n-1}^{(n)}} = \frac{a_{\varkappa,n-1}^{(n)} \cdot a_{\varkappa,n-2}^{(n-1)} \ldots a_{\varkappa,\lambda+1}^{(\lambda+2)}}{a_{\lambda,n-1}^{(n)} a_{\lambda,n-2}^{(n-1)} \ldots a_{\lambda,\lambda+1}^{(\lambda+2)}} a_{\varkappa\lambda}^{(\lambda+1)},$$

sodass auch hier die Grössen $a_{\mu,m-1}^{(m)}$ als die fundamentalen erscheinen.

Nun setzen wir die Werthe von $K_{m,n}$ als Functionen von $K_{n-1,n}$ in die Euler'sche Gleichung ein und erhalten im ungerade dimensionalen Raum $R_{2\nu+1}$ für $K_{n-1,n}$ die Gleichung:

$$\left\{\sum_{\mu=0}^{2\nu-1}(-1)^{\mu}.\frac{K_{\mu,2\nu}}{a^{(2\nu+1)}_{\mu,2\nu}}+1\right\}K_{2\nu,2\nu+1}=2,$$

indess im Raume $R_{2\nu}$ nur eine Gleichung in den Grössen $a^{(2\nu)}_{x,2\nu-1}$:

$$\sum_{\mu=0}^{2\nu}(-1)^{\mu}.\frac{K_{\mu,2\nu-1}}{a^{(2\nu)}_{\mu,2\nu-1}}-1=0. \qquad B)$$

Die hier auftretenden Grössen $K_{\mu,n-1}$ bestimmen den als bekannt vorausgesetzten begrenzenden Körper K_{n-1}; die positiven ganzzahligen Grössen $a^{(n)}_{x,n-1}$ sind offenbar an die Bedingung geknüpft, dass sie nur solche Werthe annehmen können, für die sämmtliche Grössen

$$a^{(n)}_{x\lambda} \text{ und } K_{m,n}$$

positive ganze Zahlen werden.

Ausserdem haben dieselben bestimmte untere Grenzen; nämlich:

$$a^{(n)}_{n-2,n-1}=2;\quad a^{(n)}_{n-3,n-1}\geqq 3,\ldots a^{(n)}_{0,n-1}\geqq n,$$

und endlich ist nothwendig:

$$a^{(n)}_{n-2,n-1}<a^{(n)}_{n-3,n-1}<\ldots<a^{(n)}_{0,n-1}.$$

Schliesslich sei noch bemerkt, dass $K_{n-1,n}$ mindestens um eine Einheit grösser sein muss als $a^{(n)}_{0,n-1}$, sonst könnte K_n kein geschlossener Körper sein. — Eine einfache Überlegung lehrt dann, dass unter den Grössen $K_{m,n}$ höchstens K_{0n} d. h. die Anzahl der Ecken gleich oder kleiner sein kann als die Anzahl der in einer Ecke von K_n zusammenstossenden Körper K_{n-1}, aber $K_{0,n-1}$ doch grösser ist $a^{(n)}_{1,n-1}$.

Im Raume $R_{2\nu}$ kann man die Anzahl der begrenzenden Körper mit Hilfe unserer Gleichungen II) und $B)$ nicht bestimmen und ebenso wenig die übrigen $(n-1)$ Grössen $K_{m,n}$, denn das Gleichungssystem ist einfach unbestimmt, und die Lösungen lauten, wenn α eine positive ganze Zahl bedeutet:

$$K_{n-1,\,n} = \alpha,\quad K_{n-k,\,n} = \frac{K_{n-k,\,n-1}\alpha}{a^{(n)}_{n-k,\,n-1}}.\quad (k = 2, 3 \ldots n)$$

Trotzdem ist leicht einzusehen, dass einem bestimmten Werthsysteme der Grössen $a^{(n)}$ höchstens ein Körper zugehören kann; denkt man nämlich im Raume $R_{2\nu-1}$ das Netz von $K_{2\nu}$ von einem festen Punkte aus durch die bestimmten Körper $K_{2\nu-1}$ gebildet, so ist die Art der Zusammensetzung durch die Werthe der Grössen $a^{(n)}$ vorgeschrieben, und die Netzbildung ist dann beendet, wenn das Hinzufügen eines neuen Körpers die Anzahl der in einer Innenecke zusammentreffenden Körper $K_{2\nu-1,\,2\nu}$ um eine Einheit grösser macht als $a^{(2\nu)}_{0,\,2\nu-1}$.

Wenn wir im ungerade dimensionalen Raum $R_{2\nu+1}$ für ein unseren Bedingungen genügendes Werthesystem der $a^{(2\nu)}$ ein die Euler'sche Gleichung befriedigendes System von Grössen $K_{m,\,n}$ finden, ist durchaus noch nicht entschieden, ob dieselben einen regelmässigen Körper bestimmen, denn offenbar haben wir nothwendige Bedingungen für K_n angegeben, aber noch nicht die hinreichenden.

Um zu entscheiden, ob ein Werthesystem der K_{mn} wirklich einen regelmässigen Körper bestimmt, müssen wir Betrachtungen an dem Netze des Körpers anstellen und hier steigen wir durch Analogieschlüsse von dem dreidimensionalen Körper an.

Wir werden hier obere Grenzen für die Grössen $a^{(n)}_{k,\,n-1}$ feststellen.

Im dreidimensionalen Raum sind die aus unseren Gleichungen möglichen Werthe für $a^{(3)}_{02}$ entsprechend der Begrenzung durch Polygone K_2 mit der Eckenzahl:

$$K_{12} = 4,\ 3,\ 3,\ 3,\ 5$$
$$a^{(3)}_{02} = 3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 3.$$

Um zu erfahren, ob diesen Werthen wirklich regelmässige Körper K_3 zugehören, betrachte man das Netz in dem Raume R_2, lege um eine Innenecke der polygonalen Figur einen Einheitskreis und beachte, dass von den in der Ecke zusammenstossenden Winkelräumen der Vielecke auf dem Kreise nur ein Bogen ausgeschnitten werden darf, der kleiner ist als 2π, denn andernfalls könnte man

ohne Faltung der Vielecke keine körperliche Ecke aus dem Netze bilden. Nun ist im n-Eck der von zwei Kanten eingeschlossene Winkel $\pi.\frac{n-2}{n}$, also muss

$$a_{02}^{(3)}\,\pi.\frac{n-2}{n} < 2\pi$$

sein. Da diese Bedingung durch unsere Werthsysteme erfüllt wird, entspricht jedem der Werthepaare K_{12}, $a_{02}^{(3)}$ ein Körper K_3, und diese sind durch die folgenden Zahlen charakterisirt:

Begrenzender Körper K_2	K_{23}	K_{13}	K_{03}	a_{02}	Bezeichnung des Körpers
Viereck	6	12	8	3	$K_3(6)$
Dreieck	4	6	4	3	$K_3(4)$
Dreieck	8	12	6	4	$K_3(8)$
Dreieck	20	30	12	5	$K_3(20)$
Fünfeck	12	30	20	3	$K_3(12)$

Im vierdimensionalen Raum sind die bei der Begrenzung durch Körper $K_3(n)$ mit unsern Bedingungen verträglichen Werthsysteme $a_{k\lambda}^{(4)}$:

	$K_3(6)$			$K_3(4)$			$K_3(8)$	$K_3(20)$	$K_3(12)$		
$a_{03}^{(4)}$	4	8	20	4	8	20	6	12	4	8	20
$a_{13}^{(4)}$	3	4	5	3	4	5	3	3	3	4	5
$a_{12}^{(4)}$	3	4	5	3	4	5	3	3	3	4	5
$a_{02}^{(4)}$	6	12	30	6	12	30	12	30	6	12	30
$a_{01}^{(4)}$	4	6	12	4	6	12	8	20	4	6	12

Es gibt also elf Arten von Gebilden, deren Netze zu untersuchen sind. Legen wir jetzt um einen Punkt einer Innenkante des Netzes eine Kugel, so darf die Summe der Flächenwinkel α

der in den Kanten zusammenstossenden Polyëder K_3 nicht gleich oder grösser sein als 2π, also ist die obere Grenze von $a_{13}^{(4)}$ durch die Ungleichung:

$$a_{13}^{(4)} \cdot \alpha < 2\pi$$

bestimmt.

Der Flächenwinkel

am Hexaëder ist π

der am Tetraëder ist $0 \cdot 783653 \frac{\pi}{2}$,

„ „ Oktaëder „ $1 \cdot 216346 \frac{\pi}{2}$,

„ „ Ikosaëder „ $1 \cdot 535441 \frac{\pi}{2}$,

„ „ Dodekaëder „ $1 \cdot 295167 \frac{\pi}{2}$,

und darnach können in einer Kante höchstens 3 Hexaëder, 5 Tetraëder, 3 Oktaëder, 2 Ikosaëder und 3 Dodekaëder zusammenstossen. Es kann also höchstens sechs regelmässige Körper K_4 geben.

Wir fragen noch, ob die den übriggebliebenen Werthen von $a_{13}^{(4)}$ zugehörigen Werthe von $a_{03}^{(4)}$ möglich sind. Wir legen auch um eine Ecke des Netzes eine Einheitskugel und suchen die Summe der durch die aneinanderstossenden körperlichen Ecken der Polyëder auf der Kugel ausgeschnittenen sphärischen Vielecke, denn diese Summe muss wieder kleiner sein als 4π.

Die Seite eines sphärischen regelmässigen Polygons ist durch den Kantenwinkel und der Winkel durch den Flächenwinkel des Polyëders K_3 bestimmt. Bezeichnet man den sphärischen Excess des durch $K_3(m)$ bestimmten sphärischen Polygons mit $\varepsilon(m)$, so ist

$$\varepsilon(6) = \frac{\pi}{2} \qquad \varepsilon(4) = 0 \cdot 350959 \frac{\pi}{2}$$

$$\varepsilon(8) = 0 \cdot 865384 \frac{\pi}{2} \qquad \varepsilon(12) = 1 \cdot 885501 \frac{\pi}{2}.$$

Es muss

$$a_{03}^{(4)} \cdot \varepsilon(m) < 4\pi$$

sein, und darnach ergeben sich für $a_{03}^{(4)}$ der Reihe nach die oberen Grenzen

$$7,\ 9,\ 22,\ 4.$$

Da diese Grenzen oben nicht überschritten sind, bleiben auch die genannten sechs Fälle unberührt.

Eine genaue Betrachtung des polyëdrischen Netzes, wie sie Schlegel und Hoppe durchgeführt haben oder die analytische Behandlung von Puchta gibt die Anzahl der begrenzenden Körper K_3 und mit dieser allein resultirt dann die folgende Tabelle.

Begrenzender Körper	K_{34}	K_{24}	K_{14}	K_{04}	$a_{03}^{(4)}$	$a_{12}^{(4)}$	$a_{02}^{(4)}$	$a_{01}^{(4)}$	Bezeichnung des Körpers
$K_3(6)$	8	24	32	16	3	3	6	4	$K_4(8)$
$K_3(4)$	5	10	10	5	3	3	6	4	$K_4(5)$
	16	32	24	8	4	4	12	6	$K_4(16)$
	600	1200	720	120	5	5	30	12	$K_4(600)$
$K_3(8)$	24	96	96	24	3	3	12	8	$K_4(24)$
$K_3(12)$	120	720	1200	600	3	3	6	4	$K_4(120)$

Da wir die Untersuchung des Netzes als nothwendig erkannt haben, stellen wir zur Bestimmung der regelmässigen Körper K_5 die Betrachtungen am Netze voran, um so mehr, da die Ermittlung der unseren Bedingungen genügenden Grössen $a_1^{(5)}$ schon längere Zahlenrechnungen erfordert.

Wir legen um einen Punkt einer Innenfläche des Netzes ein der Kugel analoges vierdimensionales Gebilde (S_4), das wir am einfachsten durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2$$

definiren. Der Radius r sei wieder gleich der Einheit. Nennt man den Winkel, den zwei Polyëder K_3 mit einer gemeinsamen Fläche mit einander bilden, Körperwinkel, so muss nun die Summe der Körperwinkel an einer Innenfläche kleiner sein als 2π, d. h.

$$\alpha \,.\, a_{24}^{(5)} < 2\pi.$$

Will man den Körperwinkel am regelmässigen Körper K_4 berechnen, so beachte man, dass K_3 einen Mittelpunkt (O) besitzt, der von den Mittelpunkten der begrenzenden Polyëder K_3 und von den Mittelpunkten der die K_4 begrenzenden Polygone K_2 gleichweit entfernt ist. Der Punkt O, der Mittelpunkt A eines Polyëders und der Mittelpunkt B einer Seitenfläche des letzteren bestimmen ein bei A rechtwinkliges Dreieck. Die Seitenfläche ist zweien Polyëdern gemein, der von diesen gebildete Körperwinkel α wird von OB halbirt, darum ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{OA}{OB}.$$

Hoppe hat diese Winkeln berechnet, und zwar ist für die Körper:

$$K_4(8),\ K_4(5),\ K_4(16),\ K_4(600),\ K_4(24),\ K_4(120)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2},\ 0\cdot83914\frac{\pi}{2},\ \frac{4}{3}\frac{\pi}{2},\ 1\cdot82753\frac{\pi}{2},\ \frac{4}{3}\frac{\pi}{2},\ \frac{8}{5}\frac{\pi}{2}.$$

Darnach ergeben sich für $a_{24}^{(5)}$ der Reihe nach die oberen Grenzen

$$3,\ 4,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2.$$

Weil aber $a_{24}^{(5)} \geq 3$ sein muss, folgt, dass es höchstens regelmässige Körper K_5 geben kann, die von den Körpern $K_4(8)$ und $K_4(5)$ begrenzt sind.

Zum Zweck der Bestimmung der oberen Grenzen von $a_{14}^{(5)}$ legen wir um einen Punkt einer Innenkante des Netzes unser vierdimensionales Gebilde S_4. Nun muss die Summe der aufeinanderfolgenden Körperwinkeln kleiner als 4π sein, oder

$$a_{14}^{(5)} \,.\, \alpha < 4\pi.$$

Da ergeben sich ja nach der Begrenzung durch Körper $K_4(8)$ oder $K_4(5)$ die Grenzen 7 und 9.

Endlich lege man um eine Ecke des Netzes eine Kugel vierter Dimension — wie man füglich S_4 nennen kann — und suche die Summe der dreidimensionalen Ausschnitte in der dreidimensionalen Begrenzung der Kugel S_4, welche die in einer Innenecke des Netzes zusammentreffenden Körper K_4 hervorrufen.

Ist der Inhalt eines solchen Ausschnittes v, so muss $a_{04}^{(5)}.v$ kleiner sein als die Begrenzung von S_4.

Die körperliche Begrenzung von S_4 wird man analog der Bestimmung der Kreisperipherie und der Oberfläche der Kugel durch das Integral:

$$\iiint\sqrt{1+\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dy\,dz$$

definiren. Führt man statt x, y, z, t neue Coordinaten ein

$$x = r\cos\alpha,\ y = r\sin\alpha\cos\beta,\ z = r\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \text{ und } t = r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

so erhält das Integral die Form

$$\iiint r^3\sin^2\alpha\sin\beta\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

und die Auswerthung innerhalb der gehörigen Grenzen führt auf den Werth

$$O_4 = 2r^3\pi^2.$$

Die Berechnung der Begrenzung der analog zu definirenden Kugel $2n$ oder $2n+1$ter Dimension macht gar keine Schwierigkeiten. Man findet für dieselbe

$$O_{2n} = r^{2n-1}\pi^n\frac{2}{(n-1)!} \text{ und } O_{2n+1} = r^{2n}\pi^n\frac{2^{2n}.(n-1)!}{(2n-1)!}.$$

Entsprechend kann man das $2n$ und $(2n+1)$— dimensionalen Volumen bestimmen. Ist

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots . x = r_n^2.$$

die Gleichung der n-dimensionaleen Kugel, so verstehe man nur unter dem Volumen den Werth des $(n-1)$fachen Integrales:

$$\int^{(n-1)} x_n\,dx_1\,dx_2\ldots . dx_{n-1} = V_n.$$

Nach Einführung der Coordinaten r, α_1, $\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$ in der oben angedeuteten Weise erhält V_n die Form:

$$V_n = \int^{(n-1)} r^n\sin^n\alpha_1\sin^{n-1}\alpha_2\ldots\sin^2\alpha_{n-1}d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_{n-1},$$

und die Auswerthung führt auf:

$$V_{2n} = \frac{r^{2n}\pi^n}{n!},\ \ V_{2n+1} = r^{2n+1}\pi^n\frac{2^{2n+1}.n!}{(2n+1)!}.$$

Die Bedingung, an welche die Grösse $a_{04}^{(5)}$ geknüpft ist, lautet nunmehr:

$$a_{04}^{(5)} \cdot v < 2 \cdot \pi^2.$$

Welches ist aber die Grösse des Ausschnittes v? Bei dem Netz des Körpers K_4 schnitten die in einer Ecke zusammenstossenden körperlichen Ecken der begrenzenden Polyëder K_3 regelmässige sphärische Polygone aus, und die Seite war durch den Kantenwinkel, der Winkel durch den Flächenwinkel von K_3 bestimmt.

Hier treten an Stelle der Polygone sphärische Polyëder, deren Seitenflächen durch die Grösse der körperlichen Ecke des K_4 begrenzenden Polyëders K_3 gegeben sind. Die Neigung der Seitenflächen aber wird durch den Körperwinkel von K_4 bestimmt. Da in jeder Ecke des Körpers $K_4(8)$, respective $K_4(5)$ vier Hexaeder, respective vier Tetraëder zusammenstossen, werden die sphärischen Polyëder Tetraëder sein. Da die drei Grössen, welche die Krümmung der Begrenzung eines vierdimensionalen Gebildes bestimmen werden, an der Einheitskugel S_4 alle gleich eins sind, werden die Tetraëder auf einer Kugel S_3 vom Radius 1 liegen. Der Cubikinhalt der zwei Arten von Tetraëdern ist dann offenbar

$$\frac{4}{3}\,\varepsilon(6) \quad \text{und} \quad \frac{4}{3}\,\varepsilon(4),$$

das ist

$$\frac{4\pi}{6} \quad \text{und} \quad \frac{16\pi}{68 \cdot 3838}.$$

Die Grenzen für $a_{04}^{(5)}$ werden darnach 9 und 26, je nachdem die Begrenzung von K_5 durch Körper $K_4(8)$ oder $K_4(5)$ vollzogen werden soll.

Berücksichtigt man all die gefundenen Bedingungen für die Grössen $a_{04}^{(5)}\; a_{14}^{(5)}\; a_{24}^{(5)}\; a_{34}^{(5)}$, so bleiben von den unsern fünf Gleichungen genügenden Werthesystemen K_{05}, K_{15}, K_{25}, K_{35}, K_{45} nur sechs übrig, die in der folgenden Tabelle (siehe pag. 156) zusammengestellt sind:

Vergleichen wir diese Tabelle mit denjenigen für die regelmässigen Körper K_3 und K_4, so ist ein Umstand sehr auffallend. Dort gibt es nur einander entsprechende Körper, d. h. solche, bei denen die Zahl der begrenzenden Körper $K_{n-1,n}$ des einen

Körpers K_n gleich ist der Zahl der Ecken des andern K'_n. (Ein sich selbst entsprechender Körper K_n ist darnach ein solcher, bei dem $K_{n-1,n} = K_{0,n}$ ist.) Hier indessen entspricht nur der erste dem fünften Körper und der zweite sich selbst, die übrigen haben keinen entsprechenden.

Begrenzender Körper	K_{45}	K_{35}	K_{25}	K_{15}	K_{05}	$a^{(5)}_{24}$	$a^{(5)}_{14}$	$a^{(5)}_{04}$
$K_4(8)$	10	40	80	80	32	3	4	5
	6	15	20	15	6	3	4	5
	12	30	40	30	10	3	4	6
$K'_4(5)$	42	105	140	105	30	3	4	7
	32	80	80	40	10	4	8	16
	72	180	180	90	20	4	8	18

Da entsteht nun die Frage, ob in diesem Entsprechen etwa ein Princip liegt, das bei der Construction der regelmässigen Körper zu verwenden ist, so zwar dass aus der Nichtexistenz des einen Körpers die Nichtexistenz des entsprechenden zu folgern ist? In der That ist es an dem. Fixirt man in jedem Grenzgebilde $K_{n-1,n}$ den Mittelpunkt, so sind diese Punkte die Eckpunkte des K_n entsprechenden regelmässigen Körpers K' und umgekehrt. (Bei der analytischen Behandlung wird sich dieser Satz in aller Strenge beweisen lassen.)

Bei dieser Art der Reciprocität zweier regelmässiger Gebilde werden nicht allein die Anzahlen der Grenzgebilde 0 und $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension ihre Rollen vertauschen, sondern auch die der Grenzgebilde k und $(n-k)^{\text{ter}}$ Dimension, d. i. $K_{k,n}$ und $K_{n-k,n}$.

Unsere Gleichungen II) zeigen, dass gleichzeitig

$$a^{(n)}_{0,n-1} \text{ und } K_{0,n-1}$$

$$a^{(n)}_{k,n-1} \; K_{n-k,n-1} \text{ und } a^{(n)}_{n-k,n-1} \; K_{k,n-1}$$

ihre Rollen vertauschen. Damit ist aber der einem Körper entsprechende ganz bestimmt.

Das Princip des Entsprechens lehrt nun, dass der in der Tabelle stehende 3., 4. und 6. Körper nicht regelmässig ist und im Raume R_5 nur drei regelmässige Körper

$$K_5(10) \; K_5(6) \; K_5(32)$$

existiren können.

Bei dem hier eingehaltenen successiven Aufbau der regelmässigen Körper konnte unser neues Princip wohl schon auffallen, doch wollten wir es erst an der Stelle einführen, wo es sich nothwendig aufdrängt. Jetzt muss man an der Hand unserer Gleichungen I und II und der Bedingungen für die Grössen $a^{(n)}$, an der Hand der Betrachtungen des Netzes und mit Hilfe des Princips des Entsprechens zweier Körper die höherdimensionalen Gebilde K_n bestimmen. Dabei wird man schrittweise vorzugehen haben, denn bei jedem Fortgang ist die Kenntniss eines an dem neuen begrenzenden Körper K_{n-1} neu auftretenden Winkels nothwendig. Aber gleich bei der Bestimmung der sechsdimensionalen Körper K_6 ergibt sich eine Schwierigkeit, die mit der Unbestimmtheit unseres Gleichungssystems erscheint, indem man die Anzahl der begrenzenden Körper K_5 entweder nur nach Verallgemeinerung der Betrachtungen von Schlegel am Netze der Körper K_3 und K_4 oder durch die analytische Behandlung gewinnen kann. Derselbe Umstand stellt sich bei jedem gerade dimensionalen Raumgebilde $K_{2\nu}$ ein.

Eine Anwendung des Princips des Entsprechens will ich noch hervorheben und dann eine abschliessende Bemerkung anknüpfen.

Rudel hat allgemein zwei regelmässige Körper im Raume R_n bestimmt, und zwar auf folgende Weise:

Er bildet durch Projection eines Körpers K_1 aus einem Punkte ausserhalb des Raumes R_1, in dem K_1 liegt, ein Dreieck K_2, dann durch Projection von K_2 aus einem Punkte ausserhalb des Raumes R_2, in dem sich K_2 befindet, die dreiseitige Pyramide K_3, setzt dieses Verfahren fort, zählt dabei die Grenzgebilde ab und findet einen n-dimensionalen Körper, der offenbar regelmässig sein wird, wenn seine Eckpunkte ein System äquidistanter Punkte bilden. Für den Körper K_n ist:

$$K_{n-1,n} = n+1, \quad K_{n-2,n} = \binom{n+1}{n-1}, \ldots \quad K_{k,n} = \binom{n+1}{k+1} \ldots$$
$$K_{1n} = \binom{n+1}{2}, \quad K_{0n} = n+1$$
$$a^{(n)}_{n-2,\,n-1} = 2 \quad a^{(n)}_{n-3,\,n-1} = 3 \ldots \quad a^{(n)}_{k,\,n-1} = n-k \ldots \quad a^{(n)}_{0\,n-1} = n.$$

Den zweiten Körper K_n lässt Rudel dadurch entstehen, dass er von den Eckpunkten eines Körpers K_1 in senkrechter

Richtung in den Raum R_2 hinausgeht, congruente Strecken K_1 abträgt und die freien Enden verbindet; von den Eckpunkten des entstandenen Quadrats K_2 geht er in senkrechter Richtung in den Raum R_3 hinaus, bestimmt wieder congruente K_1, verbindet die neuen freien Ecken und hat das Hexaëder. Setzt man dieses Verfahren fort, so resultirt ein Körper K_n, der durch folgende Zahlen ausgezeichnet ist:

$$K_{n-1,\,n} = 2n,\ K_{n-2,\,n} = 2^2\binom{n}{n-2} \dots K_{k,\,n} = 2^{n-k}\binom{n}{k} \dots$$
$$K_{1n} = 2^{n-1}\binom{n}{1} \dots K_0 = 2^n$$

$$a^{(n)}_{n-2,\,n-1} = 2, \ \dots\ a^{(n)}_{k,\,n-1} = n-k \ \dots\ a^{(n)}_{0,\,n-1} = n.$$

Der erste Körper entspricht sich selbst, indess der zweite sich nur dann selbst entsprechen kann, wenn n gleich 1 oder 2 ist, denn die hiezu nothwendige Gleichung

$$2^n = 2n$$

ist nur für diese positiven und ganzzahligen Werthe von n erfüllt.

Aus der Existenz des zweiten Körpers ergibt sich nach dem Princip des Entsprechens zweier Gebilde auch die Existenz des durch die folgenden Zahlen charakterisirten Körpers:

$$K_{n-1,\,n} = 2^n,\ K_{n-2,\,n} = 2^{n-1}\binom{n}{1} \dots K_{n-k,\,n} = 2^{n-k+1}\binom{n}{k-1} \dots$$
$$K_0 = 2n$$

$$a^{(n)}_{n-2,\,n-1} = 2,\ a^{(n)}_{n-3,\,n-1} = 2^2 \dots a^{(n)}_{n-k,\,n-1} = 2^{k-1} \dots$$
$$a^{(n)}_{0,\,n-1} = 2^{n-1}$$

Es gibt also in jedem Raume R_n mindestens drei regelmässige Körper. Wir bezeichnen sie mit

$$K_n(2n),\ K_n(n+1),\ K_n(2^n)$$

und bemerken, dass der erste durch den Körper $K_{n-1}(2n-2)$, die beiden andern durch denselben Körper $K^{(n)}_{n-1}$ begrenzt werden.

Schlegel sagt in seinem Resumé über die Arbeit von Stringham, dass aus drei derselben Mannigfaltigkeit angehörenden Gliedern dieser drei Reihen von Körpern in der nächst

höheren Mannigfaltigkeit nur wieder drei endliche reguläre (d. h. regelmässige) Gebilde hervorgehen können (von R_4 angefangen) und darum in allen nach dem fünften folgenden Räumen nur diese drei Arten regelmässiger Gebilde existiren.

Der allgemeine Beweis dieses Satzes könnte meiner Meinung nach hier nur durch die allgemeine Bestimmung des dem $(n-1)$ dimensionalen Körper eigenen Winkels und die nachträgliche Bemerkung gefunden werden, dass in dem $(n-3)$-dimensionalen Grenzgebilde jedes Körpers K_n nur drei begrenzende Körper $K_{n-1}(2n-2)$ und drei oder vier begrenzende Körper $K^{(n)}_{n-1}$ zusammenstossen können, denn durch diese Eigenheit wird die Construction des Netzes innerhalb R_{n-1} charakterisirt. — Für den Körper $K_{n-1}(2n-2)$ wird der in Rede stehende Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sein, und da

$$\alpha\, a^{(n)}_{n-3,\, n-1} < 2\pi$$

sein muss, kann $a^{(n)}_{n-3,\, n-1}$ bei der Begrenzung durch Körper $K_{n-1}(2n-2)$ nur den Werth drei annehmen und es gibt nur einen durch $K_{n-1}(2n-2)$ begrenzten Körper K_n, nämlich $K_n(2n)$.

Die Bestimmung des Winkels α an dem Körper $K_{n-1}(n)$ und $K_{n-1}(2^{n-1})$ habe ich nicht vorgenommen, doch mit deren Hilfe lässt sich zeigen, dass wir alle regelmässigen Körper angegeben haben.

Nachträgliche Bemerkung: Die erwähnte Abhandlung von H. Puchta erscheint in den Sitzungsberichten der k. Akademie. Eine zweite neue Arbeit, in der die letzten der obigen Sätze abgeleitet sind, wird eventuell auch in diesen Berichten veröffentlicht werden.

Über ein Schliessungsproblem.

Von **Emil Waelsch,**
stud. math. in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. Mai 1884.)

Bestimmt man bezüglich einer gegebenen n-punktigen geraden Gruppe (a) für einen Pol o die Punkte der r^{ten} Polare, für jeden dieser wieder die Punkte der r^{ten} Polare u. s. w., verfährt man so q-mal hintereinander, so erhält man $(n-r)^q$ Punkte $\mathfrak{o}$; fällt einer dieser Punkte $\mathfrak{o}$ mit o zusammen, so hat man einen „q-gliederigen Polarcyclus r^{ten} Grades“. Einem Punkte $\mathfrak{o}$ entsprechen r^q Punkte o, welche ihn alle nach dem obigen Verfahren liefern, also fällt $r^q+(n-r)^q$-mal ein Punkt o mit einem seiner entsprechenden Punkte $\mathfrak{o}$ zusammen; jede dieser Coincidenzen gehört einem Cyclus an. Diese Cyclen sind jedoch nicht alle q-punktige Gruppen, indem, wenn $q = \alpha . \beta$ ist, ein α-gliederiger Cyclus β-mal durchlaufen unter den q-gliederigen Cyclen auftreten wird. So sind die n eingliederigen Cyclen, welche durch die Punkte (a) vorgestellt werden, entsprechend oft durchlaufen, als Polarcyclen beliebigen Grades aufzufassen; die zweigliederigen nehmen Theil an allen geradgliederigen u. s. w.

Es fragt sich nun nach der Zahl der q-gliederigen Cyclen, welche irreducibel sind, d. h. nicht aus mehrfach durchlaufenen Cyclen niederer Gliederzahl bestehen. Ist $\mathfrak{C}_t$ die Zahl der irreducibeln t-gliederigen Cyclen und t in q enthalten, so muss jeder der $t\mathfrak{C}_t$ Punkte, aus denen sie bestehen, als eine der obigen Coincidenzen gezählt werden, und es ist daher $r^q+(n-r)^q = \Sigma t\mathfrak{C}_t$, wo die Summe über alle t zu nehmen ist, die Theiler von q sind, 1 und q eingeschlossen. Man hat also:

Zur Bestimmung der Zahl $\mathfrak{C}_q$ der irreducibeln q-gliederigen Polarcyclen r^{ten} Grades einer n-punktigen Gruppe gilt die Recursionsformel:

$$r^q+(n-r)^q = \Sigma t\mathfrak{C}_t, \text{ wenn } r \lesseqgtr n-r.$$

Ist nämlich $r=\frac{n}{2}$, so wird für jeden der Punkte der r^{ten} Polare von o als Pol ein Punkt der r^{ten} Polare mit o zusammenfallen, und es entsprechen daher einem Punkte o nur $(n-r)(n-r-1)^{q-1}$ Punkte $\mathfrak{o}$ und umgekehrt einem Punkte $\mathfrak{o}$ bloss $r(r-1)^{q-1}$ Punkte o, woraus als Fortsetzung des letzten Satzes folgt:

Ist n gerade, so dient zur Bestimmung der Zahl der irreduciblen Polarcyclen $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Grades die Recursionsformel:

$$n\left(\frac{n}{2}-1\right)^{q-1}=\Sigma t\mathfrak{C}_t.$$

Im Folgenden werden einige Eigenschaften der Polarcyclen für drei- und vierpunktige Gruppen abgeleitet.

Polarcyclen für Tripel.

Zwei conjugirte Punkte einer ebenen rationalen Curve dritter Ordnung sind die ersten Polare ihres Tangentialpunktes bezüglich des Tripels der Wendepunkte; die Nachbarpunkte des Doppelpunktes sind die Hesse'sche Covariante desselben.

Es führt daher die Bestimmung der Polarcyclen für ein Tripel auf das Problem der einer C_3^4 ein- und umgeschriebenen Polygone, welches Herr Professor Durège in den Math. Annalen Bd. 1 behandelte.

Es gilt nach Obigem für die irreduciblen q-Ecke die Recursionsformel $2^q+1=\Sigma t\mathfrak{C}_t$, wesshalb es gibt: 3 Einecke, die Wendepunkte; ein Zweieck, die Nachbarpunkte des Doppelpunktes; 2 Dreiecke etc.

Ist $x_1^3+x_2^3=0$ das Tripel, so gilt für die successiven Punkte $oo'\ldots o^{(q-1)}$ eines q-gliederigen Polarcyclus

$$o_1o_1'^2+o_2o_2'^2=0$$
$$o_1'o_1''^2+o_2'o_2''^2=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$o_1^{(q-1)}o_1^2+o_2^{(q-1)}o_2^2=0,$$

woraus für ein gerades q folgt: $\left(\frac{o_1}{o_2}\right)^{2^q-1} = -1$

„ „ ungerades $\left(\frac{o_2}{o_1}\right)^{2^q+1} = -1$, d. h.

die Punkte der q-gliederigen Cyclen sind, je nachdem q gerade oder ungerade, Punkte desjenigen Cyclus einer cyclischen Projectivitä vom Grade 2^q-1 oder 2^q+1, welcher die Wendepunkte enthält und daher Punkte der Gruppe derjenigen Involution derselben Ordnung, welche die Nachbarpunkte des Doppelpunktes zu eben so vielfachen Punkten hat.

Es ist demnach dieses Schliessungsproblem das der Kreistheilung.

Nimmt man als Tripel drei Punkte a, b, c einer Raumcurve dritter Ordnung an, so sind seine dreigliederigen Polarcyclen in zwei Ebenen gelegen, welche mit der Ebene des Tripels eine Gruppe der Ebeneninvolution dritter Ordnung bilden, welche die Schmiegungsebenen in den Stützpunkten der Bisecante, die durch den Schnittpunkt 1 der Schmiegungsebenen in a, b, c geht, zu dreifachen Ebenen hat.

Hieraus folgt ein Satz, dessen dualer lautet: Ist 2 der Schnittpunkt der Ebenen, welche a, b, c, resp. mit den Tangenten β, γ, α und 3 der Schnittpunkt der Ebenen, welche diese Punkte, resp. mit den Tangenten γ, α, β verbinden, so liegen die drei Punkte 1, 2, 3 auf einer Bisecante der Raumcurve und bilden mit deren Stützpunkten äquianharmonische Quadrupel.

Die Bedindung, dass ein Quadrupel ein viergliederiger Polarcyclus eines Tripels sein könne, ist, dass sein Doppelverhältniss $= \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{4}(1-\sqrt{5})$ sei.

Polarcyclen für Quadrupel.

Die drei zweigliederigen Polarcyclen ersten Grades sind die Paare der Covariante sechster Ordnung T, also, wenn das Quadrupel auf einem Kegelschnitt ein Viereck bildet, die Paare, welche durch die Seiten des Polardreiecks desselben ausgeschnitten werden.

Bei den Polarcyclen zweiten Grades tritt ein besonderer Umstand ein. Nach der Formel für $r=\frac{n}{2}$ kann es hier keine solche geben, da sich für jedes q $n\left(\frac{n}{2}-1\right)^q=4$ ergibt, also die Grundpunkte die einzig möglichen Cyclen sind. Man kann aber immer ein Quadrupel finden, welches vier gegebene Paare zu Polpaaren zweiten Grades (ein Pol mit einem Punkte seiner zweiten Polare) hat und dies gilt auch, wenn die gegebenen Paare einen Cyclus bilden. Das dann gefundene Quadrupel $a_1a_2a_3a_4$ muss demnach ein specielles sein. Es ordnen sich seine Polpaare zweiten Grades zu lauter viergliederigen Cyclen an; denn die (2, 2)-Correspondenz, welche die viergliederigen Cyclen liefert, besitzt als Coincidenzen die vier Punkte (a) und die des angenommenen Cyclus, also jeden Punkt der Geraden als Coincidenz. Diese viergliederigen Polarcyclen bilden eine Involution vierter Ordnung; denn durch einen Punkt ist eine ihrer Gruppen bestimmt. Der Punkt a_1 bestimmt auch eine Gruppe dieser Involution, und zwar sind die Punkte seiner zweiten Polare,

die Punkte $(a)_2^{a_1}$, der Punkt a_1 und ein Punkt m;

die Punkte $\left.\begin{matrix}(a)_2^m\\(a)_2^{m'}\end{matrix}\right\}$ sind $\left.\begin{matrix}a_1\\m\end{matrix}\right\}$ und ein Punkt $\left.\begin{matrix}m'\\a_1\end{matrix}\right\}$.

Es muss nun m mit m' zusammenfallen; denn sonst hätte a_1 eine dreipunktige zweite Polare bezüglich (a), bestehend aus a_1, m und m'. Wenn aber der Punkt m mit einem seiner Punkte $(a)_2^m$ zusammenfällt, so muss er nothwendig zu (a) gehören, also z. B. der Punkt a_3 sein. Und da er die letzte Polare von a_1 bezüglich $a_2a_3a_4$ ist, so muss er es auch bezüglich a_2a_4 sein, d. h. die Punkte a_1a_3 trennen sich harmonisch; und umgekehrt hat jedes harmonische Quadrupel die verlangten Eigenschaften, da es sich in das gefundene projiciren lässt. Man hat also:

Ein Quadrupel besitzt dann und nur dann einen viergliederigen Polarcyclus zweiten Grades, wenn es harmonisch ist; es hat dann eine Involution solcher Polarcyclen, welche die Punkte des Quadrupels zu Doppelpunkten besitzt, und zwar die sich trennenden Paare in einer Gruppe.

Da die folgende Involution eine derartige ist, so gilt:

Jedes Quadrupel bestimmt mit seiner Hesse'schen Covariante eine Involution, deren Gruppen Polarcyclen zweiten Grades für jedes der drei harmonischen Quadrupel seiner Covariante T sind. Jedes dieser Quadrupel besitzt das gegebene in anderer Anordnung als Polarcyclus.

Es muss aber auch Quadrupel geben, welche ein gegebenes Tripel als Polarcyclus zweiten Grades besitzen, und zwar bilden diese eine biquadratische Involution. Sei $a_1 a_2 a_3 a_4$ eines dieser Quadrupel, so müssen sich seine Polpaare zweiten Grades aus denselben Gründen wie oben, in einer cubischen Involution anordnen und gelten dieselben Bezeichnungen wie dort, so muss schon m' mit a_1 identisch sein; daher fallen die beiden Punkte $(a)_2^m$ mit a_1 zusammen, also auch der Punkt $(a)_3^m$ und daher die letzte Polare von m bezüglich $a_2 a_3 a_4$. Hieraus folgt, dass die Punkte der ersten Polare von m bezüglich des Tripels $a_2 a_3 a_4$ nach a_1 fallen, da m die letzte Polare bezüglich dieses Tripels ist. a_1 gehört also zur Hesse'schen Covariante von $a_2 a_3 a_4$ und hieraus folgt:

Ein Quadrupel besitzt dann und nur dann einen dreigliederigen Polarcyclus zweiten Grades, wenn es äquianharmonisch ist; es hat eine Involution solcher Polarcyclen, welche in den Punkten des Quadrupels Doppelpunkte und in der Hesse'schen Covariante desselben Verzweigungspunkte hat.

Dasjenige Quadrupel der obigen biquadratischen Involution, welches durch einen Punkt des gegebenen Tripels bestimmt ist, muss diesen als dreifachen Punkt enthalten, weil für ihn als Pol die zweite Polare unbestimmt werden muss; man sieht also, dass diese biquadratische Involution die Punkte des Tripels zu dreifachen Punkten hat. Durch diese drei dreifachen Punkte ist aber nur eine Involution bestimmt; denn zwei solche Involutionen bestimmten ein lineares Punktsystem dritter Stufe, welches die Punkte des Tripels als neutrale dreifache Elemente besitzen würde, also müsste nach Satz 7. meiner Arbeit im Novemberheft der Sitzgsb. d. k. Akademie dieses Tripel auch für jede Gruppe der zweiten Involution ein Polarcyclus sein, wesshalb sie mit der ersten zusammenfallen muss. Es gilt daher:

Es gibt nur eine biquadratische Involution, welche drei gegebene Punkte zu dreifachen Punkten hat; ihre sämmtlichen Gruppen sind äquianharmonisch; die Verzweigungspunkte sind die Covariante Q des Tripels.

Hieraus folgt ein Satz über die einen Kegelschnitt osculirenden Kegelschnitte und: die vier Tangenten, welche sich von einem Punkte der Verbindungslinie der Wendepunkte einer C_3^4 an diese legen lassen, berühren in vier äquianharmonischen Punkten oder: die Tangentialebenen, welche sich durch einen Leitstrahl des Nullsystems einer Raumcurve dritter Ordnung an diese legen lassen, berühren dieselbe in vier äquianharmonischen Punkten.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle einer Gattung eigenthümlicher Curven zu erwähnen, welche in folgender Weise erzeugt werden:

Verbindet man einen Punkt s der Ebene mit einem Punkte der Geraden L, auf welcher sich eine n-punktige Gruppe (a) befindet, und einen Punkt σ mit den Punkten der r^{ten} Polare, $(a)_r^o$, von o bezüglich (a), so ist der Ort der Schnittpunkte dieser Verbindungslinien, wenn o variirt, eine Curve n^{ter} Ordnung, $\mathfrak{P}_n^r$, die durch die Punkte (a) geht. Diese sollen ihre „Basis", s und σ ihre „Scheitel" heissen. Fällt der Schnittpunkt ω von L und der Scheitelgeraden mit einem der Basispunkte zusammen, so ist die letztere ein Theil der $\mathfrak{P}_n^r$. Der Punkt $\left.\begin{matrix}s\\ \sigma\end{matrix}\right\}$ ist ein $\left.\begin{matrix}r\\ n-r\end{matrix}\right\}$-facher Punkt der Curve, dessen Tangenten $\left.\begin{matrix}(S)\\ (\Sigma)\end{matrix}\right\}$ seine Verbindungslinien mit $\left.\begin{matrix}(a)_{n-r}^{\omega}\\ (a)_r^{\omega}\end{matrix}\right\}$ sind.

Bei der $\mathfrak{P}_n^1$ ist die gerade Polare eines jeden der Punkte $\{(S); L\}$ die Scheitelgerade, da die Punkte ω und s dieser Polare angehören müssen. Die erste Polare des Schnittpunktes t der Scheitelgeraden mit der geraden Polare des Punktes ω, enthält also diese $n-1$-Punkte und den Punkt ω, d. h. die erste Polare von t bezüglich der $\mathfrak{P}_n^1$ enthält die Gerade L als Theil. Es gilt aber auch allgemein:

Die Tangenten der $\mathfrak{P}_n^r$ in den Basispunkten schneiden sich in einem festen Punkte der Scheitelgeraden.

Wenn sich diese Tangenten auf der Scheitelgeraden schneiden, so kann dies nur der Fall sein in der letzten Polare t des Poles ω bezüglich der Gruppe, welche besteht aus dem r-fach gezählten Punkt s und dem $(n-r)$-fach gezählten Punkt σ; denn die geraden Polaren von ω bezüglich der $\mathfrak{P}_n^r$ und der Curve n^{ter} Ordnung, welche aus den Basistangenten besteht, müssen nach dem Satze von Mac-Laurin identisch sein, der n-fache Punkt der letzteren Curve muss demnach in den Punkt t zu liegen kommen.

Um den angeführten Satz zu beweisen, wird die Gleichung der $\mathfrak{P}_n^r$ abgeleitet. Ist $(a_1x_1 + a_2x_2)^n = a_x^n$ eine binäre Form auf der Geraden $x_3 = 0$, sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die Coordinaten von σ, s_i die Coordinaten von s, so hat die Verbindungslinie von s mit einem Punkte $y_1 y_2$ auf $x_3 = 0$ die Gleichung:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 s_3 - x_3 s_1}{x_2 s_3 - x_3 s_2},$$

welches Verhältniss in $a_y^r a_x^{n-r} = 0$ eingesetzt die Gleichung der $\mathfrak{P}_n^r$ in der Form ergibt:

$$(s_3 a_x - x_3 a_s)^r a_x^{n-r} = 0.$$

Die Glieder n^{ter} und $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension gleich Null gesetzt:

$$s_3 a_x^n - r x_3 a_x^{n-1} a_s = 0$$

sind bekanntlich eine Curve, welche in den Basispunkten dieselben Tangenten wie $\mathfrak{P}_n^r$ hat; nun ist diese Curve aber, wie aus der Gleichung folgt, eine $\mathfrak{P}_n^1$, von welcher die behauptete Eigenschaft bewiesen wurde, also gilt sie allgemein.

Weil es bei einer allgemeinen Gruppe nicht geschieht, dass für einen Pol o zwei Punkte seiner r^{ten} Polare in einen Punkt o' zusammenfallen und die $(n-r)^{\text{te}}$ Polare von o' gleichzeitig in o einen Doppelpunkt hat, so besitzt die $\mathfrak{P}_n^r$ weiters keine vielfachen Punkte mehr und ihre Classe ist daher $2r(n-r)$. Es gibt demnach, da von s $2r(n-r)-2r$ Tangenten an die Curve gehen, wenn $r \lesseqgtr n-r$ ist, $2r(n-r-1)$ Punkte, deren r^{te} Polare einen

Doppelpunkt enthält. Ist $r = \frac{n}{2}$, so gibt es wohl von den beiden $\frac{n}{2}$-fachen Punkten zusammen $n(n-2)$ Tangenten an die $\mathfrak{P}_n^{\frac{n}{2}}$, da aber diese Curve sich hier in einer harmonischen Perspectivität mit dem Centrum t und der Axe L selbst entspricht, so schneiden die beiden Scheiteltangentengruppen auf L dieselben $\frac{n}{2}(n-2)$ Punkte aus, entsprechend der allgemeinen Formel.

Das Geschlecht der $\mathfrak{P}_n^r$ ist $r(n-r)-(n-1)$ und dies ist auch die Zahl der Bedingungen, welche noch nöthig sind, um eine Curve, die einen r-fachen und einen $(n-r)$-fachen Punkt hat, auf deren Verbindungslinie sich die Tangenten in n auf einer Geraden gegebenen Punkten schneiden sollen, als $\mathfrak{P}_n^r$ zu charakterisiren. Ist einer der gegebenen Punkte ein $(n-1)$-facher Punkt, der andere einfach, so ist die Curve immer eine $\mathfrak{P}_n^1$, welches sind aber die fehlenden Bedingungen für $r > 1$?

Analog liefert eine ebene Curve, indem man aus einem Punkte des Raumes die Punkte ihrer Ebene, aus einem andern ihre r^{te} Polare projicirt und die projicirenden Gebilde mit einander schneidet, Flächen, welche sich dadurch auszeichnen, dass sie einem Kegel, dessen Scheitel auf der Verbindungslinie dieser vielfachen Punkte eine schon bestimmte Lage hat, umschrieben sind, wie aus der Betrachtung eines Schnittes dieser Fläche durch die Scheitelgrade folgt.

Der Kegel des Scheitels eines Monoids, welches einem Kegel n^{ter} Ordnung nach einem ebenen Schnitte C_n umschrieben ist, schneidet die Ebene in der ersten Polare bezüglich C_n des Schnittpunktes der Verbindungslinie der beiden Scheitel mit der Ebene.

Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper in Räumen von beliebiger Dimension.

Von Ph. Dr. **Anton Puchta,**
k. k. a. o. Professor der Mathematik an der deutschen Universität zu Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Juni 1884.)

Einleitung: Inhalt und Methode.

In meinem Aufsatz: „Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper im Raume von vier Dimensionen etc.“, vorgelegt einer kaiserl. Akademie am 8. Mai 1884, habe ich eine einfache Methode benützt, die ohne erwähnenswerthe Schwierigkeiten das Problem der regelmässigen Körper im Raume von vier Dimensionen zu lösen gestattete und schon damals behauptet, dass meine Methode grosser Allgemeinheit fähig ist und weitere allgemeinere Untersuchungen in Aussicht genommen. Diese Behauptung soll nun in diesem Aufsatze gerechtfertigt werden, **indem ich das Problem der regelmässigen Körper in Räumen von beliebiger Dimensionszahl** nach meiner Methode erledige und zeige:

A) „In einem Raume von höherer Dimension als vier gibt es nur drei regelmässige convexe Körper, wie gross auch die Dimensionszahl des Raumes sei“ und

B) die Coordinaten der Eckpunkte dieser drei regelmässigen Körper im Raume von n-Dimensionen ($n > 4$) und damit diese Körper selbst und die Anzahlen ihrer Begrenzungselemente völlig angebe.

Die Überlegungen, die ich anstelle, um die eben erwähnten Resultate zu erhalten, sind äusserst einfach und tritt die Allgemeinheit meiner Methode ganz klar hervor, indem sich herausstellt, dass die Resultate der früher erwähnten Abhandlung eigentlich schon das Problem für n-Dimensionen lösen und nur einige selbstverständliche Überlegungen hinzutreten, um vollste Allgemeinheit zu erhalten. Der Gang der Untersuchung ist hiebei folgender:

„Die regelmässigen Körper im Raume von $(n+1)$ Dimensionen werden begrenzt durch die regelmässigen Körper im Raume von n-Dimensionen, und durch eine gewisse später aufzustellende Bedingung, die sich auf Winkel bezieht, wird die Anzahl aller möglichen Fälle wesentlich reducirt, sowie diese Möglichkeiten durch Angabe der Coordinaten als wirklich existirend nachgewiesen."

Damit ist dann das Problem in der That allgemein gelöst.

I. Übersicht der Resultate für den Raum von vier Dimensionen und Aufstellung der einschränkenden Winkelrelation.

Im Raume von vier Dimensionen (R_4) gibt es nach dem erwähnten Aufsatze folgende sechs convexe regelmässige Körper:

α) Einen von 8 Hexaedern begrenzten Körper mit 16 Eckpunkten.

β) Einen von 5 Tetraedern begrenzten Körper mit 5 Eckpunkten.

γ) Einen von 16 Tetraedern begrenzten Körper mit 8 Eckpunkten.

δ) Einen von 600 Tetraedern begrenzten mit 120 Eckpunkten.

ε) Einen von 120 Dodekaedern begrenzten mit 600 Eckpunkten.

ζ) Einen von 24 Oktaedern begrenzten mit 24 Eckpunkten.

Ich werde diese Körper mit α, β, γ, δ, ε, ζ respective bezeichnen; sie allein können offenbar zur Begrenzung der regelmässigen Körper im Raume von fünf Dimensionen verwendet werden.

Ich bezeichne mit P_k in einem Raume von beliebiger Dimension n, wobei natürlich $n > k$ ist, ein Gebilde von k-Dimensionen; dann ist offenbar P_0 ein Punkt, P_1 eine Gerade, P_2 eine Ebene (Fläche), P_3 ein Körper (Raum von drei Dimensionen) etc.

Dann ergibt sich unmittelbar: In einer Ebene kann eine Gerade um einen Punkt durch einen Winkel von 2π gedreht werden, und desshalb genügt bei einem dreidimensionalen convexen Körper, der ganz auf einer Seite der Ebene von einem seiner Grenzpolygone liegen muss, um eben convex zu sein, die Summe der Winkel aller Kanten die durch einen Eckpunkt gehen, der Umgleichung $\Sigma\alpha < 2\pi$. Ersetzen wir Ebene (P_2) durch Körper

(P_3), Gerade (P_1) durch Fläche (P_2), Eckpunkt (P_0) durch Gerade (Kante P_1), so resultirt als einschränkende Winkelrelation für die convexen vierdimensionalen Körper, da im Raume von drei Dimensionen eine Ebene (P_2) um eine Gerade (P_1) durch einen Winkel von 2π gedreht werden kann, die Umgleichung: $\Sigma\beta > 2\pi$, wobei β der Winkel meiner durch dieselben Kanten gehenden Flächen ist. In der That ergab sich in Folge dieser Bedingung für R_4 nur die erwähnte Anzahl von sechs Körpern. Schliesst man so weiter, so ergibt sich, dass im Raume von n-Dimensionen ein P_{n-1} um ein fix bleibendes P_{n-2} durch einen Winkel von 2π gedreht werden, und es ist in der That, wenn mit S_1 der lineare Ausdruck $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1}$ und mit S_2 der lineare Ausdruck $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \ldots + b_nx_n + b_{n+1}$ bezeichnet wird, die Gleichung eines beliebigen P_{n-1} durch ein fix bleibendes (darum sind die a und b gegebene Constante) P_{n-2} von der Form $S_1 - KS_2 = 0$, worin K ein veränderlicher Parameter ist. Es ist dies eben ein Büschel von P_{n-1}, wie $E_1 - KE_2 = 0$, z. B. ein Ebenbüschel in R_3 darstellt etc. Für einen convexen Körper in R_n also resultirt die einschränkende Winkelrelation $\Sigma\alpha < 2\pi$, wobei α der Winkel ist, den zwei P_{n-2} einschliessen, die sämmtlich durch dasselbe P_{n-3} gehen. Was man unter diesem Winkel zu verstehen hat und wie derselbe berechnet wird, erhellt aus dem Folgenden. Im R_3 müssen bei einem convexen Körper mindestens drei oder mehrere Flächen durch einen Eckpunkt gehen, analog müssen bei einem vierdimensionalen Körper mindestens drei oder mehrere dreidimensionale Körper durch eine Kante gehen etc., also bei einem n-dimensionalen Körper mindestens drei oder mehrere P_{n-1} durch ein P_{n-2} gehen etc., und wenn beachtet wird, dass bei einem dreidimensionalen Körper jede Kante zwei Flächen gemeinsam ist, bei vierdimensionalen Körpern also jede Fläche zwei dreidimensionalen Körpern, bei fünfdimensionalen Körpern darum jeder dreidimensionale Begrenzungskörper zwei vierdimensionalen Körpern etc., so folgt, dass bei den fünfdimensionalen Körpern $\Sigma\alpha < 2\pi$ sein muss, wobei α der Winkel zweier dreidimensionaler Körper ist, der P_3, die über derselben Fläche (P_2) aufsitzen und dass mindestens drei solche P_3 über derselben Fläche aufsitzen müssen, wobei wieder jedes P_3 zweien und auch nur zweien P_4 gemeinsam ist,

wenn mehrere P_4 die völlige Begrenzung eines convexen Körpers im Raume von fünf Dimensionen bilden. Es ist noch der Begriff des Winkels, z. B. zweier P_3, die ein P_2 gemeinsam haben, in einem Raume von vier Dimensionen zu erörtern und anzugeben, wie derselbe berechnet wird. Nehmen wir einen regelmässigen dreidimensionalen Körper, ein P_3, so ist derselbe offenbar durch vier seiner Eckpunkte, die nicht alle in einer seiner Flächen liegen, bestimmt, und hiedurch ein dreidimensionaler Raum festgelegt. Liegt nun P_3 in einem R_4, so erhält man für den R_3, der in dem R_4 liegt und P_3 enthält, eine lineare Gleichung für die Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines beliebigen Punktes von R_3, die lautet

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e = 0 \qquad A)$$

a, b, c, d, e sind dabei gegebene Constanten. Durch A ist also aus R_4 ein gewisser dreidimensionaler Raum ausgeschieden, dessen Gleichung in der Normalform (vergl. Analyt. Geometrie des Raumes von O. Hesse) lautet

$$\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} = 0. \qquad B)$$

Stellt man ganz analoge Überlegungen, wie Hesse an, der eine Ebene als Ort aller Punkte definirt, die von zwei Fixpunkten gleich weit abstehen, so gelangt man gleichfalls in einem R_4 zu einer Gleichung von der Form $A)$ oder $B)$, und es ist also jeder Gleichung $A)$ oder $B)$ eine gewisse Richtung adjungirt, sowie wenn durch $C)$ ein weiterer R_3 in dem erwähnten R_4 ausgeschieden wird,

$$\frac{a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_5 + e_1}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2}} = 0, \qquad C)$$

dann für den Winkel α zwischen $B)$ und $C)$ die Gleichung charakteristisch,

$$\cos\alpha = -\frac{aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2}} \qquad D)$$

α ist dabei jener Winkel von $C)$ und $B)$, in dessen Raum der Coordinaten-Anfangspunkt liegt, und dieser Winkel ist demjenigen supplementär, den die Perpendikel aus O auf $A)$ und $B)$

bilden, darum ist rechts in *D)* vor dem Bruchstrich das Zeichen Minus.

Aus dem Bisherigen ergibt sich, dass für einen Winkel zweier dreidimensionaler Körper, die in demselben R_4 liegen, ganz dieselbe Definition gilt, wie für den zweier Flächen in einem dreidimensionalen Raum, indem dieser Winkel gebildet wird von den zwei durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden Geraden, welche im erwähnten Sinne den Körpern adjungirt sind. Die Verallgemeinerung für Räume höherer Dimension liegt auf der Hand, es treten eben bloss in der Gleichung *D)* zwei Reihen von mehr als vier Constanten a, b, c, d auf.

II. Nachweis, dass es im Raume von fünf Dimensionen nur drei regelmässige Körper gibt und Angabe derselben.

Im R_4 hat der Körper α in *I* die Coordinaten

$$x_1 = \pm 1 \quad x_2 = \pm 1 \quad x_3 = \pm 1 \quad x_4 = \pm 1$$

in allen möglichen 16 Combinationen. Ich bezeichne ihn mit $[\pm\pm\pm\pm]$. Zwei seiner 8 Hexaeder, die ihn begrenzen, sind dann analog zu bezeichnen mit $[\pm\pm\pm+]$ und $[\pm\pm+\pm]$, indem x_3 und x_4, resp. den constanten Werth $+1$ haben. Die beiden erwähnten Würfel sitzen über dem Quadrat $[\pm\pm++]$ auf und ihre Gleichungen in der Normalform sind offenbar:

$$\frac{x_3 - 1}{+1} = 0, \text{ resp. } \frac{x_4 - 1}{+1} = 0$$

und im Nenner ist beiderseits das Zeichen $+$ zu wählen, damit das Perpendikel aus O, dem Coordinatenanfangspunkt, der zugleich Mittelpunkt von α ist, in beiden Fällen d a s s e l b e Vorzeichen erhält und also jener Winkel der beiden Körper resultirt, in dessen Raum α wirklich liegt. Dann gibt die Formel *D)* für den Winkel der beiden Hexaeder:

$$\cos\beta = -\frac{0}{1} = 0$$

also

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

und für die fünfdimensionalen von α begrenzten Körper können wegen der einschränkenden Winkelrelation $\Sigma\beta < 2\pi$, wobei wegen der Regelmässigkeit alle β gleich sind, da nur $3\beta < 2\pi$ ist, bloss drei Körper α über einem Quadrat aufsitzen und in gewisser Anzahl einen regelmässigen fünfdimensionalen Körper begrenzen, da wenn vier α über einem Quadrate aufsitzen würden, eine continuirliche Ausfüllung von R_5 durch unendlich viele α resultiren würde, wovon analog wie im früheren Aufsatze abgesehen werden soll.

Das Ergebniss ist also folgendes: „Der Körper α in I gibt nur zu einem einzigen regelmässigen Körper in R_5 Anlass". Derselbe kann durch seine Coordinaten leicht angegeben werden, er hat nämlich $2^5 = 32$ Eckpunkte und wird begrenzt von 10 Körpern α, die zu je dreien über einem gemeinsamen Quadrate aufsitzen. Die Coordinaten seiner Eckpunkte sind $x_1 = \pm 1$, $x_2 = \pm 1$, $x_3 = \pm 1$, $x_4 = \pm 1$, $x_5 = \pm 1$ und während α mit $[\pm \pm \pm \pm]$ bezeichnet wurde, ist er analog mit $[\pm \pm \pm \pm \pm]$ zu bezeichnen. Ein solcher ihn mitbegränzender Körper α hätte dann z. B. die Coordinaten $x_1 = \pm 1$, $x_2 = \pm 1$, $x_3 = \pm 1$, $x_4 = \pm 1$, $x_5 = +1$ und seine Gleichung im R_5 wäre $\frac{x_5 - 1}{+1} = 0$ in der Normalform gegeben. Es erhellt direct dann, dass z. B. die beiden α $[\pm \pm \pm \pm +]$ und $[\pm \pm \pm + \pm]$ das Hexaeder $[\pm \pm \pm + +]$ und nur dieses gemeinsam haben, also sitzen in der That zwei α von diesem neuen Körper, der mit α_5 bezeichnet werden soll, über einem Hexaeder auf, und es erhellt daraus, dass die 10 Körper α ein vierdimensionales endliches und geschlossenes Continuum bilden, also in der That α_5 begrenzen. Bezüglich der Begrenzungselemente niederer Dimension als vier und der Angabe, wie viele α z. B. durch einen Punkt gehen, gibt das Spätere Aufschluss.

Ich bemerke hier nur noch, dass die 32 Eckpunkte von α_5 auf dem Kugelraume liegen

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 5$$

und dass O sein Mittelpunkt ist.

Die 5 Eckpunkte des Körpers β in I, der von 5 Tetraedern begrenzt wird, können unter Anderem angenommen werden als

gegeben durch die Tabelle, wenn sie mit 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet werden:

Punkt	x_1	x_2	x_3	x_4
1	+1	0	0	0
2	0	+1	0	0
3	0	0	+1	0
4	0	0	0	+1
5	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Die Länge einer Tetraederkante ist dabei $= \sqrt{2}$ und die fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5 bilden ein System äquidistanter Punkte. Es erhellt sofort, dass über dem Dreieck 1, 2, 3 die beiden Tetraeder aufsitzen T_{1234} und T_{1235}.

Eine sehr leichte Rechnung gibt, dass ihre Normalgleichungen lauten

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4-1}{2}=0,$$

resp.

$$\frac{x_1+x_2+x_3+(\sqrt{5}-4)\,x_4-1}{-2\sqrt{5}-1)}=0.$$

Dabei sind die Vorzeichen im Nenner so bestimmt, dass der Mittelpunkt des Körpers β) mit den Coordinaten

$$x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{5+\sqrt{5}}{20}$$

auf derselben Seite der Räume von drei Dimensionen liegt, die durch die angegebenen zwei Gleichungen bestimmt sind; in der That wird das Perpendikel aus dem Mittelpunkt auf diese beiden Räume in beiden Fällen gleich $+\frac{\sqrt{5}}{2\cdot 5}$. Die Gleichung *D)* gibt jetzt für den Winkel μ dieser zwei Tetraeder

$$\cos\mu=-\frac{3+\sqrt{5}-4}{-2\cdot 2(\sqrt{5}-1)}=+\frac{1}{4},$$

so dass μ beiläufig 75° 31′ beträgt. Daraus folgt, da $3\mu < 2\pi$ und $4\mu < 2\pi$, dagegen $5\mu > 2\pi$ ist, das Ergebniss:

„Durch den Körper β können **zwei** und nur zwei fünfdimensionale Körper begrenzt werden, indem drei, resp. vier β über derselben Fläche aufsitzen", ich will sie mit β_5 resp. β_5' bezeichnen. Die Coordinaten von β_5 sind dann durch die Tabelle gegeben.

Eckpunkt	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	+1	0	0	0	0
2	0	+1	0	0	0
3	0	0	+1	0	0
4	0	0	0	+1	0
5	0	0	0	1	+1
6	$\frac{1+\sqrt{6}}{5}$	$\frac{1+\sqrt{6}}{5}$	$\frac{1+\sqrt{6}}{5}$	$\frac{1+\sqrt{6}}{5}$	$\frac{1+\sqrt{6}}{5}$

Die Kantenlänge eines Tetraeders ist dabei wieder $\sqrt{2}$, und man sieht, dass diese sechs Punkte wieder ein System äquidistanter Punkte bilden, sowie dass über dem Dreieck 123 z. B. die drei Körper β aufsitzen 12345, 12346, resp. 12356. Es erhellt weiter, dass β_5 von sechs Körpern β begrenzt wird, dass z. B. das Tetraeder 1234 den beiden β 12345 und 12346 gemeinsam ist und dass seine Eckpunkte auf dem Kugelraume liegen.

$$\left(x_1 - \frac{6+\sqrt{6}}{30}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{6+\sqrt{6}}{30}\right)^2 + \left(x_3 - \frac{6+\sqrt{6}}{30}\right)^2 + \left(x_4 - \frac{6+\sqrt{6}}{30}\right)^2 + \left(x_5 - \frac{6+\sqrt{6}}{5}\right)^2 = \frac{5}{6}.$$

Man erhält schliesslich sehr einfach für die Begrenzung von β_5, dass dieselbe gebildet wird von 6 Eckpunkten, 15 Kanten, 20 Flächen, 15 Tetraedern und 6 Körpern β. Wie viele Flächen z. B. durch eine Kante gehen etc. ergibt sich dann äusserst einfach.

Was jetzt β_5' betrifft, so sind die Coordinaten seiner Eckpunkte z. B. in der Form gegeben:

Eckpunkt	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1, resp. 1′	± 1	0	0	0	0
2, resp. 2′	0	± 1	0	0	0
3, resp. 3′	0	0	± 1	0	0
4, resp. 4′	0	0	0	± 1	0
5, resp. 5′	0	0	0	0	± 1

Aus dieser Tabelle folgt unmittelbar, dass die Kantenlänge eines Tetraeders wieder gleich $\sqrt{2}$ ist und dass β_5' von 32 Körpern β begrenzt ist, deren zwei z. B. sind 12345, 12345′. Über dem Dreieck 123 sitzen z. B. die vier Körper β auf 12345, 12345′, 1234′5, 1234′5′ und ist das Tetraeder 1234 den beiden ersten gemeinsam etc. Eine leichte Überlegung ergibt, dass sich in der Begrenzung von β_5' finden 10 Eckpunkte, 40 Kanten, 80 Flächen, 80 Tetraeder und 32 Körper β. Alle Eckpunkte liegen auf dem Kugelraum

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=1.$$

Der Körper α_5 hat in seiner Begrenzung 32 Eckpunkte, 80 Kanten, 80 Flächen, 40 Würfeln und 10 Hexaeder. Vergleicht man die Zahlen der Begrenzungsstücke von α_5 und β_5', so ergibt sich, dass diese Zahlenreihe bei beiden, nur in umgekehrter Reihenfolge das zweite Mal, übereinstimmt. Dies war vorauszusehen, denn nach dem Dualitätsprincip entspricht im Raume von n Dimensionen dem Punkte $x_1' x_2' \ldots x_n'$, oder dem P_0 unter Zugrundelegung des Kugelraumes

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots\ldots\ldots+x_n^2=1$$

der Raum von $(n-1)$ Dimensionen, also ein P_{n-1},

$$x_1' x_1 + x_2' x_2 \ldots x_n' x_n = 1 \qquad F)$$

als Polare und darum einem P_1 ein $P_{n-2}, \ldots\ldots$ allgemein einem P_k, ein P_{n-k-1}, und desshalb folgt aus der Existenz von α_5 schon die von β_5', und erkennt man leicht, dass im R_n ein Körper sich selbst reciprok ist, wenn die beiden Zahlen für die P_0 und P_{n-1} seiner Begrenzung dieselben sind, da aus diesen schon die Gleichheit der Anzahlen von P_1 und P_{n-2} etc. folgt. Desshalb konnte ich auch die Coordinaten von β_5' in der obigen Form direct hinschreiben, infolge der bekannten Coordinaten von α_5. In der That hat z. B. ein α von α_5 die Gleichung in Punktcoordinaten $x_1 = 1$, welche in Liniencoordinaten umgesetzt gibt, falls mit $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ Liniencoordinaten im allgemeinen Sinne bezeichnet werden $-\xi_1 + 1 = 0$ und daher den Punkt darstellt, wenn *F)* $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, d. h. den Eckpunkt 1' von β_5 etc. Bisher wurden die Körper fünfter Dimension gefunden, die aus α) und β) in I sich aufbauen. Ich habe daher zunächst nachzusehen, ob es möglich ist, in R_5 einen Körper durch die Körper γ zu begrenzen. Nun wird γ begrenzt von 16 Tetraedern mit 8 Eckpunkten, deren Coordinaten als in folgender Tabelle z. B. gegeben angenommen werden können:

Eckpunkt	x_1	x_2	x_3	x_4
1, resp. 1'	± 1	0	0	0
2, resp. 2'	0	± 1	0	0
3, resp. 3'	0	0	± 1	0
4, resp. 4'	0	0	0	± 1

Ein solches Tetraeder mit der Kantenlänge $\sqrt{2}$ ist offenbar 1234 etc.

Über dem Dreiecke 123 sitzen die zwei Tetraeder auf 1234 und 1234', deren Gleichungen in der Normalform offenbar lauten

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1}{2} = 0 \quad \frac{x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 1}{2} = 0,$$

wo die Polynome links gleichzeitig $-\frac{1}{2}$ werden, wenn man vom Mittelpunkte des Körpers $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ Perpendikel auf

diese dreidimensionalen Räume fällt, wie es sein muss, um den Winkel zwischen denselben richtig zu erhalten, in dessen Raum γ liegt. Die Formel *D)* in I gibt für diesen Winkel ν

$$\cos \nu = -\frac{1+1+1-1}{4} = -\frac{1}{2}, \text{ d. h. } \nu = \frac{2\pi}{3}.$$

Daraus folgt, da $3\nu = 2\pi$ ist, und mindestens drei Körper γ über einer Fläche aufsitzen müssen, dass es möglich ist, den Raum von fünf Dimensionen lückenlos durch Körper je in unendlich grosser Anzahl auszufüllen, dass es jedoch unmöglich ist, im Raume von fünf Dimensionen einen Körper durch eine endliche Anzahl von Körpern γ zu begrenzen, also γ kann nicht als Begrenzungselement eines regelmässigen Körpers im R_5 benützt werden.

Ich übergehe zu dem von 600 Tetraedern begrenzten Körper δ mit 120 Eckpunkten. Nimmt man dann die Punkte 1, 2, 3, 4, 6 mit den Coordinaten $+1, +1, +1, +1$; $+1, -1, -1, +1$; $-1, -1, +1, +1$; $-1, +1, -1, +1$; resp. $\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha$; wobei $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist, so sitzen über dem Dreieck 123 die beiden Tetraeder 1234 und 1236 auf. Für die Gleichungen der von den Tetraedern bestimmten dreidimensionalen Räume ergibt sich dann sehr leicht, da der Mittelpunkt von δ die Coordinaten hat: $0, 0, 0, 2\alpha+2$

$$\frac{x_4-1}{1} = 0$$

$$\frac{(\alpha-2)x_1+(2-\alpha)x_2+(\alpha-2)x_3+(4-\alpha)x_4+2\alpha+4}{-2(1-\sqrt{5})} = 0.$$

Der Winkel zwischen diesen beiden R_3 ist also nach *D)* in I, wenn er mit σ bezeichnet wird, gegeben durch die Gleichung

$$\cos \sigma = -\frac{2+6\sqrt{5}}{16},$$

also beiläufig $\sigma = 164^\circ\, 41' ..$, demnach $3\sigma > 2\pi$, d. h. von δ kann kein fünfdimensionaler Körper begrenzt werden. Es soll nun untersucht werden, ob der Körper ε zur Begrenzung von

fünfdimensionalen Körpern brauchbar ist. Die Rechnung wird hier natürlich ganz analog geführt, wesshalb ich bloss das Resultat angebe. Legt man nämlich zwei der Dodekaeder zu Grunde, welche in meinem früher erwähnten Aufsatz angegeben sind, z. B. jene, wo überall die Ziffer 1, resp. 2 vorkommt, so erhält man für die durch sie bestimmten R_3 die zwei Gleichungen in der Normalform, wenn das Vorzeichen im Nenner mit Hilfe der Coordinaten des Centrums geeignet bestimmt wird.

$$\frac{(3-2\alpha)x_1 \pm (3-2\alpha)x_2 \pm (3-2\alpha)x_3 + x_4 - 4}{\sqrt{6(5-2\sqrt{5})}} = 0.$$

Dabei hat α den früher angegebenen Werth, so dass aus der Formel *D)* in *I* für den Winkel φ zwischen diesen zwei R_3 resultirt

$$\cos\varphi = -4\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{30}}.$$

Es wird desshalb beiläufig $\varphi = 122° \ldots\ldots$, also $3\varphi > 2\pi$ oder von lauter Körpern ε kann kein fünfdimensionaler Körper begrenzt werden.

Schliesslich erübrigt noch der Körper ζ, der von 24 Oktaedern mit 24 Eckpunkten begrenzt wird. Nimmt man die beiden Oktaeder des erwähnten Aufsatzes (1, 6; 2, 4; 3, 5) und (1, 7; 2, 9; 3, 8), welche das Dreieck 133 gemeinsam haben, so ergibt sich für die Normalgleichungen der durch sie bestimmten R_3

$$-\frac{x_4-1}{1} = 0 \qquad -\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2}{2} = 0$$

und daher für den Neigungswinkel ψ derselben nach *D)* in *I* $\cos\psi = -\frac{1}{2}$, also $\psi = \frac{2\pi}{3}$. Demnach $3\psi = 2\pi$.

Wir haben somit das Resultat, dass durch Körper ζ der Raum von fünf Dimensionen wohl lückenlos ausgefüllt werden kann, wenn man unendlich viele solche Körper benützt, dass jedoch durch eine endliche Anzahl von Körpern ζ kein regelmässiger Körper im R_5 begrenzt werden kann.

Das Gesammtergebniss ist also folgendes: **Im Raume von fünf Dimensionen gibt es nur drei regelmässige convexe Körper, und zwar sind dies die drei früher angegebenen** α_5, β_5 **und** β'_5.

III. Nachweis, dass in einem Raume von höherer Dimension als fünf nur drei regelmässige convexe Körper existiren und Angabe derselben.

Um den Nachweis zu erbringen, dass in einem Raume von höherer Dimension als fünf nicht mehr als drei regelmässige Körper existiren, zeige ich, dass in dem Raume von n Dimensionen, im R_n, stets drei regelmässige Körper existiren α_n, β_n, β'_n, und dass diese im Raume von $(n+1)$ Dimensionen nur zu drei Körpern α_{n+1}, β_{n+1}, β'_{n+1} Anlass geben und keinem weiteren, sobald $n \geq 5$ ist.

Da nun nach Abschnitt II im R_5 nur diese drei Körper α_5, β_5, β'_5 existiren, so folgt, dass im R_6, R_3 etc., überhaupt in jedem R_n, wenn $n \geq 5$ ist, nur die drei Körper α_n, β_n, β'_n als regelmässige convexe Körper sich finden.

Nun ergibt sich sofort durch den Schluss von n auf $n+1$, dass im R_n folgende drei Körper stets existiren, und zwar sind sie regelmässig und convex.

1. α_n mit den Coordinaten $x_1 = \pm 1$, $x_2 = \pm 1$, $x_3 = \pm 1 ..$, $x_n = \pm 1$.

Dieser Körper ist in Analogie zum Früheren mit $[\pm\pm\pm\,.\,\pm]$ zu bezeichnen. Er wird von Körpern α_{n-1} begrenzt, die zu je zweien z. B. $[\pm\pm\ldots\pm+]$ und $[\pm\pm\ldots.+\pm]$ über demselben $\alpha_{n-2} \equiv [\pm\pm..\pm++]$ aufsitzen. Drei der ihn begrenzenden α_{n-1} z. B. $[\pm\pm..\pm\pm+]$, $[\pm\pm..\pm+\pm]$ und $[\pm\pm..+\pm\pm]$ gehen durch denselben α_{n-3}, nämlich durch $[\pm\pm..\pm+++]$ und nicht mehr etc.

Da seine Eckpunkte auf dem Kugelraume

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots\ldots + x_n^2 = n$$

liegen, erkennt man leicht, dass er regelmässig ist.

2. Der zu α_n reciproke Körper β'_n wird aus α_n wie in Abschnitt II gefunden und hat zu Coordinaten

$$\begin{array}{llll} \pm1, & 0, & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0, & \pm1, & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0, & 0, & \pm1 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0, & 0, & 0 \ldots\ldots\ldots \pm1 \end{array}$$

Jede Zeile gibt dabei die Coordinaten von zweien seiner Eckpunkte an und besitzt der Körper β'_n $2n$ Eckpunkte, die mit $1, 1', 2, 2', \ldots\ldots n, n'$ bezeichnet werden sollen. Man erkennt sofort, dass z. B. $1234\ldots\ldots(n-1)\,n$ und $1234\ldots\ldots(n-1)\,n'$ in zwei der ihn begrenzenden regelmässigen β_{n-1} sind, die über demselben β_{n-2}, nämlich $123\ldots\ldots(n-1)$ aufsitzen und dass vier β_{n-1} immer durch dasselbe β_{n-3} hindurchgehen etc. Seine Eckpunkte liegen auf dem Kugelraum

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+{}_n^2=1$$

und ist damit β'_n als regelmässig nachgewiesen.

3. Der Körper β_n schliesslich wird durch das System äquidistanter $(n+1)$ Punkte im R_n gebildet und gibt jede Zeile des folgenden Systems die Coordinaten eines seiner Eckpunkte an:

$$\begin{array}{llll} +1, & 0, & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0, & +1, & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0, & 0, & +1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0, & 0, & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0, +1 \\ \frac{1+\sqrt{n+1}}{n}, & \frac{1+\sqrt{n+1}}{n} & \ldots\ldots\ldots & \frac{1+\sqrt{n+1}}{n}. \end{array}$$

Dieses System hat also n Colonnen und $(n+1)$ Zeilen und ist die Kantenlänge dieses Körpers $=\sqrt{2}$ wie früher. Ich bemerke nur, dass er von β_{n-1} begrenzt wird, die zu je zweien ein β_{n-2} und zu je dreien ein β_{n-3} gemeinsam haben. Alle Eckpunkte von β_n liegen auf dem Kugelraum

$$\left\{x_1-\frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n(n+1)}\right\}^2+\left\{x_2-\frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n(n+1)}\right\}^2+\ldots+\left\{x\;-\frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n(n+1)}\right\}^2=\frac{n}{n+1}$$

Damit ist der Beweis erbracht, dass die drei Körper α_n, β_n und β_n' im R_n stets existiren, demnach erübrigt nur der Nachweis, dass mit ihm nur drei Körper im R_{n+1} gebildet werden können, wenn $n \gtreqless 5$ ist.

Nehmen wir zunächst α_n an, so haben die beiden α_{n-1} seiner Begrenzung $[\pm\pm \cdots\cdots \pm +]$ und $[\pm\pm \cdots\cdots \pm + \pm]$ die über demselben $\alpha_{n-2} \equiv [\pm\pm \ldots \pm + +]$ aufsitzen, offenbar zu ihren Normalgleichungen

$$\frac{x_n - 1}{1} = 0, \text{ resp. } \frac{x_{n-1} - 1}{1} = 0$$

und ihr Neigungswinkel ist nach Formel D in Abschnitt I gegeben durch

$$\cos\mu = -\frac{0}{1} = 0 \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{\pi}{2} \qquad H)$$

also

$$3\mu < 2\pi \;\; 4\mu = 2\pi,$$

demnach gibt α_n im R_{n+1} nur zu dem Körper α_{n+1} Anlass.

Übergehen wir jetzt zu dem Körper β_n', so haben die zwei β_{n-1} seiner Begrenzung $123\ldots(n-1)n$ und $123\ldots(n-1)n'$, die über demselben $\beta_{n-2} \equiv 123\ldots(n-1)$ aufsitzen, offenbar die Normalgleichungen

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} - x_n - 1}{\sqrt{n}} = 0,$$

resp.

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} - x_n - 1}{\sqrt{n}} = 0$$

und ihr Neigungswinkel ν ist gegeben, nach Formel D im Abschnitt I, durch

$$\cos\nu = -\frac{n-2}{n} = -\left(1 - \frac{2}{n}\right) \qquad K)$$

Aus $K)$ folgt, dass ν mit n gleichzeitig zunimmt und da schon für $n = 5$ $3\nu = 2\pi$ war, welcher Werth zu verwerfen ist, resultirt demnach, dass für $n \gtreqless 5$, weil $3\nu \gtreqless 2\pi$ ist, das Ergebniss:

„Der Körper β'_n gibt als nicht verwendbar zu keinem regelmässigen Körper im R_{n+1} Anlass.“

Es erübrigt noch der Körper β_n. Die zwei Körper β_{n-1}, die zu Eckpunkten haben die Punkte $1\,2\,3\ldots(n-1)n$, resp. $1\,2\,3\ldots(n-1)(n+1)$ und über demselben $\beta_{n-2}\equiv 1\,2\,3\ldots(n-1)$ aufsitzen haben, wie eine sehr einfache Rechnung ergibt, zu Normalgleichungen

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots x_n-1}{\sqrt{n}}=0,$$

resp.

$$\frac{x_1+x_2+\ldots x+{}_{n-1}+(\sqrt{n+1}-n)x_n-1}{\sqrt{n}\,(1-\sqrt{n+1})}=0$$

Die Formel *D)* in I gibt dann für den Neigungswinkel φ derselben

$$\cos\varphi=\frac{1}{n} \qquad L)$$

also φ nimmt mit n gleichzeitig zu, ohne jedoch $\frac{\pi}{2}$, seinen asymptotischen Werth zu überschreiten. Da nun für $n=4$ $3\varphi<2\pi$, $4\varphi<2\pi$ aber $5\varphi>2\pi$ ist, folgt, dass von $n\gtreqless 4$ an der Körper β_n im R_{n+1} nur zwei Körpern Anlass gibt, nämlich zu den Körpern β_{n+1} und β'_{n+1}, je nachdem drei, resp. vier β_{n-1} über einem β_{n-2} aufsitzen. Damit ist also in der That der Beweis erbracht von dem Satze:

„In einem Raume von höherer als der vierten Dimension existiren nur die drei regelmässigen Körper α_n, β_n und β'_n; der geometrische Grund hievon liegt nach *H)*, *K)* und *L)* in dem Zunehmen der Neigungswinkel zweier Körper $(n-2)$ter Dimension ihrer Begrenzung.“

Es verdient bemerkt zu werden, dass der Raum von zwei Dimensionen auf drei Arten durch regelmässige Polygone erschöpft werden kann, nämlich durch Quadrate, Dreiecke und Sechsecke und in gleicher Weise der Raum von fünf Dimensionen durch drei regelmässige Körper vierter Dimension, nämlich die Körper α, γ und ζ des Abschnittes I, dass es jedoch in jedem Raume

höherer Dimension nur auf eine Art möglich ist, ihn lückenlos mit regelmässigen Körpern niederer Dimension zu erfüllen, nämlich R_n mit Körpern α_{n-1}. Erst wenn die Dimensionszahl unendlich gross ist, sind drei continuirliche Ausfüllungen möglich, nämlich nach *H), K)* und *L)* durch α_∞, β_∞ und β'_∞. Ich will nun noch die Begrenzungsstücke der Körper α_n, β_n und β'_n angeben, wobei p_k die Anzahl der Begrenzungselemente k^{ter} Dimension, also der P_k angibt. Man erhält dann sehr leicht, dass für α_n, das für sich selbst reciprok ist

$$p_0 = p_{n-1} = \binom{n+1}{1},\ p_1 = p_{n-2} = \binom{n+1}{2} \text{ etc.}$$

$$p_k = p_{n-k-1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Die Euler'sche Formel

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 \ldots \pm p_{n-1} \mp p_n = 1$$

ist, wie man sehr leicht erkennt, erfüllt, da sie auf $(1-1)^{n+1} = 0$ führt.

Da die Körper α_n und β'_n sich als reciproke gegenüberstehen, ist offenbar die Reihenfolge der p von β'_n die umgekehrte von α_n. Die Coordinaten von β'_n ergeben dann sehr leicht folgende Werthe für β'_n

$$p_0 = 2n = \binom{n}{2} 2^1$$

$$p_1 = \binom{n}{n-2} 2^2 = \binom{n}{1} 2^2$$

$$p_2 = \binom{n}{3} 2^3 \text{ etc.}$$

und allgemein

$$p_k = \binom{n}{k+1} 2^{k+1}.$$

Selbstverständlich ist auch die Euler'sche Formel erfüllt und führt auf die Identität $(1-2)^n = (-1)^n$.

Schlussbemerkung.

Ich habe in dem citirten Aufsatze über die regelmässigen Körper von vier Dimensionen einen allgemeinen Satz aus der Substitutionstheorie aufgestellt, der sich auf $2n$-Elemente bezog. Ersetzt man die Körper α_{n-1} desselben, welche dort die Elemente der Vertauschung sind, durch die Eckpunkte, Kanten, Flächen, drei dimensionalen Körper etc., so ergibt sich, was durch das Vorhergehende bewiesen ist, dass derselbe Satz auch sofort für $\binom{n}{k} 2^k$-Elemente gilt, worin k eine beliebige Zahl vorstellt, die kleiner als n ist.

Beitrag zu den Windverhältnissen in höheren Luftschichten.

Von Dr. **J. M. Pernter.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Juli 1884.)

Seit September 1883 ist auf dem Gipfel des Hochobir in Kärnthen ein selbstregistrirendes Aneometer aufgestellt. Der Gipfel hat eine Seehöhe von circa 2150 Meter; er ist ringsum frei, überragt alle näheren Berge und erst in grösserer Entfernung nach Süden und Westen befinden sich höhere Gebirge; der Punkt ist daher für Windbeobachtungen vorzüglich geeignet. Das hohe Interesse und die ganz besondere Wichtigkeit der Berggipfelbeobachtungen bezieht sich wohl in erster Linie auf die Erforschung der Windverhältnisse in der Höhe, und wenngleich man eine Höhe von nicht ganz 2200 Metern noch nicht zu den hohen Schichten der Atmosphäre zählen kann, so ist doch zu erwarten, dass stündliche Aufzeichnungen daselbst jedenfalls manche wichtige Aufschlüsse über die Luftbewegungen in den höheren Regionen liefern werden. Die Wichtigkeit dieser Frage wird denn auch diesem Versuche, aus einer an und für sich noch recht kurzen Reihe von Aufzeichnungen Aufschlüsse über die Windverhältnisse in höheren Schichten zu erlangen, billigerweise zur Entschuldigung dienen; wie auch gleich hervorgehoben sein soll, dass sich diese Mittheilung nur aüf Obirbeobachtungen beschränkt.

Ohne mich auf die Beschreibung des Anemometers einzulassen, sei nur erwähnt, dass dasselbe die Windrichtung nicht continuirlich, sondern zur vollen Stunde registrirt, während die Windgeschwindigkeit proportional der Länge des abgelaufenen Papierstreifens ist.

Die Aufzeichnungen liegen von sieben Monaten vor, und auch diese Monate sind nicht alle vollständig. So sind im September 25, im October 27, im November (indem man die ersten vier

Tage des December dazurechnet) 23, im Februar 22, im März 27, im Mai 25 Tage vollständig; der einzige April hat keine Lücke, während der Jänner ganz fehlt. Die Ursache der Stockungen war immer das Stehenbleiben der Uhr, die besonders in der grossen Kälte den Dienst versagte.

Ich gehe nun gleich über zur Mittheilung der Resultate.

I. Häufigkeit (in Stunden) und Windweg nach den Windrichtungen. — Die Reduction der unmittelbaren Aufziechnungen des Instrumentes habe ich auf 16 Windrichtungen vorgenommen. Die Zahlen, welche die Windwege ergeben, sollten nach der Absicht des Verfertigers des Instrumentes Kilometer bedeuten; ich habe aber sehr gegründete Ursache anzunehmen, dass diese Absicht nicht verwirklicht ist und die Einheit um ein Beträchtliches einen Kilometer überschreitet.

Häufigkeit und Windweg für 16 Richtungen.

Richtung	Häufigkeit	Windweg	Richtung	Häufigkeit	Windweg
N	345	6986	S	434	5410
NNE	114	1986	SSW	213	2396
NE	164	2991	SW	326	3267
ENE	110	1596	WSW	129	1198
E	405	5585	W	262	3046
ESE	208	4486	WNW	140	3259
SE	490	6488	NW	238	4340
SSE	274	3234	NNW	235	5347

Indem man auf acht Windrichtungen reducirt, wobei man für N setzt N+½NNE+½NNW u. s. w. erhält man

Häufigkeit und Windweg für acht Richtungen

Richtung	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Häufigkeit	528	276	564	781	677	497	396	425
Windweg	10652	4782	8626	10848	8225	5064	5274	8642

Tabelle I, am Schlusse, gibt das Materiale für vorstehende zwei Täfelchen nach den einzelnen Monaten.

Aus dieser Zusammenstellung ist ersichtlich, dass, vielleicht wider Erwarten, die Südostwinde und Südwinde auf dem Obirgipfel die Herrschaft haben; ihnen zunächst stehen die Nordwinde, während die Westwinde am meisten zurücktreten. Da nun die Westwinde es sind, welche bei uns in der Niederung weitaus vorherrschen, und man wohl annehmen könnte, dass in der Höhe die West- und Südwestwinde, vormöge des Antipassates, vorherrschen sollten, so folgt aus diesen Daten: 1. Dass der Obirgipfel nicht in die Höhe des herrschenden Antipassats emporreicht, 2. dass er nicht mehr der Herrschaft der gewöhnlichen Luftbewegungen, wie dieselben in den Niederungen von ganz Mitteleuropa auftreten, unterliegt. Diese letzteren sind durch die Sturmbahnen im nordwestlichen Europa bedingt; das Übergewicht der SE. und N. Winde auf dem Obirgipfel zeigt aber, dass derselbe im Wirkungskreise der italienischen Depressionen liegt. Wie hoch über dem höchsten Punkte des Obirgipfels die Herrschaft des Antipassates sich etablirt, lässt sich aus diesen Angaben nicht ermessen. Billwiller (siehe Zeitschrift der öst. Ges. f. Met. Bd. 18, p. 416) glaubt das Vorherrschen der Westwinde auf dem Säntisgipfel (2500 Met.) darauf zurückführen zu können, dass letzterer in die Antipassathöhe hinaufragt; hiernach würde diese Region etwa 450 Meter über dem Anemometer des Obirgipfels liegen. Allein es wäre wohl noch zu bedenken, ob nicht vielmehr das Anemometer auf dem Säntis noch, wenigstens für gewöhnlich, in der Region der untern von den nordwestlichen Depressionen abhängigen Luftcirculation befinde; die grössere Häufigkeit der Westwinde oben als in Bern könnte vielleicht auf Rechnung der weniger beeinflussten Lage des Berggipfels geschrieben werden müssen.

Wollte man nach der Lambert'schen Formel die mittlere Windrichtung auf dem Obirgipfel berechnen, so erhielte man:

Mittlere Windrichtung = N 54° E.

Man hat schon öfter darauf hingewiesen, dass die Anwendung dieser Formel in mancher Hinsicht zu absurden Resultaten führt in unserem Falle trifft das auffallend ein, indem diese zwischen

NE und ENE gelegene Richtung, wie die Zahlen für letztere zwei Richtungen zeigen, ziemlich die seltenste ist und daher wir durch diese Formel zur Annahme verleitet werden könnten, dass dieser Wind, der in der That höchst selten weht, auf dem Obirgipfel der gewöhnliche sei. Es ist heute wohl nicht mehr zu befürchten, dass ein nur die mathematische Deutung der Formel berücksichtigender Meteorologe etwa den Schluss ziehe, dass auf dem Obirgipfel der leibhaftige NE-Passat die Herrschaft führe.

Ich gehe nun über zur Untersuchung des täglichen Ganges der Häufigkeit und des Windweges für die einzelnen Richtungen. Tabelle II und III sind entstanden durch Reduction der 16 Windrichtungen nach der oben angedeuteten Weise auf 8 Richtungen. Indem ich diese letzten zwei Tabellen „ausglich“, erhielt ich folgenden täglichen Gang für die Häufigkeit und den Windweg. Das „Ausgleichen“ bewerkstelligte ich dadurch, dass ich je drei aufeinanderfolgende Stunden summirte und das Mittel für die mittlere der drei Stunden ansetzte.

Täglicher Gang, Windweg.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
12— 1	495	149	448	408	285	185	167*	337
1— 2	493	116	431	*431*	265	176	168	399
2— 3	490	100	419*	422	261*	189	170	428
3— 4	**501**	92*	*422*	396	272	189	207	440
4— 5	**503**	104	412	389	289	205	243	*454*
5— 6	483	143	391	398	301	202	*259*	*450*
6— 7	484	175	356	413	324	*214*	224	414
7— 8	478	213	335	411*	320	200	169	345
8— 9	483	**222**	319	451	338	162	146	295
9—10	436	**228**	306	481	333	139*	152*	282
10—11	389	200	304	507	342	155	155	258
11—Mittag	354	161	277	496	387	185	159	227
12— 1	340	125	245	**526**	406	202	151	196
1— 2	334	99*	219	**517**	**429**	211	190	168
2— 3	319	119	216*	489	380	**246**	214	170*
3— 4	284	157	256	413	370	235	**231**	180
4— 5	273	193	265	394	352	248	**229**	249
5— 6	270	219	312	363	384	228	227	277
6— 7	318	243	340	347	356	234	224	346
7— 8	367	*260*	404	333*	334	181	220	329
8— 9	407	250	440	343	288*	153	230	**347**
9—10	441	228	468	348	291	146*	234	319
10—11	461	212	**473**	359	*304*	163	219	313*
11—Mittern.	491	182	**473**	379	299	178	198	319

Täglicher Gang, Häufigkeit.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
12—1	22·0	9·5	27·8*	27·8	24·5	*20·2*	14·0	14·0
1—2	21·3	8·2	28·5	*28·5*	23·2	19·3	13·7*	16·2
2—3	20·8	6·8	29·8	26·7	23·3	18·0	13·8	17·8
3—4	20·7*	6·0*	**30·5**	24·3	22·2	18·8	15·5	*19·2*
4—5	20·5	6·7	29·5	24·3*	22·8	19·2	*16·3*	*19·2*
5—6	22·0	8·8	29·0	25·8	22·3*	18·8	*16·2*	18·3
6—7	22·5	10·2	29·7	26·0	23·0	19·3	14·2	17·8
7—8	22·8	13·3	29·7	26·8	22·5	17·2	13·5	16·5
8—9	**23·0**	15·3	27·3	30·8	25·5	14·7	12·2	16·3
9—10	22·3	**16·2**	25·0	32·8	26·5	13·7*	11·8	16·0
10—11	22·3	14·0	23·5	32·2	29·5	15·5	9·5*	15·7
11—Mittag	21·3	11·0	21·7	32·2	32·3	18·5	11·7	14·0
12—1	21·7	8·7	18·3	**35·8**	**35·3**	19·5	13·5	13·2
1—2	21·0	6·7*	15·8	**35·2**	**35·0**	21·5	17·0	12·2*
2—3	19·5	7·0	15·2*	32·3	31·7	23·5	19·5	12·8
3—4	17·5	9·0	17·8	26·5	31·0*	**23·8**	20·7	13·8
4—5	15·8	10·5	19·3	25·2	31·2	23·3	**21·7**	17·2
5—6	15·0*	11·7	21·3	23·3	*32·8*	22·2	20·2	18·8
6—7	16·2	12·7	22·2	23·3	30·2	21·0	19·7	**20·7**
7—8	18·5	*13·3*	26·3	22·7*	27·0	17·8	18·7	18·7
8—9	20·8	12·8	28·7	23·7	25·0	15·3*	18·2	17·3
9—10	22·0	11·7	**30·8**	23·8	23·8	15·5	18·5	14·0
10—11	*22·5*	12·2	29·2	24·5	24·7	17·5	17·5	13·2*
11—12	22·3	10·3	29·0	25·7	23·8	*20·2*	16·0	13·2*

Zwei Dinge springen in vorstehenden Tabellen unmittelbar in die Augen: 1. Das doppelte Maximum und Minimum, und 2. die Verschiebung des Hauptmaximums in immer spätere Stunden, je mehr die Windrichtung von E über S nach W genommen wird; man nennt dies die Drehung der Winde mit der Sonne; nur der E macht in letzter Beziehung eine Ausnahme.

Den ersten Punkt betreffend, ist es auffallend, dass sowohl beim Windwege als der Häufigkeit die doppelte Periode deutlich und unzweifelhaft hervortritt, während in der Niederung dieselbe bei der Häufigkeit gar nicht, beim Windwege nur vereinzelt angedeutet vorkommt. (Siehe Hann, Die tägliche Periode der Geschwindigkeit und Richtung des Windes. Sitzb. LXXIX. Bd., II. Abth. 1879.)

Hann bemerkt in dieser Arbeit, pag. 61: „Es liegt sehr nahe, den Versuch zu machen, die tägliche Drehung der Windfahne, sowie die tägliche Periode der Windstärke aus

den täglichen Veränderungen des Luftdruckes zu erklären.“ Er führt dann dagegen die Thatsache an, dass die tägliche Periode der Windintensität und der Drehung der Windfahne nur ein Maximum und Minimum aufweist, setzt aber bei: „Ich will nicht absolut leugnen, dass man vielleicht doch einmal constatiren könnte, dass die hie und da hervortretende Verstärkung der Windintensität um Mitternacht herum im Winter mit dem Herannahen des nächtlichen Barometerminimums in causalem Zusammenhange steht.“

Ich glaube nun allerdings nicht ohne weiters behaupten zu können, dass für die Höhen dieser Zusammenhang durch vorstehende Tabellen nachgewiesen ist. Es dürfte aber doch diese doppelte Periode sowohl für die Winddrehung als die Windwege in dieser Richtung Beachtung finden.

In der That ist das Morgenmaximum des Luftdruckes auf den Höhen bedeutend verspätet. Es wird daher der E-Wind gegenüber der Niederung in seiner Periode verändert erscheinen. Es ist der Südost, welcher für die Tagesperiode mit dem Maximum beginnt und von Mittag ab dreht sich das Maximum der Häufigkeit und der Windwege mit der Sonne über S nach NW.

„Beim Herannahen des Abendmaximums müssten aber zum zweitenmale Ostwinde eintreten und am frühen Morgen nach dessen Vorübergang ein zweitesmal Westwinde“, sagt Hann in der citirten Abhandlung. Und thatsächlich zeigen obige Tabellen in der Nacht eine Drehung des Windes von E über N nach West am frühen Morgen.

Ich halte mich nicht für berechtigt, aus einer einzelnen Höhenstation und nach so kurzer Beobachtungsperiode einen definitiven Schluss zu ziehen, aber ich konnte nicht unterlassen, darauf hinzuweisen; es sind ja gerade die Höhenstationen, von denen wir in so vielen Fragen Aufschluss zu erwarten haben. Das auf Höhen so bedeutende Abend- oder Nachtmaximum des Luftdruckes ist auch viel geeigneter, diese Abhängigkeit hervortreten zu lassen.

Den zweiten Punkt, die Drehung der Winde mit der Sonne bei Tag betreffend, habe ich eben darauf hingewiesen, dass bei Nacht eine Drehung gegen die Sonne stattfinde. In der citirten

Abhandlung von Hann ist die Drehung mit der Sonne bei Tag für die Niederung deutlich nachgewiesen und finden sich speciell für Wien und Madrid ausführliche Tabellen der Häufigkeit für acht Windrichtungen zu den einzelnen Stunden. Es lässt sich die Drehung der Windfahne während des Tages doch am unzweideutigsten in einer solchen Tabelle an der Verschiebung des Maximums verfolgen. So sollte man wenigstens meinen, und ich halte es auch für zweifellos.

Nun hat aber Dr. Sprung[1] diese Drehung der Windfahne aus der Anzahl der Drehungen in einem und im andern Sinne ermittelt und kommt zu anderen Resultaten, sowohl für die Niederung als für Höhenstationen. Ich glaube, dass diese Nichtübereinstimmung nur daher kommen kann, dass Herr Dr. Sprung Stationen mit nur drei täglichen Beobachtungsterminen untersuchte. Würde er 24stündige Beobachtungen abgezählt haben, so wäre er zweifellos zum gleichen Resultate gekommen, wie die Tabellen für Wien, Madrid und Obirgipfel u. s. w. aufweisen und die allgemeinen bisherigen Untersuchungen sie ergaben.

Dr. Sprung hat aus theoretischen Gründen sein Resultat vorausgesehen; der Einfluss der unteren, langsamer bewegten Luft beim verticalen Aufstieg auf die oberen Luftschichten und umgekehrt, der der schneller bewegten oberen Luft beim Herabsinken müsste nach seiner Theorie Folgendes bewirken für die nördliche Hemisphäre:

1. „Auf dem flachen Lande, oder auch auf den Hochebenen, hat der Wind die Tendenz des Vormittags mit dem Uhrzeiger, Nachmittags gegen denselben umzugehen.

2. Auf Berggipfeln Vormittags gegen den Uhrzeiger Nachmittags mit demselben.“ — Ich kann mich auf die Ableitung und Erörterung dieser Sätze für jetzt nicht näher einlassen, ich muss aber constatiren, dass die 24stündigen Beobachtungen auf dem flachen Lande und auf den Berggipfeln diese Sätze nicht bestätigen. Das was die 24stündigen Beobachtungen mit Bestimmtheit ergeben, ist: Die Winde

---

[1] Deutsche meteorol. Zeitschr. I. Jahrg., pag. 15 u. 65.

drehen sich während des Tages mit der Sonne um den Horizont sowohl am flachen Lande als auf Berggipfeln; dem kann man für Berggipfel mit einiger Wahrscheinlichkeit beifügen: des Nachts aber gegen die Sonne. Sucht man eine theoretische Begründung hiefür, so dürfte doch in erster Linie, wie oben erwähnt, die tägliche Luftdruckschwankung zu berücksichtigen sein.

Ich lasse hier noch die Werthe für die vier Componenten N, E, S, W folgen, die ich aus den Werthen für die sechzehn Richtungen berechnete, und zwar nach dem Schema:

Nordcomponente = N + (NNE + NNW) cos 22°5 + (NE + NW) cos 45° + (ENE + WNW) sin 22°5 und so fort für die übrigen drei Componenten.

Zeit	Windcomponente N	E	S	W	Ausgeglichen N	E	S	W
12— 1	859	859	588	744	885*	866	564	719
1— 2	882	828	587	701	895	841	601	722
2— 3	945	836	627	723	904	810	646	717
3— 4	884	767*	723	728	918	794	674	713*
4— 5	926	780	672	688	934	785	783	736
5— 6	991	809	803	791	971	778	780	753
6— 7	997	744	716	781	964	777*	696	797
7— 8	905	779	568	818	931	779	603	778
8— 9	892	814	526	736	873	818	520	793
9—10	821	862	466	825	817	832	469	790
10—11	739	821	416	808	701	832	423	863
11—Mttg.	544	812	387	975	613	788	411*	926
12— 1 h	555	730	429	1013	552	751	424	984
1— 2	557	710	456	982	541*	697	474	970
2— 3	511	651	537	914	544*	667*	565	926
3— 4	564	639	703	881	543*	683	582	855
4— 5	555	758	505	769	605	699	591	830
5— 6	695	700	564	840	635	744	538	820
6— 7	655	773	545	851	750	778	525	784
7— 8	899	862	465	660	769	847	473*	714
8— 9	753	906	410	632	833	881	519	655*
9—10	847	875	682	674	853	897	597	656*
10—11	960	909	700	662	907	898	633	684
11—12	914	911	518	715	911	893	602	706

Soll ich aufrichtig sein, so muss ich bekennen, dass ich die vier Componenten ziemlich aus demselben Grunde berechnet habe, wie die mittlere Windrichtung nach der Lambert'schen Formel; ich kann ihnen wohl einen rein mathematischen, aber keinen meteorologischen Sinn beilegen. In der That, welche meteorologische Bedeutung soll es haben, wenn z. B. die E-Componente Mittags ein Maximum aufweist, fast zur selben Stunde, wo der reine E das Hauptminimum hat? und wiederum, wenn die S-Componente um die Mittagsstunde ein Minimum, das Hauptminimum zeigt, wo der reine Südwind das Hauptmaximum um 3^h p. aufweist? Ist es nicht deutlich und klar, dass, nachdem nachgewiesen ist, dass die einzelnen acht Winde verschiedenen von einer physikalischen Ursache abhängigen täglichen Gang aufweisen, die Berechnung der vier Componenten nur zu einem alle Wirklichkeit verhüllenden Compromisse führen muss? Es ist in Folge dessen auch unthunlich, an die Tabelle der Componenten physikalische oder meteorologische Betrachtungen zu knüpfen.

II. Windgeschwindigkeit. — Durch Division des Windweges durch die Häufigkeit, welche ja die Dauer (in Stunden, darstellt) erhält man unmittelbar die Windgeschwindigkeit. Die mittlere Windgeschwindigkeit für die acht Windrichtungen wird daher sein:

Richtung	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Geschwindigkeit.	20·1	17·4	15·3	14·1	12·3	12·0	13·3	20·3

Hieraus sieht man, dass die grösste Geschwindigkeit den N-Winden zukommt; ihnen zunächst kommen E-Winde, während W- und S-Winde die kleinsten Geschwindigkeiten aufweisen. Speciell sind die Südwestwinde die schwächsten von allen.

Den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit habe ich sowohl für die einzelnen Windrichtungen als abgesehen von der Richtung des Windes untersucht.

In Tabelle IV findet man den täglichen Gang für acht Windrichtungen als Resultat der Division von Tabelle II durch Tabelle III.

Nachfolgende Tabelle erhielt ich durch „Ausgleichung" von Tabelle IV.

Täglicher Gang für acht Richtungen.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
12— 1	22·7	15·4	16·1	13·4*	11·6	9·3	12·0*	24·1
1— 2	23·3	14·4*	15·0	15·1	11·5	9·4	12·3	**24·9**
2— 3	23·6	15·0	13·9	16·0	11·3*	10·4	12·3	24·4
3— 4	**24·8**	15·4	13·9	**16·4**	12·3	10·0	13·2	23·0
4— 5	**24·6**	15·6	13·8	16·1	12·4	10·7	14·7	23·6
5— 6	22·1	16·0	13·5	15·4	13·5	10·7	**16·0**	24·5
6— 7	21·6	_17·1_	12·0	15·9	**14·1**	**11·5**	15·6	23·0
7— 8	21·0	16·4	11·3*	15·4	**14·2**	**11·6**	12·6	20·8
8— 9	21·1	14·9	11·8	14·8	13·5	10·9	12·5	18·1
9—10	19·6	14·2*	12·3	14·7*	12·6	10·2	13·5	17·6
10—11	17·4	14·5	12·9	15·4	11·7	9·9*	16·2	16·5
11—Mittag	16·6	14·4	12·7	15·5	11·9	10·0	14·3	16·2
12— 1	15·7*	14·5	13·4	14·8	11·4*	10·4	11·9	14·8
1— 2	15·9*	15·1	13·9	14·8	12·3	10·0	11·1	13·8
2— 3	16·4	16·8	14·2	15·2	12·0	10·5	11·0*	13·2
3— 4	16·2	17·4	14·3	_15·8_	12·0	9·8	11·3	13·0*
4— 5	17·2	18·4	13·7	15·6	11·4	10·5	11·0	14·3
5— 6	18·1	18·8	14·5	15·6	11·7*	10·1	11·8	14·6
6— 7	19·6	19·3	15·3	14·8	11·8	_11·0_	12·0	16·8
7— 8	19·9	**19·6**	15·5	14·4	12·3	10·0	11·7	17·7
8— 8	19·3	**19·6**	15·5	14·2	11·6	9·9	12·0	20·1
9—10	19·7	19·5	15·2	14·3	12·3	9·4	_12·6_	23·4
10—11	20·2	19·9	**16·8**	13·4	12·4	9·4	_12·4_	24·1
11—Mittern.	22·2	17·4	**16·8**	13·5	_12·7_	8·9*	12·3	24·6

Aus dieser Tabelle ist das Eine deutlich zu erkennen, dass nämlich alle Richtungen ein Tagesminimum, und zwar um die Mittagsstunde herum haben. Übrigens empfindet man gerade bei dieser Tabelle, dass das Materiale für diese Untersuchung zu klein ist. Eine längere Periode muss darüber Aufklärung geben, ob alle Windrichtungen gleichzeitig ihre Maxima und Minima haben, ob in der That, wie es den Schein hat, alle Richtungen zwei Minima, eines bei Tag um Mittag herum, eines bei Nacht etwa um Mitternacht. Das Gleiche gilt von dem doppelten Maximum, wovon die Tabelle auf die Morgenstunden das eine, auf Abendstunden das andere verlegt. Oder sollte es möglich sein, dass die verschiedenen Windrichtungen verschiedene Ein-

trittszeiten der Extreme besitzen? Ich glaube, dass dies wenigstens für das Tagesminimum nicht der Fall sein kann, da dasselbe wohl sicher von der Sonne abhängig ist. Bezüglich dieses Minimums, das gerade um jene Stunde eintritt, wo in der Niederung das Maximum der Windgeschwindigkeit constatirt ist, ist die Erklärung schon lange vor der Aufstellung von Anemometern auf Bergen von Hann gegeben und dann zuerst von Billwiller aus den Anemometeraufzeichnungen auf dem Säntis die Thatsache sichergestellt worden, ohne Rücksicht auf die einzelnen Windrichtungen. Ich glaube nun so viel aus der vorhergehenden Tabelle entnehmen zu können, dass jede Windrichtung in Bezug auf dieses Maximum sich gleich verhält und dass diese Gleichheit auch die Erklärung dieser Erscheinung durch die Auflockerung der Luft in Folge der Erwärmung durch die Sonne und die dadurch erzielte aufwärts gerichtete Luftbewegung bestätigt.

Fasst man alle Windrichtungen zusammen, d. h. abstrahirt man ganz von einer bestimmten Windrichtung, so ergibt sich folgender tägliche Gang der Windgeschwindigkeit.

	Gesammtsumme				Ganz heitere Tage			
	Summe 7 Monate	Mittel	Relativ	ausgeglichen	Summe 51 Tage	Mittel	Relativ	ausgeglichen
12— 1	2623	14·65	1·165	1·179	705	13·82	1·405	1·390
1— 2	2631	14·70	169	175	746	14·62	486	4·3
2— 3	2690	15·03	191	191	782	15·33	558	559
3— 4	2735	15·29	214	211	820	16·08	**633**	629
4— 5	2767	15·45	228	236	**951**	**16·68**	**695**	**692**
5— 6	**2873**	**16·05**	**276**	**242**	**877**	**17·20**	**747**	**689**
6— 7	2759	15·41	222	227	815	15·98	624	639
7— 8	2665	14·89	183	177	776	15·22	546	550
8— 9	2539	14·18	127	143	743	14·56	480	499
9—10	2524	14·10	120	122	690	13·52	371	394
10—11	2517	14·06	118	110	668	13·10	330	303
11—Mittag	2456	13·72	091	080	606	11·88	207	227
12— 1	2323	12·98	021	041	521	10·21	038	082
1— 2	2253*	12·59*	1·000	012	502*	9·84*	1·000*	017
2— 3	2268	12·67	007	1·002*	509	9·98	014	1·007*
3— 4	2252*	12·52*	000	015	505	9.90	006	023
4— 5	2340	13·07	039	043	527	10·33	050	047
5— 6	2456	13·78	091	094	545	10·69	086	150
6— 7	2593	14·48	152	143	**660**	**12·94**	314	241
7— 8	2669	11·91	185	169	**665**	**13·04**	324	**312**
8— 9	2640	14·74	171	183	652	12 78	299	287
9—10	2687	15·01	193	188	622*	12·20*	239*	280
10—11	2697	15·08	199	**198**	653	12·80	301	273*
11—12	**2710**	**15·17**	**203**	186	643	12·61	280	329

Es ist klar, dass diese Tabelle den mittleren täglichen Gang aller Windrichtungen darstellt. Das doppelte Maximum und Minimum tritt deutlich hervor, das Tagesminimum fällt auf die heisseste Stunde und bestätigt so die oben angeführte Erklärung. Da hiedurch ein sicherer Anhaltspunkt gefunden war für die Anschauung über die Ursache der täglichen Periode, so versuchte ich, ob bei einer Auswahl von ganz oder fast ganz heiteren Tagen, die zu erkennen die Aufzeichnungen des Sonnenscheinautographen erlaubten, an denen die Wirkung der Sonne doch am kräftigsten und vollkommensten zum Ausdrucke kommt, die tägliche Periode sich nicht prononcirter ausprägen werde. Es standen mir leider nur 51 solche Tage zur Verfügung; das Resultat, welches ihre Zusammenfassung liefert, ist in den vier letzten Colonnen der obigen Tabelle enthalten. Die Periode tritt darin auch wirklich sowohl der Amplitude als der Regelmässigkeit nach deutlicher hervor, obwohl nur 51 Tage verwendet werden konnten. Das erste Maximum tritt zur Zeit des Hauptbarometerminimums vor Sonnenaufgang ein, das zweite Maximum, entsprechend kleiner, kurz vor dem Abendmaximum (Hauptmaximum) des Barometers. Das zweite (schwache) Minimum zeigt sich zur Zeit des Barometerabendmaximums. Obwohl nun das Zusammentreffen des Hauptmaximums der Windgeschwindigkeit mit dem Hauptminimum des Barometerstandes und des secundären Minimums mit dem Abendmaximum des Luftdruckes für einen inneren Zusammenhang zwischen der täglichen Periode der Windgeschwindigkeit und des Luftdruckes sprechen, kann es nicht meine Absicht sein, hier mehr zu thun als auf die Thatsachen hinzuweisen, da ein tieferes Eingehen in diese Frage erst auf Grund eines umfangreicheren Materials möglich sein wird.

Zum Schlusse bemerke ich noch, dass mir bei dieser Untersuchung keine Sommermonate zur Verfügung standen. Es ist wohl zu erwarten, dass in denselben sowohl die Periode der Geschwindigkeit als das Gesetz der Winddrehung mit der Sonne im hier erörterten Sinne noch stärker hervortreten wird; ob aber auch betreffs der vorherrschenden Windrichtung und der Richtung, welche die stärksten Winde aufweist, alles unverändert bleiben würde, ist nicht so klar. Darüber wird übrigens schon der gegenwärtige Sommer Aufklärung verschaffen.

Tabelle I.

Monatssummen der Häufigkeit und des Windweges.

	N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW	Anzahl d. Tage
								Häufigkeit.									
1883																	
September	29	29	60	22	39	40	65	31	21	20	44	13	44	17	45	42	25
October	42	22	22	9	80	57	97	43	66	32	28	10	22	17	51	36	27
November	29	34	9	24	51	44	59	43	50	33	10	7	17	7	11	21	19
December	5	2	5	3	0	5	3	8	8	1	11	0	0	11	19	12	4
1884																	
Februar	8	2	7	17	55	56	70	65	17	29	32	29	32	49	29	33	22
März	127	8	11	5	22	61	49	21	47	48	61	20	35	16	34	51	27
April	57	2	15	5	52	22	102	47	166	33	111	38	39	6	7	7	30
Mai	57	15	45	25	106	23	45	16	59	17	33	12	53	17	42	42	25
Summe	354	114	164	110	405	208	490	274	434	213	326	129	262	140	238	235	179
								Windweg.									
September	555	517	1029	335	627	649	873	254	250	253	425	86	462	467	865	1098	
October	942	452	446	119	1109	872	1370	607	1148	474	441	155	386	363	888	989	
November	430	587	239	302	759	722	890	345	533	269	239	84	304	237	230	453	
December	134	36	135	84	0	108	57	79	106	13	66	0	0	504	462	259	
Februar	119	19	74	208	770	772	1172	1106	125	241	234	208	418	1250	566	563	
März	2753	124	176	56	314	863	538	170	506	558	562	249	563	217	730	1143	
April	1030	6	125	72	555	203	1016	520	2065	416	1580	324	392	55	66	166	
Mai	1023	245	767	420	1451	297	572	153	677	142	320	92	521	166	533	576	
Summe	6986	1986	2991	1596	5585	4486	6488	3234	5410	2396	3267	1198	3046	3259	4340	5347	

Tabelle II.
Windwege

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
12— 1	492	120	449	429	272	199	177	352
1— 2	494	123	430	413	257	186	169	372
2— 3	492	104	414	**452**	267	154	158	472
3— 4	485	72*	404	402	259	227	182	441
4— 5	**527**	100	448	339*	290	185	**281**	408
5— 6	498	140	384	426	319	203	267	**512**
6— 7	424	190	340	428	293	217	230	429
7— 8	529	194	344	386	359	**222**	174	302
8— 9	480	**255**	321	419	308	159	102*	305
9—10	441	218	292	547	347	104	161	277
10—11	388	210	305	476	344	153	192	263
11—Mittag	337	172	315	497	336	207	112	234
12— 1	336	101	211	515	**480**	196	172	185
1— 2	346	103	208*	**577**	402	203	169	168
2— 3	321	93*	239	460	405	233	230	150*
3— 4	289	160	202	431	332	**303**	**243**	193
4— 5	241*	219	326	359	373	170	221	198
5— 6	287	200	268	391	357	270	222	356
6— 7	282	238	341	338	426	235	239	273
7— 8	283	**291**	412	311*	291	187	220	**405**
8— 9	436	251	459	351	285	120	200	304
9—10	402	209	450	367	287	152	240	332
10—11	484	224	**494**	327	301	166	262	320
1 —Mittern.	498	202	476	382	325	170	156	286*

Tabelle III.
Häufigkeit

N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	
20·5	8·5	28·0	28·0	23·5	23·5	14·0	15·0	12— 1
22·0	9·5	27·5	29·5	25·0	17·5	13·0*	13·5	— 2
21·5	6·5	30·0	28·0	21·0	17·0	14·0	20·0	— 3
19·0*	4·5*	**82·0**	22·5	24·0	19·5	14·5	20·0	— 4
21·5	7·0	29·5	22·5*	21·5	20·0	18·0	17·5	— 5
21·0	8·5	28·0	28·0	25·0	18·0	16·5	20·0	— 6
23·5	11·0	29·0	27·0	20·5	18·5	14·0	17·5	— 7
23·0	11·0	31·5	23·0	23·5	19·5	12·0	16·5	— 8
22·0	**18·0**	28·0	30·5	23·5	13·5	14·5	16·0	— 9
24·0	**17·0**	22·5	**89·0**	29·0	11·0*	10 0	17·0	—10
21·0	13·5	24·5	29·0	27·0	16·5	11·0	15·0	—11
22·0	11·5	23·5	31·5	32·5	19·0	7·5*	15·0	—Mttg.
21·0	8·0	17·0	36·0	**87·5**	20·0	16·5	12·0	— 1
22·0	6.5	14·5*	**40·0**	36·0	19·5	16·5	12·5	— 2
20·0	5·5*	16·0	29·5	31·5	24·5	18·0	12·0*	— 3
16·5	9·0	15·0	27·5	27·5	**26·5**	**24·0**	14·0	— 4
16·0	12·5	22·5	22·5	**84·0**	20·5	20·0	15·5	— 5
15·0	10·0	20·5	26·0	32·0	23·0	21·0	**22·0**	— 6
14·0	12·5	21·5	21·5*	32·5	23·0	19·5	19·0	— 7
19·5	15·5	24·5	22·5	26·0	17·0	18·5	21·0	— 8
22·0	12·0	33·0	24·0	22·5	13·5*	18·0	16·0	— 9
21·0	11·0	28·5	24·5	26·5	15·5	18·5	15·0	—10
23·0	12·0	31·0	23·0	22·5	17·5	19·0	11·0*	—11
23·5	10·5	28·0	26·0	25·0	19·5	15·0	13·5	—Mittn.

Tabelle IV.

Täglicher Gang der Geschwindigkeit.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
12— 1	24·4	14·2	16·0	15·3	11·6	8·5	12·6	23·5
1— 2	22·5	12·9	15·3	14·0	10·3	10·6	13·0	27·6
2— 3	22·9	16·0	13·8	16·1	12·7	9·1	11·3	23·6
3— 4	25·5	16·0	12·6	17·9	10·8	11 6	12·6	22·0
4— 5	24·5	14·3	15·2	15·1	13·5	9·2	15·6	23·3
5— 6	23·7	16·5	13·7	15·2	12·8	11·3	15·9	25·6
6— 7	18·2	17·3	12·5	15·8	14·3	11·7	16·4	24·5
7— 8	23·0	17·6	10·9	16·8	15·3	11·4	14·5	18·9
8— 9	21·8	14·2	11·4	13·7	13·1	11·8	7·0	19·0
9—10	18·4	12·8	13·0	14·0	12·0	9·4	16·1	16·3
10—11	18·5	15·6	12·4	16·4	12·7	9·3	17·4	17·5
11—Mittag	15·3	15·0	13·4	15·7	10 3	10·9	15·0	15·6
12— 1	16·0	12·6	12·4	14·3	12·8	9·8	10·4	15·4
1— 2	15·7	15·8	14·3	14·4	11·2	10·4	10·2	13·4
2— 3	16·0	16·9	14·9	15·6	12·8	9·7	12·8	12·5
3— 4	17·5	17·8	13·5	15·7	12·1	11·4	10·1	13·8
4— 5	15·1	17·5	14·5	16·0	11·0	8·3	11·0	12·8
5— 6	19·1	20·0	13·1	15·0	11·0	11.8	12·0	16·2
6— 7	20·1	19·0	15·9	15·7	13·1	10·2	12·3	14·8
6— 8	19·6	18·8	16·8	13·8	11·2	11·0	11·8	19·3
8— 9	19·9	20·9	13·9	13·8	12·7	8·9	11·1	19·0
9—10	18·3	19·0	15·8	15·0	10·9	9·9	13·0	22·1
10—11	21·0	18·7	16·0	14·2	13·4	9·5	13·8	29·1
11—Mittern.	21·2	19·2	17·0	10·9	13·0	8·7	10·4	21·2

XIX. SITZUNG VOM 17. JULI 1884.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. A. Rollett übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. Carl Laker, Assistenten am physiologischen Institute in Graz: „Über die ersten Gerinnungserscheinungen des Säugethierblutes unter dem Mikroskope."

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. L. Boltzmann in Graz übersendet eine Abhandlung: Über die Eigenschaften monocyclischer und anderer damit verwandter Systeme".

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. A. Weiss in Prag übersendet folgende drei Arbeiten:

1. „Über ein eigenthümliches Vorkommen von Kalk-Oxalat-Massen in der Oberhaut der Organe einiger Acanthaceen."
2. „Über spontane Bewegungen und Formänderungen von pflanzlichen Farbstoffkörpern."
3. „Vorläufige Notiz über einen eigenthümlichen Farbstoff in der Blüthe einiger Papaver-Arten."

Das c. M. Herr Prof. V. v. Ebner übersendet eine im Institute für Histologie und Embryologie der Universität Graz ausgeführte Abhandlung des Herrn Drd. Joseph Heinrich List, betitelt: „Das Cloakenepithel von *Scyllium canicula.*"

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Zur Bestimmung der Halogene organischer Körper," von den Herren Prof. K. Zulkowsky und K. Lepéz in Brünn.
2. „Über ein neues Resorcinblau", von den Herren Dr. R. Benedikt und P. Julius in Wien.

Das w. M. Herr Prof. J. Wiesner in Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität, welches die Aufschrift führt: „Über einige Eigenschaften der Fermentorganismen."

Der Secretär legt eingelangte versiegelte Schreiben zur Wahrung der Priorität vor:

1. Von Herrn Prof. Dr. Oskar Simony in Wien, mit der Aufschrift: „Über ein neues Zahlensystem".
2. Von Herrn Prof. Dr. J. Habermann in Brünn (ohne Inhaltsbezeichnung).

Das w. M. Herr Hofrath L. Schmarda überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. Alfred Nalepa, Assistent der zoologischen Lehrkanzel an der Wiener Universität, betitelt: „Die Anatomie der Tyroglyphen". I. Abtheilung.

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr in Wien überreicht eine Abhandlung: „Über Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins".

Ferner überreicht Herr Prof. Weyr eine Abhandlung des Herrn Dr. Gustav Kohn in Wien: „Über einen Satz von Stephanos".

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht zwei Abhandlungen aus dem chemischen Laboratorium der Wiener Handelsakademie von Herrn O. W. Fischer:

1. „Zur Kenntniss der Dichinolyle."
2. „Über zwei organische Zinnverbindungen."

Herr Prof. v. Barth überreicht ferner vier Abhandlungen aus dem Laboratorium des Herrn Prof. Habermann in Brünn:

1. „Über einige basische Salze", von Herrn Prof. J. Habermann.

2. „Über die Einwirkung von Acetamid auf Phenylcyanid", von Herrn Dr. Franz Berger.

3. „Über das Verhalten des Stärkekorns beim Erhitzen", von Herrn Stanislaus Schubert.

4. „Über einige gemischte Äther des Resorcins", von Herrn Gustav Spitz.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht zwei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

1. Von Herrn Dr. Conrad Natterer: „Zur Kenntniss des Dichloräthers."
2. Von Herrn Dr. Carl Auer v. Welsbach: „Über die seltenen Erden."

Herr Prof. Lieben überreicht ferner zwei im Laboratorium der Wiener Handelsakad. ausgeführte Arbeiten, u. zw.: „Über das Methylphenanthrolin", von den Herren Prof. Dr. Zd. H. Skraup und O. W. Fischer — und „Eine neue Bildungsweise des Phenanthrolin's", von Herrn Zd. H. Skraup.

Das w. M. Herr Prof. E. Suess überreicht eine Abhandlung von Herrn Dr. L. Szajnocha, Privatdocent an der Universität zu Krakau, unter dem Titel: „Zur Kenntniss der mittelcretacischen Cephalopoden-Fauna der Inseln Elobi an der Westküste Afrikas".

Das w. M. Herr Prof. v. Lang überreicht eine Abhandlung von Herrn Dr. Carl Auer v. Welsbach, betitelt: „Beiträge zur Spectralanalyse".

Herr Prof. Ernst v. Fleischl in Wien hält einen Vortrag über: „Die Doppelbrechung circumpolarisirender Flüssigkeiten".

Schliesslich überreicht der Vicepräsident Herr Hofrath Prof. Ritter v. Brücke eine im physiologischen Institute der Wiener Universität durchgeführte Arbeit des Herrn Eugen Steinach, unter dem Titel: „Studien über den Blutkreislauf der Niere".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 48e année, 2e série, tome XIII. Nos 26—28. Paris, 1884; 8°.

Accademia, R. delle scienze di Torrino: Atti. Vol. XIX, Disp. 4a (Marzo 1884); Torino; 8°.

— R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXXI 1883—84. Serie terza. Transunti. Vol. VIII. Fascioli 11° & 12°. Roma, 1884; 4°.

Akademie der Wissenschaften, königl.: Öfversigt af Förhandlingar. 41° Årg. 1884 Nr. 1. Stockholm, 1884; 8°.

— kaiserl. Leopoldino-Carolinische deutsche der Naturforscher: Leopoldina, Heft XX. Nr. 11—12. Halle a. S. 1884; 4°.

Albrecht, Paul: Sur la Fosette vermienne du crane des Mammifères. Bruxelles, 1884; 8°.

Apotheker-Verein, allgemeiner österreichischer: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XXII. Jahrgang Nr. 17—20. Wien, 1884; 8⁰.

Central-Commission, k. k. zur Erforschung und Erhaltung der Kunst- u. historischen Denkmale. Mittheilungen X. Band, 2. Heft. Wien, 1884; 4⁰.

Comité international des poids et mesures: Procés-verbaux des séances des 1883. Paris 1884; 8⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVIII, Nro. 26. Paris, 1884; 4⁰.

Erlangen, Universität: Akademische Schriften pro 1883 — 54 Stücke; 4⁰ & 8⁰.

Gesellschaft, österr. für Meteorologie: Zeitschrift, XIX. Band. Juli-Heft 1884. Wien; 8⁰.

Gewerbe-Verein, niederösterr. — Wochenschrift XLV. Jahrgang Nr. 19—28. Wien, 1884; 4⁰.

Hydrographisches Amt, k. k. Marine-Bibliothek: Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Vol. XII, Nr. V und VI. Jahrgang 1884. Pola, 1884; 8⁰.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift IX. Jahrgang, Nr. 19—28. Wien, 1884; 4⁰.

— — Zeitschrift XXXVI. Jahrgang 1884. I. & II. Heft. Wien; fol.

Johns Hopkins University Circulars. Vol. III. Nr. 30. Baltimore, 1884; 4⁰.

Journal, the American of science. 3. Series. Vol. XXVIII. Nr. 163. New Haven, 1884; 8⁰.

Kriegsmarine, k. k.: Kundmachungen für Seefahrer und hydrographische Nachrichten. Jahrgang 1884. Heft 4, Pola, 1884 ; 8⁰.

Landbote, der steirische: Organ für Landwirthschaft und Landescultur. XVII. Jahrgang Nr. 2—12, Graz, 1884; 4⁰.

Meyer, A. B. Dr.: Abbildungen von Vogel-Skeletten. VI. & VII. Lieferung. Dresden, 1884; gr. 4⁰. — Über neue und ungenügend bekannte Vogelnester und Eier aus dem Ostindischen Archipel im königl. zoologischen Museum zu Dresden. Dresden, 1884; 8⁰ — Über Nephrit und ähnliches Material aus Alaska. Dresden, 1884; 8⁰.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Jahrgang 1884. 6. Heft. Wien, 1884; 8°.

Nature. Vol. XXX. Nr. 767. London, 1884; 8°.

Observatorio de Madrid: Observaciones meteorológicas durante el año 1876, 1877 & 1878. Madrid, 1878—79; 8°.

Osservatorio, R. astronomico di Brera in Milano: Osservazioni meteorologiche eseguite nell' anno 1883. Milano 1883; 4°.

Osservatorio del Real Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bollettino mensuale. Ser. II. Vol. IV. — Nr. 3. Torino, 1884; 4°.

— della regia Università di Torino: Bollettino. Anno XVIII. Torino, 1884; quer 4°.

Peabody Institute of the city of Baltimore; 17th annual Report June 1. 1884; Baltimore; 8°

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 10. Wien, 1884; 8°.

Società degli Spettroscopisti italiani: Memorie. Vol. XIII. Disp. 2a—4a. Roma, 1884; 4°.

Société Hollandaise des sciences à Harlem: Archives. Tome XIX. 2me livraison. Harlem. 1884; 8°.

Sveriges geologiska Undersökning. Ser. Aa. Nr. 89 & 90. Stockholm, 1883; 8° — Ser. Ab. Nr. 7 und 9 Stockholm, 1883; 8°. — Ser. Bb. Nr. 3. Stockholm, 1883; 4°; Ser. C. Nr. 53 — 60. Stockholm, 1883; 4° und 8°.

Verein, Entomologischer in Berlin: Berliner Entomologische Zeitschrift. XXVIII. Band 1884. 1. Heft Berlin, 1884; 8°.

— für Naturkunde zu Zwickau in Sachsen; Jahresbericht für 1882 und 1883. Zwickau, 1883—84; 8°.

— Lotos: Jahrbuch für Naturwissenschaft. N. F. V. Band. Prag. 1884; 8°

— für siebenbürgische Landeskunde: Archiv N. F. XIX. Band. 2. Heft. Hermannstadt. 1884; 8°.

— der čechischen Chemiker: Listy chemické. VIII. Jahrgang Nr. 4—10. Prag, 1884; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXIV. Jahrgang. Nr. 28. Wien, 1884; 4°.

Über Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins.

(Erste Mittheilung.)

Von **Emil Weyr.**

I.

1. Eine Curve vom Geschlechte $p=1$ ist dadurch vollkommen charakterisirt, dass es kein Büschel gibt (für ebene Curven aus Curven, für räumliche Curven aus Flächen bestehend), dessen Elemente die Curve ausser in festen Punkten in einem variablen Punkte schneiden würden (denn dann wäre die Curve vom Geschlechte $p=0$), dagegen unendlich viele Büschel (adjungirte Büschel), deren Elemente (Curven, resp. Flächen) die fragliche Curve ausser in festen Punkten, noch in variablen Punktepaaren schneiden. In jedem solchen Büschel gibt es vier Elemente, von denen jedes die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet, die Curve berührt. Das Doppelverhältniss der Quadrupel der tangirenden Elemente ist in allen Büscheln dasselbe.

In der That, sind $\xi\xi'$ die beiden Elemente zweier Büschel der besprochenen Art, welche durch einen und denselben Punkt der Curve hindurchgehen, und werden diese beiden Elemente als einander entsprechende betrachtet, so erscheinen die beiden Büschel in zwei-zweideutige Beziehung gesetzt, und die tangirenden Elemente sind die zwei Quadrupel der Verzweigungselemente beider Büschel. Diese beiden Quadrupel haben jedoch gleiches Doppelverhältniss. Es ist als das charakteristische Doppelverhältniss der Curve bezeichnet worden.

2. Wenn zwischen den Punkten xx' zweier Curven CC' vom Geschlechte $p=1$ eine eindeutige Beziehung besteht, so haben beide Curven dasselbe charakteristische Doppelverhältniss.

Denn, wird C mit einem diese Curve in variablen Punktepaaren schneidenden Büschel B und C' mit einem ähnlichen Büschel B' in Verbindung gesetzt, und betrachtet man zwei Elemente $\xi\xi'$ der beiden Büschel, welche durch zwei entsprechende Punkte xx' von CC' hindurchgehen, als einander entsprechend, so erscheinen die Büschel in zwei-zweideutiger Beziehung, und da die in den Büscheln vorkommenden Quadrupel tangirender Elemente die Verzweigungselemente darstellen, so ist der ausgesprochene bekannte Satz erwiesen.

3. „Auf Curven vom Geschlechte $p=1$ kommen nur zweierlei eindeutige Punktbeziehungen vor; erstens solche, vermöge derer sich je zwei zugeordnete Punkte vertauschungsfähig entsprechen und dann solche, in welchen diese Vertauschungsfähigkeit (im Allgemeinen) nicht auftritt. Wir werden die Beziehungen der ersten Art als die vertauschungsfähigen, oder als Paarinvolutionen erster Stufe mit J_1^2, und die Beziehungen der zweiten Art als die nichtvertauschungsfähigen Beziehungen mit E bezeichnen.

Wird auf der Curve irgend ein Punktepaar als Paar entsprechender Punkte angenommen, so ist hiedurch eine J_1^2 Beziehung und eine E-Beziehung vollkommen bestimmt. Jede Paarinvolution enthält vier sich selbst entsprechende (Doppel-)Punkte; sie bilden die Berührungspunkte der Curve mit vier Elementen von Büscheln der oben bemerkten Art. Eine E-Beziehung lässt keinen sich selbst entsprechenden Punkt zu, ausser in dem Falle, dass jeder Punkt der Curve als sich selbst entsprechend auftritt. Unter den sämmtlichen E-Beziehungen gibt es vier, in denen Vertauschungsfähigkeit herrscht (fundamentale E-Beziehungen). Es ist dies erstens die E-Beziehung, vermöge welcher jeder Punkt der Curve sich selbst entspricht, und ferner jene drei E-Beziehungen, die man erhält, wenn man einem Punkte der Curve der Reihe nach jene drei als entsprechende zuordnet, welche mit ihm ein Quadrupel von Berührungspunkten der vier tangirenden Elemente eines der oben erwähnten Büschel bilden."

Dieses Resultat erhält man als Folgerung des nachstehenden Satzes:

„Jede auf einer Curve vom Geschlechte $p=1$ auftretende eindeutige Beziehung von Punkten xx' wird durch jedes adjun-

girte Büschel in einem symmetrischen Elementensystem zweiten Grades projicirt.“

Denn, gehen die Elemente $\xi\xi'$ eines adjungirten Büschels durch die einander entsprechenden Punkte xx', resp. so erscheinen die Elemente des Büschels durch die eindeutige Beziehung auf der Curve offenbar in zwei-zweideutige Beziehung gesetzt, so dass das Büschel zwei conlocale zwei-zweideutige Systeme darstellt; für beide diese Systeme erscheinen jedoch die vier im Büschel auftretenden tangirenden Elemente als Verzweigungselemente und daher bilden die beiden Systeme ein symmetrisches Elementensystem zweiten Grades.

Hieraus folgt nun zunächst:

„Wenn in einer, auf einer Curve vom Geschlechte $p = 1$ auftretenden eindeutigen Punktbeziehung ein Paar von vertauschungsfähig sich entsprechenden Punkten auftritt, so besteht im Allgemeinen diese Vertauschungsfähigkeit in allen Paaren.“

Wir haben dann eine Paarinvolution erster Stufe J_1^2 auf der Curve.

„Die einzelnen Paare einer Paarinvolution werden durch Elemente adjungirter Büschel aus der Curve geschnitten.“

In der That, es sei mm' ein Paar sich vertauschungsfähig (involutorisch) entsprechender Punkte und μ sei das durch m und m' hindurchgehende Element eines adjungirten Büschels B, welches die vier die Curve tangirenden Elemente $\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4$ enthalten mag. Das symmetrische Elementensystem zweiten Grades, welches man erhält, wenn man durch die einander entsprechenden Punkte xx' die Elemente $\xi\xi'$ des adjungirten Büschels B hindurch legt, besitzt man ausser den Verzweigungselementen $\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4$ auch noch das sich selbst entsprechende Verzweigungselement μ und besteht somit im Allgemeinen aus lauter sich selbst entsprechenden Verzweigungselementen, so dass je zwei entsprechende Punkte xx' in einem und demselben Elemente $\xi \equiv \xi'$ des adjungirten Büschels gelegen sind, und somit in allen Paaren xx' Vertauschungsfähigkeit herrscht. Dass die Berührungspunkte der vier Elemente $\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4$ die sich selbst entsprechenden Elemente der Paarinvolution sind, ist klar.

Aus der Definition eines adjungirten Büschels, als eines solchen, dessen Elemente unsere Curve in veränderlichen Punkte-

paaren schneiden, folgt sofort, dass jedes adjungirte Büschel auf der Curve C eine J_1^2 bestimmt.

„Wenn zwei Paarinvolutionen ein Punktepaar gemeinschaftlich haben, so sind sie identisch; d. h. eine Paarinvolution ist durch Annahme eines Paares entsprechender Punkte vollkommen und unzweideutig bestimmt.“

Wir betrachten irgend zwei adjungirte Büschel BB'. Projicirt man die durch B auf der Curve bestimmte J_1^2 mittelst des Büschels B', indem man durch je zwei ein Paar der J_1^2 bildenden Punkte die beiden Elemente von B' hindurchlegt, so erhält man nach Früherem ein symmetrisches Elementensystem zweiten Grades, für welches die in B' vorkommenden tangirenden Elemente $\nu_1' \nu_2' \nu_3' \nu_4'$ die vier Verzweigungselemente darstellen. Ist nun ein Punktepaar gg' der J_1^2 zugleich ein solches der J_1^2, welche durch das Büschel B' auf der Curve bestimmt wird, so tritt das Element γ' von B', welches das Paar gg' enthält, noch zu jenen vier Verzweigungselementen als fünftes und zwar sich selbst entsprechendes Verzweigungselement hinzu, so dass das symmetrische Elementensystem B' im Allgemeinen aus lauter solchen sich selbst entsprechenden Verzweigungselementen besteht und somit jedes Element des Büschels B' auf der Curve ein Punktepaar bestimmt, welches ebenso durch ein Element des Büschels B bestimmt erscheint. Hieraus zugleich:

„Durch jede Paarinvolution auf einer Curve vom Geschlechte $p=1$ erscheinen je zwei adjungirte Büschel, welche die Paare der Involution ausschneiden, in projectivische Beziehung gesetzt.“

Hieraus folgt die Erzeugung ebener Curven vom Geschlechte $p=1$ durch Paare, und der räumlichen Curven vom Geschlechte $p=1$ durch Tripel projectivischer Büschel (Curven — resp. Flächenbüschel). Ebenso erkennt man aus Obigem:

„Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte einer Paarinvolution auf einer räumlichen Curve vom Geschlechte $p=1$ erfüllen eine rationale Fläche, da sich diese Verbindungsgeraden in eindeutige Beziehung zu den Flächen eines (adjungirten) Flächenbüschels setzen lassen.“

Da eine J_1^2 durch ein Punktpaar bestimmt ist, so lassen sich durch jede Raumcurve vom Geschlechte $p=1$ ∞^1 solche rationale Regelflächen hindurchlegen, von denen jede als Involutions-

fläche einer J_1^2 erscheint und bestimmt ist, sobald man irgend eine Bisecante der Curve als Erzeugende für die Fläche wählt. Unter den Erzeugenden einer solchen Involutionsfläche gibt es vier, welche die Raumcurve berühren, den vier Doppelpunkten der J_1^2 entsprechend.

4. Wir zeigen im Folgenden, dass der Grad der rationalen Regelflächen, welche man als Involutionsflächen durch eine Raumcurve C_n n^{ter} Ordnung vom Geschlechte $p=1$ legen kann, dem Werthe $(n-2)$ gleich ist.

Zu dem Behufe beweisen wir den folgenden Satz:

„Wenn auf einer Curve vom Geschlechte $p=1$ eine Involution m^{ter} Ordnung erster Stufe zugleich mit einer Paarinvolution erster Stufe auftritt, so haben beide Involutionen $(m-2)$ gemeinschaftliche Elementenpaare."

Dabei soll unter einer Involution m^{ter} Ordnung erster Stufe eine einfache Unendlichkeit von m-elementigen nicht zerfallenden geschlossenen Gruppen verstanden werden, von denen jede durch irgend eines ihrer Elemente vollkommen bestimmt erscheint. Wir wollen eine solche Involution mit J_1^m bezeichnen; die Zahl der gemeinschaftlichen Elementenpaare einer J_1^m und einer J_1^2 bezeichnen wir mit $g\,(m, 2)$ und haben nach Früherem sofort $g(2, 2)=0$.

Es sei nun auf der Raumcurve n^{ter} Ordnung C vom Geschlechte $p=1$ eine Paarinvolution J_1^2 gegeben, deren Involutionsfläche F sein möge. Ein Ebenenbüschel bestimmt nun auf C offenbar eine J_1^n, so dass $g(n, 2)$ die Ordnung von F sein wird. Wenn jedoch die Axe des Büschels die Curve C in einem Punkt begegnet, so entsteht eine J_1^{n-1}, und da die Curve C einfach ist für F, so wird auch $[1+g(n-1, 2)]$ die Ordnung von F sein; wir haben somit die Recursionsformel:

$$g\,(n, 2)=g(n-1, 2)+1, \text{ und da } g(22)=0, \text{ somit } g(3, 2)=1,$$
$$g(4, 2)=2 \text{ u. s. w. ist, so ist allgemein } g(n, 2)=n-2,$$

wie behauptet wurde.

Ersetzt man die Raumcurve durch eine ebene Curve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte $p=1$, und das Ebenenbüschel durch ein Strahlenbüschel, so erhält man dasselbe Resultat und zugleich den Satz:

„Die Enveloppe der Verbindungsgeraden der Punktepaare einer auf einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte $p=1$ befindlichen Paarinvolution (die zugehörige Involutionscurve) ist eine rationale Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Classe."

5. „Jeder Doppelpunkt der Curve C vom Geschlechte $p=1$ gehört im Allgemeinen allen adjungirten Curven resp. Flächen an." Denn, würde ein adjungirtes Büschel auftreten, welches einen Doppelpunkt der C nicht enthielte, so würde ein Element dieses Büschels durch diesen Doppelpunkt hindurchgehen und die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes würden ein Paar jener J_1^2 bilden, welche durch das Büschel auf der C bestimmt erscheint. Nun ist aber eine J_1^2 durch ein Elementenpaar vollkommen bestimmt, so dass also jenes adjungirte Büschel ein ganz specielles wäre, jener speciellen (fundamentalen) Paarinvolution entsprechend, welche durch das Paar der Nachbarpunkte des fraglichen Doppelpunktes bestimmt erscheint.

Wir sind nun in der Lage die bekannte Zahl δ der Doppelpunkte einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte $p=1$ abzuleiten. Die adjungirten Curven, deren Ordnung r sein möge, müssen alle δ-Doppelpunkte der C enthalten, und wenn durch Annahme von weiteren q-Punkten auf der C ein Büschel solcher Curven festgelegt wird, von denen also jede noch in einem Punktepaar der C begegnet, so haben wir zunächst die Relation

$$nr = 2\delta + q + 2, \qquad \ldots(\alpha)$$

und da die δ-Doppelpunkte mit den q weiteren Punkten auf C ein Büschel von Curven r^{ter} Ordnung festsetzen sollen, so ist

$$\frac{r(r+3)}{2} - 1 = \delta + q$$

oder

$$r(r+3) = 2\delta + 2q + 2. \qquad \ldots(\beta)$$

Durch Subtraction von (α) und (β) ergibt sich

$$r(r+3-n) = q. \qquad \ldots(\gamma)$$

Nun muss q nothwendigerweise positiv und von Null verschieden sein; denn für $q=0$ hätten wir nur ein einziges durch die Doppelpunkte schon bestimmtes adjungirtes Büschel, was der

Definition von C zuwiderläuft. Wir haben also $q>0$, somit auch $r>n-3$; anderseits muss $r<n$, weil für $r \gtreqless n$ keine variablen Schnittpunktepaare mehr auftreten können, indem dann alle Curven r^{ter} Ordnung, welche durch alle die $\delta+q$-Punkte hindurchgehen, die Curve C nur in weiteren festen Punkten schneiden müssen.

Setzt man nun $r=n-2$, so ergibt sich aus (γ): $q=n-2$ und aus (α): $\delta=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-1$. Setzt man $r=n-1$, so wird nach (γ): $q=2(n-1)$ und nach (α) erhält man $\delta=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-1$. Dadurch erscheint für ebene Curven erwiesen, dass sich unsere Definition der Curven n^{ter} Ordnung vom Geschlechte Eins mit der gewöhnlichen Definition dieser Curven als solcher, welche $\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}-1\right]$ Doppelpunkte besitzen, deckt.

6. Es sei nun auf C eine eindeutige Punktbeziehung, in welcher nicht Vertauschungsfähigkeit herrscht, gegeben. Projiciren wir irgend zwei entsprechende Punkte x, x' mittelst eines der adjungirten Büschel, so ergeben sich zwei Elemente ξ, ξ' dieses Büschels, welche einander als entsprechende Elemente eines symmetrischen Systemes zweiten Grades zugeordnet erscheinen. Da man somit ξ als η' und ξ' als η betrachten kann, so wird dem letzten Schnittpunkt y von η mit C der letzte Schnittpunkt y' von η' mit C als entsprechender Punkt zugeordnet erscheinen.

Wenn also x, x' ein Paar entsprechender Punkte der eindeutigen Beziehung auf C sind und man soll zum Punkte y den entsprechenden Punkt y' aufsuchen, so lege man durch y und x' irgend ein adjungirtes Element und lege dann durch x das Element des adjungirten Büschels, welchem das durch x' und y gelegte Element angehört. Dieses durch x gehende Element wird C noch einmal und zwar im gesuchten Punkte y' schneiden.

Die Beziehung zwischen irgend zwei Paaren xx', yy' entsprechender Punkte einer eindeutigen Beziehung auf C (einer E-Beziehung) kann man somit auch folgendermassen aussprechen:

„Wenn xx', yy' zwei Punktepaare einer und derselben eindeutigen, nicht vertauschungsfähigen, also einer E-Beziehung sind, so sind xy', $x'y$ zwei Punktepaare einer Paarinvolution (einer J_1^2)."

Zugleich erkennt man aus Obigem:

„Eine E-Beziehung auf einer Curve vom Geschlechte Eins ist durch ein Paar entsprechender Punkte vollkommen bestimmt."

Wenn man von den zwei variablen Schnittpunkten der Curve C mit den Elementen eines adjungirten Büschels jeden als die Projection des anderen aus jenem adjungirten Büschel bezeichnet, so folgt aus dem Vorigen sofort:

„Wenn man ein Paar entsprechender Punkte einer E-Beziehung aus den einzelnen adjungirten Büscheln auf die Curve projicirt, so erhält man die sämmtlichen übrigen Paare entsprechender Punkte derselben E-Beziehung, nur in umgekehrter Ordnung."

Hieraus weiter:

„Wenn eine E-Beziehung einen sich selbst entsprechenden Punkt besitzt, so ist jeder Punkt ein sich selbst entsprechender, ein Doppelpunkt."

7. In jedem adjungirten Büschel kommen vier Elemente vor, welche die Curve C berühren. Die vier Berührungspunkte $p_1 p_2 p_3 p_4$ bilden ein geschlossenes Quadrupel, welches durch einen seiner Punkte vollkommen bestimmt ist. In der That bestimmt dieser Punkt als Doppelpunkt eine Paarinvolution, deren übrigen drei Doppelpunkte das Quadrupel ergänzen.

Wenn man zwei Punkte $p_1 p_2$ desselben Quadrupels als ein Punktepaar xx' einer E-Beziehung betrachtet, so herrscht in dieser E-Beziehung Vertauschungsfähigkeit, ohne dass wir eine Paarinvolution vor uns haben. Zunächst erkennt man für das bestimmende Paar xx' die Vertauschungsfähigkeit; denn wird x mit y' und x' mit y bezeichnet, so sind yy' auch zwei entsprechende Punkte der E-Beziehung, da ja die zwei Punktepaare xy', $x'y$ einer Paarinvolution angehören, in dem xy' einen und $x'y$ einen zweiten Doppelpunkt der Paarinvolution darstellt.

Da jedoch aus dem Punktepaare xx' die sämmtlichen übrigen durch Projection mittelst adjungirter Büschel folgen, so ergibt sich die Vertauschungsfähigkeit auch in allen übrigen Punktepaaren. Hieraus folgt weiter, dass in dieser E-Beziehung

je zwei entsprechende Punkte einem und demselben Quadrupel angehören; man kann nämlich der Vertauschungsfähigkeit wegen je zwei entsprechende Punkte z, z' auch als w', w resp. betrachten und nun gehören die Paare zw', $z'w$ (wobei w' mit z und w mit z' identisch ist) derselben Paarinvolution an, d. h. z, z' sind Doppelpunkte einer und derselben Paarinvolution und gehören somit einem und demselben Quadrupel an. Solcher durch Vertauschungsfähigkeit ausgezeichnete E-Beziehungen haben wir drei, jenachdem man nämlich dem Punkte p_1 den Punkt p_2, p_3 oder endlich p_4 als entsprechenden zuordnet. Es sind dies die drei fundamentalen vertauschungsfähigen E-Beziehungen, zu denen als vierte fundamentale vertauschungsfähige E-Beziehung jene hinzuzufügen wäre, welche durch die sämmtlichen sich selbst entsprechenden Punkte der Curve C dargestellt wird.

Aus den Eigenschaften der drei ersten fundamentalen E-Beziehungen folgt sofort:

„Sind $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ die vier Punkte eines Quadrupels, so sind $p_1 p_2$ und $p_3 p_4$ zwei Punktepaare der einen fundamentalen E-Beziehung, und ebenso sind $p_1 p_3$ und $p_2 p_4$ zwei Paare der zweiten und $p_1 p_4$, $p_2 p_3$ zwei Paare der dritten fundamentalen E-Beziehung."

Und eben so leicht erhält man:

„Projicirt man die entsprechenden Punkte einer fundamentalen E-Beziehung durch die Elemente eines adjungirten Büschels, so erhält man in dem Büschel eine quadratische Involution."

So ergeben sich in jedem adjungirten Büschel drei quadratische Involutionen den drei fundamentalen E-Beziehungen entsprechend.

Man gelangt zu denselben drei Involutionen, wenn man die vier Elemente des Büschels, welche die Curve C berühren, in zwei Paare trennt und diese Paare als eine quadratische Involution bestimmend betrachtet.

II.

8. Wir betrachten nun insbesondere eine Raumcurve fünfter Ordnung R_5 vom Geschlechte Eins.

Ihre Projection aus einem beliebigen Punkte auf eine Ebene ist eine ebene Curve fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins,

muss also fünf Doppelpunkte besitzen, so dass durch jeden Punkt des Raumes fünf Bisecanten von R_5 hindurchgehen. Die R_5 kann höchstens einen Doppelpunkt besitzen; denn zwei Doppelpunkte verbunden liefern eine Quadrisecante, was die Rationalität der Curve zur Folge hätte.

Da die Projection der R_5 aus einem ihr angehörigen Punkte eine ebene Curve vierter Ordnung vom Geschlechte Eins, also mit zwei Doppelpunkten versehen, ist, so folgt:

„Durch jeden Punkt von R_5 gehen zwei Trisecanten hindurch."

„Die Fläche der Trisecanten hat somit R_5 zur Doppelcurve."

„Wir beweisen, dass diese Fläche von der fünften Ordnung ist."

Ihr ebener Schnitt ist eine Curve, welche nach eben Gesagtem fünf Doppelpunkte besitzt, deren Ordnung somit grösser als vier sein muss; wir haben nun zu zeigen, dass ihre Ordnung nicht grösser als fünf sein kann. Zu dem Behufe betrachten wir irgend eine Bisecante B von R_5, welche R_5 in den Punkten a, b schneiden möge. Diese Punkte sind als doppelte Schnittpunkte J von B mit der fraglichen Fläche zu betrachten, und da die Ordnung dieser Fläche grösser als vier sein muss, so wird B die Fläche noch weiter schneiden, und zwar so oft, als B von Trisecanten der R_5 getroffen wird; solche Trisecanten (die durch a und b gehenden abgerechnet) muss es noch geben. Wir zeigen nun, dass ihre Zahl kleiner als Zwei sein muss, wodurch bewiesen sein wird, dass diese Zahl gleich Eins ist.

Angenommen, B würde von zwei Trisecanten TT' in den Punkten m, m' geschnitten; wir legen durch einen beliebigen Punkt o von R_5 zu TT' die Transversale M, so bilden die vier Geraden $TT'BM$ als windschiefes Vierseit die Basiscurve für ein Flächenbüschel zweiter Ordnung, dessen Flächen die R_5 in neun festen Punkten (auf jeder der Trisecanten liegen drei, auf M liegt o und auf B liegen a, b) und somit in einem variablen Punkte schneiden müssten, was der Definition der R_5 als einer Curve vom Geschlechte Eins zuwiderläuft.

„Jede Bisecante (also auch jede Tangente) B von R_5 wird somit nur von einer einzigen Trisecante in einem der Curve nicht angehörigen Punkte getroffen."

Ausserdem wird B noch von vier Trisecanten geschnitten, nämlich von den zwei durch a und von den zwei durch b gehenden.

Zugleich ist bewiesen:

„Die Fläche der Trisecanten der Curve R_5 ist eine Fläche fünfter Ordnung F_5."

Da sich zwei Trisecante ausser auf R_5 nicht schneiden können, weil sonst ihre Ebene sechs Punkte von R_5 enthielte, so ist R_5 die einzige Doppelcurve von F_5.

Wenn die R_5 einen Doppelpunkt d besitzt, so stellt der der Curve aus d umschriebene Kegel dritten Grades einen Theil von F_5 dar; der andere Theil wird somit eine Fläche zweiter Ordnung F_2 sein.

„Jede Raumcurve fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins, welche einen Doppelpunkt besitzt, liegt auf einer Oberfläche zweiten Grades."

Der ebene Schnitt der F_5 ist eine Curve fünfter Ordnung mit fünf (auf R_5 gelegenen) Doppelpunkten, daher vom Geschlechte Eins. Daher auch:

„Die Trisecantenfläche F_5 ist vom Geschlechte Eins."

9. Um alle Bisecanten zu erhalten, welche eine gegebene Trisecante T schneiden, haben wir um T eine Ebene zu drehen und deren zwei veränderliche Schnittpunkte zu verbinden. In jeder durch T gehenden Ebene liegt somit eine die T schneidende Bisecante; dagegen gehen durch jeden Punkt von T zwei solche Bisecanten, da die aus einem Punkte von T genommene Projection der R_5 eine ebene Curve fünfter Ordnung mit einem dreifachen, der Trisecante entsprechenden, Punkte ist, und somit als Curve vom Geschlechte Eins noch zwei Doppelpunkte besitzen wird, welche von Bisecanten der R_5 herrühren.

Hieraus folgt unmittelbar:

„Die sämmtlichen Bisecanten, welche eine und dieselbe Trisecante schneiden, erfüllen eine Regelfläche dritter Ordnung, welche die Trisecante zur Doppelgeraden hat."

So kann man aus jeder Trisecante eine durch die Curve R_5 hindurchgehende cubische Regelfläche ableiten und wir zeigen nun, dass man in dieser Art die sämmtlichen durch R_5 gehenden cubischen Regelflächen erhält.

Es sei in der That F_3 irgend eine durch R_5 gehende cubische Regelfläche, und D deren Doppelgerade, und A irgend eine Erzeugende. Die durch D und A bestimmte Ebene schneidet R_5 in fünf Punkten, welche auf A und D vertheilt sein müssen. Da nun keine der beiden Geraden alle fünf erhalten kann (weil dann R_5 eben sein müsste), aber auch nicht vier von den Punkten auf einer Geraden liegen können (weil sonst R_5 rational wäre), so muss eine der beiden Geraden drei, und die andere zwei enthalten. Die Erzeugende A kann nicht drei von den fünf Punkten enthalten; denn A wird von einer zweiten Erzeugenden (in einem Punkte von D) geschnitten, und die Ebene dieser beiden Erzeugenden würde dann sechs Punkte von R_5 enthalten. „Es muss also die Doppelgerade D einer jeden durch R_5 gehenden cubischen Regelfläche eine Trisecante von R_5 sein und man erhält somit in der oben angegebenen Art alle durch R_5 hindurchgehenden cubischen Regelflächen."

„Eine durch R_5 gehende cubische Regelfläche ist vollkommen und eindeutig bestimmt: *a)* durch Annahme einer Trisecante als Doppelgerade (folgt aus dem Vorangehenden) und *b)* durch Annahme einer Bisecante als einer Erzeugenden."

Denn eine Bisecante B wird nur von einer einzigen Trisecante T (ausserhalb R_5) geschnitten und gehört somit als Erzeugende der einzigen cubischen Regelfläche an, welche T zur Doppelgeraden hat.

Hieraus folgt sofort:

„Die Bisecanten der R_5 erscheinen gepaart."

Eine Bisecante B wird von einer einzigen Trisecante T geschnitten, und durch den Schnittpunkt geht noch eine weitere Bisecante B', welche mit B gepaart erscheint.

Weiter:

„Durch einen beliebigen Punkt des Raumes und die Curve R_5 lassen sich fünf cubische Regelflächen legen, den fünf durch den Punkt gehenden Bisecanten entsprechend."

„Durch die Curve R_5 gehen zehn cubische Regelflächen, welche eine gegebene Ebene zur Tangentialebene besitzen; den zehn Bisecanten entsprechend, welche die fünf Schnittpunkte der Ebene mit R_5 paarweise verbinden."

Legt man durch R_5 irgend zwei cubische Regelflächen F_3, F'_3, für welche die Trisecante T, T' Doppelgerade sein mögen, so erscheinen die Erzeugenden der beiden Regelflächen projectivisch auf einander bezogen. Jede Erzeugende X von F_3 schneidet F'_3 ausser in den zwei Punkten, in denen sie R_5 begegnet, noch in einem Punkte x, durch welchen eine Erzeugende X' von F'_3 hindurchgeht, und umgekehrt, entspricht der Erzeugenden X' von F'_3 in derselben Art die einzige Erzeugende X von F_3.

Der Ort der Punkte x ist eine Raumcurve vierter Ordnung R_4, nämlich der ausser R_5 auftretende Bestandtheil des Schnittes von F_3 und F'_3, welcher im ganzen von der neunten Ordnung sein muss.

Diese Curve vierter Ordnung R_4 ist rational, da ihre Punkte x in eindeutiger Beziehung mit den Erzeugenden der cubischen (rationalen) Regelflächen gesetzt erscheinen.

Offenbar sind auch je zwei Ebenenbüschel, deren Axen Trisecanten von R_5 sind, durch R_5 in projectivische Beziehung gesetzt, da eine durch T gehende Ebene ξ nur eine Bisecante X enthält, welche nur von einer die T' schneidenden, d. h. mit ihr in einer Ebene ξ' gelegenen Bisecante X' getroffen wird.

Die Curve R_4 liegt somit auf dem Hyperbeloide, welches als Erzeugniss der projectivischen Ebenenbüschel (TX), $(T'X')$ auftritt. Die Trisecanten TT' sind zugleich Trisecanten von R_4 und treffen sie in denselben Punkten, wo sie die R_5 treffen; in der That muss der Schnitt von F_3 und F'_3 in den drei Punkten, in welchen T von F'_3 geschnitten wird (und das sind jene Punkte, in welchen T die R_5 schneidet), Doppelpunkte besitzen; da nun R_5 durch jeden dieser Punkte einfach hindurchgeht, so muss auch R_4 jeden dieser Punkte einfach enthalten.

Betrachtet man zwei Ebenen der beiden Büschel T, T', welche durch einen und denselben Punkt von R_5 hindurch gehen, als einander entsprechend, so erscheinen die Büschel in zwei zweideutige Beziehung gesetzt, woraus sofort folgt:

„Durch jede Trisecante lassen sich an die Curve R_5 vier Tangentialebenen legen; ihr Doppelverhältniss ist für alle Trisecanten constant.“

Die Berührungspunkte von vier durch eine Trisecante gehenden Tangentialebenen, d. i. die vier Punkte, deren Tangenten eine und

dieselbe Trisecante schneiden, werden wir als ein Quadrupel von Berührungspunkten bezeichnen. Dasselbe ist durch einen seiner Punkte vollkommen bestimmt. Denn die Tangente dieses Punktes wird von einer einzigen, vollkommen bestimmten Trisecante geschnitten, durch welche sich dann noch weitere drei Tangentialebenen hindurchlegen lassen.

10. Ist auf R_5 eine eindeutige Beziehung von Punkten und projicirt man je zwei entsprechende Punkte aus einer Trisecante durch Ebenen, so erhält man, wie sofort zu sehen ist, zwei zweideutige coaxirte Ebenenbüschel. Da nun, wie man ebenso leicht einsieht, die vier durch die Trisecante hindurchgehenden Ebenen als die gemeinschaftlichen Verzweigungselemente in beiden Büscheln auftreten, so bilden diese letzteren ein symmetrisches Elementensystem zweiten Grades.

„Jede auf R_5 auftretende eindeutige Punktbeziehung wird aus jeder Trisecante durch ein symmetrisches Ebenenbüschel zweiten Grades projicirt; die durch die Trisecante hindurchgehenden vier Tangentialebenen sind die Verzweigungselemente des Systemes.“

„Wenn zwischen den Punkten eines Paares einer eindeutigen Beziehung auf R_5 Vertauschungsfähigkeit herrscht, so herrscht dieselbe im Allgemeinen in allen Paaren und wir haben eine Paarinvolution J_1^2 auf R_5.“

Ist xx' das vertauschungsfähige Paar, so dass wir $x \equiv y'$ und $x' \equiv y$ setzen können, so verbinde man xx' durch die Bisecante X, welche von einer einzigen bestimmten Trisecante T geschnitten wird. Projicirt man nun entsprechende Punkte durch Ebenen aus T, so ergibt sich ein symmetrisches Ebenenbüschel zweiten Grades, zu dessen vier die R_5 berührenden Verzweigungselementen die Ebene (TX) als fünftes sich selbst entsprechendes Verzweigungselement hinzutritt.

Da nun im Allgemeinen die Ebene (TX) nicht ein Doppelelement einer der drei quadratischen Involutionen sein kann, die man erhält, wenn man die vier durch T gehenden Tangentialebenen in zwei Paare theilt und diese als eine quadratische Involution bestimmend betrachtet, so muss jede Ebene des Büschels T ein sich selbst entsprechendes Verzweigungselement sein, d. h. es müssen je zwei einander auf R_5 entsprechenden Punkte in einer

durch T gehenden Ebene liegen. Somit ist die Vertauschungsfähigkeit in allen Paaren nachgewiesen, d. h. die Beziehung auf R_5 als eine J_1^2 charakterisirt. Zugleich sehen wir aber: „dass die Paare einer Paarinvolution J_1^2 auf R_5 durch die Ebenen eines Ebenenbüschels bestimmt erscheinen, dessen Axe eine Trisecante ist.“ Die Umkehrung ist sofort klar.

Weiter sehen wir:

„Eine Paarinvolution J_1^2 auf R_5 ist durch ein Paar entsprechender Punkte vollkommen und unzweideutig bestimmt.“

Ist nämlich xx' ein Punktepaar eines J_1^2 und X dessen Verbindungsgerade, so ist die einzige Trisecante T, welche X schneidet, die Axe für das Ebenenbüschel das die J_1^2 auf R_5 bestimmt.

Wir werden desshalb T als die Axe der Paarinvolution bezeichnen.

Es gibt somit auf R_5 einfach unendlich viele J_1^2 den einzelnen T als Axen entsprechend.

Ebenso erkennt man:

„Jede J_1^2 auf R_5 hat vier Doppelpunkte; es sind die Berührungspunkte der vier durch die Axe T der Involution an R_5 gelegten Tangentialebenen.“

Selbstverständlich ist eine J_1^2 auch durch jeden ihrer Doppelpunkte bestimmt.

„Zwei Paarinvolutionen auf R_5 haben kein gemeinschaftliches Elementenpaar; haben sie ein solches, so sind sie identisch.“

Dies folgt aus dem Obigen und ist übrigens nur eine andere Form für den früheren Satz, dass eine Bisecante nur von einer Trisecante (ausserhalb R_5) geschnitten wird.

11. Bezeichnet man die von den Verbindungsgeraden der einzelnen Punktepaare einer Paarinvolution erfüllte Fläche als die der Involution zukommende „Involutionsfläche“, so hat man nach Früherem unmittelbar:

„Die Involutionsfläche einer an R_5 auftretenden Paarinvolution ist eine cubische Regelfläche, welche die Raumcurve R_5 enthält und deren Doppelgerade, die Axe der Involution, eine Trisecante von R_5 ist.“

Wir haben früher gesehen, dass die sämmtlichen Bisecanten einer R_5 gepaart erscheinen, nämlich so, dass die Bisecanten

eines Paares sich in einem auf einer Trisecante gelegenen Punkt schneiden.

„Es sind somit auch die Paare einer jeden auf R_5 auftretenden J_1^2 gepaart, nämlich so, wie sie auf gepaarten Bisecanten liegen.“

Diese gepaarten Bisecanten sind dann die Erzeugendenpaare der entsprechenden Involutionsfläche F_3, welche durch die einzelnen Punkte der Involutionsaxe T hindurchgehen.

12. Den einfach unendlich vielen Paarinvolutionen auf R_5 entsprechen eindeutig die einfach unendlich vielen cubischen Regelflächen, die man durch R_5 legen kann, als Involutionsflächen, und die einfach unendlich vielen Trisecanten von R_5 als Involutionsaxen und zugleich als Doppelgeraden der Involutionsflächen.

In jeder Involutionsfläche F_3 tritt ausser der Doppelgeraden T noch eine einfache Leitlinie S auf, welche, wie man leicht erkennt, eine einpunktige Secante von R_5 sein muss.

Sind nämlich XX_1 zwei gepaarte Erzeugende von F_3, d. h. zwei Bisecanten von R_5, welche durch denselben Punkt von T hindurchgehen, so enthält die Ebene (XX_1) die einfache Leitlinie S von F_3; diese Ebene schneidet R_5 in fünf Punkten, von denen zwei xx' auf X, zwei andere $x_1 x'_1$ auf X_1 liegen, und es muss somit der fünfte o auf S liegen:

„Die den einzelnen Involutionsflächen F_3 zukommenden einfachen Leitlinien S sind einpunktige Secanten von R_5.“

In dieser Art ist jeder Trisecante T ein bestimmter Punkt o von R_5 zugeordnet, jener nämlich, in welchem die einfache Leitlinie S der durch die Trisecante und R_5 bestimmten cubischen Regelfläche der R_5 begegnet.

13. Hat man auf R_5 eine eindeutige Punktbeziehung, in welcher nicht Vertauschungsfähigkeit herrscht, also eine E-Beziehung, und verbindet man irgend zwei entsprechende Punkte x, x' mit irgend einer Trisecante T durch die Ebenen ξ, ξ', von denen die letztere als η betrachtet, R_5 zum fünften Male im Punkte y schneiden möge, so sind zunächst $\xi\xi'$ zwei einander entsprechende Ebenen der symmetrischen Systeme zweiten Grades, welche man erhält, wenn man die E-Beziehung aus T projicirt, und da η mit ξ' identisch ist, so ist der im symmetrischen Systeme herrschenden Vertauschungsfähigkeit wegen η' mit ξ identisch,

so dass der fünfte Schnittpunkt der Ebene $\eta' \equiv \xi \equiv (Tx)$ mit der Curve R_5 der dem y entsprechende Punkt y' sein muss.

„Wenn man zwei entsprechende Punkte xx' einer eindeutigen nicht vertauschungsfähigen Beziehung auf R_5 mit irgend einer Trisecante T von R_5 durch Ebenen verbindet, so schneiden diese Ebenen (Tx), (Tx') die Curve R_5 in zwei neuen entsprechenden Punkten y', y.“

Oder:

„Durch Projection zweier entsprechender Punkte xx' einer E-Beziehung auf R_5 aus den einzelnen Trisecanten T von R_5 auf R_5, erhält man die sämmtlichen übrigen Paare entsprechender Punkte in umgekehrter Ordnung.“

Oder auch:

„Zwei Punktepaare xx', yy' gehören dann einer E-Beziehung an, wenn die Geraden xy', xy' eine und dieselbe Trisecante schneiden.“

Mit anderen Worten:

„Sind xx', yy' zwei Paare einer E-Beziehung, so sind xy', $x'y$ zwei Paare einer Paarinvolution.“

Aus allen diesen Betrachtungen folgt weiter:

„Eine E-Beziehung auf R_5 ist durch ein Paar entsprechender Punkte vollkommen bestimmt.“

Die Vervollständigung aus dem gegebenen Punktepaar xx' ist nach Obigem höchst einfach. Um zu einem Punkte y den entsprechenden y' zu finden, ziehe man $\overline{yx'}$, bestimme die (einzige) Trisecante T, welche die Gerade $\overline{yx'}$ schneidet, so wird die durch T und x gelegte Ebene R_5 in dem gesuchten Punkte y' schneiden.

„Eine E-Beziehung auf R_5 besitzt entweder keinen Doppelpunkt, oder es entspricht jeder Punkt von R_5 sich selbst.“

Wird nämlich angenommen, dass in einer E-Beziehung auf R_5 ein Punkt x sich selbst entspricht, also $x' \equiv x$, so erhält man, wenn x, x' aus den Trisecanten T auf R_5 projicirt werden, Punkte y', y, so dass offenbar immer $y' \equiv y$ ist.

14. Werden zwei einem und demselben Berührungsquadrupel angehörigen Punkte xx' als eine E-Beziehung fixirend gewählt, so folgt zunächst für dieses Paar die Vertauschungsfähigkeit. Man kann x' als y und x als y' betrachten, da die

Geraden xy', $x'y$, das sind die Tangenten von R_5 in x und x', in der That eine und dieselbe Trisecante schneiden. Durch Projection von xx' aus den einzelnen Trisecanten auf R_5 erhält man die übrigen Paare $z'z$ dieser E-Beziehung, und da $x' \equiv y$, $x \equiv y'$, so kann $z' \equiv w$ und $z \equiv w'$ betrachtet werden, so dass in allen Paaren dieser E-Beziehung Vertauschungsfähigkeit herrscht, ohne dass wir eine J_1^2 vor uns haben.

Überdies gehören je zwei Punkte zz' dieser E-Beziehung einem Berührungsquadrupel an; denn der Vertauschungsfähigkeit wegen kann z' als w und z als w' betrachtet werden, und es schneiden nun die Geraden zw', $z'w$ eine und dieselbe Trisecante. Diese Geraden sind aber die Tangenten von R_5 in z, z', so dass z, z' wirklich Berührungspunkte zweier durch eine Trisecante von R_5 gelegten Tangentialebenen sind. Auch hier bezeichnen wir diese besondere vertauschungsfähige E-Beziehung als eine fundamentale E-Beziehung und erkennen sofort, dass es auf R_5 drei solche fundamentale Beziehungen gibt. Ist $p_1 p_2 p_3 p_4$ ein Berührungsquadrupel, so bestimmt das Paar $p_1 p_2$ als Paar entsprechender Punkte eine fundamentale E-Beziehung, deren sämmtliche Paare Quadrupeln angehören, so dass derselben Beziehung auch $p_3 p_4$ als ein Paar angehören muss.

Ebenso gehören $p_1 p_3$, $p_2 p_4$ als zwei Paare entsprechender Punkte einer zweiten, und $p_1 p_4$, $p_2 p_3$ einer dritten fundamentalen E-Beziehung an.

„Unter den einfach unendlich vielen E-Beziehungen auf R_5 gibt es drei fundamentale vertauschungsfähige E-Beziehungen, welche man erhält, wenn man einem Punkte der R_5, einen der mit ihm demselben Berührungsquadrupel angehörigen Punkt als entsprechenden zuordnet. Zu diesen kann als vierte fundamentale vertauschungsfähige Beziehung jene gefügt werden, nach welcher jeder Punkt von R_5 als sich selbst entsprechend betrachtet werden kann.“

Wenn wir in ähnlicher Art wie bei ebenen Curven dritter Ordnung auch bei den Curven vom Geschlechte Eins im Allgemeinen zwei Punkte, welche demselben Berührungsquadrupel angehören, als correspondirende Punkte bezeichnen, so haben wir auf der Curve die drei Systeme correspondirender Punkte, wie sie als Paare in den drei fundamentalen vertauschungs-

fähigen E-Beziehungen auftreten. Aus irgend einem Paare correspondirender Punkte leitet man die sämmtlichen übrigen Paare derselben Systeme ab, indem man jenes aus den einzelnen Trisecanten von R_5 auf die Curve projicirt.

Die Paare correspondirender Punkte eines Systemes werden aus jeder Trisecante durch eine Ebeneninvolution projicirt, so dass auf jeder Trisecante drei solche quadratische Involutionen von Ebenen auftreten.

Jede von diesen Involutionen besitzt zwei Doppelelemente, d. h.:

„Jede Trisecante der R_5 wird von zwei von jenen Geraden geschnitten, welche als Verbindungslinien der correspondirenden Punkte eines Systemes auftreten."

Hieraus folgt weiter:

„Wenn man in einem Systeme correspondirender Punkte jedes Paar durch eine Gerade verbindet, so erfüllen alle diese Geraden eine Regelfläche fünfter Ordnung."

Zunächst ist klar, dass R_5 für die Fläche jener Verbindungsgeraden eine einfache Curve ist; nun wird jede Trisecante von zwei solchen Geraden geschnitten, so dass sie im Ganzen fünf Punkte mit jener Fläche gemeinschaftlich hat (drei liegen nämlich auf der Trisecante und auf R_5).

Solcher Flächen fünfter Ordnung kann man somit drei durch R_5 legen.

Verbindet man je zwei entsprechende Punkte einer beliebigen auf R_5 auftretenden E-Beziehung durch eine Gerade, so werden die so erhaltenen Verbindungsgeraden eine Fläche erfüllen, für welche R_5 offenbar eine Doppelcurve ist; denn es gehen durch jeden Punkt $x \equiv y'$ von R_5 zwei Erzeugende dieser Fläche, nämlich xx' und $y'y$. Jede Trisecante von R_5 schneidet somit die fragliche Fläche sechsmal in den drei Punkten, in denen sie der R_5 begegnet.

Hierzu kommen noch vier weitere Schnittpunkte; das symmetrische Elementensystem, welches man erhält, wenn man die E-Beziehungen aus jener Trisecanten projicirt, hat nämlich, als vom zweiten Grade, vier sich selbst entsprechende Elemente, so dass also jede Trisecante von vier Verbindungs-

geraden entsprechender Punkte der E-Beziehung (ausserhalb R_5) geschnitten wird. Wir haben somit auf jeder Trisecante im Ganzen zehn Punkte jener Fläche, so dass also: „die Fläche, welche von den Verbindungsgeraden entsprechenden Punkte einer E-Beziehung auf R_5 erfüllt wird, von der zehnten Ordnung ist und die Curve R_5 zur Doppelcurve hat.“

Lässt man jeden Punkt von R_5 sich selbst entsprechen, so hat man:

„Die Tangentenfläche von R_5 ist eine Fläche von der zehnten Ordnung.“

Über einen Satz von Stephanos.

Von Dr. **Gustav Kohn** in Wien.

In den Berichten der Pariser Akademie[1] hat Herr Stephanos den folgenden Satz bewiesen:

Ein beliebiger Punkt hat in Bezug auf das System der Punkte, welche ihn zu einer Gruppe einer bestimmten Involution ergänzen, denselben harmonischen Mittelpunkt vom ersten Grade, wie in Bezug auf das System der Doppelpunkte dieser Involution.

Es soll nun in dieser Notiz ein allgemeiner, beliebige algebraische Correspondenzen betreffender Satz entwickelt werden, aus welchem der Satz von Stephanos durch Specialisirung für Involutionen hervorgeht.

Unsere Betrachtungen beruhen wesentlich auf der folgenden, einfachen Bemerkung:

Der harmonische Mittelpunkt vom ersten Grade des Punktes $x = 0$ in Bezug auf eine durch die Gleichung

$$f(x) \equiv a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

gegebene Punktgruppe besitzt den Parameter

$$x = -\mu . \frac{a_0}{a_1} .$$

Man erhält dieses Resultat, wenn man in der bekannten Weise die Gleichung für diesen Parameter aufstellt, nämlich

$$x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} + u \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{x=0} = 0,$$

---

[1] Mémoire sur les faisceaux des formes binaires ayant une même jacobienne, Sav. Étrang. t. XXVII. Nr. 7

wobei $f(x)$ vor Ausführung der hier angedeuteten Operation durch Einführung der Variabeln u homogen zu machen, und nach Ausführung derselben wieder $u = 1$ zu setzen ist.

Dies vorausgeschickt, sei jetzt eine beliebige m-n-deutige Beziehung der Elemente eines rationalen Trägers gegeben durch die Verwandtschaftsgleichung zwischen den Parametern x und y zweier entsprechender Elemente

$$F(x, y) \equiv a_{m,n} x^m y^n + \ldots + a_{1,0} x + a_{0,1} y + a_{0,0} = 0. \qquad 1)$$

Die $m+n$ Doppelelemente dieser Beziehung werden dann durch die Gleichung geliefert:

$$F(x, x) \equiv a_{m,n} x^{m+n} + \ldots + (a_{1,0} + a_{0,1}) x + a_{0,0} = 0. \qquad 2)$$

Durch Transformation der Parameterwerthe lässt sich erreichen, dass der Parameter des ganz beliebig gewählten Elementes p den Werth Null hat und dass gleichzeitig der Parameter des harmonischen Mittelpunktes vom ersten Grade h für den Punkt p als Pol in Bezug auf die $m+n$ Doppelelemente (2) der Correspondenz (1) den Werth unendlich erhält. Dann ist bekanntlich der Parameter eines beliebigen Punktes dem Theilverhältniss desselben bezüglich der Fundamentalpunkte p und h proportional und das Verhältniss der Parameterwerthe zweier Punkte ist nichts anderes als das Doppelverhältniss, welches die beiden Punkte mit den Fundamentalpunkten p und h bestimmen.

Sei (1) schon die Verwandtschaftsgleichung bei dieser speciellen Parametervertheilung, so wird

$$a_{1,0} + a_{0,1} = 0 \qquad 3)$$

sein, denn dies ist nach der vorangestellten Bemerkung die Bedingung dafür, dass der Punkt $x = \infty$ harmonischer Mittelpunkt ersten Grades des Punktes $x = 0$ in Bezug auf die durch (2) gegebene Punktgruppe sei.

Dem Punkt p entsprechen vermöge der Beziehung (1) zwei verschiedene Punktgruppen, je nachdem man ihn zu dem einen oder andern Systeme zählt. Als $x = 0$ entsprechen ihm die durch die n Lösungen der Gleichung

$$F(0, y) \equiv a_{0,n} y^n + a_{0,n-1} y^{n-1} + \ldots + a_{0,1} y + a_{0,0} = 0$$

bestimmten Punkte, als $y = 0$ sind ihm die den n Lösungen der Gleichung

$$F(x, 0) \equiv a_{m,0}\, x^m + a_{m-1,0}\, x^{m-1} + \ldots + a_{1,0}\, x + a_{0,0} = 0 \qquad 5)$$

entsprechenden Punkte zugeordnet. Nach der vorausgeschickten Bemerkung werden also den harmonischen Mittelpunkten ersten Grades h_x und h_y des Punktes p bezüglich dieser beiden Punktgruppen beziehungsweise die Parameterwerthe zukommen:

$$-n.\frac{a_{0,1}}{a_{0,0}} \text{ und } -m.\frac{a_{1,0}}{a_{0,0}}.$$

Für den Quotienten dieser beiden Parameterwerthe, oder was nach Obigem dasselbe ist, für das Doppelverhältniss (p, h, h_x, h_y) erhält man unter Berücksichtigung der Relation (5) den Werth

$$-\frac{n}{m}.$$

Wir haben den Satz:

1. Ist zwischen den Elementen x und y eines rationalen Trägers eine beliebige m-n-deutige Beziehung gegeben und construirt man die harmonischen Mittelpunkte h, h_x, h_y eines beliebigen Punktes p respective in Bezug auf die Gruppe der Doppelpunkte dieser Beziehung und in Bezug auf jedes der beiden Punktsysteme, welche dem Punkte p vermöge der Correspondenz zugeordnet sind, je nachdem man diesen Punkt zum System x oder y rechnet so ist das Doppelverhältniss der vier Punkte p, h, h_x, h_y constant, d. h. unabhängig von der Wahl des Punktes p und zwar ist

$$(p, h, h_x, h_y) = -\frac{n}{m}.$$

Im Falle $m = n$ sind also die vier Punkte p, h, h_x, h_y harmonisch.

Als Folgerung aus diesem Satze ergibt sich sofort:

„Fallen für eine bestimmte Wahl des Punktes p zwei von den Punkten h, h_x, h_y zusammen, so liegen alle drei Punkte vereinigt."

Ist die Verwandtschaftsgleichung (1) unserer Beziehung in Bezug auf x und y symmetrisch d. h. haben wir es mit einem symmetrischen Elementensystem [1] zu thun, so entspricht einem beliebigen Punkte p stets dasselbe Punktsystem, gleichgiltig ob man ihn zum Systeme x oder y rechnet, es fallen also für jeden Punkt p die zugehörigen Punkte h_x und h_y zusammen, so dass sich der folgende Satz ergibt:

2. In einem symmetrischen Elementensysteme hat jedes Element in Bezug auf die ihm entsprechenden Elemente denselben harmonischen Mittelpunkt vom ersten Grade wie in Bezug auf das System der Doppelelemente.

Dieses Resultat umfasst den Satz von Stephanos insofern als speciellen Fall als eine Involution als specielles symmetrisches Elementensystem aufgefasst werden kann.

Aus einer beliebigen m-n-deutigen Beziehung (1) erhält man ein symmetrisches Elementensystem, wenn man jedem Punkte p alle diejenigen $m+n$ Punkte als entsprechend zuweist, welche dem Punkte p entsprechen, wenn man ihn zu dem einen oder andern System rechnet. Es folgt:

„Ein beliebiger Punkt hat denselben harmonischen Mittelpunkt ersten Grades in Bezug auf die $m+n$ Punkte, welche ihm vermöge einer m-n-deutigen Beziehung entsprechen und in Bezug auf die $m+n$ Doppelpunkte dieser Beziehung."

In der That fehlt in der durch Multiplication von (4) und (5) entstehenden Gleichung, wenn darin $y = x$ gesetzt und die Relation (3) berücksichtigt wird, der Coëfficient der ersten Potenz von x.

Für den Fall der Projectivität ist der eben bewiesene Satz schon von Herrn Schröter (Crelle, Bd. LXXVII, pag. 120) gegeben worden. [2]

---

[1] Em. Weyr, Principes d'une théorie des systèmes symmetriques... Mém. de Bord. 10 und Beiträge zur Curvenlehre, Wien, 1880, pag. 8.

[2] Den Schröter'schen Satz hat Herr Pasch (Crelle, Bd. XCI, Math. An. Bd. XXIII) in anderer Richtung verallgemeinert.

Denkt man sich die Elemente eines symmetrischen Elementensystems vom n^{ten} Grade durch die Punkte eines Kegelschnittes K repräsentirt, so ist das Erzeugniss d. h. die Enveloppe der Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve n^{ter} Classe $C^{(n)}$, und umgekehrt bestimmt jede Curve n^{ter} Classe ein symmetrisches Punktsystem auf dem Kegelschnitte K, wenn man je zwei auf derselben Tangente von $C^{(n)}$ gelegene Punkte einander als entsprechend zuweist. Die $2n$ Doppelpunkte des symmetrischen Elementensystems werden durch die Berührungspunkte der $2n$ gemeinschaftlichen Tangenten von K und $C^{(n)}$ gebildet.

In Folge dessen ist der Satz (2) mit dem folgenden gleichwerthig:

„Ein beliebiger Punkt p eines Kegelschnittes K hat in Bezug auf $2n$ beliebige Punkte von K denselben harmonischen Mittelpunkt ersten Grades wie in Bezug auf das System der Schnittpunkte von K mit den n Tangenten, die von p aus an irgend eine Curve $C^{(n)}$ n^{ter} Classe gehen, welche die Tangenten von K in jenen $2n$ Punkten berührt."

Wählt man in dem Falle $n = 2$ den Kegelschnitt $C^{(2)}$ (die Curve $C^{(n)}$ des allgemeinen Falles) so, dass er durch den Punkt p geht, so fallen die beiden von diesem Punkte aus an $C^{(2)}$ gehenden Tangenten, mit der Tangente in diesem Punkte zusammen und es schneidet daher diese Tangente den Fundamentalkegelschnitt K in dem harmonischen Mittelpunkte ersten Grades des Punktes p in Bezug auf die Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von K und $C^{(2)}$.

Der diesem Resultate reciprok gegenüberstehende Satz lautet:

Der harmonische Mittelpunkt ersten Grades eines Punktes p auf einem Kegelschnitte K in Bezug auf ein Punktquadrupel a_1, a_2, a_3, a_4 auf diesem Kegelschnitte ist der Berührungspunkt der Tangente, welche vom Punkte p', der dem Punkte p bezüglich des Viereckes $a_1 a_2 a_3 a_4$ conjugirt ist, ausser $p'p$ an den Kegelschnitt K geht.

Über die Eigenschaften monocyclischer und anderer damit verwandter Systeme.

Von **Ludwig Boltzmann** in Graz,
correspondirendem Mitgliede der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

Der vollständigste mechanische Beweis des zweiten Hauptsatzes bestünde offenbar in der Darlegung, dass bei jedem beliebigen mechanischen Vorgange Gleichungen bestehen, welche denen der Wärmelehre analog sind. Da aber einerseits der Satz in dieser Allgemeinheit nicht richtig zu sein scheint und anderseits wegen unserer Unbekanntschaft mit dem Wesen der sogenannten Atome die mechanischen Bedingungen nicht genau angegeben werden können, unter denen die Wärmebewegung vor sich geht, so entsteht die Aufgabe, zu untersuchen, in welchen Fällen und inwieweit die mechanischen Gleichungen den wärmetheoretischen analog sind. Es wird sich da nicht um Aufstellung von mechanischen Systemen handeln, welche warmen Körpern vollkommen congruent sind, sondern um Auffindung aller Systeme, welche mit dem Verhalten warmer Körper mehr oder weniger Analogie zeigen. In dieser Weise wurde die Frage zuerst von Helmholtz[1] gestellt und ich beabsichtige im Folgenden die von ihm entdeckte Analogie zwischen den Systemen, welche er als monocyclisch bezeichnet, und den Sätzen der mechanischen Wärmetheorie an einigen mit den monocyclischen innig verwandten Systemen weiter zu verfolgen, wobei ich zuvörderst, ehe ich zu allgemeinen Sätzen übergehe, einige ganz specielle Beispiele discutiren will.[2]

§. 1. Ein Massenpunkt bewege sich nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze um einen fixen Centralkörper O in elliptischer

[1] Sitzber. d. Akad. d. Wiss. zu Berlin 6. März und 27. März 1884.

[2] Ein sehr allgemeines Beispiel monocyclischer Systeme bieten widerstandslose elektrische Ströme (vgl. Maxwell, treatise on electricity, art. 579 und 580, wo x und y die Stelle des Helmholtz'schen p_a und p_b vertreten).

Bahn. Die Bewegung ist hier offenbar keine monocyclische; wir können sie aber mittelst eines Kunstgriffes, den ich zuerst im ersten Abschnitte meiner Abhandlung „Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht“[1] anwandte, und welchen nachher Maxwell[2] weiter verfolgt hat, in eine monocyclische verwandeln.

Wir denken uns die ganze elliptische Bahn mit Masse belegt, welche an jedem Punkte eine solche Dichte (auf die Längeneinheit der Bahn entfallende Masse) haben soll, dass während im Verlaufe der Zeit fortwährend Masse durch jeden Bahnquerschnitt strömt, die Dichte in jedem Punkte der Bahn sich unverändert erhält. Würde ein Ring des Saturn aus einer homogenen Flüssigkeit oder einem homogenen Schwarme fester Körperchen bestehen, so könnte er bei passender Wahl des Ringquerschnittes an den verschiedenen Stellen ein Beispiel für die in Rede stehende Bewegung liefern. Äussere Kräfte können die Bewegung beschleunigen oder die Excentricität der Bahn verändern; es kann aber die Bahn auch durch sehr langsame Vermehrung oder Verminderung der Masse des Centralkörpers verändert werden, wobei dann auf den beweglichen Ring äussere Arbeit übertragen wird, da er bei Vermehrung der Masse des Centralkörpers im Allgemeinen auf die hinzukommende Masse nicht dieselbe Anziehung ausübt, wie auf die bei Verminderung hinwegzunehmende. Die diesem überaus einfachen Beispiele entsprechenden Formeln erhält man aus den in meiner Abhandlung: „Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie“[3] Abtheilung 3 entwickelten Formeln, indem man $b = 0$ setzt und unter m die gesammte Masse des beweglichen Ringes versteht. (Dort ist übrigens aus Versehen die auf äussere Arbeit verwendete Wärme mit verkehrtem Zeichen eingeführt.) Ich bezeichne immer mit Φ die ganze potentielle Energie, mit L die ganze lebendige Kraft des Systems, mit dQ die auf directe Steigerung der inneren

---

[1] Sitzber. d. Wiener Akad. Bd. 63. 13. April 1871.

[2] Cambridge Philosophical Transactions Vol. XII. Part III. 6. Mai 1878. (Vergl. auch Wiedemanns Beiblätter, Bd. 5. p. 403. 1881.)

[3] Sitzber. der Wiener Akad. Bd. 75. 11. Jänner 1877. Vgl. auch Clausius Pogg. Ann. Bd. 142 p. 433, Math. Ann. von Clebsch Bd. 4, p. 232, Bd. 6. p. 390. Nachricht. d. Gött. Gesellsch. Jahrg. 1871 und 1872, Pogg. Ann. Bd. 150, p. 106 und Ergänzungsband 7, p. 215.

Bewegung gerichtete Arbeit, wobei ich wie Helmholtz voraussetze, dass die äusseren Kräfte immer nur unendlich wenig von solchen Werthen verschieden sein sollen, welche die augenblicklich vorhandene Bewegung stationär zu erhalten im Stande sind. Sei dann a/r^2 die gesammte Anziehungskraft, welche der Centralkörper auf die Masse des Ringes ausüben würde, wenn dieselbe sich in der Distanz r davon befände, C eine unbestimmbare vollständig constante Grösse, so ist:

$$\Phi = C - 2L,\ dQ = -dL + 2L\,da/a = Ld\log a^2/L$$

es ist also L integrirender Nenner von dQ, der dazugehörende Werth der Entropie S ist $\log a^2/L$ und der dazugehörige Werth der charakteristischen Function ist:

$$K = \Phi + L - LS = C - L - L\log a^2/L.$$

Setzt man

$$2L\sqrt{L}/a = q,\ a/\sqrt{L} = s,$$

so wird $dQ = q\,ds$, wozu die charakteristische Function

$$H = \Phi + L - qs = C - 3L$$

gehört und man sieht sofort, dass

$$\left(\frac{\partial K}{\partial a}\right)_L = \left(\frac{\partial H}{\partial a}\right)_q = -A$$

die auf Vergrösserung von a hinstrebende Kraft ist, in dem Sinne dass Ada das Quantum der inneren Bewegung ist, welches in Arbeit verwandelt wird, wenn a um da wächst. Ebenso ist

$$\left(\frac{\partial K}{\partial L}\right)_a = -S,\ \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_a = -s.$$

Die Analogie mit Helmholtz's monocyclischen Systemen mit einer einzigen Geschwindigkeit q ist also eine vollständige. Es hat auch $\int q dt$ den Charakter einer Coordinate; denn

$$i = \frac{\pi}{q}\sqrt{2m}$$

ist die Umlaufszeit eines Massentheilchens (vgl. meine citirte Abhandlung). Sei $\rho d\sigma$ die Masse auf dem Längenelemente $d\sigma$ der Bahncurve, dt die zur Durchlaufung von $d\sigma$ erforderliche Zeit, v die Geschwindigkeit daselbst, so muss $\rho v = c$ auf der ganzen Bahn constant sein, damit sich die Dichte überall unverändert erhält.

Da $\int \rho v dt$ über die ganze Bahn erstreckt, die Gesammtmasse m des Ringes darstellt, so ist

$$c = m/i = q\sqrt{2m}/2\pi.$$

Ziehen wir vom Centralkörper irgend eine Gerade ins Unendliche, und bezeichnen mit μ die Masse, welche bis zu einem bestimmten Zeitmoment t durch jene Gerade hindurchging, so ist

$$\frac{d\mu}{dt} = \rho v, \text{ daher } q = \frac{2\pi}{\sqrt{2m}}\frac{d\mu}{dt}.$$

Denken wir uns nun irgend ein Massentheilchen des ganzen Ringes besonders hervorgehoben, so ist die Lage dieses Massentheilchens zur Zeit t bestimmt, sobald die Werthe a und μ zu dieser Zeit und die Anfangsposition des Massentheilchens sowie der Anfangswerth von a bekannt ist, ohne dass man die Art und Weise zu kennen braucht, wie sich die Bahn in der Zwischenzeit geändert hat. Es können daher a und μ als die Coordinaten des betreffenden Massentheilchens aufgefasst werden. Dasselbe gilt natürlich auch für jede andere Art von Centralbewegung, sobald nur die Bahn eine geschlossene ist. Wird z. B. jedes Massentheilchen ν mit einer Kraft $\nu ar/m$ gegen den Centralkörper gezogen, so wäre

$$\Phi = L, dQ = 2dL - Lda/a = Ld\log L^2/a, \; q = 2\sqrt{a}, \; s = L/\sqrt{a}$$

§ 2. Die Anwendung des Namens monocyclisch auch auf diese Bewegungsarten dürfte kaum ungerechtfertigt sein, da hier alle Bedingungen, an welche Helmholtz diesen Namen knüpft, erfüllt sind. Dass die lebendige Kraft nicht proportional q^2 ist, gerade als ob Parameter eliminirt wären, dürfte wohl damit zusammenhängen, dass a nicht eine Raumabmessung im eigentlichen Sinne des Wortes ist. Analoge Formeln werden in einem noch allgemeineren Falle gelten. Die Kräfte brauchen keine Centralkräfte zu sein, sondern sie können durch beliebige Functionen der Coordinaten des von ihnen afficirten Massentheilchens dargestellt werden; nur muss eine Kraftfunction existiren, die Kräfte müssen für alle Massentheilchen der Gesammtmasse m dieselben Functionen der Coordinaten sein, und alle Massentheilchen müssen congruente geschlossene Bahnen beschreiben.

Legt man dann durch den Schwerpunkt der Gesammtmasse m eine beliebige Ebene von unveränderlicher Richtung und bezeichnet mit μ die während einer beliebigen Zeit t durch jene Ebene hindurchgegangene Masse, so hat man zu setzen:

$$p_b = \mu,\ q_b = d\mu/dt.$$

Die Bedingung der Bewegung in geschlossener Bahn ist immer erfüllt, wenn sich alle Massentheilchen in Geraden bewegen (ob in einer einzigen oder in beliebig vielen parallelen Geraden ist dabei gleichgiltig). Sei dann μ die während einer beliebigen Zeit t im ersteren Fall durch den Schwerpunkt der Gesammtmasse m, im letzteren Falle durch eine den Schwerpunkt enthaltende auf den Bahnen senkrechte Ebene gegangene Masse, so sei wieder

$$p_b = \mu,\ q_b = \frac{d\mu}{dt} = \frac{m}{i},$$

wobei i die Zeit ist, die ein Massentheilchen zu einem ganzen Hin- und Hergang auf der Geraden braucht. Heben wir jenen Massenpunkt aus der ganzen Masse m hervor, welcher sich zu Anfang der Zeit in deren Schwerpunkt (respective der oben definirten Ebene) befand. Kennt man zu einer beliebigen Zeit t den Werth von p_b und das Wirkungsgesetz der Kräfte, so ist dadurch bestimmt, wo sich der hervorgehobene Massenpunkt zur fraglichen Zeit befindet, ohne dass man die Zwischenzustände des Systems zu kennen braucht. Zur Zeit t sei x die Distanz eines Massenpunktes vom Schwerpunkte der Gesammtmasse (respective jener Ebene), v dessen Geschwindigkeit, $f'(x)$ die auf die Masseneinheit wirkende Kraft, welche x zu verkleinern strebt, so ist:

$$v^2 = 2a - 2f(x),\ i = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2a-2f}},$$

wobei x_1 und x_2 die extremsten Werthe des x sind. Die lebendige Kraft der ganzen Masse ist:

$$L = \frac{m}{i}\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2a-2f}\, dx$$

Die potentielle Energie ist

$$\Phi = \frac{2m}{i}\int_{x_1}^{x_2}\frac{f dx}{\sqrt{2a-2f}};$$

hiebei ist

$$f = f(x),$$

a ist eine Constante.

Man hat daher:

$$H = \Phi - L = ma - 2L.$$

Hiebei gelten a sowie die Form der Function f als die langsam veränderlichen Grössen. Betrachten wir letztere als constant und schreiben die obige Gleichung in der Form

$$iH = mia - 2m\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2a-2f}\,dx,$$

so liefert deren Differentation:

$$H + i\frac{\partial H}{\partial i} = ma + mi\frac{\partial a}{\partial i} - 2m\frac{\partial a}{\partial i}\int_{x^1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{2a-2f}}$$

oder mit Rücksicht auf den für i gefundenen Ausdruck

$$H + i\frac{\partial H}{\partial i} = ma,$$

nach Helmholtz ist statt i die Variable $q = \frac{m}{i}$ einzuführen, was liefert

$$s = -\partial H/\partial q = (ma - H)/q = 2L/q = 2iL/m.$$

Hieraus folgt endlich:

$$dQ = q\,ds = (2/i)d(iL) = 2L.d\log(iL).$$

Dies stimmt genau mit dem, was Clausius für einen etwas specielleren Fall auf ganz anderem Wege erhielt. (Vgl. dessen Abhandlung in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom 19. Juni 1884, welche derselbe die Güte hatte, mir soeben zuzusenden.) Bei richtiger den Helmholtz'schen Annahmen entsprechender Wahl der Coordinaten sind daher dessen Formeln auch auf diesen Fall vollkommen anwendbar. Zum Zwecke des Übergangs zu anderen Gattungen von Systemen will ich die All-

gemeinheit wieder bedeutend beschränken und folgenden Specialfall des Vorigen betrachten.

Ein homogener, überall gleich dichter Strom bewege sich mit der Geschwindigkeit v auf einer horizontalen Geraden von der Länge a zwischen zwei verticalen Wänden, so dass immer dessen halbe Masse $\frac{m}{2}$ in der einen und die gleiche in der entgegengesetzten Richtung strömt. Die Massentheilchen sollen weder aufeinander Kräfte ausüben, noch äusseren Kräften unterworfen sein, mit Ausnahme derjenigen, welche die Arbeit dQ leisten. Von den verticalen Wänden sollen sie gleich elastischen Kugeln abprallen. Dieses System ist strenge monocyclisch. Man hat:

$$q = mv/2a,\ H = -2a^2q^2/m,\ dQ = mv\,dv + mv^2da/a = q\,ds,$$

wobei

$$s = -\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_a;\quad -\left(\frac{\partial H}{\partial a}\right)_q$$

ist der Druck auf die verticale Wand.

Wir modificiren das vorige Beispiel dahin, dass eine Masse m gleichförmig in einem parallelepipedischen Gefässe von den Seiten a, b, c, vertheilt ist. Jedes Massentheilchen soll sich ohne von den andern oder von äusseren Kräften influencirt zu werden (wieder mit Ausnahme der die Arbeit dQ erzeugenden), mit der Geschwindigkeit v in einer Geraden bewegen, welche auf der Seite c senkrecht steht und mit der Seite a den Winkel $\mathfrak{D}$ einschliesst, (für die eine Hälfte der Massentheilchen $+\mathfrak{D}$, für die andere $-\mathfrak{D}$.) Betrachten wir a, b und v als veränderlich, so ist:

$$\Phi = 0,\ L = -H = \frac{mv^2}{2},\ dQ = mv\,dv + mv^2\left(\sin^2\mathfrak{D}\frac{da}{a} + \cos^2\mathfrak{D}\frac{db}{b}\right);$$

die Gleichungen nehmen daher genau die Form der Helmholtz'schen an, wenn man a und b als Parameter p_a wählt und

$$q = v/a^{\sin^2\mathfrak{D}}b^{\cos^2\mathfrak{D}}$$

setzt.

$$-\left(\frac{\partial H}{\partial a}\right)_{bq} \text{ und } -\left(\frac{\partial H}{\partial b}\right)_{aq}$$

sind die Drucke in den Richtungen a und b; dQ ist gleich $q\,ds$, wobei

$$s = -\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{ab}.$$

Dagegen wäre die lebendige Kraft nicht mehr integrirender Nenner von dQ, wenn man auch solche äussere Kräfte zuliesse, welche den Winkel 𝔇 langsam und für alle Massenpunkte gleichmässig verändern.

Würde die Masse m mit der constanten Geschwindigkeit v nach allen möglichen Richtungen des Raumes in einem Gefässe vom Volumen w strömen, so hätte man zu setzen:

$$q = \frac{v}{w^{1/3}} \quad p_a = w$$

und die Gleichungen würden wieder genau die Helmholtz'sche Form annehmen. Allein in allen diesen Fällen hat $\int q dt$ nicht mehr den Charakter einer Coordinate, da die Bewegung keine nach einer endlichen Zeit in sich zurücklaufende ist. Ich möchte mir erlauben, Systeme, deren Bewegung in diesem Sinne stationär ist, als monodische oder kürzer als Monoden zu bezeichnen.[1] Sie sollen dadurch charakterisirt sein, dass die in jedem Punkte derselben herrschende Bewegung unverändert fortdauert, also nicht Function der Zeit ist, solange die äusseren Kräfte unverändert bleiben und dass auch in keinem Punkte und keiner Fläche derselben Masse oder lebendige Kraft oder sonst ein Agens ein- oder austritt. Ist die lebendige Kraft integrirender Nenner des Differentiales dQ der auf directe Steigerung der inneren Bewegung gerichteten Arbeit, so will ich sie als Orthoden bezeichnen. Für alle Orthoden gelten Gleichungen, welche denen der mechanischen Wärmetheorie vollkommen analog sind.

Sei dQ das Differential der auf directe Steigerung der inneren Bewegung der Orthode gerichteten Arbeit oder der einem warmen Körper zugeführten Wärme. Wir nehmen an, dass L ein integrirender Nenner von dQ ist; für warme Körper ist dies erfüllt, wenn die Temperatur der lebendigen Kraft der Bewegung proportional ist. p seien beliebige Parameter. Wir setzen:

$$dQ = d\Phi + dL + \Sigma P dp = 2L d \log s.$$

---

[1] Mit dem Namen stationär wurde von Clausius jede Bewegung bezeichnet, wobei Coordinaten und Geschwindigkeiten immer zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen bleiben.

Sei dann q ein beliebiger anderer integrirender Nenner von dQ und $dQ = qdS$, so besitzt nach Gibbs[1] auch $\Phi + L - qS$ die Eigenschaften der Massieu'schen charakteristischen Function. Setzen wir $q = 2L/s$, so wird

$$dQ = q\,ds$$

und der dazugehörende Werth der charakteristischen Function ist $H = \Phi - L$ genau wie es Helmholtz für monocyclische Systeme fand. (Vgl. l. c. p. 173.) Nur ist jetzt $\int q dt$ im Allgemeinen nicht mehr eine Coordinate. Für $q = 2L/s^n$ wird $H \doteq \Phi + L(n-2)/n$, für $n = 2$, $H = \Phi$.

Ich erwähne hier noch beiläufig, dass der angeführte Gibbs'sche Satz in gewissen singulären Fällen illusorisch werden kann, wenn nämlich q blos Function der Parameter p ist. So ist für Gase nach Helmholtz's Bezeichnung (l. c. p. 170):

$$dQ = J\gamma d\vartheta + J(c-\gamma)\frac{\vartheta dv}{v} = \frac{J\gamma}{v^{\frac{c-\gamma}{\gamma}}}\,d\left(\vartheta v^{\frac{c-\gamma}{\gamma}}\right).$$

Setzt man

$$q = J\gamma/v^{\frac{c-\gamma}{\gamma}},\quad S = \vartheta v^{\frac{c-\gamma}{\gamma}},$$

so wird

$$H = J\gamma\vartheta - qS = 0,$$

ist also als charakteristische Function unbrauchbar. Dasselbe tritt in dem am Schlusse des §. 1 angeführten Beispiele für den dort mit q bezeichneten integrirenden Nenner ein.

§ 3. Nach diesen einleitenden Beispielen will ich zu einem sehr allgemeinen Falle übergehen. Sei ein beliebiges System gegeben, dessen Zustand durch beliebige Coordinaten $p_1\ p_2 \ldots p_g$ charakterisirt sei; die dazu gehörigen Momente seien $r_1\ r_2 \ldots r_g$. Wir wollen sie kurz die Coordinate $p_\mathfrak{g}$ und die Momente $r_\mathfrak{g}$ nennen. Dasselbe sei beliebigen inneren und äusseren Kräften ausgesetzt; erstere seien conservativ. ψ sei die lebendige Kraft, χ die potentielle Energie des Systems. Dann ist also χ eine Function der $p_\mathfrak{g}$, ψ eine homogene Function zweiten Grades der $r_\mathfrak{g}$, deren Coëfficienten ebenfalls die $p_\mathfrak{g}$ enthalten können. Die willkürliche zu χ hinzutretende Constante wollen wir so bestimmen, dass χ etwa für unendliche Entfernung aller Massentheilchen des Systems oder sonst für eine der Variation unfähige Position verschwindet.

[1] Transact. of t. Conn. Acad. III, p. 108, 1875.

Wir machen nicht die beschränkende Annahme, dass gewisse Coordinaten des Systems gezwungen sind, bestimmte Werthe zu behalten, können daher auch die Veränderung der äusseren Kräfte nicht dadurch charakterisiren, dass gewisse bei Constanz der äusseren Kräfte constante Parameter ihre Werthe langsam verändern. Der langsamen Veränderlichkeit der äusseren Kräfte soll vielmehr dadurch Rechnung getragen werden, dass χ allmälig eine andere Function der Coordinaten p_g wird, oder dass sich gewisse in χ vorkommende Constanten, deren eine p_a heissen soll, langsam verändern.

$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ sollen solche nur die Coordinaten p_g und Momente r_g enthaltende Functionen sein, welche, gleich Constanten gesetzt, die Bewegungsgleichungen des Systems erfüllen. Ihre Werthe werden sich natürlich allmälig ändern können, wenn sich χ ändert.

1. Fall. Wir denken uns nun sehr viele N genau gleich beschaffene derartige Systeme vorhanden; jedes System von jedem andern völlig unabhängig. Die Anzahl aller dieser Systeme, für welche die Coordinaten und Momente zwischen den Grenzen

$$p_1 \text{ und } p_1+dp_1, \; p_2 \text{ und } p_2+dp_2 \ldots\ldots r_g \text{ und } r_g+dr_g$$

liegen, soll sein:

$$dN = Ne^{-h(\chi+\psi)} \sqrt{\Delta}\, d\sigma d\tau / \int\int e^{-h(\chi+\psi)} \sqrt{\Delta}\, d\sigma d\tau$$

wobei

$$d\sigma = \Delta^{-\frac{1}{2}} dp_1\, dp_2 \ldots dp_g, \quad d\tau = dr_1\, dr_2 \ldots\ldots dr^g$$

ist. (Über die Bedeutung von Δ siehe Maxwell l. c. pag. 556.)

Die Integrale sind über alle möglichen Werthe der Coordinaten und Momente zu erstrecken. Der Inbegriff aller dieser Systeme bildet eine Monode im früher definirten Sinne (vgl. hierüber namentlich Maxwell l. c.) und ich will die so definirte Gattung von Monoden mit dem Namen Holoden bezeichnen. Jedes der Systeme nenne ich ein Element der Holode. Die gesammte lebendige Kraft der Holode ist:

$$L = Ng/2h$$

Deren potentielle Energie Φ ist gleich dem Nfachen Mittelwerthe $\bar{\chi}$ des χ, es ist also:

$$\Phi = N\int \chi e^{-h\chi} d\sigma / \int e^{-h\chi} d\sigma.$$

Die Coordinaten p_g unterscheiden sich dadurch von den Helmholtz'schen p_b, dass sie in der lebendigen Kraft ψ und potentiellen Energie χ eines Elements vorkommen. Die Bewegungsintensität der ganzen Ergode, also sowohl L als auch Φ sind nur von h und den p_a abhängig, wie bei Helmholtz von q_b und p_a.

Die auf directe Steigerung der inneren Bewegung gerichtete Arbeit ist:

$$\delta Q = \delta\Phi + \delta L - N\int \delta\chi e^{-h\chi}\, d\sigma / \int e^{-h\chi}\, d\sigma$$

(vgl. hierüber meine Abhandlung „Analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie aus den Sätzen über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft.[1]" und Maxwell l. c.). Der Betrag der inneren Bewegung, welcher aus äusserer Arbeitsleistung entsteht, sobald der Parameter p_a und δp_a wächst, ist also $-P\delta p_a$, wobei

$$-P = N\int \frac{\partial\chi}{\partial p_a} e^{-h\chi}\, d\sigma / \int e^{-h\chi}\, d\sigma.$$

Die lebendige Kraft L ist integrirender Nenner von δQ; alle Holoden sind daher orthodisch und es müssen folglich auch die übrigen wärmetheoretischen Analogien bestehen. In der That setzt man:

$$s = \frac{1}{\sqrt{h}}\left(\int e^{-h\chi} d\sigma\right)^{1/g} e^{h\bar{\chi}/g} = \sqrt{\frac{2L}{Ng}}\left(\int e^{-h\chi} d\sigma\right)^{1/g} e^{\Phi/2L}$$

$$q = 2L/s,\ K = \Phi + L - 2L\log s,\ H = \Phi - L$$

so wird

$$dQ = 2Ld\log s = q\,ds, \left(\frac{\partial K}{\partial p_a}\right)_h = \left(\frac{\partial H}{\partial p_a}\right)_q = -P, \left(\frac{\partial K}{\partial h}\right) =$$

$$-2\log s, \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) = -s.$$

2. Fall. Es sollen wieder sehr viele (N) Systeme von der zu Anfang dieses Paragraphen geschilderten Beschaffenheit vorhanden sein; allein für alle derselben sollen die Gleichungen

$$\varphi_1 = a_1,\ \varphi_2 = a_2, \ldots \varphi_k = a_k$$

erfüllt sein. dN sei die Zahl der Systeme, für welche die Coor-

---

[1] Sitzber. d. Wiener Akad. Bd. 63, April 1871. Formel 17.

dinaten und Momente zwischen den Grenzen p_1 und p_1+dp_1, p_2 und $p_2+dp_2 \ldots r_g$ und r_g+dr_g liegen. Natürlich fehlen hier die Differentiale derjenigen Coordinaten oder Momente, welche durch die Gleichungen $\varphi_1 = a_1 \ldots$ bestimmt gedacht werden. Diese fehlenden Coordinaten oder Momente sollen $p_c, p_d \ldots r_f$ heissen; ihre Anzahl sei gleich k. Wenn dann

$$dN = \frac{N dp_1 dp_2 \ldots dr_g / \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_c} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_d} \cdots \frac{\partial \varphi_k}{\partial r_f}}{\int\int dp_1 dp_2 \ldots dr_g / \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_c} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_d} \cdots \frac{\partial \varphi_k}{\partial r_f}}$$

ist, so wollen wir den Inbegriff aller N Systeme als eine Monode bezeichnen, welche durch die Gleichungen $\varphi_1 = a_1 \ldots$ beschränkt ist. Jedes einzelne System heisst wieder ein Element. Monoden, welche nur durch die Gleichung der lebendigen Kraft beschränkt sind, will ich als Ergoden bezeichnen. Sie sind dadurch definirt, dass

$$dN = \frac{N dp_1 dp_2 \ldots dp_g dr_1 \ldots dr_{g-1} / \frac{\partial \psi}{\partial r_g}}{\int\int \ldots dp_1 dp_2 \ldots dr_{g-1} / \frac{\partial \psi}{\partial r_g}}$$

ist. Bezeichnen wir die für alle Systeme gleiche und während der Bewegung jedes Systemes constante Energie eines Systemes $\chi + \psi = (\Phi + L)/N$ mit a und setzen $\Delta^{-\frac{1}{2}} dp_1 dp_2 \ldots dp_g = d\sigma$, so ist (vgl. meine und **Maxwell's** zuletzt citirte Abhandlung):

$$\Phi = N \int \chi \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma / \int \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma, \quad L = N \int \psi^{\frac{g}{2}} d\sigma / \int \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma$$

$$\delta Q = N \int \delta \psi \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma / \int \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma = \delta(\Phi + L) - N \int \delta \chi \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma / \int \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma$$

L ist wieder integrirender Factor von δQ, die dazugehörende Entropie ist $\log(\int \psi^{\frac{g}{2}} d\sigma)^{\frac{2}{g}}$ während auch $\delta Q = q \delta s$ wird, wenn $s = (\int \psi^{\frac{g}{2}} d\sigma)^{\frac{1}{g}}$, $q = 2L/s$ gesetzt wird. Zur letzteren Entropie gehört wieder die charakteristische Function $\Phi - L$. Die äussere Kraft in der Richtung des Parameters p_a ist

$$-P = N \int \frac{\partial \chi}{\partial p_a} \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma / \int \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma.$$

Der Zustand eines Elementes einer Ergode ist durch gewisse Parameter p_a bestimmt. Sobald jedes Element der Ergode ein

Aggregat materieller Punkte ist und die Zahl der Parameter p_8 kleiner ist, als die Zahl aller rechtwinkeligen Coordinaten aller materiellen Punkte eines Elementes, so wird es immer gewisse Functionen dieser rechtwinkeligen Coordinaten geben, welche während der gesammten Bewegung constant bleiben, und die vorhergehenden Entwicklungen setzten voraus, dass diese Functionen auch während der Zu- und Abfuhr der lebendigen Kraft constant bleiben. Würde man ausser der Veränderlichkeit der in der Kraftfunction vorkommenden Parameter auch noch eine langsame Veränderlichkeit dieser Functionen, welche dann die Rolle der Helmholtz'schen p_a spielen würden, und welche hier gerade so wie die besagten Parameter mit p_a bezeichnet werden sollen, zulassen, so würde man zu Gleichungen gelangen, welche sowohl meine früheren als auch die Helmholtz'schen Entwicklungen umfassen. Hierüber mögen noch hier einige Bemerkungen Platz finden.

Die Formeln, welche auf die Formel 18 meiner Abhandlung „Analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie aus den Sätzen über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft“ folgen, sind daselbst nicht in ihrer vollen Allgemeinheit entwickelt, indem dort erstens nur von einem Systeme die Rede ist, welches für sich allein alle möglichen mit dem Princip der lebendigen Kraft vereinbaren Zustände durchläuft und 2. blos von gewöhnlichen rechtwinkeligen Coordinaten Gebrauch gemacht wird; doch sieht man ohneweiters nach dem von Maxwell in dessen hier schon oft citirten Abhandlung „on Boltzmanns theorem etc.“ Gesagten, dass diese Formeln auch für beliebige durch beliebige generalisirte Coordinaten bestimmte Ergoden gelten müssen. Sind dieselben $p_1, p_2, \ldots p_g$, so erhält man:

$$dN/N = \Delta^{-\frac{1}{2}} \psi^{\frac{g}{2}-1} dp_1 \ldots dp_g / \int\int \ldots \Delta^{-\frac{1}{2}} \psi^{\frac{g}{2}-1} dp_1 \ldots dp_g$$

wobei N die Gesammtzahl der Systeme der Ergode ist, dN die Zahl derjenigen, deren Coordinaten zwischen den Grenzen p_1 und $p_1 + dp_1$, p_2 und $p_2 + dp_2 \ldots p_g$ und $p_g + dp_g$ eingeschlossen sind. ψ ist die hierbei in Form von Geschwindigkeit in einem Systeme vorhandene lebendige Kraft. Ist L die gesammte lebendige Kraft der Ergode, so ist:

$$\delta Q = (2L/g) . \delta \log \int\int . . \Delta^{-\frac{1}{2}} \psi^{\frac{g}{2}} dp_1 . . dp_g =$$

$$= 2N\delta \int\int . . \Delta^{-\frac{1}{2}} \psi^{\frac{g}{2}} dp_1 . . dp_g / g \int\int . . \Delta^{-\frac{1}{2}} \psi^{\frac{g}{2}-1} dp_1 . . dp_g$$

die gesammte ihr zugeführte Wärme in Arbeitsmass. Es ist hiebei gleichgiltig, ob man sich die Kraftfunction direct als veränderlich denkt oder ob man annimmt, es gäbe ausser den Coordinaten p_g noch andere Coordinaten p_a, welche bei unveränderlichem Zustande der Ergode constant sind, sich aber langsam verändern, sobald sich dieser Zustand verändert, was natürlich im Allgemeinen auch mit einer Veränderung des Werthes der Kraftfunction für gegebene Werthe von p_g verbunden ist. Um dies einzusehen, ist es gut, sich die p_g so gewählt zu denken, dass ihre Grenzen durch die Veränderung der p_a nicht direct, sondern höchstens durch die damit verbundene Veränderung der Kraftfunction beeinflusst werden. Für den Satz selbst ist es vollkommen gleichgiltig, von welchen Coordinaten man Gebrauch macht. Helmholtz's monocyclische Systeme mit einer Geschwindigkeit sind nichts Anderes, als Ergoden mit einer einzigen rasch veränderlichen Coordinate, welche p_g heissen soll, da sie nicht wie das Helmholtz'sche p_a der Bedingung unterworfen ist, dass ihre Ableitung nach der Zeit sehr langsam veränderlich ist. Für alle Massenbewegungen in einer geschlossenen Bahn, seien es Rotationsbewegungen oder Flüssigkeitsströmungen durch in sich zurücklaufende Canäle oder Centralbewegungen, könnten wir behufs Veranschaulichung des in Rede stehenden Satzes unter p_g den Polarwinkel ϑ von einem innerhalb der Bahn liegenden Punkte aus gezählt, unter p_a $(r\vartheta) =$ constant die Gleichung der als eben vorausgesetzten Bahn verstehen. Die obige Formel für δQ liefert dann

$$\delta Q = \frac{m\int_0^{2\pi} r^2 \omega d\vartheta}{\int_0^{2\pi} d\vartheta/\omega} \delta \log \int_0^{2\pi} r^2 \omega d\vartheta = \frac{m \int_0^{2\pi} d\vartheta \delta(r^2\omega)}{\int_0^{2\pi} d\vartheta/\omega},$$

worin ϑ der Variation nicht fähig ist; ω ist gleich $d\vartheta/dt$; m ist die Gesammtmasse der Ergode. Die Formel gilt übrigens auch, wenn man unter p_g den Weg s versteht und zwar für ebene und nicht

ebene Bahnen. Dann wird, wenn man $\frac{ds}{dt} = v$ setzt,

$$\delta Q = \frac{m}{\int ds/v} \cdot \delta \int v ds,$$

wobei der erste Factor die von Helmholtz mit q_b, der auf das Zeichen δ folgende Ausdruck die von Helmholtz mit s_b bezeichnete Grösse ist. Ihre Werthe stimmen sowohl für Rotationsbewegungen, als auch für Flüssigkeitsströmungen in zurücklaufenden Canälen mit den von Helmholtz gefundenen überein, und da wir hier wieder das im Principe der kleinsten Wirkung erscheinende Integrale $\int v ds$ haben, von dem ich schon im Jahre 1866 ausging, so tritt wohl am besten der innere Zusammenhang aller dieser Untersuchungen zu Tage. Variirt man das Integrale wirklich, so liefert $\int \delta v ds$ die auf directe Steigerung der lebendigen Kraft der Bewegung, $\int v \delta ds$ aber die auf Arbeitsleistung verwendete Wärmemenge. In der That, wenn R der Krümmungsradius der Bahn, δR die Verschiebung des Elementes ds in der Richtung R ist, so ist bei passender Art der Variation $\delta ds = \delta R ds/R$. Die auf ds vorhandene Masse ist

$$dm = \rho v dt = m dt/i = m ds/v i$$

und deren Arbeit gegen die Centripetalkraft ist

$$v^2 dm \delta R/R = m v ds \delta R/iR = \frac{m v \delta ds}{\int ds/v}.$$

Für den Fall, dass sich die Masse m ergodisch auf einer Fläche bewegt, ist $g = 2$. Dann ist also ein endliches Flächenstück ganz mit Massentheilchen bedeckt, und die Dichte bleibt an jeder Stelle constant. Die Masse dm, welche sich auf einem Flächenelemente do befindet, ist proportional der in Gleichung 24) meiner Abhandlung „einige Sätze über Wärmegleichgewicht“ bestimmten Grösse dt_4, also gleich $m do/\int do$. Ferner ist

$$\delta Q = (m/2\int do)\delta \int v^2 do,$$

wobei wieder $\int do \delta(v^2)$ die auf Steigerung der lebendigen Kraft, $\int v^2 \delta do$ aber die auf Überwindung der Centripetalkräfte aufgewendete Wärme ist, wovon man sich leicht durch wirkliche Ausrechnung jener Centripetalkräfte überzeugt, wobei zu berücksichtigen ist, dass in der Ergode für jeden Punkt der Fläche jede Geschwindigkeitsrichtung gleich wahrscheinlich ist.

Zur Kenntniss der Dichinolyle.

Von **Otto W. Fischer.**

(Aus dem Laboratorium der Wiener Handelsakademie X.)

Ähnlich wie zwei Moleküle Benzol unter Austritt von zwei H-Atomen zu einem Molekül Diphenyl sich vereinigen, entstehen durch Vereinigung zweier Chinolinmoleküle unter Austritt von zwei H Verbindungen von der Formel $C_{18}H_{12}N_2$, von welchen Dichinolylen bis heute zwei bekannt sind. Eines derselben hat Weidel[1] durch Einwirkung von metallischem Natrium auf Chinolin erhalten (α-Dichinolyl, Schmelzpunkt 175·5°); das zweite haben Japp und Graham[2] aus Benzoylchlorid und Chinolin dargestellt (β-Dichinolyl, Schmelzpunkt 191°), welch' letzteres Weidel[3] auch in geringer Menge unter den Destillationsproducten der Cinchoninsäure mit Kalk aufgefunden hat. Endlich haben noch Williams[4] und nach ihm Claus[5] durch Erhitzen von salzsaurem Chinolin allein oder unter Zusatz von Anilin oder Chinolin auf 180—200° eine krystallisirte Base vom Schmelzpunkte 114° erhalten, die aber nur amorphe Salze bildet und die sie als Dichinolin $C_{18}H_{14}N_2$ ansprechen, also als wirkliches Condensationsproduct des Chinolins.

Wie bei den genannten Körpern die Chinolinreste verbunden sind, ist bisher nicht bekannt, da die einzigen hierüber angestellten Versuche von Weidel, durch Oxydation des α-Dichinolyls zu einer Säure zu gelangen, die aller Wahrscheinlichkeit nach Rückschlüsse gestattet hätte, ohne Resultat blieben.

---

1 Monatshefte II. 491.
2 Berl. Berichte 1881. 1287.
3 Monatshefte II. 501; siehe auch König's, Berl. Ber. 1879. 99.
4 Berl. Berichte 1881, 1110.
5 Berl. Berichte 1881, 1940.

Durch Anwendung der Skraup'schen Glycerin-Chinolinreaction auf die beiden isomeren Diamidodiphenyle konnten nun möglicherweise auf synthetischem Wege Dichinolyle gewonnen werden, deren Verkettung bekannt ist.

Die ersten Versuche gelangten mit dem Benzidin zur Ausführung, welches die beiden NH_2-Gruppen in der Parastellung besitzt,

NH_2—⟨⟩—⟨⟩—NH_2

Benzidin,

von welchem also ein Dichinolyl folgender Constitution zu erwarten war:

Dichinolyl[1]

14 Grm. Benzidin, 9·6 Grm. Nitrobenzol, 48 Grm. Glycerin und 40 Grm. englische Schwefelsäure wurden in einem Kolben vor dem Rückflusskühler auf dem Sandbade $2^1/_2$ Stunden lang erhitzt. Die anfangs durch gebildetes Benzidinsulfat breiige Masse kam nach vollständiger Verflüssigung in gelindes Sieden, wurde dann bald braun und dickflüssig. Schon nach zwei Stunden war kein Nitrobenzol mehr nachweisbar. Chinolin ist bei der Reaction höchstens in Spuren gebildet worden, da aus der mit Wasser verdünnten und alkalisch gemachten Flüssigkeit durch Wasserdampf nur einige milchige Tropfen übergingen, deren Geruch mit dem des Chinolins übrigens nicht ganz übereinfiel.

Das im Destillationskolben zurückgebliebene schwarze Harz wurde nun erkalten gelassen, mit Wasser gut gewaschen und dann wiederholt mit Benzol ausgekocht. Die ersten Benzolauszüge sind intensiv gelb gefärbt; nach zwei- bis dreimaliger Wieder-

[1] Die Bezeichnung „Dichinolyl" für diese Base und deren Isomere ist wohl die natürlichste, dem Namen Dichinolin zum mindestens desshalb schon vorzuziehen, um Verwechslungen mit den von Williams und Claus dargestellten Basen, welche die genannten Chemiker als wirkliche „Dichinoline" $(C_9H_7N)_2$ ansehen, zu vermeiden.

Skraup.

holung geht fast nichts mehr in Lösung. Eine ziemliche Menge eines spröden Harzes, das fast wie Aldehydharz aussieht und das beim Erhitzen nicht die Spur Chinolingeruch gibt, bleibt zurück. Die vereinigten Benzollösungen wurden durch Schütteln mit geglühter Pottasche getrocknet und bis auf einen geringen Rest abdestillirt. Aus dem Rückstande schieden sich nun beim Erkalten reichlich gelbe Krystalle aus, die durch Absaugen von der Mutterlauge getrennt, auf Thonplatten gestrichen und schliesslich im Wasserbade vollständig getrocknet wurden.

Die so erhaltene noch unreine Base wird nun zur weiteren Reinigung in sehr verdünnter Salzsäure gelöst, mit Kalilauge gefällt und mit Äther ausgeschüttelt, am besten so, dass zu der schon mit Äther überschichteten Lösung Alkali gesetzt wird, weil so die Hauptmenge der Base gleich in Lösung gebracht wird. Die färbenden Verunreinigungen gehen dabei nicht in Äther über.

Nach dem Abdestilliren der Hauptmenge des Äthers hinterbleibt die Base in fast farblosen Blättchen, die rasch abgesaugt, mit Äther gut nachgewaschen und über Schwefelsäure getrocknet werden. Ist nicht alle Mutterlauge verdrängt, so wird die Base beim Trocknen leicht harzig.

Aus 14 Gramm Benzidin wurden so etwa 8 Gramm reiner Base erhalten, die beschriebene Methode ist daher zur Darstellung des Körpers gut geeignet.

Die einmal aus Alkohol umkrystallisirte Base stellt farblose Blättchen mit lebhaftem Perlmutterglanz dar, die bei 175 –176° schmelzen, sowohl in heissem als kaltem Wasser unlöslich sind, aber ziemlich leicht von heissem Alkohol und Benzol, schwieriger von Äther aufgenommen werden. Beim Erhitzen über ihren Schmelzpunkt sublimirt sie anfangs in Blättchen (Schmelzpunkt 177°) und destillirt dann über der Thermometergrenze, aber nicht ohne theilweise Zersetzung zu erleiden.

Die Analyse der reinen Verbindung ergab folgende Werthe:

0·2500 Grm. gaben 0·7740 Grm. CO_2 und 0·1098 Grm. H_2O.

	Berechnet für $C_{18}H_{12}N_2$	Gefunden
C	84·37%	84·46%
H	4·69%	4·88%

Das Dichinolyl bildet mit Säuren und Jodmethyl zwei Reihen von gut krystallisirenden Verbindungen.

Neutrales Chlorhydrat. Aus einer Lösung der Base in mässig concentrirter Salzsäure krystallisirt nach einiger Zeit das Chlorhydrat in langen, seideglänzenden Nadeln.

Die Analyse des lufttrockenen Salzes ergab Werthe, die auf die Formel $(C_{18}H_{12}N_2)\,2HCl + 4H_2O$ stimmen.

0·3105 Grm. gaben 0·2196 Grm. AgCl.

Berechnet für $(C_{18}H_{12}N_2)\,2HCl + 4H_2O$	Gefunden
Cl......17·70%	17·49%

Wird eine alkoholische Lösung der Base sehr vorsichtig mit Salzsäure versetzt, so fallen kugelig zusammengeballte Nadeln aus, die das basische Salz $(C_{18}H_{12}N_2)HCl$ sind.

Das saure Sulfat krystallisirt aus einer Lösung der Base in überschüssiger verdünnter Schwefelsäure in büschelförmig angeordneten langen Nadeln, die sich schon mit Wasser in ihre Componenten zerlegen. An der Luft wird es allmälig gebräunt.

0·2986 Grm. luftrockener Substanz gaben 0·3090 Grm. $BaSO_4$.

Berechnet für $(C_{18}H_{12}N_2)\,2H_2SO_4$	Gefunden
H_2SO_4......43·36%	43 52%

Neutrales Sulfat. Es fällt als weisser krystallinischer Niederschlag aus, wenn eine Lösung der Base in Alkohol mit der berechneten Menge Schwefelsäure versetzt wird. Mit Wasser zersetzt es sich und bräunt sich beim Liegen an der Luft, noch stärker beim Trocknen.

0·3423 Grm. luftrockene Substanz gaben 0·1948 Grm. $BaSO_4$.

Berechnet für $(C_{18}H_{12}N_2)H_2SO_4 + 3H_2O$	Gefunden
H_2SO_4......24 01%	23·93%

Die drei Moleküle Krystallwasser werden erst vollständig bei 150° abgegeben.

0·2508 Grm. lufttrockene Substanz verloren 0·0333 Grm.

Berechnet für $(C_{18}H_{12}N_2)H_2SO_4+3H_2O$	Gefunden
H_2O......13·23%	13·27%

0·2175 Grm. bei 150° getrocknet gaben 0·1431 Grm. $BaSO_4$.

Berechnet für $(C_{18}H_{12}N_2)H_2SO_4$	Gefunden
H_2SO_4......27·68%	27·76%

Platindoppelverbindung. Auf Zusatz von Platinchlorid zur heissen, verdünnt salzsauren Lösung der Base fällt augenblicklich ein matt orangegelber, fein krystallinischer Niederschlag aus, der in kaltem und heissen Wasser und in Salzsäure nahezu unlöslich ist.

0·2993 Grm. bei 105° getrocknet verloren 0·0036 Grm. H_2O = 1·20 Proc.
0·2957 Grm. bei 105° getrocknet gaben 0·0867 Grm. Pt.

Berechnet für $(C_{18}H_{12}N_2)H_2Cl_6Pt$	Gefunden
Pt......29·31%	29·32%

Chromat. Wird zu einer heissen Lösung der Base in möglichst wenig verdünnter Salzsäure Kaliumbichromat gebracht, so fällt augenblicklich das Chromat in feinen, glänzenden Nadeln von röthlichgelber Farbe aus, die in heissem Wasser nahezu unlöslich sind, aus kochender verdünnter Salzsäure aber umkrystallisirt werden können.

0·2591 Grm. gaben 0·0819 Grm. Cr_2O_3.

Berechnet für $(C_{18}H_{12}N_2)H_2Cr_2O_7$	Gefunden
CrO3....32·06%	31·61%

Pikrat. Lichtgelbe mikroskopische Prismen, die schon beim Vermengen der kochenden, alkoholischen Lösungen der Componenten ausfallen und die in Wasser und Alkohol kaum löslich sind. Uber 260° erhitzt, zersetzen sie sich.

0·2012 Grm. bei 100° getrocknet gaben 0·4353 Grm. CO_2 und 0·0744 Grm. H_2O.

Berechnet für $(C_{18}H_{12}N_2)C_6H_2OH(NO_2)_3$	Gefunden
C......59·38%	59·00%
H...... 3·09%	4·10%

Jodmethylverbindungen. Mit Jodmethyl bildet das Dichinolyl zwei Additionsproducte.

Das Monojodmethyldichinolyl wird in lichtgelben, kleinen Krystallen erhalten, wenn zu einer Lösung der Base in Methylalkohol die berechnete Menge Jodmethyl gebracht wird. Nach einiger Zeit beginnt dann die Krystallausscheidung, die durch einmaliges Umkrystallisiren aus sehr verdünntem Methylalkohol gereinigt wird.

0·2301 Grm. gaben 0·1356 Grm. Ag J.

Berechnet für $(C_{18}H_{12}N_2)CH_3J$	Gefunden
J......31·91%	31·84%

Dijodmethyldichinolyl. Wird die Base mit einem Überschusse von Jodmethyl im geschlossenen Rohre zwei Stunden lang auf 100° erhitzt, so erhält man nicht die Monojodmethylverbindung sondern die Dijodmethylverbindung. Die Röhre ist mit lichtgelben Krystallen erfüllt, die nach dem Verdunsten des überschüssigen Methyljodids aus verdünntem Methylalkohol umkrystallisirt werden. Dabei fällt vorerst ein scharlachrothes krystallinisches Pulver aus, das der geringen Menge wegen (nicht ganz 0·1 Gramm) nicht weiter untersucht wurde; aus dem Filtrate krystallisirt dann die Dijodmethylverbindung in lichtgelben Krystallen, die bei 280° erweichen, aber erst über 290° schmelzen.

0·3806 Grm. gaben 0·3302 Grm. Ag J.

Berechnet für $(C_{18}H_{12}N_2)2CH_3J$	Gefunden
J......47·03%	46·88%

Das beschriebene Dichinolyl ist zweifellos identisch mit dem von Herrn Weidel dargestellten α-Dichinolin, wenn auch meine Beobachtungen beim Sulfat und bei der Jodmethylverbindung von

denen des Herrn Weidel etwas abweichen. Ich konnte die Identität beider Verbindungen fernerhin durch Vergleich mit einer Probe des α-Dichinolins constatiren, die Herr Weidel mir freundlichst überliess, wofür ich ihm bestens danke.

Da Herr Weidel die Untersuchung seines α-Dichinolins fortsetzt, habe ich meine Arbeit einstweilen abgebrochen, möchte mir aber vorbehalten, sie auf die aus dem Diphenylin aller Wahrscheinlichkeit nach entstehende Base auszudehnen.

Neben der synthetischen Darstellung des Dichinolyls wurde noch versucht, ob nicht, analog der pyrogenen Bildungsweise des Diphenyls, beim Durchleiten von Chinolin durch glühende Eisenröhren Condensation zu Dichinolyl statt hat.

Von grösstem Einfluss auf den Verlauf der Reaction ist die Höhe der Temperatur; wird sie zu niedrig gehalten, so geht alles Chinolin unverändert über, ist sie zu hoch, tritt totale Verkohlung ein.

Bei richtig regulirter Mitteltemperatur ist der Process, bei dem sich anfangs intensiv empyreumatische Dämpfe entwickeln, von einer unregelmässigen Entwicklung von Gasen begleitet; hauptsächlich Ammoniak und Cyanwasserstoff, während Kohlensäure nicht nachgewiesen werden konnte. Das übergegangene Öl wird fractionirt; bis 120° geht viel Wasser über, das deutlichen Pyridingeruch zeigt, dann unverändertes Chinolin. Der geringe, über 235° siedende dickflüssige Rückstand in Salzsäure gelöst, mit Kalilauge gefällt, schied meist feste schwarze Harzklumpen ab, die durch Auskochen mit Äther nur theilweise in Lösung gebracht wurden. Aus den ätherischen Lösungen hinterblieben zähe, grünlich fluorescirende Syrupe, die an der Luft Feuchtigkeit anzogen und selbst bei wochenlangem Stehen im Vacuum über Schwefelsäure nicht zur Krystallisation gebracht werden konnten. In einem einzigen Falle wurden Krystalle abgeschieden, die aber nie wieder erhalten wurden.

Aus den ausgeschüttelten wässerigen Lösungen konnte durch Äther nach dem Ansäuren eine äusserst geringe Menge eines in Blättchen krystallisirenden Körpers ausgezogen werden, der sich nach mehrmaligem Umkrystallisiren aus heissem Wasser durch

Geruch, Sublimationsfähigkeit und Schmelzpunkt (119—120°) als Benzoësäure charakterisirte.

Die vereinigten Ätherrückstände wurden nun mit Alkohol behandelt, wobei alles, bis auf die oberwähnten Krystalle in Lösung ging. Letztere wurden nach mehrmaligem Umkrystallisiren aus absolutem Alkohol, von welchem sie sehr schwer aufgenommen werden, als schwach chamoisgelb gefärbte Blättchen vom Schmelzpunkte 183—184° erhalten.

Die Analyse des Platindoppelsalzes, ein lichtgelber krystallinischer Niederschlag, der beim Vermengen der heissen salzsauren Lösung der Base mit Platinchlorid ausfiel, gab folgende Zahlen:

0·1482 Grm. gaben 0·1853 Grm. CO_2 und 0·0328 Grm. H_2O.
0·2001 „ „ 0·0525 Grm. Pt.
C = 34·09% H = 2·46% Pt = 26·23%.

Mit Pikrinsäure bildet die Base eine Doppelverbindung, die bei 180° erweicht, bei 195—196° schmilzt.

Aus den alkoholischen Lösungen konnten zwei durch ihre Löslichkeit in Eisessig verschiedene Pikrate gewonnen werden, aus denen beim Zersetzen die Basen in Form von festen weissen Blättchen ausfielen, die aber an der Luft sofort total verharzten. Sie wurden zur weiteren Reinigung in die Chromate übergeführt und diese, weil leicht zersetzlich, in die Platindoppelverbindungen verwandelt.

Die aus dem leichter löslichen, reingelben Pikrate (Schmelzpunkt 105—106°) gewonnene Base gab bei der Analyse des Platinsalzes folgende Werthe:

0·2580 Grm. gaben 0·3576 Grm. CO_2, 0·0546 Grm. H_2O und 0·0675 Grm. Pt.
oder C = 34·22% H = 2·35% Pt = 26·16%.

Die andere Base aus der schwerer löslichen dunkel braungrün gefärbten Pikrinsäureverbindung (Schmelzpunkt undeutlich über 200°) wurde als Platindoppelverbindung und als Chromat analysirt; letzteres schien jedoch schon etwas zersetzt.

0·2909 Grm. gaben 0·0799 Grm. Pt.
0·1852 Grm. gaben 0·2405 Grm. CO_2 und 0·0684 Grm. H_2O
C = 35·41% H = 4·10% Pt = 27·46%.

0·2112 Grm. gaben 0·4011 Grm. CO_2, 0·0632 Grm. H_2O und 0·0552 Grm. Cr_2O_3.

$C = 51·79\%$ $H = 3·32\%$ $Cr_2O_3 = 26·13\%$.

Aus den erhaltenen Analysenresultaten Formeln abzuleiten, ist in diesem Falle wohl unzulässig.

Trotz dieser unsicheren Resultate scheint so viel wohl sichergestellt, dass Chinolin beim Leiten durch glühende Röhren Dichinolyl nicht liefert; das β-Dichinolyl von Weidel kann also nicht aus bereits fertig gebildeten Chinolin entstanden sein.

Vielleicht liefert die Zersetzung des cinchoninsauren Kalkes ohne Kalkzusatz darüber Aufschluss, ein Versuch, der nach den Ferien fortgesetzt werden soll.

Über zwei organische Zinnverbindungen.

Von **Otto W. Fischer.**

(Aus dem Laboratorium der Wiener Handelsakademie. IX.)

Vor langer Zeit hat Kuhlmann[1] bei seiner Untersuchung über die Ätherbildung durch Einwirkung von Zinntetrachlorid auf absoluten Alkohol eine salzartige Verbindung erhalten, welche er als eine Verbindung von Äther mit $SnCl_4$ ansprach und deren Schmelzpunkt nach seiner Angabe ungefähr bei 75° liegen soll.

Lewy[2], der sie durch Mengen von wasserfreiem $SnCl_4$ mit absolutem Alkohol unter Erkältung auf 0° darstellte und zuerst analysirte, kam zur Formel $C_8H_{12}O_5SnCl_2$,[3] welche er zerlegte in $2C_4H_5O+2HO+2Sn\left\{\begin{matrix}Cl\\O\end{matrix}\right.$.[4]

Girard und Chapoteaut[5] bestätigen im Ganzen Lewy's Angaben, schreiben jedoch die Verbindung $C_4H_5OSnCl_2HO$,[4] ebenso Robiquet[6], der Krystalle von der Zusammensetzung $SnCl_2C_4H_6O_2$ erhalten haben will.

Da nun diese Angaben keine befriedigende Übereinstimmung zeigen, so schien eine neuerliche Untersuchung der fraglichen Verbindung umso wünschenswerther, als auch neuere Lehr- und Handbücher sich über dieselbe sehr widersprechend äussern.

Um sie zu erhalten, verfährt man am einfachsten folgendermassen: 20 Theile reines wasserfreies Zinntetrachlorid[7] werden

---

[1] Ann. Ch. Pharm. 33. Bd., 97 und 192.

[2] Journ. f. prakt. Ch. 36. Bd., 146.

[3] In der citirten Quelle steht in Folge eines Druckfehlers Cl_3.

[4] Alte Formeln C = 6, O = 8, Sn = 58.

[5] Zeitschrift f. Chemie 1867, 454.

[6] Jahresber. (Giessen) 1854, 560.

[7] Das käufliche wasserfreie $SnCl_4$ muss, um es von Schwefelzinn zu befreien, durch mehrmalige Destillation gereinigt werden.

mit 14 Theilen absolutem Alkohol unter Kühlung mit Wasser vereinigt; das Zufügen von $SnCl_4$ geschieht partienweise, da die Masse lebhaft reagirt, sich erwärmt und Salzsäure und Chloräthyl entweichen. Beim Erkalten scheiden sich nun bald weisse Krystallblättchen aus, bis schliesslich das Ganze zu einer breiigen Masse geworden; die Krystalle werden von der Mutterlauge durch Absaugen getrennt, mit wenig absolutem Alkohol nachgewaschen, auf Thonplatten gestrichen und über Kalk und Schwefelsäure getrocknet. Diese Operationen müssen mit thunlichster Schnelligkeit ausgeführt werden, da der Einfluss der Athmosphäre, weil zersetzend, so viel als möglich vermieden werden muss.

Das so erhaltene Salz stellt glänzend weisse, rhombische Krystallblättchen dar, die sich beim Liegen an der Luft rasch zersetzen und zerfliessen. Es ist in kaltem Wasser schwer, leichter in heissem Wasser löslich; die Lösung scheidet jedoch beim Kochen oder schon bei längerem Stehen einen weissen gallertartigen Niederschlag von Zinnoxychlorid aus. In Alkohol und Äther ist es leicht löslich und kann aus ersterem gut umkrystallisirt und in grösseren Individuen erhalten werden; durch Alkalien wird es in Alkohol und ein Gemenge von Zinnhydroxyd und Zinnoxychlorid zerlegt. Der Schmelzpunkt der Krystalle liegt nicht, wie Kuhlmann angibt, bei 75°, sondern er ist überhaupt nicht zu bestimmen, da Zersetzung eintritt.[1]

Die Analyse der Verbindung führte zur Formel $SnCl_3OC_2H_5 + C_2H_6O$ und wird deren Bildung durch folgende Gleichung:

$$C_2H_6O + SnCl_4 = SnCl_3OC_2H_5 + HCl$$

veranschaulicht.

1. 0·3720 Grm. gaben 0·1765 Grm. SnO_2
2. 0·3733 „ „ 0·1777 „ „
3. 0·3320 „ „ 0·4575 „ AgCl

---

[1] Die Schmelzpunktsbestimmungen wurden mit wiederholt dargestellten Proben beider Darstellungsweisen und mit den mannigfachsten Abänderungen versucht; aber selbst zwei gleichzeitig ausgeführte Bestimmungen derselben Probe ergaben Differenzen bis zu 90° (107°—191°).

4. 0·2835 Grm. gaben 0·3906 Grm. AgCl
5. 0·2509 „ „ 0·1467 „ CO_2 und 0·0947 Grm. H_2O
6. 0·2298 „ „ 0·1325 „ „ „ 0·0847 „ „

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Berechnet für $SnCl_3OC_2H_5+C_2H_6O$
Sn...	37·32	37·43	—	—	—	—	37·40%
Cl...	—	—	34·09	34·09	—	—	33·75
C ...	—	—	—	—	15·94	15·72	15·21
H ...	—	—	—	—	4·19	4·09	3·48

Für die Formeln von Lewy, Girard und Chapoteaut und Robiquet berechnet sich:

	Lewy	Girard u. Chapoteaut, Robiquet[1]
Sn.....	36·32	33·67
Cl.....	32·74	40·35
C	14·82	13·67
H	3·71	3·42.

Die Verbindung enthält nicht, wie Kuhlmann meint, Äther, oder, wie Lewy glaubt, Chloräthyl. Ein Theil des Salzes wurde mit etwa dem 20-fachen Gewichte Wasser destillirt und die ersten Tropfen getrennt aufgefangen. Im Destillate war nicht eine Spur Äther oder Chloräthyl, wohl aber Alkohol, der mit der Jodoformreaction nachgewiesen wurde, und sehr geringe Spuren von Salzsäure enthalten.

Die Krystalle durch Trocknen bei 100° vom Krystallalkohol zu befreien, gelang nicht, da schon bei halbstündigem Trocknen Bräunung und theilweise Sublimation eintritt.

1. 0·3761 Grm. verloren bei halbstündigem Trocknen 0·0325 Grm.
2. 0·2536 „ „ „ einstündigem „ 0·0386 „
was einem Verluste von 8·64%, beziehentlich 13·47% entspricht, während sich für 1 Molekül Krystallalkohol 14·5% berechnet.

Allein auch schon bei mehrtägigem Stehen im Vacuum über Kalk und Schwefelsäure tritt partielle Zersetzung ein, wie aus folgenden Chlorbestimmungen hervorgeht:

1. 0·3385 Grm. zwei Tage im Vacuum gaben 0·4700 Grm. AgCl.
2. 0·2536 „ „ „ „ „ „ 0·3466 „ „

I.	II.	Berechnet
34·35%	34·64%	33·75%

[1] Gmelin-Kraut, Handbuch. Supplementsband I, 1867, pag. 164.

Obige Bestimmungen machen es mehr als wahrscheinlich, dass Kuhlmann's Salz keine bloss additionelle Verbindung von Äthylalkohol, Äther oder Chloräthyl mit einer Zinnverbindung ist, sondern als ein Zinnchlorid aufgefasst werden muss, in dem ein Chlor durch die Äthoxylgruppe ersetzt ist und das ein Molekül Krystallalkohol aufgenommen hat.

Es wurde nun versucht, ob unter sonst gleichen Umständen, aber nicht beim Kochen, weitere Ätherification eintritt.

Mit Anwendung derselben Mengenverhältnisse wurde anfänglich zwar wieder gekühlt, dann aber eine halbe Stunde lang auf dem Wasserbade vor dem Rückflusskühler gekocht. Hiebei wird Salzsäure, Äther und Chloräthyl gebildet. Bei stärkerem Erhitzen über freiem Feuer ist die Ätherentwicklung eine lebhaftere, die Flüssigkeit wird jedoch bald dunkel gefärbt und zersetzt sich.

Die beim Erkalten erhaltene Krystallmasse wurde wie früher behandelt und zeigte sich vollkommen identisch mit der oben beschriebenen. Nur scheint in diesem Falle die Ausbeute eine etwas günstigere zu sein.

1. 0·5009 Grm. gaben 0·2419 Grm. SnO_2
2. 0·3205 „ „ 0·1532 „ „
3. 0·4817 „ „ 0·6643 „ AgCl
4. 0·5167 „ „ 0·7127 „ „
5. 0·2672 „ „ 4·1533 „ CO_2 und 0·0899 Grm. H_2O
6. 0·2500 „ „ 0·1423 „ „ „ 0·0828 „ „

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Berechnet für $SnCl_3OC_2H_5+C_2H_6O$
Sn...	37·99	37·60	—	—	—	—	37·40%
Cl...	—	—	34·11	34·10	—	—	33·75
C ...	—	—	—	—	15·64	15·52	15·21
H ...	—	—	—	.	3·73	3·68	3·48.

Um zu versuchen, ob nicht vielleicht auf andere Weise mehr Chlor durch die Äthoxylgruppe ersetzt werden könne, wurde die auf 10 Grm. Zinntetrachlorid berechnete Menge Natrium (3·5 Grm.) in absolutem Alkohol gelöst und mit der Lösung des $SnCl_4$ in überschüssigem Alkohol vereinigt. Es entstand sofort eine weisse Fällung, die, aus Chlornatrium und etwas Zinnoxyd bestehend, abfiltrirt wurde; das Filtrat wurde über Schwefelsäure im Vacuum verdunsten gelassen, wobei es immer dicker und dicker wurde

und endlich eingetrocknet, eine schwach gelbliche, amorphe Masse, die sowohl in Wasser, als Alkohol und Äther unlöslich ist, hinterliess.

Zur Analyse wurden circa 2 Grm. fein zerrieben, mit absolutem Alkohol übergossen und einige Zeit stehen gelassen, dann abfiltrirt, der Alkohol durch absoluten Äther verdrängt und schliesslich bis zum constanten Gewicht über Schwefelsäure getrocknet. Die Substanz ist dann immer noch etwas chlorhältig (1·25%).

1. 0·2306 Grm. gaben 0·1630 Grm. SnO_2
2. 0·4001 „ „ 0·2828 „ „
3. 0·4583 „ „ 0·1708 „ CO_2 und 0·1220 Grm. H_2O
4. 0·2647 „ „ 0·1014 „ „ „ 0·0786 „ „

Es war also nicht die erwartete Verbindung entstanden; die Analyse passt am besten zur Formel $SnOC_2H_5(OH)_3$.

	I.	II	III.	IV.	Berechnet für $SnOC_2H_5(OH)_3$
Sn......	55·60	55·60	—	—	55·14
C	—	—	10·16	10·45	11·21
H	—	—	2·96	2·29	3·73.

Etwas besser stimmen die Resultate, wenn das Chlor auf $SnCl_4$ berechnet, von der gewogenen Substanzmenge in Abzug gebracht wird. Es ergibt sich dann:

	I.	II.	III.	IV.	Berechnet für $SnOC_2H_5(OH)_3$
Sn......	56·8	56·8	—	—	55.14
C	—	—	10·40	10·68	11·21
H	—	—	3·02	3·38	3·73.

Es scheint der Verbindung noch SnO_2 beigemengt zu sein, daher der Zinngehalt erhöht, die Werthe für C und H aber herabgedrückt erscheinen.

Um die Substanz gänzlich chlorfrei zu erhalten, habe ich sie mit Wasser bis zum Verschwinden der Chlorreaction, dann mit Alkohol und Äther gewaschen. Eine Zinnbestimmung (66·53%) lehrte jedoch, dass hiebei Zersetzung eingetreten war.

Die mit Natriumalkoholat erhaltene Substanz steht demnach zu Kuhlmann's Verbindung in ähnlichem Verhältniss, wie das normale Zinnhydroxyd zum Zinntetrachlorid.

Zinntetrachlorid	Zinnhydroxyd	Kuhlmann's Verbindung	Verbindung aus Natriumalkoholat
Cl	OH	OC_2H_5	OC_2H_5
Sn Cl	Sn OH	Sn Cl	Sn OH
Cl	OH	Cl	OH
Cl	OH	Cl	OH.

Um hiefür weitere Bestätigung zu erhalten, habe ich in die Lösung von Kuhlmann's Salz in Wasser sehr vorsichtig Kalilauge bis zur neutralen Reaction eingetragen. Der entstandene Niederschlag, abfiltrirt und gut gewaschen, enthielt aber nicht die Spur organischer Substanz, war also nicht die Verbindung $Sn(OH)_3OC_2H_5$, und stellte sich als Zinnhydroxyd heraus, während im Filtrate Alkohol und Salzsäure nachgewiesen werden konnten.

Etwas besseren Erfolg hatte der Versuch, aus der Verbindung $SnOC_2H_5(OH)_3$ durch Lösen in concentrirter Salzsäure Kuhlmann's Salz darzustellen. Die Lösung erfolgte in der Kälte, da beim Erwärmen Zersetzung eintritt. Aber erst nach wochenlangem Stehen im Exsiccator erhält man sehr kleine Krystalle, die kohlenstoffhältig sind, und die grösste Ähnlichkeit mit Kuhlmann's Salz haben. Von einer Analyse musste der geringen Menge wegen abgesehen werden.

Über einige basische Salze.

Von J. Habermann.

In der Sitzung vom 19. Juli vorigen Jahres habe ich in einer vorläufigen Mittheilung eine Untersuchung über einige basische Sulfate angekündigt, deren Erscheinen sich, entgegen der damaligen Voraussetzung, desshalb verzögert hat, weil ich das Thema seither wesentlich erweitert, d. h. ausser den Sulfaten auch basische Nitrate und Chloride (Oxychloride) der betreffenden Metalle dargestellt und untersucht habe.

Die Darstellung basischer Verbindungen auch innerhalb dieses erweiterten Umfanges, gelingt, wie mehrfache Versuche gezeigt haben, ausser durch Fällung mit verdünnter Ammoniaklösung noch mittelst, zur vollständigen Umsetzung nicht ausreichenden Mengen von Lösungen der kohlensauren Alkalien, und wie ich hinzufügen kann, des kohlensauren Ammons. Doch ist Ammoniaklösung den anderen Substanzen als Fällungsmittel vorzuziehen, weil die Reindarstellung der neuen Verbindungen mit ihr leichter gelingt.

Übrigens sind manche der Verbindungen, die in dem Folgenden beschrieben werden sollen, seit längerer Zeit bekannt, und wenn sie trotzdem in den Kreis der Untersuchung gezogen wurden, so findet das seine Rechtfertigung darin, dass in einigen Fällen Angaben über die quantitative Zusammensetzung fehlten, oder aber die von mir erzielten analytischen Resultate nicht die wünschenswerthe Übereinstimmung mit jenen zeigten, welche Andere gefunden hatten.

Dargestellt wurden die basischen Sulfate, Nitrate und Chloride des Kupfers, des Nickels, des Cobaltes, des Zinkes und des Cadmiums und wurde bei ihrer Gewinnung im Allgemeinen so verfahren, dass eine concentrirte Lösung des neutralen Salzes in einem Becherglase zum Sieden erhitzt und in die kochende Lösung

sehr stark verdünnte Ammoniaklösung unter fleissigem Umrühren so lange eingetröpfelt wurde, als ein Niederschlag entstand. Die sich zuerst ausscheidenden Antheile des Niederschlages, welche sich manches Mal verunreinigt zeigten, wurden in der Regel beseitigt und die Fällung in der Art zu Ende geführt, dass von Zeit zu Zeit filtrirte Proben der Flüssigkeit auf das Verhalten gegen Ammoniaklösung, respective auf die Bildung eines Niederschlages geprüft und je nach dem Ergebnisse der Prüfung die Fortsetzung der Arbeit geregelt wurde.

Die Abscheidung der Metalle nach der angegebenen Methode als basische Salze ist in den einzelnen Fällen sehr ungleich vollständig. Während zum Beispiele im gegebenen Momente beim Kupfersulfat die siedend heisse, filtrirte Lösung kaum Spuren von Kupfer enthält, entsteht beim Nickelsulfat selbst in einer Lösung kein Niederschlag mehr, welche noch überaus reiche Mengen der Nickelverbindung enthält.

Zur Darstellung muss weiter gesagt werden, dass während des Erhitzens und Fällens, wie bereits erwähnt, fleissig umgerührt werden muss, um das sehr lästige Stossen, welches namentlich beim Nickelsulfat unter Umständen einen explosionsartigen Charakter annehmen kann, zu verhindern. Die Ursache dieser Erscheinung kann darin gesucht werden, dass sich ein Theil des Niederschlages leicht als festhaftender Überzug an die Gefässwände ansetzt.

Nach beendigter Fällung und vollständigem Erkalten wurde das basische Salz durch Decantation mit Wasser von gewöhnlicher Temperatur gewaschen, schliesslich auf einen Trichter mit einem kleinen Platinkonus gebracht, mit einer Wasserstrahlpumpe gut abgenutscht und mit Rücksicht darauf, dass einige der Verbindungen aus der Luft begierig Kohlensäureanhydrid anziehen, das Präparat auf einem Uhrglas unter einer Glocke über gebranntem Kalk getrocknet. Die so vorbereiteten Substanzen sollen in dem Folgenden stets als lufttrockene bezeichnet werden, wobei es selbstverständlich erscheint, dass das Trocknen unter den angegebenen Umständen bis zur Gewichtsconstanz fortgesetzt wurde.

Wie beim Fällen, so auch beim Waschen etc. zeigen die basischen Salze ein sehr ungleiches Verhalten. So lassen sich

alle die früher genannten Operationen beim Kupfersulfat ohne alle besondere Vorsichtsmassregel zu Ende führen, weil sich der im Wasser so gut wie unlösliche Niederschlag rasch und gut absetzt, im nassen, wie im trockenen Zustande ganz unverändert bleibt, aus der Luft weder Feuchtigkeit noch Kohlendioxyd anzieht u. s. w.

Beim Kupfernitrat hingegen bleibt ein Theil des Niederschlages selbst nach mehrtägigem Stehen, die Flüssigkeit milchig trübend, in derselben suspendirt, während der abgeschiedene Schlamm sich nach einigen Tagen zu schwärzen beginnt, so dass das Waschen rasch durchgeführt werden muss und es ganz unmöglich ist, diese Operation ohne erheblichen Verlust zu vollenden.

Ähnlich verhalten sich alle drei Nickelverbindungen, welche überdies aus der Luft begierig Kohlendioxyd anziehen und theilweise im Wasser in nachweisbarer Menge löslich sind.

Was die Eigenschaften der basischen Salze, die hier in Betracht kommen, anbelangt, so kann angeführt werden, dass sie im Allgemeinen die für die betreffenden Metalle charakteristischen Färbungen zeigen, und zwar sind die Kupfersalze, wie viele wasserhaltige Cupridverbindungen in verschiedenen Nuancen grün, die Nickelverbindungen gelblichgrün, die Cobaltverbindungen theils blau, theils pfirsichblüthroth, die Zink- und die Cadmiumverbindungen hingegen ungefärbt.

Mehrere der in Rede stehenden Verbindungen lassen, mit dem Mikroskope angesehen, deutlich, andere nur undeutlich krystallinische Structur erkennen. Zu den ersteren gehören namentlich die Zink- und Cadmiumsalze. Die lufttrockenen Substanzen verlieren alle bei höherer Temperatur Wasser. Doch ist die Temperatur, bei welcher vollständige Entwässerung erfolgt, wenn auch für die verschiedenen Verbindungen verschieden, im Allgemeinen eine hohe. Die höchsten Temperaturen verlangen nach allen Wahrnehmungen die Sulfate, die niedrigsten, die Nitrate.

Die beim vollständigen Entwässern hinterbleibenden Rückstände sind bei den gefärbten Verbindungen schwarz und sie repräsentiren gegenüber den ursprünglichen Körpern die Anhydrosalze derselben. Für einige Salze, welche nach dem vollständigen Entwässern noch die ganze ursprüngliche Menge Säure besitzen,

scheint mir das unzweifelhaft festzustehen. Selbstverständlich sind die basischen Salze in verdünnter Schwefelsäure, in Salz- und Salpetersäure löslich und erfolgt diese Lösung bei einigen Verbindungen unter bemerkenswerthen Farbenänderungen.

Die basischen Salze derjenigen Metalle, deren Oxydhydrate in Kalilauge überhaupt unlöslich sind, werden durch concentrirte Lauge in Oxydhydrate übergeführt, welche zum Theil namentlich in Beziehung auf Beständigkeit sich wesentlich anders verhalten, als jene, die man durch Fällung der neutralen Salzlösungen darstellt.

Endlich sei bemerkt, dass die Verbindungen fast durchgehends wiederholt, einige sogar sehr oft dargestellt wurden, und dass die Formeln in der Regel aus den analytischen Daten von Präparaten verschiedener Darstellung abgeleitet wurden, und zwar auch dann, wenn sich in dem Folgenden nur einige quantitative Analysen finden.

A. Verbindungen des Kupfers.

1. Sulfat. Basische Kupfersulfate sind mehrere seit längerer Zeit bekannt und wurde zur Darstellung einiger derselben auch Ammoniaklösung benützt. So wurde von Vogel und Reischauer (Gmelin-Kraut, Hdbch. d. anorg. Ch. 3. Bd. 626) mittelst Ammoniak eine Verbindung dargestellt und beschrieben, welche dieselbe Zusammensetzung zeigt wie eine von Kühn (G. K. wie oben) mit Kalilösung dargestellte, deren Analyse zu der Formel $4CuO, SO_3, 4H_2O$ führte. Nach derselben Quelle hat Reindel durch Fällen einer siedend heissen Lösung von Kupfervitriol mit Ammoniak die Verbindung $6CuO, 2SO_3, 5H_2O$ erhalten, während ich nach einer durchaus ähnlichen Methode ein Präparat erhalten habe, welches in seiner Zusammensetzung nicht unwesentlich verschieden ist von jenem Product, obwohl es in manchen Eigenschaften mit ihm übereinstimmt.

In ersterer Richtung mögen die folgenden Angaben den Beleg bilden:

1. 0·6806 Grm. lufttrockene Substanz gaben 0·3781 Grm. Baryumsulfat.
2. 0·5097 Grm. lufttrockene Substanz lieferten 0·2908 Grm. Baryumsulfat und 0·6960 Grm. Kupfersulfat.

3. 0·5762 Grm. lufttrockene Substanz gaben 0·3190 Grm. Baryumsulfat.
4. 0·5104 Grm. des Salzes gaben 0·3453 Grm. Kupfersulfür.
5. 0·6927 Grm. des Salzes verloren beim Erhitzen bis zur Gewichtsconstanz 0·0822 Grm. Wasser.

Aus diesen Daten lassen sich die folgenden Procentgehalte berechnen:

	1.	2.	3.	4.	5.
Kupferoxyd	—	67·95	—	67·85	—
Schwefeltrioxyd	19·07	19·59	19·00	—	—
Wasser	—	—	—	—	13·31

Diese Werthe stimmen befriedigend mit denjenigen, welche die Formel

$$7CuO, 2SO_3, 6H_2O$$

verlangt, keineswegs aber mit der Verbindung Reindel's, wie die nachfolgende Zusammenstellung zeigt:

	$6CuO, 2SO_3, 5H_2O$	$7CuO, 2SO_3, 6H_2O$	Gefundene Mittelwerthe
Kupferoxyd	65·62	67·43	67·90
Schwefeltrioxyd	22·00	19·44	19·22
Wasser	12·38	13·13	13·31.

Viel besser ist die Übereinstimmung in der Zusammensetzung mit jenem Product, welches Brunner und Kühn auf wesentlich verschiedenem Wege dargestellt haben und dem sie die Formel $7CuO, 2SO_3, 7H_2O$ beilegen. Doch ist die Verschiedenheit gross genug, um die neue Formel zu rechtfertigen:

	$7CuO, 2SO_3, 7H_2O$
Kupferoxyd	66·05
Schwefelsäureanhydrid	18·99
Wasser	14·96

Die Verbindung repräsentirt ein feinkörniges, bläulichgrünes Pulver von angenehmem Farbenton, welches unter dem Mikroskope selbst bei mehr als dreihundertfacher Vergrösserung nur undeutlich krystallinische Structur erkennen lässt. Sie ist gänzlich unlöslich in kaltem, wie in kochendem Wasser, so dass

sich in keinem Falle in der filtrirten Flüssigkeit Kupfer, und zwar weder durch Ammoniak, noch durch gelbes Blutlaugensalz nachweisen liess. Das über gebranntem Kalke getrocknete Salz verlor weder bei 100° im Vacuo, noch bei 127° unter gewöhnlichem Luftdruck an Gewicht. Bei 190° ging 1% Wasser weg, ohne dass sich die Farbe des Salzes merklich geändert hätte.

Unter fortdauerndem Gewichtsverluste beginnt sie bei 280—290° missfarbig zu werden, wird bei 320 unschön dunkelgrün und endlich beim Erwärmen über freiem Feuer im Plantintiegel, bis zur dunklen Rothgluth desselben, wird sie schwarz. In diesem Zustande enthält die Substanz fast genau die ursprüngliche Menge Schwefeltrioxyd, wie die folgenden analytischen Resultate beweisen:

0·6927 Grm. lufttrockener Substanz gaben nach dem Erhitzen bis zum Schwarzwerden 0·3798 Grm. Baryumsulfat was, bezogen auf die lufttrockene Substanz, 18·82% Schwefeltrioxyd entspricht, während die früher aufgestellte Formel 19·44% verlangt.

Man wird demnach der vollständig entwässerten Substanz die Formel

$$7CuO, 2SO_3$$

beilegen müssen, welche 22·38% Schwefelsäureanhydrid verlangt, während sich aus der früher angegebenen Menge von Baryumsulfat, bezogen auf das Gewicht der wasserfreien Substanz per 0·5996 Grm., 21·74% Schwefeltrioxyd rechnen lassen. Überdies wird man aus dem Verhalten beim Trocknen noch weiters folgern dürfen, dass die Verbindung die ganze Menge Wasser als Constitutionswasser enthält.

Zweifellos endlich wird der Brochantit mancher Fundorte auf diese Verbindung zurückzuführen sein. (Siehe Handbuch d. Mineralchemie von Rammelsberg, 2. Aufl., 2. Theil, 265.)

---

2. Nitrat. Aus einer concentrirten, siedend heissen Lösung von neutralem Kupfernitrat kann durch stark verdünnte Ammoniaklösung das Kupfer so gut wie vollständig gefällt werden. Der Niederschlag bleibt, wie bereits erwähnt wurde, zum Theil lange

Zeit in der Flüssigkeit suspendirt und beginnt sich nach einiger Zeit beim Stehen unter Wasser zu schwärzen. Die Verbindung ist hellblau gefärbt, überaus feinkörnig und ohne erkennbar krystallinische Structur. Sie ist in kaltem Wasser so gut wie unlöslich, und kann in einer mit diesem Lösungsmittel erzeugten, filtrirten Lösung, Kupfer, weder durch Ammoniak, noch durch gelbes Blutlaugensalz nachgewiesen werden.

Kocht man das Salz mit Wasser, so wird es zuerst missfärbig, dann grau und endlich schwarz, und in der heissfiltrirten Lösung lässt sich nun mit den genannten Reagentien das Kupfer deutlich, aber keineswegs in solcher Menge nachweisen, dass daraus gefolgert werden könnte, dass durch das Kochen eine Spaltung des basischen Salzes in neutrales Kupfernitrat, Kupferoxyd und Wasser bewirkt wurde.

Das lufttrockene Salz verändert sich beim Aufbewahren nicht.

Nach den Resultaten der quantitativen Analyse kommt der Verbindung die Formel

$$4CuO, N_2O_5, 3H_2O,$$

d. h. also dieselbe Zusammensetzung, wie jenem basischen Kupfernitrate zu, welches man durch Erhitzen des neutralen Salzes, sowie durch Fällung einer Lösung des letzteren mit wenig Kali- oder Natronlauge etc. erhalten hat. (G. K., 3. Bd., S. 651.)

1. 0·5005 Grm. lufttrockenes Salz gaben beim Glühen 0·3325 Grm. Kupferoxyd.
2. Von 0·2968 Grm. Substanz wurden 31 CC. Stickoxyd von 21° Temperatur und 731·7 Mm. Barometerstand erhalten.

Die aus diesen Daten abgeleiteten Procentgehalte stimmen in befriedigender Weise mit den aus obiger Formel gerechneten, wie die folgende Zusammenstellung lehrt:

	$4CuO, N_2O_5, 3H_2O$	Gefunden
Kupferoxyd	66·19	66·43
Salpetersäureanhydrid	22·54	21·98

3. Chlorid (Oxychlorid). Eine Verbindung von derselben Zusammensetzung, wie die von mir neuerlich dargestellte, war bereits mehrfach Gegenstand chemischer Untersuchungen (G. K., 3. Bd., 644) und habe ich dieselbe allein in Hinblick auf die, für die Darstellung der in Rede stehenden basischen Verbindungen benützte einheitliche Methode neuerlich untersucht.

Die Verbindung lässt sich nur schwer und mit Verlust auswaschen, weil sie schlecht sedimentirt und die Waschflüssigkeit, selbst nach mehrtägigem, ruhigem Stehen, milchig trübe erscheint.

Sie ist im trockenen Zustande ein dem basischen Kupfersulfat ähnliches, doch weniger schön gefärbtes bläulich grünes Pulver, welches sich unter Wasser bei gewöhnlicher Temperatur ohne Veränderung aufbewahren lässt und sich auch beim Kochen nicht zersetzt. Weder durch Digeriren mit Wasser von gewöhnlicher Temperatur, noch mit kochendem Wasser, geht so viel des Salzes in Lösung, dass sich in der filtrirten Flüssigkeit durch Ferrocyankalium oder Ammoniak das Kupfer nachweisen liesse. Die Substanz gibt beim Trocknen im luftverdünnten Raume bei 100° nur Spuren von Feuchtigkeit ab und verliert unter sonst gleichen Umständen bei 140 bis 155° nur wenig an Gewicht. Wenig über 155° wird sie missfärbig, doch schwarz erst bei wesentlich höherer Temperatur.

0·5009 Grm. der bei 100° im Vacuo getrockneten Verbindung gaben 0·3330 Grm. Chlorsilber und 0·3670 Grm. Kupfersulfür. Aus diesen Zahlen lassen sich Procentgehalte berechnen, welche mit den aus der Formel

$$CuCl_2, 3CuO, 3^1/_2H_2O$$

abgeleiteten in befriedigender Weise stimmen, wie das Folgende lehrt:

	$3CuO, CuCl_2 . 3^1/_2H_2O$	Gefunden
Kupfer	58·20	58·47
Chlor	16·29	16·39

Diese Werthe stimmen in bemerkenswerther Weise mit den Zahlen überein, welche Reindel (G. K., 3. Bd., 644) für ein mittelst Kupfervitriol, Kochsalz und Ammoniak dargestelltes Präparat, und mehrere Forscher, wie Debray, Kraut u. A.

(G. K., 3. Bd., 644) für verschiedene Atakamitvorkommen gefunden haben, wie die nachfolgende Zusammenstellung zeigt:

	Präparat von Reindel	Atakamit analysirt von Debray	Atakamit analysirt von Kraut
Kupfer	58·21	58·4	58·71
Chlor	16·13	16·3	16·76

B. Verbindungen des Nickels.

4. Sulfat. Nach dem mehrfach citirten Handbuche von Gmelin-Kraut (3. Bd., 547) erhielt Berzelius beim Fällen einer wässerigen Lösung von neutralem, schwefelsaurem Nickeloxydul mit einer unzureichenden Menge von fixem Alkali ein basisches Nickelsulfat als „grünes, sehr wenig in Wasser lösliches und alkalisch reagirendes Pulver". Andere Angaben über die Substanz sind in dem genannten Werke nicht enthalten und fehlen alle analytischen Belege. Gleichwohl scheint es mir kaum zweifelhaft, dass jenes Salz mit der von mir dargestellten Verbindung übereinstimmt, wofür insbesondere auch die Thatsache spricht, dass ich das Sulfat, ausser durch verdünnten Salmiakgeist, auch durch Lösungen von Natrium- und Ammoniumcarbonat abgeschieden habe.

Von den bei der Darsteltung gemachten Wahrnehmungen verdient insbesondere hervorgehoben zu werden, dass, wie bereits erwähnt wurde, es niemals gelingt, die Fällung des Nickels vollständig zu machen und dass sich vielmehr, neben dem basischen Sulfat als zweites Umsetzungsproduct die Doppelverbindung, Nickelammoniumsulfat bildet, auf welches die Ammoniaklösung keine weitere fällende Wirkung unter den gegebenen Verhältnissen übt. Wenigstens erscheint die vom Niederschlag filtrirte Lösung satt blaugrün, wie Lösungen von schwefelsaurem Nickeloxydulammoniak etc. Bei der Ausführung der Fällung operirt man zweckmässig so, dass man die Lösung des neutralen Sulfates bei gewöhnlicher Temperatur mit verdünntem Ammoniak so lange versetzt, bis die Lösung deutlich und bleibend getrübt erscheint, worauf man unter fleissigem Umrühren zum Sieden erhitzt u. s. w.

Auf diese Art kann man eine zweite und auch eine dritte Fraction des Niederschlages erzeugen.

Das basische Nickelsulfat repräsentirt ein gelblich-grünes Pulver von angenehmem Farbentone, welches unter dem Mikroskope, selbst bei starker Vergrösserung, die krystallinische Structur nur schlecht erkennen lässt. Die Substanz ist, wenn auch schwer, so doch nicht unlöslich im Wasser, so zwar, dass eine damit bei gewöhnlicher Temperatur erzeugte Lösung durch Schwefelammonium schwach, eine bei Kochhitze dargestellte hingegen stark gebräunt wird, ohne dass sich ein Niederschlag bildete. Die Verbindung reagirt alkalisch und zieht aus der Luft ziemlich energisch Kohlenoxyd an, wesshalb das Trocknen derselben mit besonderer Aufmerksamkeit erfolgen muss. Die über gebranntem Kalk getrocknete Substanz verliert beim Trocknen im Vacuum bei 100°, 7% und bei wesentlich höherer Temperatur 15—16% Wasser.

Die Analyse lieferte die folgenden Resultate:

1. 0·5057 Grm. lufttrockene Substanz gaben 0·2669 Grm. metallisches Nickel und 0·1614 Grm. Baryumsulfat.
2. 0·4127 Grm. Sulfat verloren 0·0302 Grm. Wasser bei 100°.

Hieraus lässt sich die Formel

$$7NiO, 7H_2O, SO_3 + 3H_2O$$

ableiten, und stimmen die aus der Formel gerechneten Werthe mit den bei der Analyse gefundenen in nachstehender Weise:

	$7NiO, 7H_2O, SO_3 + 3H_2O$	Gefunden
Nickeloxydul	66·79	67·05
Schwefeltrioxyd	10·22	10·25
Constitutionswasser	16·12	15·38
Krystallwasser	6·92	7·32

---

5. Nitrat. Ähnlich wie beim Sulfat, beschränken sich die vorliegenden Angaben über basische Nickelnitrate auf eine Mittheilung von Proust (G. K., 3. Bd., 555), welcher eine derartige Verbindung „durch Erhitzen des neutralen Salzes bis zu einem gewissen Punkt" erhalten hat.

Das von mir durch Fällung dargestellte Präparat setzt sich ausserordentlich langsam ab. Es ist, im lufttrockenen Zustande bröcklich, sehr hell weissgrün von Farbe und in kaltem, wie in heissem Wasser so vollständig unlöslich, dass sich in keinem Falle in der filtrirten Flüssigkeit mittelst Schwefelammonium Nickel nachweisen liess.

Beim Erwärmen schwärzt sich die Verbindung viel leichter als das Sulfat, während sie sich in mancher anderen Richtung diesem ähnlich verhält.

1. 0·5609 Grm. Substanz gaben 0·3714 Grm. Nickeloxydul.
2. 0·3010 Grm. Sulfat lieferten 33·3 CC. Stickoxyd von 21·5° Temperatur und 740·6 Mm. Barometerstand.

Aus diesen Daten lässt sich die Formel

$$8NiO, 2N_2O_5, 5H_2O$$

berechnen, und stimmen die von ihr verlangten Werthe mit den bei der Analyse gefundenen gut überein.

	$8NiO, 2N_2O_5, 5H_2O$	Gefunden
Nickeloxydul	66·13	66·22
Salpetersäureanhydrid	23·91	23·54

---

6. Chlorid. Die überaus schwach grün gefärbte, fast weisse Verbindung übertrifft im unangenehmen Verhalten beim Auswaschen etc., kurz in allen für die Reindarstellung lästigen Eigenschaften alle anderen hier in Betracht kommenden Substanzen, so dass ich darauf verzichtet habe, ihre quantitative Zusammensetzung zu ermitteln und nur sagen kann, dass sie nach dem Waschen relativ geringe Mengen von Chlor enthält, in Wasser so unlöslich ist, wie das Nitrat, Kohlendioxyd anzieht und rothes Lackmuspapier blau färbt.

C. Verbindungen des Cobalts.

7. Sulfat. Berzelius erhielt beim Fällen einer Lösung von Cobaltvitriol mit ungenügenden Mengen von Alkali einen fleischrothen Niederschlag, über dessen Zusammensetzung keine

Angaben mir zu Gebote standen. Nach dem von mir eingehaltenen Verfahren ist das neutrale Sulfat sehr vollständig in ein basisches Salz überführbar, welches keinen rothen, sondern einen blauen, flockigen Niederschlag bildet, sich ziemlich rasch absetzt und gut waschen lässt.

Nach dem Trocknen über gebranntem Kalke ist ihre Farbe weniger satt und weniger schön, die ganze Masse bröcklich und im Wasser so weit löslich, dass die bei gewöhnlicher Temperatur erzeugte filtrirte Lösung schwach, die mit kochendem Wasser dargestellte durch Schwefelammonium ziemlich stark gebräunt wird.

Die Verbindung ist beständig bei gewöhnlicher Temperatur, und es muss insbesondere im Hinblick auf das Verhalten des Nitrates hervorgehoben werden, dass sie allem Anscheine nach im lufttrockenen Zustande aus der Luft keinen Sauerstoff aufnimmt, was insbesondere daraus gefolgert werden kann, dass ihr Farbenton ungeändert bleibt.

Sie gibt bei 150° Wasser in geringer Menge ab, verliert dasselbe vollständig zwischen 288 und 292°, wobei die blaue Farbe durch blaugrau in braunschwarz übergeht.

In diesem Zustande und auch nach dem andauernden Erhitzen auf 297° enthält die Substanz noch die Gesammtmenge der ursprünglichen Schwefelsäure, so dass sie, gleich der correspondirenden Kupferverbindung, als ein basisches Anhydrosalz angesehen werden muss.

Nach den bei der Analyse erhaltenen Zahlen kommt der lufttrockenen Verbindung die Formel

$$5CoO, SO_3, 4H_2O,$$

der bei 292° getrockneten Substanz der Ausdruck

$$5CoO, SO_3$$

zu, wie die folgenden Daten lehren mögen:

1. 0·4395 Grm. lufttrockene Substanz gaben 0·1980 Grm. Baryumsulfat.
2. 0·4886 Grm. lufttrockenes Salz gaben nach dem andauernden Trocknen bei 288—297° 0·226 Grm. Baryumsulfat und hatten 0·0702 Grm. Wasser verloren.

$5CoO, 4H_2O, SO_3$	Gefunden im lufttrockn. Zustande	Gefunden im bei 297° getrockn. Zustande
Schwefeltrioxyd 15·26	15·46	15·87
Wasser....... 13·70	—	14·70

8. Nitrat. Winkelblech hat ein basisches Cobaltnitrat analysirt und beschrieben, welches er durch Fällung von ausgekochter neutraler Cobaltnitratlösung mit überschüssigem Ammoniak dargestellt hat. Nach ihm wird der blaue Niederschlag beim geringsten Luftzutritt unter Sauerstoffaufnahme grün und diese Farbe besitzt auch die trockene Substanz (G. K., 3. Bd., 458).

Die von mir mit ungenügenden Mengen Ammoniak dargestellte Substanz zeigt zwar ein ähnliches Verhalten, ist aber gegen Sauerstoff keineswegs in dem gleichen Grade empfindlich, so dass grössere Stücke nach dem Auswaschen, Pressen und Trocknen äusserlich zwar grün gefärbt erscheinen, im Innern aber stets noch ihre ursprüngliche, keineswegs schöne, blaue Farbe beibehalten haben. Überdies sind die beiderlei Substanzen, wie später gezeigt werden soll, auch in der Zusammensetzung sehr verschieden.

Löst man die grün gewordene Verbindung in Salzsäure auf, so ist der Geruch nach Chlor deutlich wahrnehmbar. Im Wasser, und zwar in kaltem wie in kochendem, scheint das Präparat etwas löslicher als das Sulfat.

Die Analyse führte zu der Formel

$$4CoO, N_2O_5, 6H_3O$$

während Winkelblech für seine Verbindung die Formel

$$6CoO, N_2O_5, 5H_2O$$

aufgestellt hat.

1. 0·5093 Grm. lufttrockene Substanz gaben 0·2334 Grm. Cobalt.
2. 0·3976 Grm. lufttrockene Substanz lieferten bei 25° Temperatur und 747·2 Mm. Barometerstand 39·5 CC. Stickoxyd

Die daraus berechneten Procentgehalte sind nachfolgend mit den aus den beiden Formeln gerechneten, zusammengestellt.

	$6CoO, N_2O_5, 5H_2O$ Winkelblech	$4CoO, N_2O_5, 6H_2O$	Gefunden
Cobaltoxydul	69·30	58·14	58·25
Salpetersäureanhydrid	16·50	20·93	20·95

---

9. Chlorid. Wenn man in eine siedende Lösung von neutralem Cobaltchlorid verdünnte Ammoniaklösung einträpfelt, so erzeugt jeder Tropfen einen blauen Niederschlag, der sich indessen rasch vertheilt und eine schöne pfirsichblüthrothe Farbe annimmt. Es gelingt auf diese Weise, das Cobalt fast quantitativ abzuscheiden. Der Niederschlag ist flockig, setzt sich indessen in der Hauptmenge gut ab, während ein kleiner Theil in der Flüssigkeit beharrlich suspendirt bleibt. Nach dem Waschen, Filtriren, Pressen und Trocknen erscheint der Körper immer noch schön pfirsichblüthroth, ist bröcklich und leicht zerreiblich. Die Verbindung scheint ziemlich hygroskopisch, ist aber in Wasser von gewöhnlicher Temperatur und in solchem von Kochhitze so wenig löslich, dass die filtrirten Lösungen durch Schwefelammonium nur schwach gebräunt werden.

Die bei der Analyse erhaltenen Zahlen führen zu der Formel

$$CoCl_2, 3CoO, 3^1/_2H_2O.$$

Die Übereinstimmung zwischen den gefundenen und den aus der Formel berechneten Werthen ist zwar, namentlich beim Cobalt keine ganz befriedigende; doch dürfte der Fehler weniger in der Substanz als vielmehr in der angewendeten analytischen Methode zu suchen sein.

1. 0·3243 Grm. luftrockene Substanz gaben 0·1860 Grm. metallisches Cobalt.
2. 0·4212 Grm. Chlorid lieferten 0·2805 Grm. Chlorsilber.

	$CoCl_2, 3CoO, 3^1/_2H_2O$	Gefunden
Cobalt	56·36	57·35
Chlor	17·00	16·47

D. Zinkverbindungen.

10. Sulfat. Man kennt basische Zinksulfate, welche den Formeln $8ZnO, SO_3, 2H_2O$; $6ZnO, SO_3, 10H_2O$; $4ZnO, SO_3, 2H_2O$; $4ZnO, SO_3, 10H_2O$ entsprechen. (G. K., 3. Bd., 21 und 22.)

Das von mir dargestellte Salz ist von diesen Verbindungen ebenso verschieden in der Darstellung wie in der Zusammensetzung.

Es repräsentirt ein blendend weisses, unter dem Mikroskop deutlich krystallinisch erscheinendes Pulver, welches sich bei der Darstellung zum grössten Theile in Flocken ausscheidet, sich gut waschen lässt, ohne Schwierigkeit filtrirt werden kann und sich, einmal lufttrocken, in kaltem, wie in kochendem Wasser kaum löst. Wenigstens konnte in keiner dieser Lösungen mit kohlensaurem Natron oder mit Schwefelammonium Zink nachgewiesen werden. Die Substanz verliert bei 100° im luftverdünnten Raume einen Theil des Wassers und den Rest bei wesentlich höherer Temperatur, wobei sie in ein fettig anzufühlendes, glanzloses Pulver übergeht, welches allem Anscheine nach die Schwefelsäure noch in der ursprünglichen Menge enthält.

Die Ergebnisse der Analyse sind die folgenden:

1. 0·5810 Grm. über gebranntem Kalke getrocknetes Sulfat gaben 0·4555 Grm. Schwefelzink.
2. 0·4946 Grm. Substanz lieferten 0·2385 Grm. Baryumsulfat.
3. 0·6750 Grm. Salz verloren bei 100° im Vacuo 0·0548 Grm. Wasser.

Diese Daten führen zu der Formel

$$4ZnO, 3H_2O, SO_3 + 2H_2O$$

Der Grad der Übereinstimmung zwischen der gefundenen und der von der Formel verlangten Werthe ergibt sich aus dem Folgenden:

	$4ZnO, 3H_2O, SO_3 + 2H_2O$	Gefunden
Zinkoxyd	65·59	65·43
Schwefeltrioxyd	16·20	16·54
Constitutionswasser	10·92	9·94
Krystallwasser	7·29	8·09

11. Nitrat. Dieselben Bemerkungen, welche ich in Bezug auf die Verschiedenheit des von mir dargestellten Zinksulfates gegenüber den bisher bekannten derartigen Verbindungen gemacht habe, muss ich für das Nitrat wiederholen, d. h. auch das neue basisch-salpetersaure Zinkoxyd ist von jenen, welche man seit längerer Zeit kennt, durch Darstellung und Zusammensetzung verschieden.

Die Gewinnung des reinen Präparates bereitet keinerlei Schwierigkeiten und bietet nichts Auffälliges.

Das Salz ist rein weiss, erscheint unter dem Mikroskope deutlich krystallinisch, ist wasserhältig, in kaltem Wasser so gut wie unlöslich, in kochendem hingegen so weit löslich, dass die filtrirte Lösung durch Schwefelammonium und ebenso durch kohlensaures Natron schwach, aber deutlich getrübt wird und sich beim Kochen der mit dem letztgenannten Reagens versetzten Lösung deutlich wahrnehmbare Flöckchen bilden.

Die Analyse ergab das Folgende:

1. 0·512 Grm. lufttrockene Substanz lieferten beim Glühen 0·3379 Grm. Zinkoxyd.
2. Von 0·2987 Grm. Salz wurden bei 22·5° Temperatur und 743·8 Mm. Barometerstand 24·8 CC. Stickoxyd erhalten.

Die aus diesen Resultaten berechneten Procentgehalte stimmen, wie die folgende Zusammenstellung darthut, in sehr befriedigender Weise mit jenen überein, welche sich aus der Formel

$$5ZnO, N_2O_5, 5^1/_2H_2O$$

ergeben.

	$5ZnO, N_2O_5, 5^1/_2H_2O$	Gefunden
Zinkoxyd	66·18	66·00
Salpetersäureanhydrid	17·65	17·66

---

12. Chlorid. Das von mir dargestellte Zinkoxychlorid ist in der Zusammensetzung verschieden von den bis jetzt dargestellten Zinkoxychloriden überhaupt und insbesondere auch von jenem, welches Schindler (G. K., 3. Bd., 31) mittelst Ammoniak dargestellt hat.

Das Product ist ein rein weisses Pulver, welches in kaltem, wie in kochendem Wasser so gut wie unlöslich ist. In der heissgesättigten Lösung erzeugt Natriumcarbonat eine sehr undeutliche Trübung.

1. 0·3886 Grm. lufttrockenes Salz gaben beim Titriren nach der Volhard'schen Methode 0·04623 Grm. Chlor.
2. 0·266 Grm. Substanz lieferten 0·2308 Grm. Schwefelzink.

Diesen Werthen entspricht ein Zinkoxychlorid von der Formel

$$2ZnCl_2, 9ZnO, 12H_2O$$

	Aus der Formel gerechnet	Gefunden
Zink	58·77	58·13
Chlor	11·65	11·90

E. Cadmiumverbindungen.

13. Sulfat. Nach der von mir eingehaltenen Methode erhält man in sehr einfacher Weise die Verbindung von der Formel

$$2CdO, SO_3, H_2O,$$

welche bereits Strohmeyer durch Glühen des neutralen Sulfates und Kühn durch vollständiges Fällen von einem Drittel der Lösung des neutralen Salzes mit Kali und Kochen des Niederschlages mit den anderen zwei Dritteln Flüssigkeit erhalten hat.

Die Verbindung ist weiss, mit einem gelben Stich, der insbesondere deutlich hervortritt, wenn man die Substanz mit basischem Zinksulfat vergleicht. Sie ist sehr deutlich krystallinisch und in Wasser so wenig löslich, dass in der heiss gesättigten Lösung durch Natriumcarbonat nur einige Flöckchen abgeschieden werden.

Bei der Analyse wurde das Nachstehende sichergestellt.

1. 0·5184 Grm. lufttrockenes Salz lieferten 0·4240 Grm. Schwefelcadmium.
2. 0·5030 Grm. der Verbindung gaben 0·3287 Grm. Baryumsulfat.

Die aus den vorstehenden Daten berechneten Procentgehalte stimmen in befriedigender Weise mit den aus der Formel gerechneten Werthen, wie die folgende Zusammenstellung darthut.

	$2CdO, SO_3, H_2O$	Gefunden
Cadmiumoxyd.............	72·30	72·67
Schwefeltrioxyd	22·61	22·43

---

14. Nitrat. In den von mir benützten Werken findet sich keinerlei Angabe über ein basisches Cadmiumnitrat.

Das von mir dargestellte Salz scheidet sich in weissen Flocken ab, welche sich durch Decantation und Filtration gut reinigen lassen. Die Verbindung ist sehr schwer, doch reichlicher in Wasser löslich als das Sulfat und lässt sich das Cadmium schon in der kaltgesättigten Lösung mittelst kohlensauren Natron nachweisen.

Die Analyse führte zu der Formel

$$12CdO, N_2O_5, 11H_2O$$

und ist die Übereinstimmung zwischen den aus der Formel gerechneten und den bei der Analyse erhaltenen Werthen wie Nachstehendes darthut, eine befriedigende:

1. 0·5010 Grm. lufttrockenes Salz lieferten 0·4178 Grm. Cadmiumoxyd.
2. 0·4987 Grm. Substanz gaben bei 747·2 Mm. Barometerstand und 22·5° Temperatur 13·9 CC. Stickoxyd.

	$12CdO, N_2O_5, 11H_2O$	Gefunden
Cadmiumoxyd	83·39	83·38
Salpetersäureanhydrid.....	5·86	5·94

---

15. Chlorid. Angaben über Oxychloride des Cadmiums finden sich in den von mir benützten Quellen nicht.

Das mittelst verdünnter Ammoniaklösung dargestellte Präparat, welches sich in, allem Anscheine nach, krystallinischen Flocken abscheidet, zeigt durchaus dem Sulfat ähnliche Löslichkeitsverhältnisse und besitzt eine reinweisse Farbe.

Nach den Ergebnissen der Analyse kommt der Verbindung die Formel

$$CdO, CdCl_2, H_2O$$

zu, und ist die Übereinstimmung zwischen den Resultaten der Analyse und den aus der Formel abgeleiteten Werthen durchaus befriedigend.

1. 0·3000 Grm. Substanz lieferten 0·06338 Grm. Chlor.
2. 0·5021 Grm. Oxychlorid gaben 0·6349 Grm. Cadmiumsulfat.

	$CdO, CdCl_2, H_2O$	Gefunden
Chlor	21·58	21·13
Cadmium	68·08	68·07

Für mehrere der im Vorstehenden beschriebenen Salze liessen sich in einfacher Weise im Sinne der modernen Theorien Constitutionsformeln aufstellen. Ich unterlasse es indessen, dies zu thun, weil es für andere Verbindungen ohne willkürliche Annahmen heute nicht möglich ist.

Brünn, Laboratorium der allgemeinen Chemie an der k. k. technischen Hochschule.

Über die Einwirkung von Acetamid auf Phenylcyanamid.

Von Dr. **Franz Berger.**

(Aus dem Laboratorium des Prof. Dr. J. Habermann an der k. k. technischen Hochschule in Brünn.)

Im Jahre 1879 veröffentlichte ich[1] die Ergebnisse einer Untersuchung über die Cyanadditionsproducte zwei- und dreifach orthotoluylirter Guanidine und zeigte, dass dieselben ebenfalls die Fähigkeit besitzen, sich in Gegenwart der Chlorhydrate aromatischer Aminbasen in rothbraun gefärbte Verbindungen umzulagern, die den dreifach toluylirten Guanidinen isomer sind. Es lag damals nahe, auch die einfach substituirten Guanidine der Einwirkung des Cyangases zu unterziehen, um zu sehen, ob diese im Stande wären, sich in ähnlicher Weise — wie oben berührt — umzusetzen, und was für Verbindungen durch die Umlagerung entständen. Damals hat E. Erlenmeyer sich das Studium der von ihm aufgefundenen Bildung einfach substituirter Guanidine aus Cyanamid und den Chlorhydraten der Aminbasen auf zwei Jahre reservirt,[2] trotzdem bereits neun, ja sogar elf Jahre seit seiner Synthese des Guanidins aus Cyanamid und Salmiak[3] vergangen waren, während welcher Zeit von ihm nichts über dieses Capitel publicirt worden war.[4] Ich habe darauf hin sofort meine

---

[1] Ber. d. chem. Ges. XII, 1854.

[2] Ber. d. chem. Ges. XII, 1984.

[3] Ann. Chem. Pharm. 146, 258 und Ber. d. chem. Ges. III, 896.

[4] Ich erlaube mir hier auf einen Gebrauch hinzuweisen, welcher leider öfter geübt wird, und denjenigen empfindlich trifft, der gerade mit der Bearbeitung des gleichen Themas beschäftigt ist; es sind dies näm-

diesbezüglichen Arbeiten eingestellt und suchte auf einem Umwege zu den einfach substituirten Guanidinen zu gelangen. Ich glaubte nämlich durch Addition von Phenylcyanamid und Acetamid ein Phenylacetyl-guanidin erhalten zu können, welchem dann die Acetylgruppe auf irgend eine Weise zu entziehen wäre. Freilich lag auch die Möglichkeit vor, dass sich die beiden Ausgangsproducte unter Abspaltung von Wasser vereinigen könnten, um ein den Amidinen A. W. Hoffmann's[1] ähnlich gebildetes Präparat zu liefern, einen Körper, welchen man typisch — wenn ich mich dieser Bezeichnungsweise bedienen darf — als Carbophenylvinyltriamin aufzufassen hätte.

Im Folgenden werde ich nun zeigen, dass keine der beiden Eventualitäten eingetreten ist, dass sich vielmehr eine sehr complexe Reaction abspielt, deren Klarlegung mir bis heute noch nicht gelungen ist. Ich bin um so mehr genöthigt, meine bis jetzt gewonnenen Erfahrungen der Öffentlichkeit zu übergeben, da ich mich leider längere Zeit nicht mehr mit diesem Gegenstande befassen kann.

Bevor ich auf die Reaction näher eingehe, sei es mir gestattet, einige Worte über das Phenylcyanamid vorzubringen. Dasselbe wurde nach der von mir angegebenen Methode dargestellt[2] und nach circa 4—5tägigem Stehen über Schwefelsäure

---

lich die aus verschiedenen Gründen beliebten kurzen Mittheilungen, dass eine Verbindung dargestellt worden ist. Die Umstände, unter welchen sie sich bildet etc., werden einfach verschwiegen, und desshalb meine ich, dass demjenigen, welcher eine genau beschriebene Methode zur Darstellung des fraglichen Körpers angibt, viel eher die Priorität einzuräumen sei, möge er auch erheblich später seine Erfahrungen mittheilen, als demjenigen, welcher die Wissenschaft bloss um den Namen einer Verbindung bereichert, und deren Präparation ziemlich häufig einem andern Forscher mit allem Aufwand an Geld und Zeit zu ermitteln überlässt. So ist es auch mit obiger Reaction. Ich habe seiner Zeit (l. c.) unter genau beschriebenen Verhältnissen nicht Monotolylguanidin, sondern Ditolylharnstoff erhalten. Herr Erlenmeyer hat nun nach Ablauf der vorbehaltenen zwei Jahre (Ber. d. chem. Ges. XIV, 1869) die lakonische Mittheilung gemacht, dass er Monotolylguanidin nach seiner Reaction erhalten habe, ohne über das Wie bis heute etwas veröffentlicht zu haben.

[1] Sitzungsber. Berl. Akad. 1865, 649.

[2] Monatshefte f. Chem. V, 219.

im Vacuum zur Reaction verwendet. Mich auf die Versuche E. Drechsel's[1] beziehend, welcher Acetamid und Cyanamid in alkoholischer Lösung in geschlossenen Röhren aufeinander mit negativem Erfolge einwirken liess, stellte ich die Reaction in der Weise an, dass ich Phenylcyanamid undAcetamid in molecularem Verhältnisse (2 : 1 Gewichtstheile) in einem Kölbchen abwog, das mit einem Kühlrohre versehen war, und dann über freiem Feuer vorsichtigt anwärmte. Nachdem der Inhalt vollständig geschmolzen, findet eine lebhafte Reaction statt, wobei Gase, von ammoniakalischem Geruche entweichen. Sobald die Reaction nachgelassen hat, wird weiter erhitzt und ungefähr zwei Stunden im gelinden Sieden erhalten. In der Kühlröhre bildet sich ein weisses Sublimat, während fortwährend Dämpfe von ammoniakalischem Geruche sich verflüchtigen, neben welchem Geruche auch derjenige nach Nitrilen auftritt. Nach angeführter Zeit lässt man erkalten und findet durch die Wage einen Gewichtsverlust von 6 — 7°/₀ vom Gewichte der Ausgangsmaterialien. Der Inhalt des Kolbens hat eine gelbgrüne Farbe, sowie zähe Consistenz angenommen. Er wird nun mehrfach mit siedendem Wasser ausgezogen, wodurch 25 — 30°/₀[2] in Lösung gehen. Sobald von Wasser nichts mehr aufgenommen wird, behandelt man den Rückstand mit kochendem absolutem Alkohol so lange, bis die Filtrate ungefärbt ablaufen. Auf diese Weise erhält man als Unlösliches 7 — 8°/₀. Die alkoholische Lösung wird hierauf mit trockenem Chlorwasserstoff gesättigt, welcher ein Chlorhydrat ausfällt, das — als freie Base gerechnet — 12 — 14°/₀ beträgt. Das hiebei entstehende Filtrat wird endlich mit Natriumcarbonat abgesättigt und nach der Abscheidung des Kochsalzes mit einem bedeutenden Überschusse von Wasser versetzt, wodurch eine Fällung entsteht, deren Gewicht circa 15°/₀ ausmacht. Die noch fehlenden 25 — 30°/₀ konnten in keiner irgend fassbaren Form nachgewiesen werden.

Bevor ich nun dazu übergehe, die hier nur angedeuteten Substanzen näher zu beschreiben, will ich noch Einiges über die

---

[1] Journl f. prakt. Chem. N. F. 11, 325.

[2] Die angeführten Procentzahlen sind stets auf das Gewicht der ursprünglich angewendeten Ausgangsmaterialien berechnet.

Ausführung der Elementaranalysen mittheilen. Zu denselben wurde die Substanz stets bei 100° im Vacuum getrocknet, wo es später nicht ausdrücklich anders angegeben ist. Die Bestimmungen von Kohlen- und Wasserstoff wurden theils im Bajonnettrohre, theils im beiderseits offenen Rohre im Sauerstoffstrome ausgeführt; die bei letzterer Art erhaltenen Zahlen sind etwas kleiner, als die nach ersterer. Die Bestimmung des Stickstoffs geschah stets nach Dumas,, während sich die Methode von Carius für die Halogenbestimmungen hier ganz unbrauchbar erwies, insofern selbst nach 8—10stündigem Erhitzen auf 250° und darüber die organische Substanz nicht vollständig zerstört war. Dafür lieferten mir die Bestimmungen der Halogene mit Kalk, sowie nach der von H. Schiff modificirten Methode Piria's[1] sehr gut übereinstimmende Resultate. Besonders glaube ich die letztere Methode wegen ihrer leichten Ausführbarkeit den Fachgenossen bestens empfehlen zu können, denn in Verbindung mit der eleganten titrimetrischen Bestimmung der Halogene nach J. Volhard[2] ist eine Analyse in kürzester Zeit ausgeführt. Freilich eignet sich die Methode zur Titrirung des Chlors in Platindoppelsalzen nur dann, wenn man das Platin vorher vollkommen entfernt hat.

Nach diesen Bemerkungen gehe ich dazu über, die Untersuchung der auf oben beschriebenem Wege erhaltenen Körper darzulegen, indem ich zuerst das Sublimat, dann den wässerigen Auszug, den alkoholischen Auszug und endlich den unlöslichen Rückstand hinsichtlich ihrer weiteren Verarbeitung vornehme.

A. Sublimat.

Das in der Kühlröhre befindliche Sublimat — eine weisse, faserige Masse, den Eisblumen ähnlich — wird aus derselben herausgekratzt und zwischen Filtrirpapier mehrmals stark gepresst, wodurch von dem Papiere eine Flüssigkeit mit deutlichem Nitrilgeruche aufgenommen wird. Nach dieser Behandlung wurde die Substanz unter eine Glocke über Ätzkali gestellt, wobei sie sich verflüchtigte. Sie wurde dann direct der Analyse unterworfen.

---

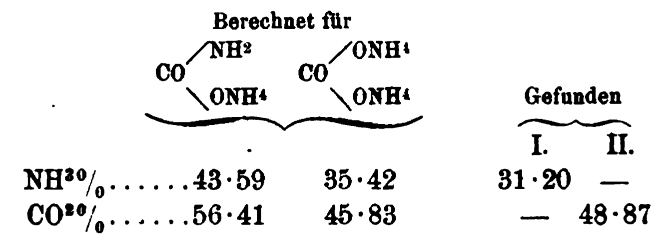
[1] Liebig's Ann. d. Chem. 195, 293.

[2] Ebendaselbst: 190, 1 ff.

I. 0·8308 Grm. Substanz gaben 3·3792 Grm. eines Platindoppelsalzes, welches nach dem Glühen 1·4748 Grm. Platin hinterliess.

	Berechnet für $2(NH^4Cl)PtCl^4$	Gefunden
Pt$^0/_0$	43·83	43·64

II. 0·5607 Grm. Substanz gaben 0·2740 Kohlendioxyd.



	Berechnet für $CO\begin{matrix}/NH^2\\ \backslash ONH^4\end{matrix}$	$CO\begin{matrix}/ONH^4\\ \backslash ONH^4\end{matrix}$	Gefunden I.	II.
$NH^{3}\,{}^0/_0$	43·59	35·42	31·20	—
$CO^{2}\,{}^0/_0$	56·41	45·83	—	48·87

Aus diesen Daten ergibt sich unzweifelhaft, dass das Sublimat nicht carbaminsaures Ammon, sondern Ammoniumcarbonat ist, welches bereits beträchtliche Mengen von saurem kohlensauren Ammon enthält.[1]

Leider war es mir nicht möglich, diejenige Substanz, welche den Nitrilgeruch besitzt, isoliren zu können, da sie in zu geringer Menge auftritt; ich glaube sie als Aceto- oder Propionitril ansprechen zu müssen.

B. Wässeriger Auszug.

Der wässerige Auszug erstarrt nach dem Einengen und Erkalten zu einer blättrig krystallisirten Masse. Diese Krystalle wurden abfiltrirt, und aus heissem Wasser mehrfach umkrystallisirt; sie besitzen dann lebhaften Glanz, fühlen sich fettig an und zeigen einen Schmelzpunkt von 114—115° (unc.), nachdem sie schon bei 112° (unc.) erweichen. Da diese Eigenschaften auf Acetanilid hindeuten, so wurde die gesammte Menge zur Reinigung einer Destillation unterworfen, wobei alles bei 292—293° (unc.) überging, um sofort in der Vorlage zu einer strahligen Krystallmasse zu erstarren. Das erstarrte Destillat wurde endlich in möglichst

[1] Gmelin-Kraut, Handbuch der anorganischen Chemie, VI. Aufl., 1. Bd., 2. Abt., Seite 513.

wenig siedendem Benzol gelöst, woraus es beim Erkalten in prachtvoll glänzenden Nadeln ausfiel, die sehr leicht sublimiren und den unveränderten Schmelzpunkt von 114—115° (unc.) besitzen.

0·2348 Grm. Substanz bei 100° getrocknet, lieferten 22·9 Ccm. Stickstoff bei 23° C und 740·3 Mm. Barometerstand.

	Berechnet für $C^6H^5.NH.C^2H^3O$	Gefunden
N%	10·37	10·68

Wegen des mit den Angaben[1] differirenden Schmelzpunktes — es konnte ja ein Isomeres des Acetanilids vorliegen — wurde eine Bestimmung der Essigsäure ausgeführt. Zu diesem Zwecke wurde die Substanz, in Wasser gelöst und mit Schwefelsäure stark angesäuert, der Destillation unterworfen; das Destillat wurde hierauf nach Vollendung der Operation unter Zusatz von einem Tropfen Phenolphtaleïn mit Natronlauge titrirt.

1·0279 Grm. Substanz lieferten ein Destillat, welches 76·85 Ccm. Natronlauge zur Sättigung brauchte (1 Ccm. = 0·0038976 Grm. NaOH).

	Berechnet für $C^6H^5.NH.C^2H^3O$	Gefunden
C^2H^3O%	31·85	31·33

Das titrirte Destillat wurde hierauf in einer Platinschale auf dem Wasserbade zur Trockne eingedampft, der Rückstand bei 150° getrocknet und das Natrium als Natriumsulfat bestimmt. Aus den hierbei erhaltenen Zahlen geht hervor, dass bei der Destillation Essigsäure abgespalten wurde.

0·6620 Grm. Rückstand bei 150° getrocknet ergaben 0·5781 Grm. Natriumsulfat.

	Berechnet für $C^2H^3O^2Na$	Gefunden
Na%	28·05	28·29

Die nach dem Übertreiben der Essigsäure verbleibende stark schwefelsaure Lösung wurde endlich mit Kalilauge

---

[1] Beilstein, Handbuch der organischen Chemie 896; Smp. 112°.

übersättigt und mit Äther ausgeschüttelt. Das nach dem Verdunsten des Äthers zurück bleibende Öl — alle charakteristischen Eigenschaften des Anilins zeigend — wurde in verdünnter Salzsäure gelöst, die Lösung auf dem Wasserbade zur Trockne eingedampft, der Rückstand neuerdings mit Wasser aufgenommen, filtrirt und nach dem Ansäuern mit Salzsäure mit Platinchlorid im Überschusse versetzt. Es fällt ein gelber, aus feinen Nadeln bestehender Niederschlag, der nach dem Abfiltriren zuerst mit Ätheralkohol, dann mit Äther gewaschen und bei 100° getrocknet wird.

0·6009 Grm. Substanz hinterliessen nach dem Glühen 0·1967 Grm. Platin.

	Berechnet für $2(C^6H^5.NH^2.HCl)PtCl^4$	Gefunden
Pt°/₀	32·64	32·73

Aus diesen Daten lässt sich mit Gewissheit der Schluss ziehen, dass der in Wasser lösliche Theil des Reactionsproductes nichts Anderes als Acetanilid ist. Übrigens scheint mir noch ein zweiter Körper darin enthalten zu sein, denn beim Umkrystallisiren des Acetanilids aus Wasser oder beim Eindampfen der wässerigen Mutterlaugen schieden sich gelbbraun gefärbte Öltropfen ab, welche beim Erkalten zu krystallinischen Massen erstarrten. Die so erhaltene Substanz — leicht löslich in kaltem Alkohol — lässt sich im Gegensatze zum Acetanilid nicht aus Benzol umkrystallisiren, konnte aber wegen der geringen Mengen, welche erhalten wurden, nicht der Analyse unterworfen werden.

C. Alkoholischer Auszug.

Der nach dem Behandeln mit heissem Wasser verbliebene Rückstand wird so lange mit kochendem absolutem Alkohol erschöpft, bis die ablaufenden Filtrate ungefärbt erscheinen. Auf dem Filter bleibt ein grüngelber bis graugrüner, körniger Rückstand, während die Lösung hell gelbgrün gefärbt ist. Diese wird nun durch Abdestilliren des Alkohols stark eingeengt; nach dem Erkalten wird ein Strom trockenen Chlorwasserstoffs eingeleitet. Die Flüssigkeit erwärmt sich anfangs schwach und allmählig bei fortschreitender Steigerung des Salzsäuregehaltes wird sie trübe und scheidet weisse Flocken aus. Sobald die Lösung

ölig und roth geworden ist, unterbricht man das Einleiten und lässt circa zwölf Stunden stehen. Nach dieser Zeit wird mit Hilfe einer Pumpe filtrirt und mit kaltem absolutem Alkohol gewaschen, wodurch auf dem Filter eine weisse, feinkörnige Masse zurückbleibt, welche das salzsaure Salz einer neuen Base darstellt. Dasselbe wird aus heissem absolutem Alkohol, der mit Salzsäure angesäuert ist, mehrfach umkrystallisirt, aus welchem Lösungsmittel das Chlorhydrat beim Erkalten in weissen, seideglänzenden Nadeln ausfällt. Diese zerfallen langsam beim Liegen über Schwefelsäure im Vacuum, schneller beim Trocknen bei 100° im Vacuum unter Trübwerden in ein Haufwerk feiner, verfilzter Nädelchen, welche den constanten Schmelzpunkt von 254—256° (unc.) zeigen. Eine grosse Anzahl von Elementaranalysen zwingt mich, die seiner Zeit für dieses Salz aufgestellte Formel[1] zu verwerfen, da die nach den verschiedenen Methoden durchgeführten Chlorbestimmungen stets um nahezu 1% weniger ergeben haben, als die damalige Formel verlangte.

I. 0·2546 Grm. Substanz mit Bleichromat verbrannt, gaben 0·5906 Grm. Kohlendioxyd und 0·1256 Grm Wasser.

II. 0·2261 Grm. ebenso behandelt, gaben 0·5249 Grm. Kohlendioxyd und 0·1163 Grm. Wasser.

III. 0·2305 Grm. ebenso behandelt, gaben 0·5385 Grm. Kohlendioxyd und 0·1147 Grm. Wasser.

IV. 0·2903 Grm. im beiderseits offenen Rohre im Sauerstoffstrome verbrannt, gaben 0·6682 Grm. Kohlendioxyd und 0·1375 Grm. Wasser.

V. 0·2983 Grm. ebenso behandelt, gaben 0·6895 Grm. Kohlendioxyd und 0·1428 Grm. Wasser.

VI. 0·2016 Grm. gaben 36·2 Ccm. Stickstoff bei 13° C. und 749·9 Mm. Barometerstand.

VII. 0·2064 Grm. gaben 37·4 Ccm. Stickstoff bei 16° C. und 750·6 Mm. Barometerstand.

VIII. 0·2175 Grm. gaben. 40·2 Ccm. Stickstoff bei 13° C. und 742·2 Mm. Barometerstand.

---

[1] Ber. d. chem. Ges. XIV, 1257.

IX. 0·2303 Grm. gaben 42·2 Ccm. Stickstoff bei 12·5° C. und 740·7 Mm. Barometerstand.

X. 0·2222 Grm. gaben 42·4 Ccm. Stickstoff bei 21·5° C. und 755 Mm. Barometerstand.

XI. 0·2405 Grm. gaben mit Kalk geglüht 0·0931 Grm. Chlorsilber.

XII. 0·2485 Grm. gaben ebenso behandelt 0·0931 Grm. Chlorsilber.

XIII. 0·3728 Grm. gaben nach der Methode Piria-Schiff bestimmt 0·1421 Grm. Chlorsilber.

XIV. 0·3328 Grm. gaben ebenso behandelt 0·1325 Grm. Chlorsilber.

XV. 0·3342 Grm. gaben ebenso behandelt 0·1282 Grm. Chlorsilber.

Zu diesen Analysen ist noch zu bemerken, dass für I, II, III, VI, VII, XI und XII die Substanz bei 100°, für die übrigen bei 100° im Vacuum getrocknet worden ist. Aus den bei den Analysen gefundenen Werthen berechnet sich nun die procentische Zusammensetzung wie folgt:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
C %	63·27	63·32	63·72	62·78	63·04	—	—
H %	5·48	5·72	5·53	5·26	5·32	—	—
N %	—	—	—	—	—	20·90	20·82
Cl %	—	—	—	—	—	—	—

	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.
C %	—	—	—	—	—	—	—	—
H %	—	—	—	—	—	—	—	—
N %	21·29	21·11	21·54	—	—	—	—	—
Cl %	—	—	—	9·58	9·27	9·43	9·85	9·49

	Gefunden im Mittel	Berechnet für $C^{39}H^{39}N^{11}Cl^{2}$	$C^{39}H^{41}N^{11}Cl^{2}$	$C^{39}H^{37}N^{11}Cl^{2}$
C %	63·27	63·93	63·76	64·11
H %	5·46	5·33	5·59	5·07
N %	21·13	21·04	20·98	21·10
Cl %	9·52	9·70	9·67	9·72

Aus dieser Zusammenstellung scheint mir hervorzugehen, dass dem Chlorhydrate wohl nur die Formeln $C^{39}H^{39}N^{11}Cl^{2}$ oder $C^{39}H^{37}N^{11}Cl^{2}$ zukommen dürften. Bei einem so hohen Moleculargewichte ist es natürlich nicht möglich, durch die Analyse den Mehr- oder Mindergehalt von 2 Atomen Wasserstoff feststellen zu können. Überhaupt theile ich diese Formeln nur als Ausdruck der gefundenen Zahlen mit, wenngleich der hohe Schmelzpunkt der untersuchten Verbindung, sowie ein später zu beschreibendes Bromproduct den oben berechneten Formeln als Stütze dienen dürften.

Wie schon oben erwähnt, zerfallen die glänzenden Krystalle des Chlorhydrats aus absolutem, völlig wasserfreiem Alkohol bei längerem Liegen über Kalk, Schwefelsäure oder beim Trocknen bei 100° in eine Masse feiner, verfilzter Nadeln unter vollständiger Trübung. Dabei ist nun ein bedeutender Gewichtsverlust zu constatiren, der von Krystallalkohol herrühren dürfte. Es wurden bei einem Versuche nachstehende Werthe gefunden, wobei nur zu bemerken ist, dass die Probe für die zweite Bestimmung sich einen Tag länger über Schwefelsäure befand.

I. 0·3503 Grm. Substanz verloren beim Trocknen bei 100° im Vacuum 0·0650 Grm.

II. 0·4146 Grm. ebenso behandelt verloren 0·0696 Grm.

Daraus berechnet sich für:

	$C^{39}H^{37}N^{11}Cl^{2}+3^{1}/_{2}C^{2}H^{6}O$	Gefunden I.
$C^{2}H^{6}O$ %	18·07	18·57

	$C^{39}H^{37}N^{11}Cl^{2}+3C^{2}H^{6}O$	Gefunden II.
$C^{2}H^{6}O$ %	15·90	16·79

Wird das oben beschriebene Chlorhydrat vom Schmelzpunkte 254—256° (unc.) in kochendem, möglichst starkem Alkohol gelöst, die Lösung heiss mit so viel Kalilauge versetzt, dass gerade alkalische Reaction auftritt, und dann nach kurzem Aufkochen filtrirt, so scheiden sich beim Erkalten kleine Krystallnadeln aus, welbst selbst nach mehrfachem Umkrystallisiren ihren Schmelzpunkt von 222° (unc.) nicht verändern. Die Base ist in Eisessig und Äther leicht löslich in der Kälte, ziemlich lös-

lich in kochendem Äthyl- und Amylalkohol und Benzol. Für die Reinigung hat es sich am besten erwiesen, die Base in heissem Eisessig zu lösen und nach dem Filtriren so lange mit kochendem Wasser zu versetzen, bis eine bleibende Trübung eintritt. Beim Erkalten krystallisiren lebhaft glänzende Nadeln aus, die vielleicht ein essigsaures Salz darstellen, denn nach dem Abfiltriren und Stehen über Kalk werden sie allmälig undurchsichtig und zerfallen endlich beim Trocknen bei 100° im Vacuum in ein feinkörniges Krystallpulver unter steter Abgabe von Essigsäure. Die Analysen der aus Alkohol umkrystallisirten und bei 100° getrockneten Substanz lieferten folgende Daten:

I. 0·2304 Grm. Substanz gaben 0·6056 Grm. Kohlendioxyd und 0·1163 Grm. Wasser.

II. 0·2101 Grm. gaben 0·5474 Grm. Kohlendioxyd und 0·1074 Grm. Wasser.

III. 0·2088 Grm. gaben 43·4 Ccm. Stickstoff bei 15° C. und 748·2 Mm. Barometerstand.

IV. 0·1545 Grm. gaben 23 Ccm. Stickstoff bei 20° C. und 745 Mm. Barometerstand.

	Berechnet für		Gefunden				
	$C^{39}H^{37}N^{11}$	$C^{39}H^{35}N^{11}$	I.	II.	III.	IV.	Mittel
C %	71·02	71·23	71·69	71·06	—	—	71·38
H %	5·61	5·33	5·61	5·68	—	—	5·65
N %	23·37	23·44	—	—	23·92	23·18	23·55

Lässt man die aus Essigsäure umkrystallisirte Substanz einige Zeit über Kalk stehen und trocknet sie dann bei 100° im Vacuum, so kann ein Verlust bis zu 25% constatirt werden, wiewohl auch hier schon beim Liegen über Kalk eine allmälige Gewichtsabnahme zu bemerken ist.

Die soeben mitgetheilten Analysen erweckten in mir einige Zeit die Auffassung, dass der vorliegende Körper nichts Anderes als Triphenylmelamin wäre. In Anbetracht dessen jedoch, dass von A. W. Hoffmann[1] der Schmelzpunkt derselben zu 162—163° angegeben wird, ferner dass sich mit Platinchlorid ein krystalli-

[1] Ber. d. chem. Ges., III, 267.

sirtes Platindoppelsalz bildet und endlich eine alkoholische Lösung des Triphenylmelamins durch kurzes Kochen mit Salzsäure in eine solche von Triphenylcyanurat übergeht, konnte ich mit vollster Sicherheit annehmen, dass die von mir beschriebene Base ganz verschieden ist von dem Polymeren des Phenylcyanamyds.

Versuche, welche angestellt wurden, mit Quecksilberchlorid, Silbernitrat in neutraler oder ammoniakalischer Lösung und Platinchlorid in salzsaurer Lösung Doppelsalze zu erhalten, schlugen gänzlich fehl. Versetzt man hingegen eine essigsaure Lösung der Base mit Kaliumbichromat oder mit Chromsäure, so entsteht ein licht orangegelber Niederschlag — aus feinen Nadeln bestehend, — der sich beim Umkrystallisiren aus Essigsäure unter allmäliger Reduction der Chromsäure zersetzt, so dass von Analysen des Chromats, welche entschieden hätten Aufschluss über die Moleculargrösse der Base geben können, abgesehen werden musste.

Nicht besser ergeht es mit dem Picrate. Wird eine ätherische Lösung der Base mit einer solchen von Picrinsäure vermischt, so entsteht sofort ein eigelber Niederschlag, der in langen, dünnen Nadeln krystallisirt. An der Pumpe abgesaugt und mit Äther gewaschen, krystallisirt er aus siedendem Benzol in feinen Nadeln von eigelber Farbe, einen Schmelzpunkt von 238—240° (unc.) zeigend, nachdem schon oberhalb 225° Erweichung eintritt. Leider ergeben die Analysen Zahlen, die auf gar keine Formel stimmen, welche mit derjenigen der freien Base in irgend einem Zusammenhange stünde.

Löst man die freie Base vom Schmelzpunkte 222° (unc.) in kaltem Eisessig und setzt unter Umschütteln tropfenweise Brom hinzu, so wird dasselbe lebhaft aufgenommen. Bei bleibender Färbung der Lösung trübt sich dieselbe allmälig und erstarrt nach 12-stündigem Stehen zu einem Breie. Derselbe wird an der Pumpe abfiltrirt und so lange mit Eisessig gewaschen, bis das auf dem Trichter befindliche Product weiss geworden ist. Dasselbe wird nun in heissem Eisessig, in welchem es sehr schwer löslich ist, gelöst und fällt beim Erkalten in kleinen Körnern aus, die sich unter dem Mikroskope als ein Haufwerk von moosartig verzweigten Nädelchen darstellen. Der Schmelzpunkt der so

gereinigten Substanz konnte nicht bestimmt werden, weil dieselbe bei 250° (unc.) noch keine Veränderung zeigte. Die mit dem bei 100° im Vacuum getrockneten Körper ausgeführten Analysen ergaben Werthe, welche nach meiner Ansicht die oben festgestellte Formel der freien Base stützen, indem sie auf ein sechsfach bromirtes Product hinweisen.

I. 0·3961 Grm. Substanz gaben 0·1074 Grm. Wasser; Kohlenstoffbestimmung verunglückte.

II. 0·3008 Grm. ergaben 37·2 Ccm. Stickstoff bei 21·5° C. und 755·5 Mm. Barometerstand.

III. 0·2522 Grm. lieferten bei der Bestimmung mit Kalk 0·2477 Grm. Bromsilber.

IV. 0·2553 Grm. verbrauchten — nach der Methode Piria-Schiff verbrannt und nach Volhard titrirt — 13·444 Ccm. Silbernitrat (1 Ccm. = 0·0079669 Grm. Brom).

Daraus ergeben sich durch Rechnung folgende Werthe, welche mit den für $C^{39}H^{31}N^{11}Br^{6}$ oder $C^{39}H^{29}N^{11}Br^{6}$ verlangten ziemlich gut übereinstimmen:

	Berechnet für		Gefunden			
	$C^{39}H^{31}N^{11}Br^{6}$	$C^{39}H^{29}N^{11}Br^{6}$	I.	II.	III.	IV.
C %	41·31	41·38	—	—	—	—
H %	2·73	2·56	3·01	—	—	—
N %	13·59	13·62	—	13·94	—	—
Br %	42·37	42·44	—	—	41·79	41·95

Das Bromproduct ist äusserst schwierig löslich in siedendem absolutem Alkohol, Benzol und Essigäther. Beim Erhitzen mit alkoholischem Kali löst es sich langsam auf, aus welcher Lösung nach einigem Kochen durch Wasser ein Körper in röthlich weissen Flocken ausgefällt wird. Mangel an Material liess mich von weiteren Versuchen abstehen.

Erhitzt man 1 Theil der Base vom Schmelzpunkte 222° (unc.) mit 8—10 Theilen Essigsäure-Anhydrid unter Zusatz von etwa 1 Theil geschmolzenem Natrium-Acetat ungefähr zwei Stunden in einem Kölbchen, welches mit einem Kühlrohre versehen ist, über freiem Feuer, so erstarrt das Gemisch nach dem Erkalten zu einer gelatinösen Masse, in welcher weisse Körner eingebettet

sind. Beim Versetzen mit einem bedeutenden Überschusse von Wasser fällt ein schweres Öl aus, das beim gelinden Erwärmen zu weissen Flocken erstarrt. Werden dieselben aus heissem absolutem Alkohol, in welchem sie sehr leicht löslich sind, umkrystallisirt, so erhält man beim Erkalten prachtvoll irisirende Blättchen von der Form unregelmässiger Vierecke. Der unscharfe Schmelzpunkt derselben liess die Vermuthung aufkommen, dass die Substanz nicht einheitlich sei, und es gelang in der That, das vorliegende Acetylproduct durch langsames Verdunsten einer absolut alkoholischen Lösung in zwei Verbindungen zu trennen. Ich neige jedoch der Ansicht zu, dass durch den Alkohol vielleicht eine Abspaltung von Acetylgruppen platzgreift, denn die eine der getrennten Verbindungen zeigte einen Schmelzpunkt, welcher sich demjenigen der angewendeten Base näherte.

Ebenso wenig gelang es, ein Nitrosoproduct darzustellen, denn als zu diesem Ende in eine Eisesiglösung der freien Base bei gewöhnlicher Temperatur unter Umschütteln fein gepulvertes Kaliumnitrid eingetragen wurde, konnte bei weiterer Verarbeitung nur die freie Base zurückgewonnen werden.

Ein ganz eigenthümliches Verhalten zeigt die Base gegen Salpetersäure. Ich habe bereits oben erwähnt, dass es nicht gelingt, nach der Methode von Carius im Chlorhydrate das Chlor gewichtsanalytisch zu bestimmen, dass vielmehr stets ein äusserst beständiger gelber Körper gebildet wird. Ich habe versucht, ihn in grösserer Menge darzustellen, indem ich die freie Base in concentrirter Schwefelsäure löste und nun unter beständiger Abkühlung ungefähr das gleiche Volumen concentrirter Salpetersäure zusetzte. Nach öfterem Umschütteln, wobei die Temperatur nicht über 40° stieg, wurde die Lösung circa zwölf Stunden einer Temperatur von beiläufig —5° ausgesetzt, nach welcher Zeit sich gelbe Flocken ausgeschieden hatten. Es wurde nun die gesammte Masse in eine bedeutende Menge kalten Wassers gegossen, durch welche Procedur sich die Fällung bedeutend vermehrte. Nach dem Abfiltriren wurde so lange mit kaltem Wasser gewaschen, bis jede saure Reaction verschwunden war. Lösungsversuche zeigten, dass das gebildete Product in allen Agentien, selbst bei Kochhitze, schwer löslich ist; zum Umkrystallisiren eignete sich noch am besten kochender Eisessig, der beim

Erkalten grünlichgelbe schleimige Flocken ausfallen liess, welche unter dem Mikroskope undeutliche Krystallisation zeigten. Charakteristisch für diesen Körper ist sein Verhalten gegen Alkalien: er wird durch dieselben sofort dunkelroth gefärbt, welche Eigenschaft mich zuerst glauben machte, das von R. Gnehm dargestellte Hexanitrodiphenylamin[1] unter den Händen zu haben, das bekanntlich mit Ammoniak den rothbraunen Farbstoff Aurantia liefert. Allein der Versuch der Schmelzpunktsbestimmung belehrte mich bald über die Verschiedenheit beider Verbindungen; während das zuletzt erwähnte Product bereits bei 238° unter Zersetzung schmelzen soll, ist die von mir dargestellte Substanz bei 250° (unc.) noch ganz unverändert. Übrigens entsteht sie auch noch beim Lösen und Kochen der freien Base mit Salpetersäure und nachheriges Ausfällen durch Wasser, sowie beim Erwärmen einer Lösung der Base in Eisessig mit rother, rauchender Salpetersäure.

Etwas mehr Aufschluss über die Constitution der Base vom Schmelzpunkte 222° (unc.) dürfte man durch Oxydation derselben in essigsaurer Lösung mit Kaliumpermanganat erhalten, denn dasselbe wird bei Siedhitze begierig zu Manganhyperoxyd reducirt. Nur muss bei diesem Processe stets genügend Wasser vorhanden sein, da eine Eisessiglösung selbst nach stundenlangem Kochen bloss eine rothbraune Färbung ohne jede Abscheidung von Braunstein zeigt.

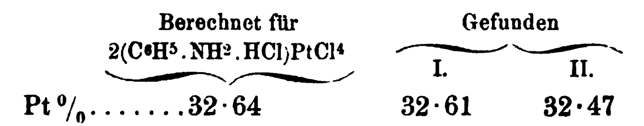
Auffallend ist endlich das Verhalten dieser hochmolecularen Base vom Schmelzpunkte 222° (unc.), respective deren Chlorhydrate gegen Salzsäure bei höherer Temperatur und unter Druck. Mit dem zehnfachen Gewichte 20%iger Salzsäure während zehn Stunden auf 150° erhitzt, ergibt sich nur eine partielle Zersetzung. Die Rohre öffnen sich ohne Druck und nach dem Übersättigen des sauren Inhaltes derselben mit Ätzkali kann mit Leichtigkeit durch Chlorkalk Anilin nachgewiesan werden, während man circa 75% der angewendeten Substanz unverändert zurückerhält. Besser, jedoch ebenfalls nicht vollständig, ist die Zersetzung bei Anwendung der 5fachen Menge rauchender Salzsäure und einer Temperatur von 140—150°. Die Röhren öffnen sich

[1] Ber. d. chem. Ges. VII, 1399.

unter schwachem Druck. Nach dem Übersättigen mit Alkali wird das Anilin durch Wasserdampf abgeblasen, das Destillat mit Äther ausgeschüttelt und letzterem mit schwach salzsaurem Wasser das Anilin entzogen. Die salzsaure Lösung wird nun stark eingeengt und mit Platinchlorid versetzt, wodurch ein hellgelber Niederschlag von feinen, zu lebhaft glänzenden Blättchen vereinigten Nadeln ausfällt, der nach dem Abfiltriren und Waschen bei 100° getrocknet und der Analyse unterworfen wird.

I. 0·4873 Grm. Platindoppelsalz hinterliessen nach dem Glühen 0·1589 Grm. Platin.

II. 0·7090 Grm. Platindoppelsalz hinterliessen 0·2302 Grm. Platin.



	Berechnet für $2(C^6H^5.NH^2.HCl)PtCl^4$	Gefunden I.	Gefunden II.
Pt %	32·64	32·61	32·47

Der nach dem Abblasen des Anilins verbliebene Rückstand stellte sich als unzersetzte Substanz heraus.

Erst als das Chlorhydrat mit der fünffachen Menge rauchender Salzsäure zehn Stunden auf 200—250° erhitzt wurde, trat vollständige Zersetzung ein. Unter starkem Drucke öffneten sich die Rohre, deren Inhalt ein gallertiges Aussehen angenommen hatte. Beim Übersättigen mit Alkali konnte deutlich neben dem Geruche nach Anilin auch noch der nach Ammoniak wahrgenommen werden. Es wurde daher mit Wasserdampf destillirt, wobei das Übergehende in einer mit verdünnter Salzsäure versehenen Woulff'schen Flasche aufgefangen wurde. Das Destillat wurde zur Trockne eingedampft und die nun erhaltene Salzmasse mehrfach mit absolutem Alkohol ausgekocht. Der auf diese Weise erhaltene Rückstand wurde nach dem Lösen in Wasser und Übersättigen mit Alkali der Destillation unterzogen. Das jetzt entstehende Destillat wurde in salzsäurehaltigem Wasser aufgefangen, die Flüssigkeit zur Trockne verdampft und nach dem neuerlichen Aufnehmen mit Wasser etc. mit Platinchlorid versetzt. Das abfiltrirte und der Analyse unterworfene Platindoppelsalz gab Werthe, welche auf Platinsalmiak stimmen.

0·4435 Grm. Platindoppelsalz ergaben nach dem Glühen 0·1951 Grm. Platin.

	Berechnet für $2(NH^4Cl)PtCl^4$	Gefunden
Pt %	43·83	43·99

Die Menge des auf diese Art gefundenen Ammoniaks betrug ungefähr 1·5% vom Gewichte des angewendeten Chlorhydrats. Die alkoholische Lösung, welche nach der Abscheidung des Salmiaks erhalten worden war, wurde eingedampft und der Rückstand — in Wasser gelöst — nach dem Übersättigen mit Alkali der Destillation unterworfen. Es ging jetzt eine milchige Flüssigkeit über, welche alle Eigenschaften des Anilins zeigte (Verhalten gegen Chlorkalk und gegen Chlorkalk und Schwefelammonium). Dieselbe wurde mit Salzsäure versetzt, zur Trockne eingedampft und nach dem Trocknen bei 100° gewogen. So wurde eine Menge Anilin in Form seines salzsauren Salzes bestimmt, welche ungefähr 35% vom Gewichte des ursprünglichen Chlorhydrates vom Schmelzpunkte 254—256° (unc.) ausmachte.

Die nach dem Abblasen des Ammoniaks und Anilins aus dem ursprünglichen Zersetzungsproducte erhaltene alkalische Flüssigkeit wurde mit Salzsäure angesäuert und zur Trockniss eingedampft. Der jetzt entstandene Rückstand — eine bedeutende Menge Chlorkalium enthaltend — wurde hierauf mehrfach mit siedendem absolutem Alkohol contrahirt und die alkoholischen Filtrate zur Trockne eingedampft. So konnten kleine Mengen einer braunrothen, anscheinend krystallinischen Masse erhalten werden, die aber zu gering waren, um damit auch nur Reinigungsversuche anzustellen.

Ich wende mich nun zur Beschreibung desjenigen Körpers, welcher ebenfalls in dem alkoholischen Auszuge des Reactionsproductes von Acetamid auf Phenylcyanamid enthalten ist. Das nach der Abscheidung des Chlorhydrates der Base vom Schmelzpunkte 222° (unc.) resultirende, stark salzsaure Filtrat wird nun mit festem Natriumcarbonat abgesättigt. Das entstandene Kochsalz wird abfiltrirt und gut mit absolutem Alkohol gewaschen, während die Filtrate durch Abdestilliren des Alkohols stark eingeengt und endlich mit einem bedeutenden Überschusse von Wasser versetzt werden. Dadurch wird eine Substanz in weissen

käsigen Flocken gefällt, die man nach dem Abfiltriren und Trocknen mit Eisessig behandelt. Bei gewöhnlicher Temperatur macht sich bereits eine Einwirkung erkenntlich — wahrscheinlich Salzbildung, — denn während sich ein Theil unter merkbarer Wärmeentwicklung löst, bleibt der grössere Theil als zusammengebackene Masse zurück. Man erhitzt zum Kochen und versetzt die Essiglösung nach dem Filtriren so lange mit siedendem Wasser, bis eine deutliche Opalescenz eintritt. Beim Erkalten schiessen lebhaft glänzende Nadeln an, die bereits im Vacuum über Kalk zu einem körnigen Pulver zerfallen und den Schmelzpunkt 212—213° (unc.) besitzen, der sich selbst nach mehrfachem Umkrystallisiren nicht ändert.

Wird nun dieser Körper in möglichst wenig siedendem und salzsäurehaltigem Alkohol gelöst, so fallen beim Erkalten prachtvoll glänzende Nadeln aus, welche sich unter dem Mikroskope als langgestreckte Prismen erweisen und einen Schmelzpunkt von 252° (unc.) zeigen. Damit angestellte Analysen ergeben im Verhältnisse zum früher beschriebenen Chlorhydrate eine sehr einfache Formel: nämlich $C^{15}H^{17}N^{6}Cl$, welche Verbindung auf folgende Weise entstanden gedacht werden könnte:

$$2C^{7}H^{6}N^{2}+2C^{2}H^{5}NO = C^{3}H^{6}O^{2}+C^{15}H^{16}N^{6}.$$

Die hierbei entstehende Propionsäure ist freilich nicht nachgewiesen worden, doch konnte sie vielleicht in Form von Propionanalid auftreten, dessen Vorhandensein ich im wässerigen Auszuge anzunehmen geneigt bin, denn jene oben erwähnten gelben Öltröpfchen glaube ich dafür halten zu dürfen, da der Schmelzpunkt des Propionanilids zu 92° angegeben wird.[1]

I. 0·2685 Grm. Substanz gaben 0·5554 Grm. Kohlendioxyd und 0·1284 Grm. Wasser.

II. 0·2300 Grm. lieferten 52·7 Ccm. Stickstoff bei 14·3° C. und 746·3 Mm. Barometerstand.

III. 0·2967 Grm. gaben mit Kalk verbrannt 0·1365 Grm. Chlorsilber.

IV. 0·3578 Grm. verbrauchten — nach der Methode Piria-Schiff verbrannt und nach Volhard titrirt — 11·3 Ccm. Silbernitrat (1 Ccm. = 0·003568 Grm. Chlor).

---

[1] Beilstein, Handbuch der org. Chemie 900.

	Berechnet für $C^{15}H^{17}N^{6}Cl$	Gefunden I.	II.	III.	IV.
C %	56·87	56·42	—	—	—
H %	5·37	5·31	—	—	—
N %	26·54	—	26·39	—	—
Cl %	11·22	—	—	11·38	11·27

Die freie Base ist äusserst leicht löslich in Alkohol, Äther und Eisessig, schwierig in heissem Benzol. Aus einer gesättigten Lösung in siedendem Amylalkohol fällt sie in Flocken aus, welche die Flüssigkeit zu einem Breie gestehen lassen. Auch diese Base scheint mit Essigsäure ein Salz zu bilden, welches sich bereits im Vacuum über Kalk zersetzt.

Von der freien Base habe ich nur eine Stickstoffbestimmung gemacht, deren Werth auf die zu Grunde gelegte Formel stimmt; die Substanz dazu wurde — wie gewöhnlich — bei 100° im Vacuum getrocknet.

0·1968 Grm. lieferten 51·8 Ccm. Stickstoff bei 17° C. und 755 Mm. Barometerstand.

	Berechnet für $C^{15}H^{16}N^{6}$	Gefunden
N %	30·00	30·29

In ätherischer Lösung mit einer solchen von Pikrinsäure versetzt, entsteht im Gegensatze zu der Base vom Schmelzpunkte 222° (unc.) kein Niederschlag eines Pikrates. Trotzdem lässt sich dieses verschiedene Verhalten nicht zur Trennung benützen, wie angestellte Versuche ergeben haben.

Durch Kaliumbichromat und Chromsäure wird aus der essigsauren Lösung ein orangerother Niederschlag, aus feinen verfilzten Nadeln bestehend, gefällt, der sich jedoch nicht umkrystallisiren lässt, weil er sich unter partieller Reduction der Chromsäure zersetzt. Es wurde demgemäss bei der Analyse stets zu wenig an Chromoxyd gefunden (18·20% $Cr^{2}O^{3}$ anstatt 19·62%). Silbernitrat und Quecksilberchlorid sind ohne jede Einwirkung auf die freie Base, ebenso erhält man mit Platinchlorid kein Platindoppelsalz. Gegen Salpetersäure scheint sich die Base analog der früher beschriebenen zu verhalten.

Bei weitem glatter geht die Oxydation dieser Base bei Anwendung von Kaliumpermanganat vor sich, dessen Zusatz so eingehalten wurde, dass gerade ein Atom Sauerstoff auf ein Molekül $C^{15}H^{16}N^{6}$ zur Wirkung kam. Die Substanz wurde in ziemlich concentrirter Essigsäure (Eisessig mit circa 10% Wasser) gelöst, die Lösung aufgekocht und nun die berechnete Menge des Permanganates in mässig concentrirter wässeriger Lösung zugesetzt. Sofort wird dasselbe unter Abscheidung von Braunstein reducirt. Die Lösung wird hierauf etwa mit dem gleichen Volumen siedenden Wassers versetzt, aufgekocht und filtrirt. Beim Erkalten scheidet sich das Oxydationsproduct in sternförmig gruppirten Nädelchen — mikroskopischen Prismen — aus. Dieselben werden nach dem Abfiltriren in heisser verdünnter Salzsäure (1:4—5) gelöst und filtrirt. Nach dem Erkalten fallen prächtig glänzende Nadeln von lanzettartigem Habitus aus, welche einen Schmelzpunkt von 210—212° (unc.) besitzen. Löst man dieses Salz in verdünnter Chlorwasserstoffsäure und versetzt die Solution mit Ammoniak im Überschusse, so erhält man einen weissen, käsigen Niederschlag, der, aus verdünnter Essigsäure umkrystallisirt, in weissen, haarfeinen Nadeln mit Seidenglanz ausfällt. Beim Trocknen bei 100° werden sie trübe und zeigen dann einen Schmelzpunkt von 228° (unc.). Da mir nicht genügende Substanz im Augenblicke zur Verfügung stand, so konnte nur eine Chlorbestimmung im salzsauren Salze vorgenommen werden, deren Ergebniss darauf hinzudeuten scheint, dass sich in das Molekül $C^{15}H^{16}N^{6}$ ein Atom Sauerstoff eingeschoben hat.

0·3376 Grm. verbrauchten — nach der Methode Piria-Schiff verbrannt und nach Volhard titrirt — 10·376 Ccm. Silbernitrat (1 Ccm. = 0·00353532 Grm. Chlor.

	Berechnet für $C^{15}H^{17}N^{6}OCl$	Gefunden
Cl%	10·68	10·87

Erst diesem Chlorhydrate kommt die Fähigkeit zu, mit Platinchlorid in wässeriger Lösung einen gelbroth gefärbten Niederschlag zu geben, der jedoch nicht krystallinisch zu sein scheint.

D. Unlöslicher Rückstand.

Wie schon oben mehrfach erwähnt, bleibt nach vollkommener Erschöpfung des ursprünglichen Reactionsproductes mit Wasser

und Alkohol ein grüngelber bis graugrüner körniger Körper zurück, der sich durch seine Unlöslichkeit in nahezu allen Lösungsmitteln auszeichnet. Nur kochende Salzsäure, sowie Alkohol, der mit Salz- oder Schwefelsäure angesäuert ist, vermögen ihn zu lösen, ohne dass er daraus krystallirte. Ein einziges Mal nur konnte ich aus salzsäurehaltigem Alkohol perlmutterglänzende Blättchen erhalten, die bei 290° (unc.) noch nicht geschmolzen waren. Trotz vielfacher Versuche bin ich nicht in die Lage gekommen, die Bedingungen aufzufinden, unter denen diese Krystalle entstehen. Dieser Körper könnte auch möglicherweise das Analogon jenes Productes sein, das J. Traube[1] bei der Einwirkung von Acetamid auf Cyanamidobenzoësäure erhalten hat, und das er als amorphe Substanz von der Formel $C^{30}H^{29}N^{5}O^{6}$, nur löslich in rauchender Salpetersäure und concentrirter Schwefelsäure beschreibt. Freilich würde gegen diese Analogie wieder der Umstand sprechen, dass durch Salpetersäure das schon mehrfach erwähnte gelbe Product aus dem von mir dargestellten Körper entsteht, der auch überdies, in Eisessig suspendirt und mit Chromsäure behandelt, unter lebhafter Gasentwickelung und rapider Reduction des Oxydationsmittels in Lösung geht, aus welcher durch Wasser gelbliche Flocken ausgefällt werden.

Zum Schlusse erübrigt mir nur noch anzuführen, dass die Reaction sich wohl verallgemeinern lassen dürfte. Wird nämlich ein Gemisch von Acetamid und Cyanamid genau der beschriebenen Einwirkung unterworfen, so tritt plötzlich eine äusserst stürmische Reaction ein: bedeutende Mengen von Ammoniak entweichen und zurückbleibt ein körniger Rückstand. Genau so verhält sich auch ein Gemisch von Propionamid und Phenylcyanamid, so dass wahrscheinlich hier die homologen Verbindungen der oben beschriebenen Basen aufzufinden sein werden.

Über das Verhalten des Stärkekorns beim Erhitzen.

I. Abhandlung.

Von **Stanislaus Schubert.**

(Aus dem Laboratorium des Prof. Dr. J. Habermann an der k. k. technischen Hochschule in Brünn.)

Seit geraumer Zeit mit dem Studium der Verhältnisse beschäftigt, welche zur Bildung der sogenannten „löslichen Stärke“ führen, kann ich heute eine Anzahl von gut begründeten Thatsachen zur Veröffentlichung bringen, welche die Grundlage für andere, ziemlich weit gediehene Untersuchungen bilden, so zwar, dass die vorliegenden Mittheilungen als Einleitung für weitere, andere, angesehen werden können.

Die ersten grundlegenden Untersuchungen über das Verhalten des Stärkemehles beim Erhitzen fallen in das zweite Decennium dieses Jahrhunderts. Nachdem im Jahre 1811 Vauquelin entdeckt hatte, dass die Stärke im gerösteten Zustande sich in eine in Wasser mehr oder weniger lösliche Substanz verwandle, die in ihren physikalischen Eigenschaften vielfach mit dem arabischen Gummi übereinstimmt, erkannte Döbereiner, dass die grössere oder geringere Löslichkeit des erhitzten Stärkemehles von der höheren oder niederen Temperatur während des Röstprocesses abhänge, und Payen ermittelte (1834), dass bei 200—210° erhitztes Stärkemehl den Höhepunkt seiner Löslichkeit erreiche. Die Untersuchungen der französischen Chemiker Couverchel (1821) und Robiquet (1822) hatten vorzüglich das Studium des „Stärkemehlgummis“ und seiner Eigenschaften zum Gegenstande, während Raspail (1825) auf Grund seiner beim Rösten von Stärke gemachten Wahrnehmungen die erste Erklärung (seit Leuwenhoek 1716) über die Zusammensetzung des Stärkekorns zu geben versuchte. Raspail's Ansicht, dass die Stärkekörner aus einer unlöslichen „Hülle“ und einer Art in Wasser löslichen „Gummis“ beständen, wurde durch

die Untersuchungen von Payen und Persoz, sowie durch die werthvollen Arbeiten von Fritsche, Schleiden und Mohl widerlegt, nachdem bereits 1826 Lassaigne darauf aufmerksam gemacht hatte, dass Stärkemehl kein Gummi enthalte, weil es beim Erhitzen mit Salpetersäure nicht wie dieses Schleimsäure, sondern Oxalsäure liefere, und nachdem auch Guibourt (1829) erkannt hatte, dass die Verschiedenheit in der Structur der Stärkekörner durch den verschiedenen Aggregatzustand einer und derselben Substanz bedingt sei. Diese Ansichten, namentlich aber Fritsche's bekannte Lehre über die Zusammensetzung des Stärkekorns (Pogg. Ann. 32, 129) bildeten die Grundlage zu C. Nägeli's ausführlichen Untersuchungen über die Morphologie der Stärkekörner („Die Stärkekörner", Zürich 1858).

Über eine Art löslicher Stärke, die beim Erhitzen von Stärkekleister, sowie beim Rösten gewöhnlicher Stärke der Bildung des Dextrins vorangeht, berichtete Caventou (1826), Jacquelin[1] (1840) und später Maschke.[2] Hieher gehören auch die von Kabsch[3] und Zulkowsky[4] gemachten Beobachtungen, dass Stärke von heissem Glycerin gelöst und hiebei in die lösliche Modification übergeführt werde.

Das in der That merkwürdige Verhalten der Stärke beim Erhitzen in Glycerin, namentlich aber die Thatsache, dass dieselbe hiebei ohne Bildung von Dextrin in den löslichen Zustand übergeführt wird, liess mir zunächst die Klärung derjenigen Verhältnisse wichtig erscheinen, unter welchen die Veränderungen der Stärke beim Erhitzen stattfinden. Bei den Experimenten, die ich in dieser Richtung unternommen habe, liess ich mich von dem Gedanken leiten, dass in den obigen Fällen das Glycerin die Rolle eines Temperaturregulators spielt, dass hingegen das relativ frühe Auftreten des Dextrins beim Erhitzen der Stärke für sich zum Theil auf eine ungleichmässige Einwirkung der Hitze zurückzuführen sei. Inwieweit diese Voraussetzung Bestätigung fand, wird sich aus dem Folgenden ergeben.

---

[1] Ann. chim. phys. 2. LXXIII, S. 167.

[2] Journal f. prakt. Chemie 61, S. 1.

[3] Zeitschr. f. anal. Chemie II, S. 216.

[4] Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. LXXII, Bd. 1875, Berliner Ber. 13. Jahrg., S. 1395.

Die diesbezüglichen Versuche wurden durchwegs mit einer gut gereinigten Kartoffelstärke vorgenommen. Die Reinigung geschah auf die von Brovn und Heron (Lieb. Ann. 199, S. 172) beschriebene Weise. Die gesiebte Stärke wurde zuerst in Wasser gewaschen, hierauf nacheinander mit sehr verdünnten Lösungen von Kalihydrat und einprocentiger Salzsäure behandelt, von letzterer durch nochmaliges Waschen in Wasser vollständig befreit und bei gewöhnlicher Temperatur an der Luft getrocknet.

Beim Erhitzen der einzelnen Proben bediente ich mich nach verschiedenen, wenig befriedigenden Versuchen, mit Vortheil des von L. Meyer beschriebenen Luftbades. Dasselbe ermöglicht in sehr befriedigender Weise sowohl ein allmäliges und gleichmässiges Ansteigen der Temperatur, als auch das rasche Einstellen der Proben in den vorher auf einen bestimmten und constant bleibenden Hitzegrad gebrachten Raum.

Hiebei wurde, um ein möglichst gleichmässiges Erhitzen des Stärkekornes zu erzielen, jede Probe leicht zerrieben und durch ein feines Sieb auf ein rundes Eisenblech mit sehr niederem Seitenrande in der Dicke von 1—2 Mm. ganz locker aufgestreut.

Die einzelnen Stärkemengen, die auf diese Weise zur Verwendung kamen, betrugen, je nach Bedarf, 40—60 Grm.

Durch genaues Einhalten der eben beschriebenen Vorsichtsmassregeln verhinderte ich — wenigstens theilweise — die Bildung verschiedener Nebenproducte, sowie auch ein zu frühes Bräunen der erhitzten Stärkemengen.

Bei der Ausführung der Versuche bin ich, an Bekanntes anknüpfend, systematisch vorgegangen und bildeten den Ausgangspunkt derselben die von C. Nägeli beobachteten Veränderungen des erhitzten Stärkekorns bei Zutritt von Wasser.

Als erstes Merkmal der an dem erwähnten Korne wahrnehmbaren Veränderung ist die im Kerne auftretende Gasblase zu betrachten, die bereits bei 134° bemerkbar wird, anfänglich klein und leicht löslich ist, bei zunehmender Temperatur jedoch immer mehr und mehr an Ausdehnung gewinnt und dann um so unlöslicher wird. Die nächstfolgende Erscheinung bildet das deutliche Hervortreten der Schichtung, das Verschwinden der Gasblase durch Absorption und die Auflösung der weicheren Schichten.

Die ganzen Veränderungen kennzeichnet Nägeli in treffender Weise mit folgenden Worten: „Wenn die Stärkekörner im lufttrockenen Zustande geröstet werden, so verwandeln sich zuerst die weichen (wasserreichen) Partien in Dextrin und werden dann in Berührung mit Wasser aufgelöst, indess die übrigen Theile aufquellen. Es verschwindet daher immer zuerst der Kern mit den innersten Schichten, darauf zuweilen die übrigen weichen Schichten, so dass die dichten mehr oder weniger von einander getrennt zurückbleiben („Die Stärkekörner“, S. 92).

Und Ähnliches sagt derselbe Forscher auf Seite 95: „An einer Reihe von Körnern, welche die Einwirkung der Hitze in ungleichem Grade erfahren haben, sieht man, dass zuerst der Kern mit den nächsten Schichten, darauf die wasserreichen röthlichen Schichten im ganzen Korn aufgelöst werden.“

Diese auf Grund genauer Beobachtungen gegebene Darstellung kann nun leicht dahin verstanden werden, dass die Formveränderungen des lufttrockenen Stärkekorns beim Erhitzen in erster Linie von dem Wassergehalte der Schichten abhängen; mehrere Versuche, die von mir mit vollkommen trockener Stärke angestellt wurden, beweisen jedoch, dass das wasserlose Korn genau dieselben Veränderungen erleidet. Einer dieser Versuche ist im Nachstehenden beschrieben:

Eine Probe von circa 40 Grm. wurde einige Tage hindurch im Vacuum über Schwefelsäure zunächst bei gewöhnlicher Temperatur, dann bei 50° und schliesslich bei 100° im Wasserbade vollständig getrocknet und sodann in das auf 160° angeheizte Luftbad gestellt. Die Temperatur wurde geraume Zeit auf diesem Punkt erhalten und allmälig gesteigert. Nachfolgendes enthält die genauen, auf den Fortgang des Experimentes bezüglichen Daten, sowie die gemachten Wahrnehmungen in übersichtlicher Zusammenstellung:

Nr.	Zeitdauer	Temperatur	Lösungen, durch Auslaugen der Röstproducte mit kaltem Wasser erzeugt	Lösungen der Gesammtmenge in heissem Wasser
			werden verändert durch:	
I.	Nach 1 St.	bei 160°	Jod: Blau. Alkohol: Ganz unbedeutende Trübung.	
II.	1 St. später	„ 160°	Jod: Rosa, blau, blauviolett. Alkohol: Geringe Trübung.	
III.	1 „ „	„ 160°	Jod: Rosa, blau, blauviolett. Alkohol: Deutliche Trübung.	
IV.	1 „ „	„ 170°	Jod: Rosa, blau, blauviolett. Alkohol: Geringer Niederschlag.	
V.	1/4 „ „	bei 180—190°	Jod: Rosa, blau, blauviolett. Alkohol: Deutlicher Niederschlag.	
VI.	3/4 „ „	„ 180—190°	Jod: Rosa, blau, blauviolett. Alkohol: Bedeutender Niederschlag.	Rosa, blau, blauviolett.
VII.	1/2 „ „	„ 190—200°	Jod: Rosa, blauviolett, rothviolett. Alkohol: (Die Substanz löst sich fast gänzlich in kaltem Wasser.)	Rosa. blau, blauviolett.
				Lösungen der Gesammtmenge in kaltem Wasser werden verändert durch:
VIII.	1 „ „	„ 200—210°	Jod:	Röthlich, rothviolett, weinroth.
IX.	1/2 „ „	„ 210—220°	Jod:	Roth, dunkelroth.
X.	1/2 „ „	„ 210—220°	Jod:	Bräunlich, dunkelroth, braun.

VIII färbt sich erst nach längerem Behandeln mit Jod und gibt mit verdünnter Gerbsäurelösung keinen Niederschlag mehr.

Dieser Versuch wurde mit einer und derselben Stärkemenge ausgeführt. Um bei den Jodreactionen und der Erzeugung der Alkoholniederschläge eine gewisse Gleichmässigkeit zu erzielen, wurden stets gleiche Gewichtsmengen des Röstproductes mit gleichen Wassermengen behandelt. Bei den Jodreactionen, die mit festem Jod ausgeführt wurden, sind die aufeinanderfolgenden Farbentöne angegeben. Das Auftreten der rothen Farbe vor der blauen und violetten, eine Erscheinung, die bei anderen Gelegenheiten bereits von Griessmayer[1] und ebenso von Brücke[2] beobachtet wurde, lässt sich nach W. Nägeli's[3] und Br. Brukner's[4] Angaben einfach dahin erklären, dass die violetten Töne, mit denen wir es in vorliegendem Falle fast durchwegs zu thun haben, in sehr grosser Verdünnung betrachtet, mehr roth oder rosa, im concentrirten Zustande jedoch mehr blau erscheinen.

Die Reactionen mit Jod, Alkohol und Gerbsäure wurden vorgenommen, um beiläufig zu zeigen, wie weit neben der physikalischen Veränderung der Stärke auch die chemische vorgeschritten ist.

Die Ergebnisse der mikroskopischen Besichtigung waren in Kurzem folgende:

Anfangs (bei I, II und III) bilden sich im Centrum die bekannten kleinen Gasblasen, an deren Stelle in dem Masse, als sie absorbirt werden, eine röthlich erscheinende Flüssigkeit tritt.

---

[1] Ann. Chem. Pharm. 160, S. 40: Beim Stehen von Stärkekleister an der Luft bildet sich ein Dextrin, welches mit Jod roth gefärbt wird und zu demselben eine grössere Verwandtschaft besitzen soll als die Granulose. Griessmayer stützt sich hiebei auf die Thatsache, dass geringe Jodmengen im Stärkekleister keine blaue, sondern eine röthliche Färbung hervorrufen.

[2] Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. 65. Bd., 3. Abth. Brücke gibt hier an, dass ein Malzauszug, der durch Jod roth tingirt wird, mit frischem Stärkekleister gemischt, sich auf Zusatz von Jod zuerst roth und erst nachher mehr blau färbe. Diese Erscheinung ist zwar richtig, Brücke's Annahme jedoch, das Auftreten der rothen Farbe vor der blauen sei dem sich mit Jod rothfärbenden „Erythramylum" zuzuschreiben, welches das Jod stärker anziehe als Granulose, bereits vielfach widerlegt.

[3] „Beiträge zur näheren Kenntniss der Stärkegruppe" S. 43.

[4] Monatshefte f. Chemie, IV. Bd., Jahrg. 1883, S. 910.

Bei 170° werden die Gasblasen grösser und erhalten einen gabeligen oder mehrere radial verlaufende Risse, die im Kerne ihren Convergenzpunkt haben. Gleichzeitig zeigen die Körner ein deutliches Hervortreten sämmtlicher Schichten, die durch rothe Säume in besondere Gruppen gesondert erscheinen. Dieselben Erscheinungen, nur noch deutlicher, treten bei Nr. V auf, die markanteste und besonders charakteristische Veränderung erleidet das Korn jedoch erst nach weiterem $^3/_4$stündigem Erhitzen auf 180 — 190°. Die mitunter ausnehmend zart gezeichnete Schichtung differenzirt sich in einer Weise, als ob das Korn aus Schalen zusammengesetzt wäre, die durch Verlust einer Zwischensubstanz den gegenseitigen Zusammenhang mehr oder weniger eingebüsst haben. Dieselbe Erscheinung kann man bereits bei V beobachten, wenn man die Körnchen auf dem Objectträger nach und nach schwach erwärmt. Die einzelnen Schichten trennen sich mehr oder weniger von einander und bleiben mitunter ganz isolirt bis zum Eintritt der Lösung sichtbar. Diese Veränderungen sind demnach dem in heissem Wasser löslichen Korn eigen. Die nebenbei beobachtete Quellung trifft, wie bereits Nägeli ausführlich berichtet, die Schichten an der Peripherie, zumeist aber die Schichten am Kernende, so dass dieselben den stark ausgehöhlten Kern mitunter kuppelförmig überwölben.

Bei einem zweiten Versuche unterwarf ich sowohl lufttrockene als auch völlig entwässerte Stärke gleichzeitig einer höheren Temperatur (190°), konnte aber keinen wesentlichen Unterschied in der Structur der Körner beobachten, wobei ich gänzlich von der Verschiedenheit der Körner im chemischen Verhalten abstrahire. Um in diesem Falle bei beiderlei Substanzen unter möglichst gleichen Bedingungen zu arbeiten, wurde eine auf die früher angegebene Weise (schliesslich bei 120°) getrocknete Stärkemenge in gleiche Hälften getheilt, von denen eine bis zum Versuche über Schwefelsäure aufbewahrt, die andere hingegen durch längeres Stehen an der Luft mit Wasserdämpfen geschwängert wurde.

Bei einem dritten Versuche erhitzte ich plötzlich eine mit Wasser derart imbibirte Stärke, dass sofortige Verkleisterung eintrat und die zusammengebackene Masse sich anscheinend trocken präsentirte. Gepulvert und abermals höheren Temperatur-

graden (210°) ausgesetzt, liess die Probe in dem Masse, als das noch vorhandene Wasser verloren ging, die charakteristische Schichtung und Structur der vorher völlig deformirten Stärkekörner erkennen.

Ganz eigenthümlich verhält sich die Stärke beim Erhitzen in Glycerin.[1] Das Korn zeigt hiebei dieselben Quellungserscheinungen, wie sie schon Payen[2] von dem in Wasser erhitzten Korn beschrieben hat. Unter dem Mikroskop betrachtet erscheinen die Stärkekörner als deformirte weiche Ballen und lassen keinerlei Schichtung und Differenzirung beobachten; dieselben scheinen sich vielmehr zuerst zu verkleistern und gehen nach und nach in Lösung über, wobei die Hüllen der Einwirkung der Hitze am längsten widerstehen. Nach allen, insbesonders aber den mikroskopischen Beobachtungen spielt hier das Glycerin die Rolle eines Temperaturregulators, während es gleichzeitig die physikalischen Unterschiede der abwechselnden Schichten aufhebt. Die nach Zulkowsky's Vorschrift bereitete lösliche Stärke ist fast völlig frei von Dextrin und besitzt daher ein bedeutendes Rotationsvermögen.[3] Da im vorliegenden Falle nach Zulkowsky's Angaben die Stärke relativ sehr hohen Temperaturen, schliesslich eine halbe Stunde hindurch einer solchen von 190° C. ausgesetzt bleiben muss, ehe sie vollständig in die lösliche Modification übergeht, so erscheint hiebei der Umstand, dass die Bildung des Dextrins so lange hintangehalten wird, um so bemerkenswerther, als Stärke beim Erhitzen für sich unter sonst gleichen Bedingungen bereits beträchtliche Mengen von Dextrin aufweist. Dass die Bildung des letzteren von der Höhe der Temperatur und der Dauer des Erhitzens, ferner von dem Wassergehalte des Korns abhängig sei, zeigte bereits Payen; aus dem Verhalten der Stärke gegen heisses Glycerin lässt sich jedoch schliessen, dass die Bildung von Dextrin beim Erhitzen der Stärke für sich auch durch das differente Verhalten der einzelnen Schichten innerhalb

---

[1] Siehe Zulkowsky, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. 72. Bd., 1875.

[2] Chimie industrielle von Stohmann und Engler.

[3] $\alpha(j) = 206 \cdot 8°$ (Zulkowsky)
$\alpha(j) = 209 \cdot 3°$ (Schubert), nach halbstündigem Kochen der Lösung.

des Korns beeinflusst werde. Die späteren Mittheilungen werden dies beleuchten. — Fassen wir die gewonnenen Beobachtungsresultate zusammen, so ergibt sich die Thatsache, dass die beschriebenen Form- und Structurveränderungen, namentlich das Hervortreten der Schichtung durch den Wassergehalt des lufttrockenen Kornes nicht ausschliesslich bedingt werden, vielmehr einzig und allein in dem differenten physikalischen oder auch chemischen Verhalten einzelner Schichten zu finden sind. (Siehe Wiesner's „Elemente der wissenschaftlichen Botanik“ 1. Bd., Seite 260 und 261.) Durch die Einwirkung der Hitze tritt diese Differenz nur noch prägnanter hervor, indem einzelne Schichten mehr oder weniger angegriffen werden, so dass bei nachherigem Zutritt von Wasser durch theilweise Auslaugung bestimmter Schichtenreihen und dementsprechend durch verschiedene Einlagerung der Wassermoleküle jene Erscheinungen zu Tage treten. Die einfachste Erklärung für diese Thatsache bleibt allerdings die, dass die weichen Schichten, als die am wenigsten widerstandsfähigen, zunächst angegriffen und nachher ausgelaugt werden, während die dichteren der Einwirkung länger widerstehen; ich glaube jedoch, diese Erklärung näher präcisiren zu können, wenn ich behaupte, dass das erhitzte Korn beim nachherigen Behandeln mit Wasser ähnliche Veränderungen erleidet, wie beim Behandeln mit Speichel oder mit Chromsäure. In der That stimmen meine, an dem durch Wärme veränderten Korne gemachten Beobachtungen mit den von Weiss und Wiesner[1] für die andersartigen Veränderungen beschriebenen in einer Weise überein, dass ich nicht umhin kann, zu behaupten, das Stärkekorn erleide bei höheren Temperaturen eine derartige Umwandlung, dass zunächst die Granulose oder, besser gesagt, die granulosereichen Schichten in lösliche Stärke und Dextrin übergehen, während die Hauptmasse der Cellulose oder die cellulosereichen Schichten diese Umänderung erst später erleiden. (Letzteres geschähe in unserem Falle bei Nr. VIII des ersten Versuches.) Das Folgende wird diese Anschauung rechtfertigen:

Behandelt man das erhitzte, stark geschichtete, im heissen Wasser lösliche Korn längere Zeit hindurch mit Wasser von

[1] Botan. Zeitung 1866, S. 97.

gewöhnlicher Temperatur, so geht zunächst der in lösliche Stärke und Dextrin umgewandelte Theil der Granulose in Lösung, während ein organisirter Rest des Stärkekorns zurückbleibt, der mehr oder weniger die Form und Structur des ursprünglichen Korns beibehalten hat, und von dem man annehmen kann, dass er frei von leicht löslichen Dextrinen sei. Dieser „Rest“ weist in den einzelnen Körnern, je nach den Hitzegraden, denen die Stärke ausgesetzt war, grössere oder geringere Mengen intact gebliebener Granulose auf und das Korn erscheint um so deutlicher geschichtet, je mehr es an Masse verloren hat. Die Granulose des „Restes“ lässt sich aus den Körnern noch weiterhin auslaugen und scheint überhaupt derart modificirt zu sein, dass sie chemischen Veränderungen leicht unterworfen ist. Behandelt man nämlich den „Rest“ von Neuem mit rasch wechselnden Wassermengen, so färbt sich das anfangs blauviolette Korn bald rothviolett, nach einigen Tagen nur mehr roth, endlich schwach röthlich oder braungelb. Die Körner geben hiebei an das Wasser den grössten Theil der noch vorhandenen Granulose ab, verlieren demnach bedeutend an Masse, nicht aber an Volum, behalten ihre Structur bei und bestehen wenigstens der Hauptmasse nach nur noch aus Cellulose. Es verhalten sich demnach die Körner des „Restes“ bei diesem Waschprocess ähnlich solchen Stärkekörnern, deren äussere Schichten (Hüllen) durch Zerreiben und Zerschneiden verletzt wurden,[1] nur geht in unserem Falle die Granulose rascher und leichter in das umgebende Wasser über. Die so ausgelaugten Körner färben sich auf Zusatz von Schwefelsäure und Jod blau oder zum mindesten blauviolett, wobei die einzelnen Schichten stark aufquellen und sich von einander lösen. Beim stärkeren Erwärmen der Körner mit einem Tropfen Wasser am Objectträger tritt, selbst auf Zusatz neuer Jodmengen, tiefblaue Färbung ein. Bringt man in ein Probirgläschen eine kleine Menge der ausgelaugten Körner in Wasser suspendirt und behandelt sie mit Jod, so tritt braunrothe, eventuell eine braungelbe Färbung ein; kocht man nun in einem zweiten Gläschen eine gleiche Menge derselben, so tingirt sich die erkaltete Lösung mit

[1] Jessen, Pogg. Ann. Phys. Chem. 106, S. 497 und Delffs, ebendaselbst, 109, S. 648.

Jod tiefblau oder mindestens blauviolett. Dass die Stärkesubstanz durch Auflockerung oder Desaggregation die Befähigung erhält, mit Jod einen etwas reineren Farbenton anzunehmen, bewies bereits C. Nägeli[1] und in jüngster Zeit zeigte Brukner[2], dass gewisse violettfärbende Modificationen der Stärke beim Kochen in die blaufärbende übergeführt werden. Auf diese Thatsachen sind wohl zum Theil die Farbenveränderungen im vorliegenden Falle zurückzuführen, hiebei bleibt aber keineswegs ausgeschlossen, dass die in den Körnern des Restes vorhandene Cellulose beim Kochen mit Wasser in lösliche Stärke übergeht und zum Auftreten der tiefblauen Farbentöne mit Veranlassung gibt.

Wenn aus dem oben Gesagten auch klar erhellt, dass in den Körnern des „Restes“ der weitaus grösste Theil der Cellulose intact geblieben ist, so bedarf die weitere Behauptung, dass die Granulose des erhitzten Stärkekorns, insoweit sie nicht in Dextrin verwandelt wurde, derartig modificirt wird, dass sie chemischen Veränderungen leicht unterworfen ist, einer näheren Begründung. Lässt man nämlich den „Rest“ mit Wasser von 30—40° unter Luftabschluss längere Zeit in Berührung, so tritt eine rasche Veränderung der Körner ein. Dieselben färben sich schon nach kurzer Zeit nur mehr roth, während die darüber stehende klare Flüssigkeit Fehling'sche Lösung stark reducirt. Die Granulose geht hier in Dextrin und Zucker über.

Da ich die ausgelaugten Körner des „Restes“ zum Ausgangspunkt weiterer Studien zu nehmen beabsichtige, schien es mir von Interesse zu sein, diesen Körper auf sein Verhalten gegen das polarisirte Licht zu prüfen. Zur Gewinnung des erwähnten Productes in grösserem Massstabe verfährt man zweckmässig folgendermassen:

Reine Kartoffelstärke wird derart erhitzt, dass sie sich zwar vollständig in heissem, jedoch nur zum Theil in kaltem Wasser löst. Es bleibt nach dem vollständigen Auslaugen des Röstproductes mit kaltem Wasser ein Rückstand, der vielfach als unveränderte Stärke oder als intact gebliebene Stärkehüllen etc. angesehen wird und der sich auch im rohen Handelsdextrin

---

[1] Sitzungsber. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch., Jahrg. 1862.

[2] Monatshefte f. Chemie, IV. Bd., 1883, S. 910.

vorfindet.[1] Dieser im heissen Wasser leicht lösliche, noch organisirte „Rest" des Stärkekorns zeigt je nach dem Temperaturgrade, bei welchem er erzeugt wurde, ein verschiedenes Drehungsvermögen, welches bisweilen dem der „löslichen Stärke" nahekommt. Die Darstellung in grösseren Mengen gelingt um so leichter, je relativ geringeren Hitzegraden die Stärke ausgesetzt war. Einige Mühe bereitet nur das Reinigen des Rückstandes von den Dextrinen. Hiebei kamen in der Regel 60—100 Grm. der gerösteten Stärke zur Anwendung, welche in kleinen Portionen mit grösseren Wassermengen zerrieben und in ein hohes, circa 2 Lit. fassendes Schüttelglas gegossen wurde. Das letztere wurde hierauf mit Wasser nahezu vollgefüllt, der Inhalt tüchtig durchgeschüttelt und dann einige Zeit ruhig stehen gelassen. Der unlösliche Rückstand setzt sich anfangs etwas langsamer ab und die über demselben stehende dextrinhaltige Flüssigkeit erscheint stark getrübt. Dieselbe wird trotzdem abgegossen und der Bodensatz wiederholt mit frischen Wassermengen behandelt. Bei schwach gerösteten Producten geht der Waschprocess ziemlich rasch von Statten. Die Stärkekörner, die in diesem Falle nur wenig an Masse verloren haben, setzen sich leicht ab und zeigen bereits nach dem ersten Decantiren eine rein weisse Farbe. Stärker geröstete Stärke lässt sich jedoch nur schwierig von den löslichen Bestandtheilen rein waschen und verliert ihre gelbe oder braune Färbung erst auf Zusatz einiger Tropfen von Chlorwasser, das man den ersten Waschwässern zusetzt. Der Waschprocess kann als beendet angesehen werden, wenn die Waschwässer mit Jod keine Färbung mehr geben und wenn eine kleine Probe der heissbereiteten (verdünnten) Stärkelösung mit Fehling'scher Flüssigkeit keine Reductionserscheinung zeigt. Nach dem letzten Decantiren setzt man zu dem Rückstande eine kleine Menge starken Alkohols, filtrirt durch ein Leinwandfilter mit Hilfe einer Wasserluftpumpe und wäscht ein- oder zweimal mit Weingeist nach. Die Gegenwart von Alkohol erleichtert das Filtriren und verhindert ein Zusammensintern des Präparates beim Trocknen. Letzteres kann entweder bei gewöhnlicher

---

[1] Siehe Schwackhöfer's „Technologie der Wärme, des Wassers und der Kohlenhydrate", Wien 1883, S. 610.

Temperatur an der Luft oder in mässig geheiztem Luftbade am Filter vorgenommen werden.

Das auf diese Weise dargestellte Product stellt ein feines, rein weisses Pulver vor, welches äusserlich von gewöhnlicher Stärke nicht zu unterscheiden ist. In Wasser suspendirt und so mit Jod behandelt, färbt sich dasselbe anfangs blau, bei anhaltendem Jodiren blauviolett. Dieselben Farbenerscheinungen treten zu Tage, wenn man einzelne Körnchen während der Behandlung mit Jod unter dem Mikroskop betrachtet. Anfangs erscheinen dieselben blau, später violett, schliesslich aber dunkelrothviolett bis braun. Beim allmäligen Erhitzen in Wasser liefert das Product farblose, schwach opalisirende Lösungen, gerinnt aber, wenn es in grösseren Portionen gleich in kochendes Wasser eingetragen wird, zu hyalinen, unlöslichen Klümpchen. Die Lösungen hinterlassen beim Eindampfen einen farblosen, durchsichtigen, harten und spröden Rückstand, welcher in kochendem Wasser noch immer löslich ist.

Concentrirte wässerige Lösungen bleiben längere Zeit hindurch ungetrübt. Alkohol, Kalk- und Barytwasser, Gerbsäure und Bleiessig erzeugen in derselben weisse voluminöse Niederschläge.[1] Mit Jod färben sich die wässerigen Lösungen prachtvoll blau und erst auf Zusatz grösserer Jodmengen blauviolett. Fehling'sche Flüssigkeit bewirkt in verdünnten Lösungen in der Regel keine Veränderung, in concentrirten eine grüne Trübung mit einer ganz unbedeutenden Ausscheidung von Kupferoxydulhydrat. Bei längerem Stehen an der Luft wird die grün gefärbte Flüssigkeit wieder blau und vollkommen klar.

Der Drehungswinkel der wässerigen Lösungen ist von der Darstellungsweise der festen Substanz abhängig und nähert sich bisweilen dem einer gekochten Kleisterlösung.

Im Nachfolgenden sind die Werthe für das optische Verhalten solcher Lösungen angegeben, die durch eine halbe Stunde gekocht wurden. Da diese Lösungen von Substanzen stammen, die bei verschiedenen Temperaturen zru Bildung kamen, so geht

---

[1] Die mit Alkohol erzeugten Niederschläge repräsentirten nach dem Filtriren und Absaugen eine schneeweisse Masse, die Zulkowsky's löslicher Stärke gleicht und wie diese in kaltem Wasser löslich ist.

jeder Zahl für den Drehungswinkel die genaue Angabe aller Entstehungsbedingungen der genannten Substanz und das Verhalten der Lösungen gegen die Fehling'sche Flüssigkeit voraus.

I. Die zur Darstellung der löslichen Modification verwendete Stärke wurde im lufttrockenen Zustande durch $1^3/_4$ Stunden bei 188° C. erhitzt. Das Röstproduct hatte einen deutlichen Stich ins Gelbe. Das ausgelaugte Korn erschien, unter dem Mikroskop besehen, sehr deutlich geschichtet, gequollen und am Kernende aufgebrochen und theilweise aufgelöst. Heissbereitete, verdünnte Lösungen des ausgelaugten Restes gaben beim Kochen mit Fehling'scher Flüssigkeit keine Farbenänderung, concentrirte Lösungen erlitten grüne Trübungen.

$[\alpha]j = 203 \cdot 3°$ für $1 \cdot 6042$ Grm. fester Substanz in 100 CC. der Lösung.

II. Die Stärke wurde im lufttrockenen Zustande durch $^3/_4$ Stunden bei 188° erhitzt. Das Röstproduct hatte einen schwachen Stich ins Gelbe. Die ausgelaugten Körner erschienen weniger deutlich geschichtet, ihre Form fast durchwegs vollkommen erhalten. Heissbereitete Lösungen erlitten mit Fehling'scher Flüssigkeit nur in stark concentrirtem Zustande vorübergehende grüne Trübungen.

$[\alpha]j = 197 \cdot 1°$ für $3 \cdot 3846$ Grm. fester Substanz in 100 CC. der Lösung.

III. Nicht gereinigte lufttrockene Stärke wurde durch $2^1/_2$ Stunden bei 190° erhitzt. Das Röstproduct war gelbbraun. Die heissbereiteten Lösungen des ausgelaugten Restes erlitten mit Fehling'scher Flüssigkeit schwache Reductionen.

$[\alpha]j = 195 \cdot 4°$ für $2 \cdot 208$ Grm. fester Substanz in 100 CC. der Lösung.

IV. Die Stärke wurde allmälig bis auf 190° erhitzt und bei dieser Temperatur $^3/_4$ Stunden hindurch gelassen. Das Röstproduct war gelbbraun gefärbt. Fehling'sche Flüssigkeit bewirkte in den Lösungen des „Restes“ starke grüne Trübungen, verbunden mit einer geringen Ausscheidung von Kupferoxydulhydrat.

$[\alpha]j = 196 \cdot 4°$ für $4 \cdot 349$ Grm. fester Substanz in 100 CC. der Lösung.

V. Lufttrockene Stärke wurde 1 Stunde zwischen 190—210° und $^1/_2$ Stunde bei 210° erhitzt. Das Röstproduct war deutlich braun gefärbt. Die Ausscheidung von Kupferoxydulhydrat nach dem Kochen mit Fehling'scher Lösung etwas deutlicher.

$[\alpha]j = 193 \cdot 2°$ für $2 \cdot 1156$ Grm. fester Substanz in 100 CC. Lösung.

Lösungen, die blos durch Aufkochen des „Restes" erzielt wurden, weisen ein geringeres Rotationsvermögen auf, so bei

$[\alpha]j$

I. ......188°, was eine Differenz von $15 \cdot 3°$ ergibt, bei
IV ......181°, „ „ „ „ $15 \cdot 4°$ ergibt.

Ähnliche Differenzen im Rotationsvermögen fanden Brovn und Heron[1] bei Stärkekleisterlösungen, die ungleich lang gekocht wurden (Liebig's Ann. 199, S. 198).

Diese Forscher erklären das Wachsen des Rotationswinkels dahin, dass die Stärkecellulose beim Kochen sich in lösliche Stärke verwandle. Die Erklärung passt auch für den vorliegenden Fall und zwar umsomehr, da der ausgelaugte Rückstand der Röstproducte oder der „Rest" verhältnissmässig viel von der intact gebliebenen Cellulose enthält.

Was nun die chemische Zusammensetzung des im heissen Wasser löslichen „Restes" betrifft, so hat man es hier, wie bereits oben erwähnt wurde, offenbar mit keiner homogenen Substanz zu thun. Es geht dies einerseits aus dem verschiedenen optischen Verhalten, dann auch aus den bereits oben gemachten Angaben über die Jodreactionen hervor. Es ist mit Rücksicht auf die diesbezüglichen Beobachtungen kaum anzunehmen, dass der in kaltem Wasser unlösliche organisirte „Rest" der Stärkekörner auch blos aus Granulose und Cellulose bestehe, dass demnach auch die Solutionen in gewissem Sinne Stärkelösungen repräsentiren; es scheint mir vielmehr nicht unwahrscheinlich, dass dem „Reste" ausser Granulose und Cellulose ein dextrinartiges Umwandlungsproduct der Stärke innewohne, welches Fehling'sche Lösung reducirt, sich mit Jod mehr roth färbt und Veränderungen durch

---

[1] Für 1 Grm. fester Substanz in 100 CC. des Kleisters:

$[\alpha]j = 207 \cdot 3°$ und nach halbstündigem Kochen
$[\alpha]j = 219 \cdot 5°$ (Differenz $12 \cdot 2$).

Wasser leicht unterworfen ist. Ob dieser Körper nicht etwa mechanisch festgehaltenes Erythrodextrin sei, vermag ich vorläufig nicht zu entscheiden. Reibt man anhaltend eine grössere Menge der Körner mit gestossenem Glase, so kann man durch wiederholte Behandlung mit kaltem Wasser — wobei eine Zersetzung oder Umsetzung ganz ausgeschlossen erscheint — den sich rothfärbenden Bestandtheil nicht entfernen, vielmehr färbt sich auf Jodzusatz der Rückstand immer mehr und mehr roth, während das Rotationsvermögen fast ungeändert bleibt.

So fand ich bei V für die ursprüngliche Substanz

$$[\alpha]j = 193 \cdot 2°$$

für das gewaschene Product

$$[\alpha]j = 192 \cdot 4°.$$

Dieses Verhalten gegen polarisirtes Licht spricht dafür, dass sowohl die intact gebliebene Granulose als auch das sich mit Jod rothfärbende Product bei obiger Behandlung in gleichem Masse aus den Körnern entfernt würde.

Lässt man hingegen, wie bereits oben erwähnt wurde, den „Rest" längere Zeit mit Wasser in Berührung, so tritt eine rasche Veränderung desselben ein; die Körner färben sich mit Jod nur mehr braungelb oder röthlich und reduciren stark die Fehling'sche Lösung.

Da ich die Untersuchung dieser Substanz nicht als beendet betrachte, dieselbe vielmehr einem vergleichenden Studium unterziehen werde, so will ich vorläufig nur darauf hinweisen, dass der von mir dargestellte „Rest" unter gewissen Verhältnissen bei längerer Berührung mit Wasser vielleicht eine ähnliche Modification erleidet, wie unverletzte Stärkekörner beim Behandeln mit Speichelpepsin, Diastase und verdünnten Säuren.

Über einige gemischte Äther des Resorcins.

Von **Gustav Spitz.**

(Aus dem Laboratorium des Prof. Dr. J. Habermann an der k. k. techn. Hochschule in Brünn.)

In ähnlicher Weise, wie die gemischten Äther des Hydrochinons, lassen sich auch die isomeren Verbindungen des Resorcins darstellen und bietet deren Gewinnung und Reindarstellung bis auf die des Methyl-Isoamyläthers, gerade wie bei den Hydrochinonverbindungen, keine besonderen Schwierigkeiten, so dass es wohl überflüssig erscheint, im Allgemeinen näher darauf einzugehen und es genügen wird, anzuführen, dass das nach den Angaben von J. Habermann (Sitzb. d. W. Akad. 74. Bd., Abth. II, pag. 490) bereitete Monomethylresorcin mit dem betreffenden alkylschwefelsauren Kali und Ätzkali in dem Molekülverhältniss von 1:1:1 gemischt, im zugeschmolzenen Rohre auf 160°—170° C. erhitzt, der Röhreninhalt nach dem Erkalten in Wasser gelöst, mit verdünnter Schwefelsäure angesäuert, der gemischte Äther mit Wasserdämpfen übergetrieben und durch Wiederholung der Operation gereinigt wird, etc., sowie, die etwa gemachten besonderen Wahrnehmungen an dem betreffenden Orte hervorzuheben.

Bezüglich der Eigenschaften lässt sich im Allgemeinen sagen, dass die von mir bisher dargestellten Methyl-Alkyl-Resorcinäther durchaus farblose, ölige Flüssigkeiten sind, die sich an der Luft bei längerem Stehen gelb färben, im Wasser unlöslich oder doch sehr schwer löslich sind und sich mit Alkohol, Äther, Eisessig, Benzol, Chloroform etc. fast in jedem Verhältnisse mischen.

Aus der alkoholischen und essigsaueren Lösung werden sie beim Verdünnen mit Wasser emulsionsartig abgeschieden, und zwar muss der Wasserzusatz beim Alkohol umso grösser sein, je höher der Kohlenstoffgehalt ist, während bei der Essigsäure das

gerade Entgegengesetzte stattfindet. Sie sind, mit Ausnahme des Methyl-Isoamyläthers, schwerer als das Wasser und von eigenthümlichem, im verdünnten Zustande durchaus angenehmen Geruche. Alle sind mit Wasserdämpfen flüchtig, besitzen einen erheblich niedrigeren Siedepunkt, als das Resorcin, und lassen sich ohne Zersetzung destilliren. Der Siedepunkt steigt mit dem Kohlenstoffgehalt der Alkoholradicale.

Methyläthylresorcin.

Die farblose Flüssigkeit besitzt einen angenehmen, an gährende Erdbeeren erinnernden Geruch und siedet bei 216° C. (uncorr.). Die alkoholische Lösung wird bereits durch geringen Wasserzusatz getrübt; die Lösung in Eisessig lässt den Äther erst bei einer Verdünnung mit Wasser auf das zehnfache Volumen fallen, löst ihn indessen auch jetzt noch beim Erwärmen auf.

Die Analyse lieferte folgendes Resultat:

0·248 Grm. Substanz gaben 0·6437 Grm. Kohlendioxyd und 0·179 Grm Wasser.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_4\begin{matrix}OCH_3\\OC_2H_5\end{matrix}$
Kohlenstoff	70·79%	71·05%
Wasserstoff	8·02	7·88.

Methylpropylresorcin

bildet eine der früheren ähnlich riechende Flüssigkeit, die bei 226° siedet. Aus der Eisessiglösung scheidet sie sich bereits bei einer Verdünnung mit Wasser auf das doppelte Volumen aus, und ist in einer 15percentigen Essigsäure auch beim Kochen nicht mehr löslich.

Die Analyse der bei 226° übergegangenen Fraction ergab folgendes Resultat:

0·2402 Grm. Substanz gaben 0·636 Grm Kohlensäureanhydrid und 0·184 Grm. Wasser.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_4\begin{matrix}OCH_3\\OC_3H_7\end{matrix}$
Kohlenstoff	72·19%	72·28%
Wasserstoff	8·49	8·43.

Methylisobuthylresorcin.

Die Eigenschaften dieses Äthers zeigen viel Ähnlichkeit mit jenen des vorstehend beschriebenen; doch ist das Methylisobutylresorcin in verdünnter Essigsäure noch schwerer löslich als jener und liegt sein Siedepunkt bei 234° C. (uncorr.).

Die Analyse ergab folgendes Resultat:

0·2352 Grm. Substanz gaben 0·6297 Grm. Kohlendioxyd und 0·1805 Grm. Wasser.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_4{OCH_3 \atop OC_4H_9}$
Kohlenstoff.....	73·03%	73·33%
Wasserstoff	8·53	8·88.

Methylisoamylresorcin.

Es ist mir nicht gelungen, diesen Körper rein darzustellen. Bei der Destillation des Röhreninhaltes mit schwefelsäurehaltigem Wasser ging ein Gemenge des Äthers mit Amylalkohol über. Bei der fractionirten Destillation dieses Gemenges erhielt ich bei einer constanten Siedetemperatur von 236°—237° eine Flüssigkeit, die in Bezug auf ihre Eigenschaften, insbesondere ihrer noch leichteren Löslichkeit in verdünntem Alkohol und ihrer schwereren Löslichkeit in verdünnter Essigsäure, unfraglich den, durch sich bei der Destillation bildende Zersetzungsproducte verunreinigten Methyl-Isoamyläther darstellt. Die wiederholte Analyse ergab indessen keine gut stimmenden Resultate.

Zur Kenntniss des Dichloräthers.

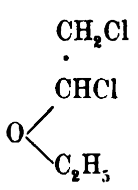
Von Dr. **Konrad Natterer.**

(Aus dem k. k. Universitätslaboratorium des Prof A. Lieben.)

Im Folgenden bringe ich eine Reihe von Versuchen, die zum Theil mit meiner in den letzten Jahren vorgenommenen Untersuchung des Monochloraldehyds und seiner Derivate im Zusammenhange stehen.

Verhalten des Dichloräthers beim Erhitzen.

Dem beim Einleiten von Chlor in Äther entstehenden Dichloräther kommt nach den Arbeiten von Lieben, Abeljanz und O. Jacobsen die Constitutionsformel



zu.

Darnach lässt sich dieser Dichloräther als die Äthylchloridverbindung des Monochloraldehyds auffassen und liegt die Möglichkeit vor, dass bei hoher Temperatur Zerfall in diese beiden Componenten eintritt.

Als Dichloräther in einer zugeschmolzenen Glasröhre durch zehn Stunden auf circa 180° erhitzt worden war, fanden sich bloss Äthylchlorid (beiläufig das Volum des angewandten Dichloräthers einnehmend) und schwarze, pechartige Massen vor. — Da ich schon wiederholt beobachtet hatte, dass Monochloraldehyd, das ja hier neben Äthylchlorid entstehen sollte, in Dampfform gegen Hitze viel beständiger ist denn als Flüssigkeit, leitete ich den Dampf von 60 Grm. Dichloräther im Laufe von drei Stunden durch ein auf circa 200° erhitztes, mit Bimsstein-

stücken gefülltes Glasrohr, das auf der anderen Seite mit Kühler und Vorlage verbunden war. Hierbei entwich kein Äthylchlorid aus dem Apparat, im erhitzten Rohr schied sich nichts ab und das Destillat war unveränderter Dichloräther.

Der Dichloräther erleidet also beim Erhitzen seines Dampfes auf circa 200° keine sichtbare Veränderung. Gleichwohl könnte man daran denken, dass bei dieser Temperatur der Dampf des Dichloräthers dissociirt ist in Monochloraldehyd und Äthylchlorid, und dass sich dann beim Erkalten diese beiden Körper wieder vereinigen. — Dass dies nicht der Fall ist, ergibt sich daraus, dass sich Monochloraldehyd mit Äthylchlorid nicht zu vereinen vermag.

Weder bei mehrwöchentlichem Stehenlassen einer in molecularem Verhältniss gemachten Mischung von Monochloraldehyd und flüssigem Chloräthyl, noch bei 24stündigem Erhitzen auf 100°, noch endlich beim Durchleiten des Gemenges der Dämpfe von Monochloraldehyd und Äthylchlorid durch ein auf circa 240° erhitztes, mit Bimssteinstücken gefülltes Glasrohr wurde Bildung von Dichloräther beobachtet. Das Äthylchlorid blieb immer intact; das Monochloraldehyd hatte bloss beim Erhitzen seiner Äthylchloridlösung auf 100° durch theilweise Condensation eine geringe Veränderung erlitten, sonst konnte es ebenfalls unverändert zurückgewonnen werden.

Da also der Dichloräther nicht dissociirt, kann beim obigen Versuch (Erhitzen im Rohr auf circa 180°) die Hitze allein die totale Veränderung des Dichloräthers nicht bewirkt haben. Es muss hierbei der Dichloräther als solcher in Reaction getreten sein. Am nächsten liegt anzunehmen, dass Chlorwasserstoff oder Wasser, deren spurenweises Vorhandensein im Dichloräther nicht zu vermeiden ist, Anlass gegeben hat zur vollständigen Verharzung des Dichloräthers und zur Bildung des Chloräthyls.

Chlorwasserstoff wirkt auf Dichloräther nicht ein. Denn man kann durch (am Rückflusskühler) kochenden Dichloräther (Siedepunkt 145°) stundenlang Chlorwasserstoff leiten, ohne dass sich Äthylchlorid entwickelt, und ohne dass der Dichloräther eine ärgere Zersetzung erleidet, als beim Kochen für sich.

Dass Wasser sehr energisch auf Dichloräther einwirkt, ist bekannt. Es entstehen dabei Chlorwasserstoff, Alkohol und Monochloraldehyd, welch' letzterer jedoch weitere Reactionen eingeht.

Bei dem in Rede stehenden Erhitzungsversuch konnte eine Spur Wasser den ganzen Dichloräther in Äthylchlorid und harzige Massen verwandeln. Nachdem nämlich diese Spur Wasser in dem eben gesagten Sinne reagirt hatte, mussten bei der herrschenden hohen Temperatur sofort neue Mengen von Wasser entstehen, indem einerseits Chlorwasserstoff und Alkohol sich in Äthylchlorid und Wasser umsetzen und andererseits das Monochloraldehyd condensirt wird, wobei sich ebenfalls Wasser bildet.

Die Thatsache, dass sich der Dampf von Dichloräther durch ein auf 200° erhitztes Rohr leiten lässt, ohne eine Veränderung zu erleiden, deutet darauf hin, dass beim Destilliren eines eine Spur Wasser enthaltenden Dichloräthers reiner (wasserfreier) Dichloräther als Dampf weggeht. Damit stimmt überein, dass der Dichloräther beim Kochen am Rückflusskühler und beim Destilliren in ganz gleichem Grade eine geringfügige Zersetzung erleidet. Würde beim Destilliren das schon vorhandene oder sich bildende Wasser überdestilliren, so dürfte sich der im Rückstand bleibende, weiter kochende Dichloräther nicht mehr zersetzen.

Wird der Dampf des Dichloräthers durch ein schwach glühendes Glasrohr geleitet, so findet weitgehende Zersetzung statt. Im glühenden Rohre bilden sich kohlige Massen, das geringe pechartige Destillat enthält etwas Wasser, und es entweichen grosse Mengen von Chlorwasserstoff und von einem (nach dem Waschen mit Wasser) mit leuchtender, blau gesäumter Flamme brennenden Gase.

Es wurde noch auf eine andere Art versucht, vom Dichloräther direct zum Monochloraldehyd zu gelangen, nämlich durch Erhitzen von Dichloräther mit oxalsaurem Natrium. Ich erwartete folgende Reaction:

$$2\cdot\begin{matrix}CH_2Cl\\ \cdot\\ CH\begin{cases}Cl\\ OC_2H_5\end{cases}\end{matrix} + \begin{matrix}CO.ONa\\ \cdot\\ CO.ONa\end{matrix} = 2NaCl + \begin{matrix}CO.OC_2H_5\\ \cdot\\ CO.OC_2H_5\end{matrix} + 2\cdot\begin{matrix}CH_2Cl\\ \cdot\\ CHO\end{matrix}$$

15 Grm. Dichloräther (2 Moleküle) wurden mit 7 Grm. Natriumoxalat (1 Molekül) vier Stunden am Rückflusskühler auf 110—120° erhitzt, wobei ein schwacher Strom von Chlorwasserstoff wegging. Das Product war dunkel gefärbt und hatte Aldehyd-

geruch; es wurde aus dem Ölbade so lange destillirt, bis die siedende Flüssigkeit zu schäumen und zu stossen anfing. Im Rückstand blieb eine dickliche schwarze Flüssigkeit mit Chlornatrium. Das Destillat wurde ausfractionirt, wobei Monochloraldehyd (dessen Disulfitverbindung dargestellt wurde), Dichloräther und Monochloracetal erhalten wurden. — Sowohl das entstandene Monochloracetal, als auch die ClH-Entwickelung beweisen, dass die Reaction nicht bloss in der erwarteten Weise verläuft.

Überführung des Monochloraldehyds in Dichloräther und in Monochloracetal.

Die in diesem Abschnitte zu beschreibenden Umwandlungen des Monochloraldehyds wurden durchgeführt mit Hilfe seiner Alkoholverbindung.

Alkoholat des Monochloraldehyds. Nachdem ich mich überzeugt hatte, dass sich Monochloraldehyd mit Äthylalkohol unter starker Erwärmung und Verdickung vereinigt, trachtete ich zunächst darnach, zu erfahren, ob bei dieser Vereinigung je ein Molecül Monochloraldehyd sich mit einem ganzen oder mit einem halben Molekül Alkohol verbindet; im letzteren Falle würde ein dem Hydrat des Monochloraldehyds $C_2H_4OCl + {}^1/_2 H_2O$ entsprechendes Alkoholat entstehen.

Bringt man diesen beiden Molekularverhältnissen entsprechend in zwei Röhrchen Monochloraldehyd mit Alkohol zusammen, so erhält man zwei ziemlich gleich dickliche Flüssigkeiten, die auch bei langem Abkühlen mit Eis und Kochsalz nicht erstarren. Ebenso wenig wie durch Krystallisation konnte durch Destillation festgestellt werden, in welchem von den beiden Röhrchen ein einheitlicher Körper vorhanden war; bei Kochtemperatur geht nämlich, wie sich gleich zeigen wird, das Alkoholat des Monochloraldehyds sehr rasch in Monochloracetal über.

Ich habe auch versucht, durch eine, wenn auch sehr rohe Beobachtung der thermischen Erscheinungen bei der Vereinigung von Monochloraldehyd und Alkohol die Frage nach der Zusammensetzung des Alkoholats zu beantworten.

In ein Kölbchen wurden 5 Grm. Alkohol (${}^1/_2$ Molekül) gebracht und dazu unter Kühlung mit Eis und Kochsalz und unter

stetem Umschütteln 17 Grm. reinen, wasserfreien Monochloraldehyds (1 Molekül) tropfen gelassen. Dann wurde das Kölbchen auf Zimmertemperatur (22°) gebracht und in die dickliche Flüssigkeit ein Thermometer eingesenkt. In diese Flüssigkeit, die also zusammengesetzt war nach dem Verhältnisse $1C_2H_3OCl : \frac{1}{2}C_2H_6O$ und die vielleicht das diesem Verhältnisse analoge Alkoholat des Monochloraldehyds darstellte, wurde nun die dem zweiten halben Alkoholmolekül entsprechende Menge Alkohol (5 Grm.) in zwei Partien zugegeben. Unter raschem Umschütteln wurden zuerst nur 2·5 Grm. Alkohol dazu gegossen, wobei Temperaturerhöhung um 9° stattfand, jedoch die Consistenz der Flüssigkeit sich nicht merklich änderte. Wieder auf Zimmertemperatur erkalten gelassen und die zweiten 2·5 Grm. Alkohol zugesetzt, wobei die Temperatur um 5·5° stieg und die Flüssigkeit wiederum weder dicker noch dünner wurde. — Ein kleiner Theil (circa 6 Cc.) der so erhaltenen Mischung (1 Molekül C_2H_3OCl : 1 Molekül C_2H_6O) wurde mit $\frac{1}{4}$ Volumen Alkohol versetzt; die Temperatur erhöhte sich um 5° und die erhaltene Flüssigkeit war viel dünner; bei abermaligem Zusatz von $\frac{1}{4}$ Volumen Alkohol Temperaturerhöhung um 2°.

Es erwärmt sich also eine nach dem Verhältnisse 1 Molekül $C_2H_3OCl : \frac{1}{2}$ Molekül C_2H_6O dargestellte Mischung beim Zusatz von $\frac{1}{2}$ Molekül Alkohol sehr stark, was beweist, dass die Affinität des Monochloraldehyds zu Alkohol durch die dem genannten Verhältnisse entsprechende Alkoholmenge nicht befriedigt war. Es kann also nicht sein, dass sich das Monochloraldehyd bloss in dem Verhältnisse $C_2H_3OCl : \frac{1}{2} C_2H_6O$ zu einem Alkoholat zu vereinigen vermag. Aber auch nach dem anderen möglichen Verhältnisse (Molekül zu Molekül) kann die Vereinigung nicht glattweg erfolgen. Es dürfte sich ja sonst wohl eine nach diesem Verhältnisse dargestellte Mischung bei weiterem Zusatz von Alkohol nicht mehr erwärmen. Hiernach und in Überlegung des Umstandes, dass die in den beiden Verhältnissen dargestellten Mischungen gleich dick sind, und dass keine von ihnen erstarrt (für das zweite Alhoholat wäre nach Analogie mit den Chloralalkoholaten Krystallisationsfähigkeit zu erwarten), halte ich es für wahrscheinlich, dass sich Monochloraldehyd mit Alkohol in beiden möglichen Verhältnissen zu vereinigen vermag, und dass

bei dem obigen Versuche zuerst das Halbalkoholat (1 Molekül C_2H_3OCl : $^1/_2$ Molekül C_2H_6O) entstanden ist, das sich dann beim weiteren Zusatz von Alkohol in das zweite Alkoholat (1 Molekül C_2H_3OCl : 1 Molekül C_2H_6O) umsetzte, von welcher Umsetzung jedoch a priori zu erwarten ist, dass sie unter den gegebenen Bedingungen nur theilweise erfolgt, indem zu ihrem vollständigen Eintreten entweder lange Zeit oder Erwärmung oder Zusatz eines Überschusses von Alkohol nothwendig sein dürfte.

Das beim obigen Versuche nach dem Verhältnisse

$$C_2H_3OCl : C_2H_6O$$

dargestellte Gemenge besass den scharfen Geruch von Monochloraldehyd. Als circa 5 Cc. davon mit dem halben Volumen Wasser geschüttelt wurden, fand geringe Temperaturerhöhung (um 2°) statt, und es löste sich bei kurzem Schütteln nur wenig. Als jedoch mehr Wasser (circa zwei Volumina) zugegeben wurde und lange Zeit geschüttelt wurde, löste sich Alles bis auf einige Tröpfchen (von Monochloracetal). Diese leichte, aber langsame Löslichkeit in Wasser erinnert sehr an das analoge Verhalten des Chloralalkoholates.

Umwandlung in Dichloräther. Aus dem Alkoholat des Monochloraldehyds kann bei der Einwirkung von Chlorwasserstoff nach folgender Gleichung Dichloräther entstehen:

$$\begin{matrix} CH_2Cl \\ \cdot \\ CH\begin{cases} OH \\ OC_2H_5 \end{cases} \end{matrix} + ClH = \begin{matrix} CH_2Cl \\ \cdot \\ CH\begin{cases} Cl \\ OC_2H_5 \end{cases} \end{matrix} + H_2O$$

Um eine Reaction des dabei sich bildenden Wassers auf den Dichloräther hintanzuhalten, war nur nothwendig für einen grossen Überschuss von Chlorwasserstoff zu sorgen; denn, wie ich gefunden, wirkt concentrirte Salzsäure auf Dichloräther (bei mittlerer Temperatur) nicht ein.

In die Hauptmenge des obigen Gemenges von Monochloraldehyd und Alkohol, das zum grössten Theil aus der Verbindung $C_2H_4OCl + C_2H_6O$ bestehen sollte, wurde ein rascher Strom von Chlorwasserstoffgas eingeleitet; es trat Absorption des letzteren und Erwärmung ein. Unter Kühlung mit kaltem Wasser wurde mit dem Einleiten von ClH fortgefahren, wobei

sich in der so behandelten Flüssigkeit zwei Schichten bildeten und nach circa einer Stunde der ClH unvermindert hindurchstrich. Nach einer weiteren halben Stunde wurde das Einleiten beendigt, die im Kölbchen abgeschiedene wässerige, respective salzsaure (untere) Schicht abgezogen; dieselbe wog 4·3 Grm. und enthielt, da eine bei 15° gesättigte Salzsäure zu circa 40% aus ClH besteht, ungefähr 2·5 Grm. Wasser, statt 2·2 Grm. (nach der Menge des entsandenen Dichloräthers). Durch die obere Schicht wurde zur Verdrängung des absorbirten Chlorwasserstoffes Kohlensäure geleitet; hiernach wog sie 17·5 Grm. Bei der Destillation ging beinahe Alles von 140°—145°, der Kochtemperatur des Dichloräthers über. Auch dem Geruch nach, sowie nach dem Verhalten gegen Wasser (Erwärmung, Abgabe von ClH, theilweise Lösung) und gegen Barytwasser (siehe unten) erwies sich die erhaltene Flüssigkeit (obere Schicht) als Dichloräther.

Umwandlung in Monochloracetal. Eine Lösung von Monochloraldehyd in Alkohol (in beliebigem Verhältnisse) setzt sich bei längerem Stehen bei gewöhnlicher Temperatur in Monochloracetal um, nach der Gleichung:

$$\begin{matrix} CH_2Cl \\ \cdot \\ CHO \end{matrix} + 2\cdot\begin{matrix} CH_3 \\ \cdot \\ CH_2\cdot OH \end{matrix} = \begin{matrix} CH_2Cl \\ \cdot \\ CH\left\langle\begin{matrix} OC_2H_5 \\ OC_2H_5 \end{matrix}\right. \end{matrix} + H_2O$$

Die Geschwindigkeit und der Grad der Vollständigkeit dieser Umsetzung hängen von den Mengenverhältnissen ab; Gegenwart von etwas $ZnCl_2$ oder $CaCl_2$ beschleunigt sehr die Reaction.

Bei höherer Temperatur verläuft die Reaction sehr rasch doch ist auch dann wegen des dabei auftretenden Wassers zur vollständigen Umwandlung von Monochloraldehyd in Monochloracetal ein grosser Überschuss von Alkohol nothwendig.

Umwandlung des Monochloracetal in Dichloräther.

Monochloracetal geht bei der Behandlung mit Chlorwasserstoff in Dichloräther über nach dem Schema:

$$\begin{matrix} CH_2Cl \\ \cdot \\ CH\left\langle\begin{matrix} OC_2H_5 \\ OC_2H_5 \end{matrix}\right. \end{matrix} + ClH = \begin{matrix} CH_2Cl \\ \cdot \\ CH\left\langle\begin{matrix} Cl \\ OC_2H_5 \end{matrix}\right. \end{matrix} + C_2H_5\cdot OH$$

Die Reaction verläuft jedoch bei Weitem nicht so glatt, wie die oben beschriebene Einwirkung von ClH auf das Monochloraldehydalkoholat, bei der ebenfalls Dichloräther entsteht; sie erfolgt, zumal bei gewöhnlicher Temperatur nur langsam und nie vollständig (ein Theil des Monochloracetal bleibt immer unverändert).

Bei 24stündigem Durchleiten von ClH durch kaltgehaltenes Monochloracetal bildet sich Dichloräther, der grösste Theil des Monochloracetals erleidet aber gar keine Veränderung.

Nun wurde der Chlorwasserstoff bei circa 100° einwirken gelassen, und zwar in der Art, dass der entstehende Alkohol gleich entfernt wurde (Alkohol gibt ja mit Dichloräther wieder Monochloracetal).

50 Grm. Monochloracetal wurden in einen Kolben gebracht, der einerseits mit dem ClH-Entwickelungsapparat, anderseits mit einem nach abwärts gekehrten Kühler und einer Vorlage in Verbindung stand. Das Monochloracetal wurde durch eine Stunde mit Chlorwasserstoff gesättigt, wobei Temperaturerhöhung um circa 20° eintrat. Dann wurde der Kolben unter fortwährendem Einleiten von ClH im Ölbade auf 100—110° erhitzt. Als nichts mehr überdestillirte und kein ClH mehr absorbirt wurde, was nach 24 Stunden der Fall war, wurde durch einen Kohlsäurestrom der ClH aus der im Kolben befindlichen Flüssigkeit verdrängt.

Das in der Vorlage angesammelte Destillat (12 Grm.) enthielt neben wenig ClH und Chloräthyl circa 5 Grm. Alkohol und etwas Dichloräther und Monochloracetal.

Der Kolbeninhalt (46 Grm.) wurde wiederholt mit Dephlegmator destillirt, ohne dass eine scharfe Trennung der Producte erreicht wurde; zuletzt waren folgende Fractionen vorhanden: circa 4 Grm. von 130—140°, 10 Grm. von 140—145°, 12 Grm. von 145—152°, 10 Grm. von 152—160°.

Schon aus den Siedepunkten, noch mehr aber aus dem Verhalten gegen Kalilauge konnte man entnehmen, dass die aufgezählten Fractionen Gemenge von Dichloräther und Monochloracetal sind (Siedepunkt des Dichloräthers circa 145°, Siedepunkt des Monochloracetals 156·8°).

Die Fraction 140—145° wurde eingehender untersucht.

I. 0·2767 Grm. davon, mit Kupferoxyd bei vorgelegtem Silber verbrannt, lieferten 0·4083 Grm. CO_2 und 0·1688 Grm. H_2O.

II. 0·2644 Grm. gaben nach dem Glühen mit Kalk 0·3958 Grm. AgCl.

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für	
	I	II	$C_4H_8OCl_2$	$C_6H_{13}O_2Cl$
Kohlenstoff	40·25	—	33·57	47·21
Wasserstoff	6·79	—	5·59	8·52
Chlor	—	37·02	49·65	23·28

Die gefundenen Zahlen liegen also ungefähr in der Mitte zwischen den Percentzahlen des Dichloräthers und denen des Monochloracetal.

Darnach bestand die Fraction 140—145° aus beiläufig gleichen Theilen Dichloräther und Monochloracetal. Hiermit stimmt auch das Folgende überein:

Beim Kochen mit concentrirter Kalilauge wurde der Dichloräther zerstört, während das Monochloracetal, circa die Hälfte ausmachend, unverändert blieb.

Bei der Behandlung mit Natriumalkoholat wurde der Dichloräther in Monochloracetal umgewandelt und so aus dem früheren Gemisch beiläufig die gleiche Gewichtsmenge an reinem Monochloracetal erhalten.

Einwirkung von Barytwasser auf Dichloräther.

Dichloräther löst sich in verdünnten Alkalien leicht und vollständig, indem er eine totale, weitgehende Veränderung erleidet. Zur Untersuchung wurde statt der eigentlichen Alkalien Barytwasser verwendet, weil sich das Chlorbaryum relativ leicht entfernen und quantitativ bestimmen lässt.

Bei der Einwirkung von Barytwasser auf Dichloräther könnte nach der Gleichung:

$$O\left\langle\begin{matrix}\overset{\displaystyle CH_2Cl}{\overset{\cdot}{CHCl}} \\ C_2H_5\end{matrix}\right. + Ba(OH)_2 = BaCl_2 + C_2H_5.OH + \overset{\displaystyle CH_2.OH}{\overset{\cdot}{CHO}}$$

(vielleicht unter vorübergehender Bildung von Monochloraldehyd) Oxyaldehyd[1] entstehen, doch war von vornherein eine weiter gehende Wirkung des Ätzbaryts auf den Oxyaldehyd zu befürchten.

Was das Auftreten von Äthylalkohol betrifft, so verläuft die Reaction wirklich nach obiger Gleichung. Auch das ganze Chlor geht heraus. Überdies aber entsteht eine organische Säure und zwar zum Theil schon beim Zusammenbringen von Dichloräther mit (überschüssigem) Barytwasser, noch mehr beim Stehenlassen der erhaltenen alkalischen Lösung.

Zu einer Lösung von 280 Grm. krystallisirtem Ätzbaryt, in 7 Liter Wasser wurden unter stetem Umschütteln nach und nach 100 Grm. Dichloräther (mit Eis gekühlt) gebracht; hierbei ging der Dichloräther sehr rasch in Lösung und die Flüssigkeit färbte sich anfangs gelb, dann roth.

Die so erhaltene, stark alkalische Lösung wurde mit Schwefelsäure schwach angesäuert, wobei die Rothfärbung verschwand, von $BaSO_4$ abfiltrirt und auf ein kleines Volum (circa 1 Liter) eindestillirt.

Das erste Drittel des Destillates wurde zur Hälfte destillirt, am erhaltenen Destillat der Vorgang wiederholt u. s. w., bis das letzte Destillat nur mehr circa 200 Cc. fasste; dieses wurde dann mit Pottasche gesättigt, wobei sich eine bedeutende alkoholische Schicht abschied, die abgehoben wurde. Nachdem noch aus der Pottascheschicht, durch Destillation und neuerliches Eintragen von K_2CO_3 ins Destillat etwas Alkohol abgeschieden worden war,

---

[1] Die Darstellung des Oxyaldehyds wurde auch am Monochloraldehyd selber versucht. Bei mehrtägigem Erhitzen einer Lösung von Monochloraldehydhydrat in 30 Theilen Wasser auf 90°, bildete sich nur sehr wenig ClH und blieb fast das ganze Monochloraldehydhydrat unverändert. Bei dreistündigem Kochen einer eben solchen Lösung mit $BaCO_3$ ging fast das ganze Chlor heraus (4 Grm. Monochloraldehydhydrat lieferten 3·6 Grm. $BaCl_2$ statt 4·74) und es entstand neben wenig eines chlorhältigen Öles ein mit Wasserdampf nicht flüchtiger syrupartiger Körper, der im Vacuum über Schwefelsäure zuerst gummiartig wurde und dann amorph eintrocknete und der, in kaltem Alkohol sehr schwer löslich, sich in Wasser leicht auflöste. Seine wässerige Lösung reducirte ammonialkalische Silberlösung und Fehling'sche Lösung; mit Fuchsin-Schwefligsäure gab sie keine Rothfärbung. Für den Oxyaldehyd sind doch wohl andere äussere Eigenschaften zu erwarten.

wurden die vereinigten alkoholischen Schichten mit Pottasche getrocknet und destillirt. Alles ging über von 78°—80°; darnach, sowie nach den sonstigen Eigenschaften der destillirten Flüssigkeit, lag Alkohol vor; die Menge desselben betrug 31 Grm., während die angewandten 100 Grm. Dichloräther bei glatter Abspaltung der Äthylgruppe nur wenig mehr (32·2 Grm.) geben sollten. Sonst war nichts mit Wasserdampf Flüchtiges entstanden.

Dem braunen, caramelartig riechenden Rückstand der Destillation konnte durch Schütteln mit Äther so gut wie nichts entzogen werden. Es blieben also (bis auf den Alkohol) alle entstandenen Producte in einer wässerigen Flüssigkeit beisammen. Durch diese ungünstigen Löslichkeitsverhältnisse und durch die sonstigen Eigenschaften dieser Producte wurde denn auch, wie sich unten zeigen wird, ihr genaueres Studium unmöglich gemacht.

Dass bei der Einwirkung von Barytwasser auf Dichloräther aus dem letzteren das ganze Chlor herausgeht, wurde auf verschiedene Arten bewiesen.

In obiger Weise wurden 50 Grm. Dichloräther in Barytwasser gelöst. —Ein kleiner Theil der erhaltenen Lösung wurde mit Salzsäure genau neutralisirt und dann am Rückflusskühler 10 Stunden gekocht, wobei sich nur Spuren von Säure (Salzsäure?) bildeten.— Ein anderer, bestimmter Theil wurde mit Salpetersäure angesäuert und mit Silbernitrat gefällt; das Gewicht des so erhaltenen Chlorsilbers entsprach beiläufig der im angewandten, nicht ganz reinen Dichloräther enthaltenen Chlormenge. — Ein anderer, mit dem vorigen gleich grosser Theil der alkalischen Dichlorätherlösung wurde durch Einleiten von Kohlendioxyd und durch Aufkochen vom Barythydrat befreit, dann eingedampft, der getrocknete Abdampfungsrückstand mit Kalk geglüht und in üblicher Weise das Chlor bestimmt. Die so erhaltene Menge AgCl war genau gleich der durch directe Fällung erhaltenen. — Die Hauptmenge der obigen Lösung wurde nach zwei Tagen mit Schwefelsäure genau neutralisirt, vom $BaSO_4$ abfiltrirt und im Vacuum auf ein kleines Volum (circa 100 Cc.) eindestillirt. Der so erhaltene Destillationsrückstand wurde in einer Schale über Schwefelsäure gestellt; daselbst bildeten sich in reichlicher Menge kleine, tafelförmige Krystalle, die durch Absaugen von der Mutterlauge befreit und

durch Liegenlassen an der Luft, getrocknet wurden. Diese Krystalle waren fast reines Chlorbaryum und enthielten nur sehr wenig eines organischen Baryumsalzes; ihr Gewicht entsprach annähernd drei Viertel des im Dichloräther enthaltenen Chlors. Die dickliche Mutterlauge dieser Krystalle trocknete bei mehrmonatlichem Stehen an der Luft nur zu einer dicken, zähen Masse ein; im Vacuum über Schwefelsäure erstarrte die letztere vollständig und zwar amorph. Diese amorphe Masse enthielt nach dem Chlorgehalt das noch fehlende Viertheil Chlorbaryum und (vielleicht lose damit verbunden) bedeutende Mengen von organischem Baryumsalz und von neutralen organischen Körpern.

Die Bildung von organischer Säure ist wahrscheinlich bedingt durch eine gleichzeitig oxydirende und reducirende Wirkung des Barythydrats auf einen aldehydartigen Körper.

Beim Zusammenbringen des Dichloräthers mit Barytwasser entsteht relativ wenig organische Säure; beim Stehenlassen der alkalischen Flüssigkeit vermehrt sich die Menge derselben sehr bedeutend, und zwar am schnellsten in den ersten Stunden; später verlangsamt sich die Reaction immer mehr und mehr, ohne ein Ende zu erreichen; wenigstens wurde auch nach wochenlangem Stehen eine fortdauernde geringe Abnahme der Menge des freien Alkali wahrgenommen. Beim Kochen der alkalischen Flüssigkeit geht die Säurebildung viel rascher vor sich, doch wurde auch hier kein Stillstand der Reaction erzielt. Als eine in obiger Weise bereitete (sehr verdünnte) Lösung von Dichloräther in Barytwasser, die fünf Tage bei gewöhnlicher Temperatur gestanden, drei Stunden am Rückflusskühler gekocht wurde, wurde durch dabei entstandene organische Säure beiläufig ebenso viel Alkali gebunden, als bei weiterem 14-tägigem Stehen der nicht gekochten Flüssigkeit bei gewöhnlicher Temperatur geschehen wäre. Bei sechsstündigem Kochen eines anderen Theiles der obigen Flüssigkeit wurde noch etwas mehr organische Säure gebildet. Beim letzten Versuch wurde nach dem sechsstündigen Kochen das Barythydrat, durch Kohlensäure entfernt und dann Chlor und Baryum bestimmt; die gefundenen Gewichtsmengen standen zu einander im Verhältnisse $Cl : Ba = 2 : 1 \cdot 21$. Dieses Verhältniss drückt also das erzielte Maximum an organischer Säure aus, im Vergleich zu dem (als $BaCl_2$) vorhandenen Chlor. Bleibt eine

frisch bereitete alkalische Lösung von Dichloräther in Barytwasser bei Zimmertemperatur stehen, so hat sich nach zwei Tagen beiläufig halb so viel organische Säure gebildet, als diesem Maximum entspricht.

Was die entstandenen organischen Körper selbst betrifft, so wurde ihre Untersuchung in verschiedenen Phasen der Reaction unternommen, führte aber zu keinem klaren Resultate, da immer nur amorphe, nicht flüchtige Substanzen zu erhalten waren. Ich will in Kürze einige der angestellten Versuche wiedergeben, da sich aus ihnen doch wenigstens Andeutungen über die Natur der vorliegenden Verbindungen ergeben.

50 Grm. Dichloräther wurden in der oben beschriebenen Weise in überschüssigem Barytwasser gelöst: nach zwei Tagen wurde mit Schwefelsäure genau neutralisirt und auf ein kleines Volum eingekocht; aus dem Rückstand (circa 400 Cc.) wurde zuerst durch Schwefelsäure das ganze Baryum, dann durch Kupferoxydul die Hauptmenge der Salzsäure entfernt; durch Schwefelwasserstoff von etwas gelöstem Kupfer befreit, mit Barytwasser genau neutralisirt, dann mit schwefelsaurem Silber die noch vorhandene geringe Menge Chlorbaryum nahezu vollständig entfernt; hierauf wurde die schwach gelb gefärbte Flüssigkeit noch weiter eingekocht und dann im Vacuum über Schwefelsäure eindunsten gelassen; es blieb ein dicker Syrup, der in dünnen Schichten schon nach einigen Tagen, bei grösserer Dicke erst nach einigen Monaten zu einer dem Gummi arabicum gleichenden Masse eintrocknete, ohne auch nur Spuren von Krystallisation zu zeigen. Die so erhaltene Masse enthielt, neben einer Spur Chlorbaryum 19% organisch gebundenes Baryum. Beim Verweilen an der Luft wurde die Substanz klebrig und fadenziehend. An Alkohol gab sie nichts ab. Bei Behandlung der wässerigen Lösung mit Kohlensäure entstand kein $BaCO_3$; die wässerige Lösung gab weder mit ammoniakalischer $CaCl_2$-Lösung, noch mit Bleizucker, noch mit Kupferacetat einen Niederschlag; mit Silbernitrat entstand ein reichlicher Niederschlag, der sich rasch schwärzte; mit Bleiessig flockiger, weisser Niederschlag. Das Verhalten zu Bleiessig wurde zu einer Trennung benützt; die wässerige Lösung des gummiähnlichen Körpers wurde mit überschüssigem Bleiessig versetzt. Der reichliche Niederschlag wurde in Wasser auf-

geschlemmt mit Schwefelwasserstoff zerlegt, von PbS abfiltrirt, Filtrat eingedampft; der syrupöse Rückstand in Wasser aufgenommen (stark saure Reaction), gab an Äther fast nichts ab und lieferte mil $CaCO_3$ neutralisirt, beim Wiedereindampfen eine braune, zähe, nicht zerfliessliche Masse. Das Filtrat des Bleiessigniederschlages mit H_2S behandelt, auf dem Wasserbade eingedampft, gab einen amorphen, zerfliesslichen Rückstand, der am kochenden Alkohol nur wenig eines geschmacklosen Syrups abgab, der Fehling'sche Lösung sehr stark reducirte.

Ein anderes Mal wurde Dichloräther (50 Grm.) in Barytwasser gelöst, die alkalische Lösung fünf Tage stehen gelassen und dann sechs Stunden am Rückflusskühler gekocht (siehe oben); dann wurde mit CO_2 das überschüssige Barythydrat entfernt und auf ein kleines Volum eingekocht. Ein Theil der so erhaltenen Lösung wurde mit überschüssiger Schwefelsäure versetzt, dann sechs Mal mit dem gleichen Volum Äther ausgeschüttelt; die einzelnen Ausschüttelungen ergaben nur wenig und ziemlich gleich viel: neben Spuren einer flüchtigen Säure eine mit Wasserdampf schwer oder gar nicht flüchtige Säure (vielleicht Glycolsäure). Der andere Theil der neutralen Lösung wurde auf dem Wasserbade eingedampft, bis sich Krystalle (von Chlorbaryum) auszuscheiden begannen, dann ein Liter absoluten Alkohols zugegeben, damit drei Stunden am Rückflusskühler gekocht und heiss filtrirt; das alkoholische Filtrat wurde eindestillirt, wobei im Rückstand neben etwas Chlorbaryum nur äusserst wenig einer zu einer zähen Masse eintrocknenden organischen Substanz blieb.

Auch durch Reduction der bei der Einwirkung von Barytwasser auf Dichloräther (in verschiedenen Phasen) erhaltenen Producte (mittelst Natriumamalgam) kam man nicht zu fassbaren Körpern, ebenso wenig durch Erhitzen mit Eisessig. Als eine frisch bereitete Lösung von Dichloräther in Barytwasser nach der Neutralisation mit der vor Kurzem von E. Fischer zur Erkennung und Abscheidung von Aldehyden empfohlenen Lösung von Phenylhydrazin versetzt wurde, fiel nach einigen Secunden ein gelber, harziger Niederschlag heraus, dessen Menge sich durch Tage immerfort vermehrte.

Wahrscheinlich wird die Reaction von Barytwasser auf Dichloräther dadurch sehr complicirt, dass der dabei entstehende Aldehyd (Oxyaldehyd) ausser der Oxydation (und Reduction) durch das Barythydrat auch Condensation oder Polymerisation erleidet.

Einwirkung von wässerigem Ammoniak auf Dichloräther.

Nach dem, was über das Verhalten des Dichloräthers gegen Wasser bekannt ist, war zu erwarten, dass beim Zusammenbringen von Dichloräther mit wässerigem Ammoniak Monochloraldehyd entsteht, der sich dann mit Ammoniak additionell verbindet:

$$O\left\langle\begin{matrix} CH_2Cl \\ \cdot \\ CHCl \\ C_2H_5 \end{matrix}\right. + H_2O + 2NH_3 = \begin{matrix} CH_2Cl \\ \cdot \\ CH \end{matrix}\left\langle\begin{matrix} NH_2 \\ OH \end{matrix}\right. + C_2H_5.OH + NH_4Cl$$

20 Grm. Dichloräther wurden nach und nach unter Umschütteln und Abkühlen in einen grossen Überschuss von mit dem gleichen Volum Wasser verdünnter Ammoniakflüssigkeit gegossen; hiebei löste sich der Dichloräther ziemlich rasch, unter Bildung von sehr viel Salmiak. Nach einstündigem Stehen wurde die so erhaltene Lösung mit Äther ausgeschüttelt.

Der ätherische Auszug wurde durch Destillation von der Hauptmenge des Äthers befreit, dann bei gewöhnlicher Temperatur eindunsten gelassen; es blieben circa 3 Grm. schön ausgebildeter, tafelförmiger Krystalle; diese Krystalle lösten sich ziemlich leicht in Äther (bis auf etwas Salmiak) und waren fast geruchlos. Wurde ihre wässerige Lösung mit Salzsäure versetzt und gelinde erwärmt, so trat äusserst stark der Geruch von Monochloraldehyd auf; bei nachträglichem Versetzen mit überschüssiger Kalilauge und Kochen färbte sich die Flüssigkeit roth und es trat der Geruch von Ammoniak, zugleich mit einem eigenthümlich basischen auf. Beim Erhitzen am Platinblech schmolzen die Krystalle, alsbald fand Schwärzung und Entwicklung von basisch und zugleich stechend riechenden Dämpfen statt, schliesslich trat starke Verkohlung ein. Wurde eine grössere Menge davon in einem offenen Kölbchen gegen 100° erhitzt, so erfolgte plötzlich

unter starker Erhitzung Ausstossen von weissen Dämpfen und totale Verkohlung. Beim Stehen an der Luft färbten sich die Krystalle braun und nahmen einen Geruch an, der an auf gleiche Weise zersetztes Aldehydammoniak erinnerte. Nach dem Allen waren die erhaltenen Krystalle wirklich die gesuchte Ammoniakverbindung des Monochloraldehyds. Ihre Menge (circa 3 Grm.) blieb leider bedeutend hinter der nach obiger Gleichung zu erwartenden (13·4 Grm.) zurück.

Die mit Äther ausgezogene wässerige, stark ammoniakalische Flüssigkeit gab an Chloroform fast nichts ab. Nachdem sie bei zweitägigem Stehen eine dunkelrothe Farbe angenommen hatte, wurde sie zur Hälfte destillirt. Das stark nach Ammoniak riechende Destillat wurde mit Salzsäure neutralisirt und durch eine Reihe von partiellen Destillationen auf ein kleines Volum gebracht; das letzte Destillat wurde mit Pottasche gesättigt, die abgeschiedene Schicht getrocknet und destillirt; nach dem Siedepunkt (78—80°) etc. war es Alkohol; seine Menge betrug 5·9 Grm., während 6·4 zu erwarten waren. — Der Rückstand der Destillation war dunkelbraun und enthielt harzige Flocken; filtrirt wurde er auf dem Wasserbade eingedampft, der Abdampfungsrückstand enthielt viel Organisches, gab aber an Alkohol nur wenig ab und liess sich auch nach dem Sättigen mit Ätzkali durch Äther fast nichts entziehen. Wahrscheinlich waren hier Producte zugegen, die durch eine weitere Einwirkung von NH_3 und H_2O auf das Monochloraldehyd entstanden sind.

Nun liess ich in etwas anderer Weise Wasser zugleich mit Ammoniak auf Dichloräther einwirken und erhitzte dann das dabei entstehende Monochloraldehyd-Ammoniak mit überschüssigem alkoholischen Ammoniak auf hohe Temperatur, um zu Endproducten der Reaction von Ammoniak auf Dichloräther, respective auf Monochloraldehyd zu gelangen.

Es wurden 15 Grm. Dichloräther (1 Molekül) in einem Glaskolben mit 2 Grm. Wasser (1 Molekül) zusammengebracht und sofort unter Eiskühlung und Umschwenken Ammoniak darüber geleitet; nach einiger Zeit fand sich eine weisse Krystallmasse vor, neben wenig Flüssigkeit (Alkohol und etwas Monochloracetal); nun wurde viel Alkohol zugegeben, unter fortdauerndem Durchleiten von Ammoniak am Rückflusskühler durch drei Stunden

gekocht, wobei sich die Flüssigkeit dunkelroth färbte, von ungelöstem Krystallpulver (bloss Salmiak?) abgegossen, erkalten gelassen und mit Ammoniak gesättigt; dann im Rohr 12 Stunden auf circa 130° erhitzt, wobei sich viel Salmiak in Krystallen abschied; hierauf wurde der gesammte Röhreninhalt in Wasser gebracht, mit Salzsäure angesäuert und zum Theil destillirt (ins Destillat gingen nur Spuren von Monochloracetal); der Rückstand mit viel Ätzkali versetzt, wobei ein reichlicher, flockiger Niederschlag herausfiel, dann partiell destillirt. Das Destillat enthielt nur einige Tropfen einer öligen, pyridinartig riechenden Base; der im Rückstand enthaltene braune, amorphe Niederschlag wurde auf's Filter gebracht, mit Wasser gewaschen und bei 100° getrocknet. Das so erhaltene, in Wasser unlösliche Pulver war fast chlorfrei, löste sich in verdünnter Salzsäure und verdünnter Schwefelsäure, hatte also basische Natur (Chlorid, Sulphat und Platinchloridverbindung waren amorph, das erstere auch zerfliesslich). Bei schwachem Glühen mit Zinkstaub ging nebst etwas Pyrrol ein wenig eines pyridinartig riechenden Öles weg. Im Vacuum erhitzt, verkohlte die Substanz und es entstand ein geringes Destillat, das nach Geruch, Fichtenspanreaction und nach der an der Luft eintretenden Bräunung Pyrrol war.

Beim Erhitzen von Monochloraldehyd mit alkoholischem Ammoniak entstand der gleiche amorphe Körper von basischer Natur, dessen weitere Untersuchung unterlassen wurde, weil keine Gewähr vorhanden war für seine Einheitlichkeit.

Über die seltenen Erden.

Von Dr. **Carl Auer von Welsbach.**

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. A. Lieben.)

Im Verlaufe meiner Arbeiten über die Erden des Gadolinits von Ytterby stellte sich die Nothwendigkeit heraus, auch diejenigen Mineralien einer eingehenden Untersuchung zu unterziehen, die andere oder, was in den meisten Fällen gilt, reichlichere Mengen gewisser Erden enthalten, als das zuerst untersuchte Fossil.

Diese weiteren Untersuchungen haben ergeben, dass das „Oxydverfahren", das ich in einigen Anwendungen gelegentlich der früheren Arbeit zu besprechen hatte, von allgemeiner Bedeutung für die Trennung der seltenen Erden ist.

Nicht nur, dass man damit eine überraschend einfache und vollständige Trennung der Ytterit- von den Ceriterden erreicht, man scheidet auf diese Weise z. B. das Ytterbium vom Erbium, das Cer von allen anderen, sehr einfach das Lanthan von Didym u. s. f.

Nach diesen Resultaten kann ich dasselbe, wie folgt, charakterisiren:

Durch Zusatz der feinvertheilten Oxyde zur Lösung gewisser Verbindungen der seltenen Erden werden diese durch die ganze Masse hin in gleichmässiger und den Umständen entsprechender Intensität basisch gemacht, um dergestalt die verschiedene Tendenz der Verbindungen dieser Elemente, welche in dieser Hinsicht eine grosse Reihe bilden, basisch zu werden, zum präcisen Ausdruck zu bringen.

Bestimmt charakterisirte Körper, die eine Trennung von der Mutterlauge leicht ermöglichen, resultiren aus diesem Processe.

Obwohl sonach die Reaction in gleicher Weise eingeleitet wird, das Trennungsverfahren also einheitlich gemacht ist, ist es

doch je nach der Art des zu scheidenden Gemenges den mannigfachsten Modificationen zu unterwerfen. Es richtet sich dann selbstverständlich nach der Natur des die Hauptmenge in dem jeweiligen Oxydgemenge bildenden Körpers in welcher Reihenfolge die Modificationen des Verfahrens zur Anwendung kommen.

So führt man zur Trennung der Ytterit-Erden von den Cerit-Erden die Reaction nur so weit, dass die basischen und nicht die überbasischen Salze (Nitrate) entstehen, weil erstere sich unter allen Verhältnissen leichter und reichlicher bilden, sich von Cer befreien lassen etc. und weil diese Verbindungsstufe unter gleichen Umständen bei Didym und Lanthan für sich gar nicht erhalten werden kann. Die betreffenden überbasischen Salze können dagegen leicht erzeugt werden, wodurch eine gleich vollständige Trennung eben ausgeschlossen wäre.

Wenn später mit den überbasischen Salzen weiter getrennt wird, so liegt das entweder in der Natur der Verbindungen oder der zu trennenden Körper.

Bei der Trennung der Cerit-Erden, wie sie im Cerit enthalten sind, wird natürlich mit der Abscheidung des Cers begonnen, da das Oxydgemenge hauptsächlich (90%) aus diesem besteht, und die etwa $^1/_2$% betragenden Ytterit-Erden werden zuletzt getrennt, was, wie aus der weiter unten angeführten Arbeit sich ergibt, durchaus kein Abweichen vom systematischen Gange involvirt.

Zu betonen habe ich noch, dass die Oxyde immer nur das Mittel sind, die Lösungen basisch zu machen, es hätte in gleicher Weise die Reduction durch Kalk etwa erfolgen können. Je nach der Zusammensetzung des Oxydgemenges etc. ist zwar die Reactionsfähigkeit verschieden, dadurch aber werden nur die nöthige Dauer der Einwirkung und die sie begleitenden Umstände variirt werden; das Endresultat ist in allen in Frage kommenden Fällen doch das gleiche, der verschiedene Grad von Basicität bleibt demnach immer das leitende Princip der Haupttrennungen. Das ist von grosser Wichtigkeit. Damit werden aus den in Arbeit genommenen Mineralien, wie Gadolinit, Cerit, Samarskit direct vergleichbare Producte erhalten. Specielle Reactionen fanden sonach nur bei schon fast rein erhaltenen Präparaten Anwendung. Die Intentionen, die mich bei der Durchführung dieser

jahrelang währenden Untersuchung in dieser Beziehung leiteten, glaube ich damit klar genug gemacht zu haben.

Es ist hier nicht der Ort, an der Hand der Geschichte dieses Theiles der Chemie dieses weiter zu begründen, ich behalte mir ohnedies vor, die vorhandene Literatur nach Veröffentlichung meiner eigenen Arbeiten eingehend zu besprechen.

Zwei Momente habe ich noch zu erwähnen, deren Bedeutung sich daraus ergibt, dass man sie bisher als Kriterion für die Erkennung und das Auffinden von Elementen der Gruppe der seltenen Erden gelten liess, das ist erstens das Absorptionsspectrum und das Emissionsspectrum und zweitens die Äquivalentgewichtsbestimmung. Man hat sich bisher meines Wissens die Frage nicht vorgelegt, kann man mit dem Auftreten eines neuen Streifens in einer nicht etwa so langen Schichte der Lösung, dass die Feinheiten der intensiveren Absorptionsbänder verloren gehen würden, auf die Existenz eines neuen Elementes schliessen, oder aber kann man aus der nachdrücklichen Veränderung der Intensität der Absorptionsstreifen eines Spectrums unter einander bei verschiedenen Lösungen die Möglichkeit der Dissociation des das Absorptionspectrum gebenden Körpers folgern; natürlich sind hier die äusseren Verhältnisse der ersten Beobachtung, Concentration der Lösung, Säuregehalt etc. beibehalten.

Weiters, in wie weit man aus dem Emissionsspectrum in ähnlicher Weise eine Folgerung machen könne. So viel ich weiss, war bisher kein Fall bekannt, dass durch minimalen Zusatz anderer Körper zu einer ein deutliches Emissionsspectrum gebenden Erde eine totale Veränderung des in Rede stehenden Spectrums hervorgerufen werden kann, so zwar, dass nun ein ganz neues leuchtendes Spectrum entsteht. Ferner, ob die als Basis für eine Reihe von Arbeiten, wie schon früher erwähnt, fungirende Äquivalentgewichtsbestimmung als solche — abgesehen von dem Vorhandensein von mehr als zwei oder nur einem Elemente — auch ohne Einwurf gelten könne. Viele Erscheinungen besagen unzweifelhaft, dass eine bestimmte Verbindungsfähigkeit der Erden untereinander besteht, so zwar, dass das gefällte und geglühte Gemenge nicht mehr durch chemische Agentien sofort als solches erkannt werden könnte, trotz der verschiedensten Eigenschaften jeder einzelnen Erde im reinen Zustande.

Über alle diese Fragen werde ich in einer der nächsten Abhandlungen an der Hand der festgestellten Beziehungen zu entscheiden versuchen.

Schon früher habe ich die Untersuchung des Funkenspectrums der Erden als absolut sicheres und allgemeines Mittel der Forschung auf diesem Gebiete als Grundlage meiner Arbeiten angegeben und habe jüngst über mein Spectralverfahren[1] eingehend berichtet.

Ich gab schon damals an, die Untersuchungsmethode weiter entwickeln zu wollen. Da die Resultate meiner Bestrebungen in dem Rahmen einer chemischen Arbeit ihrer Allgemeinheit wegen nicht mehr eingefügt werden können, so habe ich sie meiner demnächst der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften vorzulegenden Arbeit „Beiträge zur Spectralanalyse“ beigegeben. Ich werde im Übrigen am rechten Orte eine ganz kurze Besprechung der diesbezüglichen Verfahren geben.

Ich lasse nun in kurzen Intervallen die speciellen Theile folgen, in welchen ich noch die Gewinnungs- und Verarbeitungsweise der Erden des Cerits und Samarskits beschreibe. Diese Arbeiten schliessen zugleich die Darlegung der Trennungsmethoden, die im Grunde genommen bei jedem von mir verarbeiteten Minerale sämmtlich Anwendung fanden, ab.

Mit der Schilderung des allgemeinen Theiles auf dem Gebiete der seltenen Erden, das sind die variablen und constanten Erscheinungen, finden diese Arbeiten dann ihren Abschluss.

Über die Erden des Cerits.

Die bisherigen Trennungsverfahren gestatteten nicht — abgesehen von dem gerade bei diesem Minerale gänzlich fehlenden systematischen Gange des Scheidungsprocesses — grosse Quantitäten der Erden ohne viele Operationen und ohne Verlust an Material zu verarbeiten. Darauf hatte ich ganz besonders zu achten, da ich mehr als sieben Kilogramm der Roh-Erden in Arbeit nehmen musste.

---

[1] Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien, Decemberheft d. Jahrganges 1883.

Bei solchen Mengen ist ja ein einziges Auflösen, nachheriges Fällen und Glühen in unseren für solche Verarbeitungen meist nicht eingerichteten, wissenschaftlichen Laboratorien eine viel Zeit in Anspruch nehmende Arbeit.

Vorerst will ich die Aufschliessungsmethode und den Weg bis zur Gewinnung der Roh-Erden flüchtig berühren.

Der Cerit, bekanntlich in der reichlich vorkommenden derben Art ein Aggregat vieler Körper, die in ihrem zufälligen Zusammentreffen kein chemisches Interesse in Anspruch nehmen können, enthält unter diesen und das ist wichtig, mindestens zwei, seltene Erden enthaltende Mineralien.

Das eine, den überwiegenden Hauptbestandtheil des Cerits ausmachend, von dem ich in dieser Arbeit spreche, ist in Salzsäure leicht aufschliessbar und mag ungefähr das enthalten, was den reinen, krystallisirten Cerit charakterisirt. Das andere ist mit Salzsäure nicht aufschliessbar und kann auf diese Weise von dem ersten geschieden werden. Von Schwefelsäure wird es aufgeschlossen. Eine specielle Untersuchung desselben habe ich nur soweit unternommen, um die wichtigsten Bestandtheile ungefähr festzustellen. Diese sind von den seltenen Erden Cer, Ytterium, Didym, Lanthan.

Nachdem von der in Arbeit zu nehmenden Quantität wenigstens die eine Hälfte im freien Feuer geglüht und rasch gelöscht worden ist, zerstösst man das Mineral so weit, dass die grössten Körner etwa die Grösse eines Hanfkornes haben. Also nicht feingepulvert oder gar geschlämmt, was die Verarbeitung enorm erschweren würde.

In dieser Form behandelt man den Ceritklein mit Rohsalzsäure auf dem Wasserbade in einer grossen Porzellanschale.

Mit der Einwirkung der Säure beginnt zugleich mit dem Aufschliessen eine schwache Chlorentwickelung, von der höher oxydirten Cer-Verbindung des geglühten Cerits herrührend.

Man dampft bis fast zur Trockene ein, zieht dann mit angesäuertem, heissem Wasser die gebildeten Chloride aus und behandelt die feuchte Masse noch einige Male in gleicher Weise mit Salzsäure.

Schliesslich bleibt die Kieselsäure in Gestalt der ursprünglichen Körner zurück.

Falls dem Cerit nichts von dem erwähnten zweiten Minerale beigemengt war — was selten vorkommen, bei grösseren Stücken nie zu finden sein dürfte — so ist die Kieselsäure weiss; im Gegenfalle erkennt man nun deutlich das Gemenge. Das unaufgeschlossene Mineral durchzieht die Kieselsäurekörner in feinen Schichten oder derberen Formen.

Die gewonnene Mutterlauge lässt man von der fein aufgeschlämmten Kieselsäure — aus dem nicht zu vermeidenden feingepulverten Cerit stammend — klären und filtrirt später den Rest. Man engt sie ein, filtrirt eventuell abermals und fällt dann die Chloride aus der sauren Lösung mit Oxalsäure aus.

Bei dieser Fällung hat man darauf zu achten, dass die ausfallenden Oxalate nicht zu dicht sind; es empfiehlt sich desshalb dass die Temperatur der ziemlich verdünnten Lösung ungefähr 50° Celsius nicht übersteigt. Für den folgenden Trennungsprocess ist dies von Bedeutung.

Man bringt den Oxalatniederschlag in eine grosse Porzellanschale, wäscht erst mit etwas destillirtem Wasser, später mit dem der Leitung und darnach wieder mit destillirtem Wasser aus und lässt abtropfen. Das ablaufende letzte Waschwasser muss farblos sein.

Die zuerst abgegossene Mutterlauge enthält mit Ausnahme der seltenen Erden, so gut wie alle in der ursprünglichen Lösung enthalten gewesenen Körper.

Mit Schwefelwasserstoff wurde nicht gefällt; die nur in Spuren den Oxalaten beigemischten, durch H_2S in saurer Lösung fällbaren Körper stören die nun folgenden Operationen nicht im Geringsten und werden bei der späteren zweiten Fällung der erhaltenen Producte vollends entfernt. Eine specielle Untersuchung der Mutterlauge füge ich dieser Arbeit nicht bei.

Die in der eben beschriebenen Weise gewonnenen Oxalate bilden ein schwach rosafarbenes, krystallinisches Pulver.

Das nun folgende Glühen nimmt man in einer blank gescheuerten Eisenschale über dem Fünfzehnbrenner vor.

Die Oxyde verunreinigen sich dabei nicht nennenswerth; sollten kleine Partikelchen von Hammerschlag sich loslösen, was man überdies leicht umgehen kann, schadet das nicht viel; sie bleiben alle bei der späteren Behandlung zurück.

So erhalten, bilden die Oxyde ein dunkel rothbraunes, etwas schweres Pulver.

Man schreitet nun schon jetzt zur ersten Trennung.

Bei meinen Verarbeitungen habe ich drei Kilogramm immer auf einmal in Arbeit genommen.

Die erste Scheidung findet, wie schon erwähnt, statt zwischen Cer einerseits und den übrigen Erden andererseits, also hauptsächlich Di und La.

Auf ein Kilogramm Erden wägt man sich ein Kilogramm concentrirte Salpetersäure ab und etwa das gleiche Gewicht Wasser. Man kann nun die weniger fein vertheilten Oxyde zuerst lösen und gibt dann die übrigen zu, oder aber behandelt sofort die ganze Menge erst ohne Erwärmen, dann am Wasserbade mit der erwähnten Quantität Salpetersäure und Wasser; anfangs erhitzt sich die Mischung durch den chemischen Process selbst. Unter zeitweiligem Umrühren digerirt man dann noch mindestens 10 Stunden. Die Farbe geht aus dem Dunkelrothbraunen allmälig in eine blassröthliche über.

Unbekümmert, ob noch Oxydtheilchen in der Masse vorhanden sind oder nicht, unterbricht man das Erhitzen und lässt über Nacht klären. Am nächsten Tage kann man die schön amethystfarbene Lösung abziehen. Man sieht nun nach, ob noch Oxydtheilchen im Niederschlage vorhanden sind. Das gelingt ganz einfach. Man nimmt ein Bischen aus der untersten Schichte heraus, bringt auf ein Uhrglas und gibt unter Umrühren so lange Wasser zu, bis Alles sich gelöst hat. Die Lösung ist tief rothbraun. Man sieht sofort oder nach kurzer Zeit nach dem Abgiessen der überstehenden Flüssigkeit braune Partikelchen, falls sich noch Oxyde der Einwirkung entzogen hätten.

Die ganz kleinen Theilchen sind jedenfalls längst gelöst. Falls also grössere nachgewiesen würden, was, ich betone es, bei genauer Behandlung von Anfang an nicht der Fall zu sein braucht, so setzt man neuerdings Salpetersäure und Wasser zu. 100 Gramm ersterer genügen unter allen Umständen; man wiederholt das Digeriren unter Erneuerung des verdunstenden Wassers.

Übrigens kann man auf diese abermalige Behandlung bei dem folgenden Processe auch ganz verzichten.

Alle weiteren Arbeiten sind nun rasch durchzuführen.

Man versetzt den erhaltenen Niederschlag mit so viel Wasser als das Volumen der abgegossenen ersten Didym- und Lanthanlösung betragen hat, giesst in ein grosses Standglas, lässt klären und hebt nach vollständigem Zubodensetzen des Niederschlages die nun violettrosafarbene Lösung ab.

Alle bisher erhaltenen Lösungen enthalten keine, höchstens die letzten eine Spur Cer. Den Cer-Niederschlag löst man nun unter Umrühren im Wasser auf; im Falle keine Oxydtheilchen dem Niederschlage beigemengt waren, braucht man bis zur völligen Lösung es nur in dem Falle zu bringen, wenn man die Spur von Kieselsäure schon hier abfiltriren will.

Man filtrirt also entweder ab, oder lässt im Falle des nicht vollständigen Lösens klären. Alle schwereren Theilchen setzen sich zu Boden.

Die so erhaltenen Lösungen oder Emulsionen werden mit mässig verdünnter Salpetersäure gefällt, und zwar setzt man Salpetersäure nicht bis zur scheinbar vollständigen Fällung zu. Der ausgefällte Körper ist, was die Cer-Verbindung anbelangt, identisch mit dem früheren. Diese Reaction hat im Gebiete der Chemie mit Ausnahme einer ähnlich verlaufenden des Thoriums kein Analogon.

Den Niederschlag lässt man absetzen; die rothe Mutterlauge wird dann vom schwach rosafarben scheinenden Niederschlage abgezogen. Sie enthält Cer und die in der Mutterlauge noch enthalten gewesenen übrigen Erden.

Man filtrirt ab und wäscht mit einer Lösung von Ammonnitrat aus, oder aber besser man löst abermals in Wasser (der Niederschlag ist jetzt in Wasser leicht löslich) und fällt jetzt mit Ammoniumnitrat oder Salpetersäure.

Jetzt kann der Niederschlag mit angesäuertem Wasser gewaschen werden. Will man das Auswaschen dieses voluminösen Körpers vermeiden, kann man sich noch einer anderen, bequemen Methode bedienen.

Man löst den zuerst erhaltenen Niederschlag in concentrirter Salpetersäure auf, verdünnt später, wobei keine reichliche Trübung auftreten darf, filtrirt dann ab, versetzt jetzt die in der Porzellanschale befindliche rothe Lösung mit viel Salpetersäure

und Ammoniumnitrat und dampft ein, bis sich kleine Kryställchen an der Oberfläche auszuscheiden beginnen. Man stellt jetzt zur Krystallisation zur Seite. Bald krystallisirt die Doppelverbindung mit Ammoniumnitrat aus in schönen, purpurrothen Krystallkrusten. Die Mutterlauge wird noch so viel Salpetersäure enthalten, dass sie stark sauer riecht. Durch weiteres Eindampfen lässt sich das Cer fast völlig ausscheiden. Die geringe Menge übriger Erden bleibt in der schliesslich gelb gewordenen Mutterlauge zurück.

Die erhaltenen Krystalle können aus Wasser umkrystallisirt werden. Man setzt auch hier Salpetersäure zu; die ursprünglich gelbrothe Lösung färbt sich dadurch purpurroth.

Ein Überschuss von Ammoniumnitrat schadet nicht, da die übrigen Erden diese Verbindung unter diesen Umständen nicht zu bilden im Stande sind.

In der letzten Abhandlung werde ich auf alle diese Verbindungen zurückkommen. Die wässerige Lösung des erst erwähnten Körpers lässt sich ohne Zersetzung kochen und scheidet sich beim Abdampfen unverändert wieder ab.

Sie wird durch die Nitrate des Didym und Lanthan etc., so auch durch Ammoniumnitrat Kaliumnitrat aus der wässerigen Lösung gefällt, und zwar in den letzteren Fällen zum Theil als ein in Wasser unlöslicher Körper.

Diese Reactionen geben die übrigen Elemente der Gruppe der seltenen Erden nicht.

Darauf gründet sich die Reindarstellung.

Die genannten Cer-hältigen Mutterlaugen, höchstens den sechsten Theil der in Arbeit genommenen Erden enthaltend, werden in gleicher Weise, wie früher behandelt; nur kann man jetzt die Oxalate viel feiner erhalten, die Reaction verläuft dann schneller und vollständiger als zuerst, wo mit der Fällung auch die Trennung von den übrigen Körpern bewerkstelligt werden musste.

Die wissenschaftliche Grundlage des bisherigen Trennungsverfahren ist ganz einfach. Durch die Einwirkung der Salpetersäure auf die Oxyde bilden sich die Nitrate aller Erden des Gemenges, und durch die weitere Einwirkung der Oxyde auf die Nitratlösung geht Cer — dasjenige Element, das am leichtesten,

selbst in saurer Lösung noch, basisch wird — in den Niederschlag. Die Analyse dieses Körpers findet sich in der letzten Abhandlung dieser Untersuchungen, wo ich, wie gesagt, auf die Verbindungen der seltenen Erden näher eingehen werde.

Die Mutterlauge ist frei von dieser Cer-Verbindung, weil sie in der Lösung der Nitrate des Didyms und Lanthans eben nicht löslich ist.

Im Vorhinein wäre diese Trennungsmethode, so lange nur Didym und Lanthan oder auch eine ganz kleine Menge von Ytterit-Erden zugegen wäre, einspruchsfrei, aus dem einfachen Grunde, weil unter den geschilderten Umständen Didym und Lanthan nicht überbasisch werden; nur diese aber sind unlöslich und dabei leicht in verdünnter Salpetersäure löslich; schwer lösliche basische Salze existiren von Didym und Lanthan aber nicht. Die überbasischen Salze dieser Körper bilden sich unter anderen Umständen, die ich weiter unten eingehend zu besprechen habe. Was nun das Vorhandensein einer kleinen Menge von Ytterit-Erden anbelangt, die natürlich auch basisch geworden wären, so sind die basisch-salpetersauren in der nicht concentrirten Lösung von Didym- und Lanthan-Nitrat verhältnissmässig leicht löslich. Im Falle der Gegenwart einer grösseren Menge — ich habe ein derartiges Mineral nicht verarbeitet — würden die basischen beim Verdünnen mit Wasser überbasisch geworden sein und bei dem späteren Fällen mit Salpetersäure in Lösung gegangen sein, denn sie sind in ganz schwach sauren Flüssigkeiten löslich.

Die weitere Trennung würde dann nach Zugabe der die Ytterit-Erden enthaltenden Lauge zur erst erhaltenen Lösung der Verarbeitungsweise des Gadolinits etwa ähnlich sein.

Ich kann nicht unerwähnt lassen, dass sich das in Arbeit genommene Oxydgemenge nicht eigentlich wie ein Gemenge verhält das Cerdioxyd hat andere Eigenschaften, als sonst und das Gleiche gilt für die übrigen Erden.

Eine gewisse, schon erwähnte Verbindungsfähigkeit der Erden untereinander liegt hier zweifelsohne vor, sobald die gemeinschaftlich in Lösung befindlichen Körper später in Oxyde umgewandelt werden.

So würde man vergebens versuchen, die erwähnten Reactionen hervorzurufen, falls das Oxydgemenge nicht mindestens mehrere

Procente anderer Erden ausser Cer enthalten würde. So ist es z. B. ganz irrthümlich, wenn man glaubt, was für den ersten Blick wahrscheinlich ist, dass ein Gemenge von Cer-dioxyd mit Didym- und Lanthan-Oxyd bei der fast völligen Unlöslichkeit des reinen Cerdioxydes in Salpetersäure ungelöst zurückbleiben könnte, wie man es angegeben findet. Geht Didym und Lanthan in Lösung, dann kann alles in Lösung gehen. An die Gegenwart dieser Körper ist also die Reactionsfähigkeit der ganzen Menge der Cerit-Erden unbedingt geknüpft und viele früher angegebene Reactionen des Cers finden nur statt, wenn etwas Didym oder Lanthan zugegen ist.

Ich wende mich nun zur Didym- und Lanthan-Fraction zurück. Die Lösung ist tief gefärbt und zeigt nach dem Filtriren die prächtige Farbentönung des Didym-Nitrates.

Jedenfalls hat man sich über die Abwesenheit des Cer zu versichern.

Zu diesem Behufe dampft man einen kleinen Theil der Nitratlösung — am besten etwas von der zuletzt erhaltenen — in der Platinschale ein, erhitzt sorgfältig über kleiner Flamme. Im Falle nur minimaler Mengen Cer ist auch nach längerer Zeit die Nitratschmelze klar geblieben. Man erhitzt weiter bis der Innenraum der mit einem Uhrglase bedeckten Schale von den Dämpfen der Stickstoffoxyde eben tiefgelb gefärbt zu werden beginnt, kühlt jetzt ab, damit die rasch erstarrende Masse später leicht in kleinere Stückchen sich zersprengen lässt.

Man gibt nun so viel Wasser zu, dass sich später eine ziemlich concentrirte Lösung bildet und kocht.

Entsteht jetzt nach anhaltendem Kochen keine Trübung, ist Cer vollständig entfernt.

Sollte die Lösung des Didyms und Lanthans erhebliche Mengen von Cer enthalten, was aber nur bei durchaus fehlerhafter Ausführung des ganzen Verfahrens möglich ist, namentlich kann der Fehler in dem Zuvielzugeben von Salpetersäure bei der ersten Behandlung liegen, so muss man das erst beschriebene Verfahren wiederholen.

Bei Gegenwart solcher Cer-Mengen ist die Didym und Lanthan-Fraction mehr oder weniger roth gefärbt.

Zur Abscheidung desselben gelten folgende Modificationen des erwähnten Verfahrens. Man fällt einen Theil der Nitratlösung mit Oxalsäure, glüht und setzt allmälig der kochenden, ziemlich concentrirten Lösung von dem mit Wasser zu dicklichem Brei angerührten Oxyde etwas zu und kocht unter Umrühren kurze Zeit.

Die Menge der zuzusetzenden Oxyde richtet sich selbstverständlich nach der Menge des auszufällenden Cers; ein selbst nicht unerheblicher Überschuss schadet indess nicht leicht, denn so lange die Didym- und Lanthan-Lösung nicht ziemlich verdünnt ist, fallen keine überbasischen Salze aus.

Die richtige Menge ist indess bei einiger Übung ganz leicht zu treffen.

Hat man bei der oben geschilderten Cer-Prüfung nur ganz kleine Mengen von Cer gefunden, scheidet man sie vorderhand nicht ab.

Die von mir verarbeiteten Lösungen wurden alle dieser Probe unterworfen und es zeigte sich nur bei den zuletzt erhaltenen eine Spur von Cer.

Das Trennungsverfahren für Didym und Lanthan ist fast noch müheloser, als das eben beschriebene und dabei insoweit vollständig, dass schon nach der ersten Fällung die concentrirte Mutterlauge, die das Lanthan enthält, nur mehr rosafarben ist. Der gelöste Niederschlag bildet in gleich concentrirter Form tief amethystfarbene Lösung.

Man fällt die gesammte Fraction nach Zusatz von Salpetersäure mit Oxalsäure. Jetzt werden die Spuren fremder Körper fast ganz entfernt und nur Spuren von Calcium bleiben zurück. Die Art der Fällung ist besonders wichtig. Gefällt wird die heisse, stark verdünnte Oxalsäurelösung mit der Nitratlösung. Dabei nimmt man zu Beginn überaus verdünnte, heisse Lösungen; erst später bis die ganze Flüssigkeit während des Umrührens vom Oxalatniederschlage erfüllt zu sein scheint, kann man allmälig concentrirtere nehmen.

Diese Vorsichtsmassregeln müssen aus dem Grunde befolgt werden, weil sonst das Oxalat in zu dichter Form erhalten würde. Man wäscht den Niederschlag aus, trocknet und glüht in der Platinschale.

Die nicht stark geglühten Oxyde sind schwach himmelblau; nach anhaltenderem Glühen sind sie tief rothbraun.

Zu dem Behufe der Trennung der beiden Erden löst man die eine Hälfte des Gemenges der rothbraunen Oxyde in mässig verdünnter Salpetersäure auf. Die noch schwach saure Lösung lässt man erkalten.

Nun verreibt man portionsweise die übrigen Oxyde mit der Nitratlösung in der Reibschale. Das Ganze muss schliesslich einen dünnflüssigen Brei bilden. Man giesst in eine geräumige Porzellanschale aus, spült mit wenig Wasser nach und rührt gut um.

Die anfänglich tiefbraune Mischung wird unter gleichzeitiger Erwärmung schmutzig-blassröthlich.

Sollte die Reaction nicht in dieser Weise von statten gehen, so hat man zu concentrirte oder zu verdünnte Lösungen angewendet.

Im ersten Falle erstarrt die Masse, im zweiten muss man den Process durch Erwärmen auf dem Wasserbade unterstützen.

In allen Fällen lässt man dann vollständig erkalten.

Das erhaltene Präparat wird nun mit kaltem Wasser extrahirt grössere und ausgewaschen.

Es ist nun im Rückstande fast das ganze Didym (einschliesslich der Ytterit-Erden, die Spuren von Cer) in der Lösung der Theil des Lanthan.

Zur weiteren Trennung wiederholt man das angegebene Verfahren. Die Lösung sei bei der Lanthan-Fraction etwas verdünnter, wie bei der Didym-Fraction, und man vermindert den Zusatz der Oxyde auf etwa die Hälfte von früher.

Man überlässt auch jetzt die Mischung bis zum völligen Erkalten sich selbst, rührt mit Wasser an, decantirt, filtrirt, und wäscht mit heissem Wasser aus.

Man erhält auf diese Weise gut etwa die Hälfte von im ursprünglichen Gemenge enthalten gewesenen Didym und Lanthan fast rein, d. h. jede Hauptfraction frei von dem Hauptbestandtheil der anderen.

Bevor ich auf die weitere Entwickelung des Trennungsverfahrens und die Untersuchung der Producte desselben eingehe, sei mir gestattet, die wissenschaftliche Grundlage des Verfahrens zu geben.

Es gründet sich darauf, dass das Di-Nitrat durch das Oxydgemenge leichter überbasisches Salz liefert als das La-Nitrat.

Da nun aber diese Verschiedenheit nicht gar gross ist, so muss darauf geachtet werden, die Umwandlung unter solchen Umständen einzuleiten, dass sie eben beginnen kann und derart langsam verläuft.

Das ist der Grund, warum alle Verfahren, die sich auf eine partielle Zersetzung der Nitratschmelze gründen, im Vergleiche zu den Resultaten des Oxydverfahrens so ungünstig erscheinen; denn mit dem Übergiessen der Schmelze mit Wasser, sind die Bedingungen derart, dass wenigstens im Anfange jedes Element überbasische Salze geben kann. Übrigens lassen sich die Nitrate gar nicht weit genug erhitzen, da die Schmelze lange bevor genug Salpetersäure entfernt worden ist, um die Verhältnisse entstehen zu lassen, die man häufig angeführt findet, vorerst erstarrt. Bei weiterem Erhitzen aber werden die der Flamme zunächst liegenden Theile der wieder geschmolzenen Masse schon in Oxyde verwandelt, die beim späteren, nicht lange fortgesetzten Auskochen krustenartig zurückbleiben.

Die Untersuchung der oben angeführten Fractionen liess in der La-Fraction eine Spur vom Di-Spectrum erkennen. Das Funkenspectrum derselben zeigt, die charakteristischen Linien des Lanthans und ist bei einem Strome von nur drei Bunsen-Elementen, mit Hilfe des jüngst beschriebenen Apparates erzeugt, ein blendend schönes. Es ist das brillanteste aller seltenen Erden, wie überhaupt aller Elemente.

Das Licht des kleinen Bogens ist völlig weiss; bei ganz geringen Mengen von Didym wird es bläulich.

Das Funkenspectrum der Di-Fraction ist dagegen gehalten ein mattes.

Es tritt eine ungeheuere Anzahl von Linien auf.

Eben noch zu erkennen ist das Spectrum des Lanthans. Deutlicher und auf den ersten Blick zu erkennen sind die Linien des Yttriums.

Die beiden dazwischen stehenden Fractionen wurden neuerdings der Trennung unterworfen.

Das so erhaltene Lanthan-Präparat sah ich, nachdem es von den Spuren des Calciums befreit war, als Material für die

weiteren Arbeiten an, deren Resultate ich nächstens vorlegen werde.

Es erübrigt mir für diesmal nur noch die Besprechung der weiteren Verarbeitung der Di-Fractionen.

Nach der dritten Behandlung, die mit noch geringerer Quantität von Oxyden, als bei der zweiten Behandlung durchgeführt wurde, zeigte der Niederschlag keine Linien des Lanthans mehr.

Ich schritt nun zur Fractionirung mit Hilfe der basisch-salpetersauren Salze.

Da ich an anderer Stelle über derartige Trennungen schon berichtet habe, kann ich mich hier kurz fassen.

Da die basisch-salpetersauren Salze der Ytterit-Erden in der concentrirten Di-Nitratlösung oder der alkoholischen verdünnten nicht löslich sind, so konnten sie mit einem kleinen Gehalte von Di abgeschieden werden. Sie wurden in der schon bekannten Weise gereinigt.

Das Funkenspectrum zeigte vor Allem deutlich die Linien des Ytteriums.

Das Emissionsspectrum war ein „Variationsspectrum", das auf die Gegenwart direct nicht nachweisbarer Substanzen schliessen lässt.

Da ich diese merkwürdigen Erscheinungen erst ausführlicher zu besprechen habe, so muss ich ein weiteres Eingehen in die Sache unterlassen. Auch diese Fractionen waren Ausgangspunkte für weitere Trennungen.

Über das Methylphenanthrolin.

Von **Zd. H. Skraup** und **O. W. Fischer.**

(Aus dem Laboratorium der Wiener Handelsakademie XI.)

Der Eine von uns hat in Gemeinschaft mit G. Vortmann aus dem Meta-, beziehlich dem Paraphenylendiamin vermittelst der Glycerinreaction zwei isomere Basen der Formel $C_{12}H_8N_2$ dargestellt, die Phenanthrolin [1] und Pseudophenanthrolin [2] genannt, und ausführlich untersucht wurden.

In der Absicht eine Carbonsäure des Phenanthrolins zu gewinnen, gingen wir vom gewöhnlichen Dinitrotoluol (Schmelzpunkt 71; $CH_3 : NO_2 : NO_2 = 1 : 2 : 4$) aus, welches in das Toluylendiamin übergeführt ein Methylphenanthrolin liefern und dann durch Oxydation die gesuchte Säure geben konnte.

Das Dinitrotoluol lässt sich mit Zinn und Salzsäure zwar sehr leicht reduciren (auf 10 Theile Nitrotoluol 20 Theile Zinn, entsprechend dem Verhältnisse 1 Mol.: 3 At.), da aber das entstandene Zinndoppelsalz auch nach sehr starker Concentration nur schwierig krystallisirt, ist man in diesem Falle genöthigt, die Reductionsflüssigkeit mit Schwefelwasserstoff zu entzinnen und das Filtrat vom Schwefelzinn bis zur Krystallisation des salzsauren Toluylendiamins einzudampfen, während bei Darstellung des Phenanthrolins und Pseudophenanthrolins die Arbeit wesentlich dadurch vereinfacht war, dass man nach erfolgter Reduction mit Zinn durch Einengen das Zinndoppelsalz der Phenylendiamine in nahezu theoretischer Ausbeute gewinnen und zur Synthese gebrauchen konnte.

Die erste Krystallisation des Toluylendiamin-Chlorhydrats wurde ohne weitere Reinigung verwendet.

---

[1] Monatshefte III, 570.

[2] Ebend. IV, 570.

40 Grm. des Salzes mit 30 Grm. Nitrobenzol und je 100 Grm. Glycerin und Schwefelsäure wurden durch 4 Stunden vor dem Rückflusskühler zum Sieden erhitzt, die mit Wasser verdünnte Flüssigkeit sodann durch Einblasen von Wasserdampf von unverändertem Nitrobenzol befreit (6—7 Grm.) und dann mit Ätznatron alkalisch gemacht, wobei ein schwarzbraunes Harz ausfiel. Einmal wurde dann abermals Wasserdampf eingeleitet und dabei im Destillate Öltröpfchen beobachtet, die, dem Geruch nach Chinolin, zu einer weiteren Charakterisirung aber zu gering waren.

Das durch Ätznatron ausgefällte Harz löst sich in verdünnter Salzsäure bis auf einige Flocken vollständig, die eingedampfte salzsaure Lösung krystallisirt aber erst nach vorsichtigem Zusatz von Alkohol und nach längerem Stehen. Die Krystallisation wird durch Absaugen und Waschen mit absolutem Alkohol von der zähen Mutterlauge befreit und beträgt etwa 9—10 Grm. Das wieder eingedampfte Filtrat krystallisirt in der Regel nicht mehr und lieferte auch bei einer Reihe von zum Theile sehr mühsamen Versuchen, aus demselben in irgend einer anderen Weise nochmals krystallisirte Substanzen zu gewinnen, nur sehr kleine Mengen derselben.

Es enthält vorwiegend eine in Wasser unlösliche Base, deren Chlorhydrat harzig, in Wasser spielend leicht, in Alkohol unlöslich ist, die ein in Wasser unlösliches Chromat liefert und für sich weder durch Umkrystallisiren, noch durch Destilliren (wobei sie sich zersetzt) gereinigt werden konnte.

Die früher erwähnte Krystallisation, das Chlorhydrat des entstandenen Methylphenanthrolins, wird zunächst durch Umkrystallisiren aus verdünntem Alkohol gereinigt, der es in der Hitze sehr leicht, in der Kälte wenig löst, dabei wird die Hauptmenge der färbenden Verunreinigungen entfernt.

Die noch immer braun gefärbte Substanz scheidet in Wasser gelöst und kochend mit Kaliumbichromat versetzt, gelbliche Nadeln eines Chromates ab, das aus Wasser umkrystallisirt in Form rother, spröder Nadeln erhalten wird. Ammoniak zerlegt es in gelinder Wärme leicht unter Abscheidung eines lichtbräunlichen, leicht erstarrenden Öls, das die Krystallwasserverbindung des Methylphenanthrolins und in Folge heftigen Schäumens nicht destillirbar ist. Nach etwa $1^1/_2$stündigem Trocknen bis 100° hat es das

Wasser vollständig verloren und gibt dann aus einer kleinen Retorte destillirt, ein schwach gelbliches Öl, das sehr leicht zu einer krystallinischen Masse erstarrt, die ganz reines Methylphenanthrolin ist.

Analyse:

0·1764 Grm. gaben 0·5187 Grm. CO_2 und 0·0878 Grm. H_2O.
0·1505 „ „ 0·4436 „ „ „ 0·0698 „ „

	Berechnet für $C_{13}H_{10}N_2$	Gefunden	
C	80·41	80·19	80·38
H	5·15	5·52	5·15

Das Methylphenanthrolin destillirt erst über der Thermometergrenze in reinem Zustande nahezu ohne Zersetzung. Den gebräuchlichen Lösungsmitteln gegenüber verhält es sich ganz ähnlich dem von Skraup und Vortmann beschriebenen Phenanthrolin, dem es auch im Geruche ähnelt, nur riecht die neue Base schärfer, an Acridin erinnernd. Mit Wasser zusammengebracht, wird es augenblicklich weiss und undurchsichtig und in die Krystallwasserverbindung übergeführt, die in ziemlich kurzen Prismen krystallisirt und ebenso wie die wasserfreie Base bei 95—96° schmilzt.

0·5726 Grm. des Hydrates verloren über Schwefelsäure bis zum constanten Gewicht getrocknet 0·1884 Grm.

	Berechnet für $C_{13}H_{10}N_2+5H_2O$	Gefunden
$5H_2O$	31·8 Perc.	32·9

In Wasser löst sich die Base in der Kälte etwas leichter als in der Hitze, die wässerige Lösung, sowie die in Alkohol und in Säuren sind ungefärbt und fluoresciren nicht. Die verdünnt alkoholische Lösung wird auf Zusatz von Eisenchlorid gelblichbraun gefärbt; mit Silbernitrat vermischt, scheidet sie allmälige kugelige Aggregate von weissen Nädelchen ab, Kupferacetat fällt nach einiger Zeit lange, weiche, blaue Nadeln.

Salze.

Das basische Chlorhydrat krystallisirt aus Wasser oder Alkohol selbst bei Anwesenheit überschüssiger Salzsäure in

langen, durchsichtigen Nadeln, die in Wasser sehr leicht, in Weingeist um so schwerer löslich sind, je concentrirter er ist. Aus etwa 50 Perc. Alkohol lässt es sich mit Leichtigkeit umkrystallisiren.

0·2572 Gr. gaben 0·1377 Grm. AgCl.
0·2103 „ „ 0·1033 „ „

	Berechnet für $C_{13}H_{10}N_2HCl+4H_2O$		Gefunden
HCl	12·57	12·49	12·45

Das Krystallwasser entweicht bei 100° nur langsam, rascher bei 110°, dann aber unter weiterer Zersetzung, wobei starker Geruch nach freier Base bemerkbar wird.

0·3650 Grm. verloren nach 1/2stündigem Trocknen auf 100° 19 Perc., nach einstündigem schon 33 Perc., während sich 24·78 Perc. berechnen.

Chromat. Bei rascher Krystallisation erhält man dieses Salz in weichen, gelben, bei langsamer in spröden, rothen Nadeln, die aber beim Aufbewahren bald gleichfalls gelbe Farbe annehmen. Es ist in heissem Wasser nicht unbeträchtlich, in kaltem aber ausserordentlich schwer löslich, etwa in demselben Verhältnisse, wie die äquivalente Menge freier Base. Das Salz enthält kein Krystallwasser.

0·3195 Grm. bei 100° getrocknet, hinterliessen beim Glühen 0·0810 Grm. Cr_2O_3.

	Berechnet für $(C_{13}H_{10}N_2)_2H_2Cr_2O_7$	Gefunden
Cr	17·16	17·34

Platindoppelsalz. In üblicher Weise durch Fällung gewonnen, bildet es einen lichtgelben, krystallinischen Niederschlag, der in Wasser und Salzsäure auch in der Kochhitze sehr schwer löslich ist.

0·2692 Grm. verloren bei 120° 0·0154 Grm. und hinterliessen 0·0816 Grm. Pt.

	Berechnet für $C_{13}H_{10}N_2H_2Cl_6Pt+2H_2O$	Gefunden
Pt	30·47	30·31
H_2O	5·62	5·72

Die Pikrinsäureverbindung erhält man als krystallinischen Niederschlag, der in kochendem Alkohol sehr schwer

löslich ist, im Capillarrohr erhitzt um 200° sintert und unter vorhergehender Bräunung bei 253° schmilzt.

Oxydation des Methylphenanthrolins.

Nach wiederholtem Eindampfen der Base mit Salpetersäure oder Königswasser bleibt sie in Form des in kaltem Wasser ziemlich schwierig löslichen Nitrates unverändert zurück.

In verdünnter Ätzkalilösung vertheilt, wird sie von Kaliumpermanganat (1 Molekül Base, 2 Moleküle $KMnO_4$) erst bei Wasserbadwärme und dann noch schwierig angegriffen, der grösste Theil derselben ist aber unverändert geblieben, der Rest tiefer zersetzt.

Chromsäure und Schwefelsäure wirken um so langsamer ein, je mehr Wasser zugesetzt worden ist, und in demselben Verhältniss bleibt mehr Base unverändert, geht die Oxydation weiter als bis zur erwarteten Carbonsäure des Phenanthrolins. In sehr verdünnter Lösung wird nur eine kleine Menge Chinolinsäure gebildet, die am Schmelzpunkt, 229—30°, der Krystallform und an dem Pyridingeruch, den sie mit Ätzkali gemischt erhitzt, entwickelte, erkannt wurde. Relativ gute Ausbeute erhielten wir in folgender Weise.

8 Grm. Base wurden mit 20 Grm. concentrirter Schwefelsäure bis zur vollständigen Lösung erwärmt, und dann unter steter Kühlung und sorgfältigem Verrühren mit 10 Grm. Chromsäure allmälig vermischt, die in der eben nothwendigen Menge Eisessig gelöst war.

Nach jedesmaligem Zusatze trat in wenig Augenblicken rein grüne Färbung ein.

Nach dem Verdünnen mit Wasser wurde durch wässerige Chromsäure ein Chromat ausgefällt, das unveränderte Base und die Hauptmenge der entstandenen Säure enthält. Das Filtrat von diesem mit Alkohol bis zur vollständigen Reduction der Chromsäure gekocht, mit Ammoniak gefällt, filtrirt und das Filtrat concentrirt, schied gleichfalls eine kleine Menge mit etwas Base verunreinigter Säure ab.

Bei Zerlegung des Chromates mit Ammoniak fiel Base aus, das Filtrat schied beim Eindampfen unter Ammoniakverlust die Säure in gelben Nadeln ab.

Zur Trennung von anhängendem Chromoxyd und noch immer beigemischter Base erwies es sich am besten, die rohe Säure in kochendem Eisessig zu suspendiren, Salzsäure bis zur vollständigen Lösung, und dann etwa das gleiche Volum Wasser zuzusetzen, worauf die Säure in nahezu weissen, weichen Nädelchen ausfällt, die auch nach wiederholter Krystallisation beim Trocknen etwas gelblich werden.

Die Phenanthrolincarbonsäure ist in kaltem Wasser nahezu unlöslich, in heissem sehr schwer löslich, gleichfalls schwer in Alkohol, in Eisessig und in verdünnter Essigsäure, leicht und ohne Färbung löslich in Alkalien und Mineralsäuren. Die kaltgesättigte wässerige Lösung reagirt gar nicht, die kochend gesättigte sehr schwach sauer. Sie schmilzt unter Zersetzung bei 277°. Die wässerige Lösung wird auf Zusatz von Eisenchlorid oder Eisenvitriol nicht verändert. Sie krystallisirt wasserfrei.

Analyse:

0·2397 bei 100° getrocknet, gaben 0·6093 CO_2 und 0·0800 Grm. H_2O.

	Berechnet für $C_{13}H_8N_2O_2$	Gefunden
C	69·64	69·32
H	3·57	3·70

Calciumsalz. Nach etwa einstündigem Kochen der in Wasser vertheilten Säure mit Calciumcarbonat war sie vollständig in Lösung gegangen und nach starkem Concentriren der klaren Flüssigkeit schieden sich weisse, undurchsichtige Nadeln ab, die beim Erkalten sich noch vermehrten.

Die lufttrockene Verbindung gab bei der Analyse Zahlen, die von jenen, die das Neutralsalz erfordert, stark abweichen, und aus welchen sich nur die allerdings merkwürdige Formel $[(C_{13}H_7N_2O_2)_2Ca + 5H_2O]_2 + C_{13}H_8N_2O_2$ berechnen lässt.

0·2358 verloren bis 110° 0·310 Grm. H_2O und lieferten 0·0465 Grm. $CaSO_4$.
0·2625 mit Bleichromat verbrannt, gaben 0·5327 Grm. CO_2 und 0·0993 Grm. H_2O.

	Berechnet für $[(C_{13}H_7N_2O_2)_2Ca+5H_2O]_2+C_{13}H_8NO_2$	Gefunden
Ca	5·81	5·79
C	56·68	55·34
H	4·06	4·20
H_2O	13·08	13·14

Es sei daran erinnert, dass der Eine von uns im Verein mit Schlosser[1] ähnlich zusammengesetzte Kalksalze bei der Meta- und der Orthochinolinbenzcarbonsäure beobachtet hat, und zwar $[(C_{10}H_6NO_2)_2Ca + 3H_2O]_2 + C_{10}H_7NO_2$, beziehentlich $[(C_{10}H_6NO_2)_2Ca]_2 + C_{10}H_7NO_2$.

Zu Versuchen, das normale Kalksalz der Phenanthrolincarbonsäure durch Kochen mit Ätzkalk darzustellen, fehlte genügendes Material.

Die kaltgesättigte Lösung (Mutterlauge) des analysirten Kalksalzes gab folgende Reactionen:

Silbernitrat: weisse Gallerte, die beim Kochen gelatinöse Flocken liefert, die am Licht bald bräunlich werden.

Kupferacetat: blaue Gallerte, beim Kochen lichtblaugrüne feine Flocken.

Bleizucker: glycerindicke Flüssigkeit, erst beim Kochen weisse Flocken.

Quecksilberoxydulnitrat: augenblicklich weisse Flocken.

Quecksilberchlorid: Trübung, beim Kochen weisser Niederschlag.

Eisenchlorid: gelbbraune Flocken, beim Kochen krystallinisch werdend.

Eisenvitriol: blutrothe Flocken, die beim Erhitzen schwer krystallinisch werden und beim tagelangen Stehen sich nicht verändern.

Kobaltsulfat: in der Kälte flockigen, in der Hitze feinpulverigen licht gelben Niederschlag.

Nickelnitrat: ähnlich, nur lichtgrün.

Destillation des Calciumsalzes.

Phenanthrolincarbonsäure in wenig Ätznatron gelöst und dann mit dem fünffachen Gewicht Ätzkalk im Wasserbade eingetrocknet, roch schon deutlich nach Phenanthrolin. Beim Erhitzen des Gemisches in einem Glasrohr entwich anfangs Wasser, bei dunkler Rothgluth aber ein fast ungefärbtes, dickes Öl, erst die letzten Tropfen waren gelblichbraun. Das Öl erstarrte weder für sich, noch mit Wasser verrührt.

In verdünnter Schwefelsäure gelöst und mit Kaliumbichromat versetzt, schied es ein bräunliches Chromat ab, das in viel heissem Wasser unter Abscheidung bräunlicher Flocken in Lösung ging und beim Erkalten zunächst in körnigen, röthlichen, dann in gelben, nadligen Krystallen wieder anschoss.

---

[1] Monatshefte II, 524 und 534.

Beim Verreiben mit Ammoniak gingen letztere augenblicklich, erstere nur langsam und unter vorhergehender Ölabscheidung in feine Krystallfäden über, die den Schmelzpunkt 65—66, respective 63—64 hatten, also nahezu bei derselben Temperatur sich verflüssigten, wie das Phenanthrolinhydrat, beim Erwärmen den eigenthümlichen Geruch des Phenanthrolins zeigten und auch eine in Alkohol äusserst schwer lösliche Pikrinsäureverbindung eingingen.

Die Entstehung des Phenanthrolins aus der beschriebenen Säure einerseits, die Bildung des Methylphenantrolins aus dem gewöhnlichen Toluylendiamin anderseits, lassen die Constitution der genannten Verbindungen nicht zweifelhaft. Sie wird durch folgende Formeln ausgedrückt:

Toluylendiamin. Methylphenanthrolin. Phenanthrolincarbonsäure.

Wir beabsichtigen, von Diamidobenzoësäuren ausgehend, Isomere der Phenanthrolincarbonsäuren darzustellen.

Eine neue Bildungsweise des Phenanthrolins.

Von **Zd. H. Skraup.**

(Aus dem Laboratorium der Wiener Handelsakademie. XII.)

Nach den gegenwärtigen Vorstellungen über die Constitution des Chinolins sind sieben Monosubstitutionsderivate desselben denkbar, von denen vier die substituirende Gruppe im Benzolring, drei im Pyridinring besitzen.

Zwei der ersteren vier sind ihrer Stellung nach bekannt, jene nämlich, die vermittelst der Glycerinreaction aus dem Ortho-, beziehlich Paraderivat des Anilins dargestellt werden können. Anders ist es bei den sogenannten Metaderivaten der Chinolinreihe, die aus in der Metastellung substituirten Anilinen entstehen, da letztere bei der Glycerinreaction in zwei der Stellung nach verschiedene Chinoline übergehen können und gegenwärtig keine anderen Thatsachen vorliegen, welche es ermöglichen, für die wirklich erhaltenen die Stellung ausser Zweifel zu setzen.

So kann beispielsweise das *m*-Toluidin zwei verschiedene *m*-Toluchinoline geben:

1 2

CH_3 N
m-Toluidin

CH_3 N CH_3 N
m-Toluchinolin

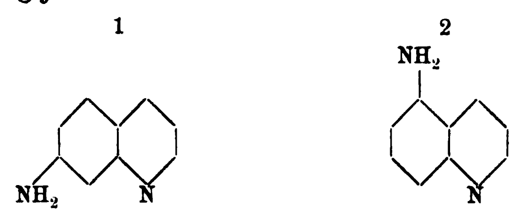
von denen das der Formel 1 das wirkliche Metaderivat wäre, das der Formel 2 die Methylgruppe in jener Stellung besitzt, die nach dem Vorschlage von O. Fischer als ana-Stellung bezeichnet werden sollte.

In der Hoffnung, zur Klärung dieser Frage beizutragen, versuchte ich die Glycerinreaction bei einem Amidochinolin

auszuführen, das ich der Freundlichkeit des Herrn geheimen Commercienrathes Siegle verdanke und das R. Laiblin im Laboratorium der Badischen Anilin- und Sodafabrik dargestellt hat; beiden Herren danke ich auch an dieser Stelle auf das Beste.

Dieses Amidochinolin erhielt H. Laiblin aus einem Nitrochinolin, das neben dem *o*-Nitrochinolin von Königs bei Nitrirung des Chinolins entsteht, es ist, wie H. Laiblin mir weiter mitgetheilt hat, identisch mit dem β-Amidochinolin von Riemerschmid und geht nach der Diazotirung in das β-Oxychinolin von O. Fischer und Riemerschmid über.

Vorausgesetzt, dass die Amidogruppe desselben mit Glycerin ähnlich reagire, wie die aromatischer Amine, konnten je nach der Stellung jener verschiedene Basen entstehen.



Hat das β-Amidochinolin die Stellung 2, so kann dasselbe bei der Glycerinreaction wohl nur in Phenanthrolin übergehen, besitzt es aber die Formel 1, dann kann es ebensogut Phenanthrolin, wie auch eine mit demselben isomere Base liefern, wenn die Schliessung des Pyridinringes nicht in der Ortho-, sondern in der Parastellung erfolgt.

Gelang es nun, die Bildung einer mit dem Phenanthrolin isomeren Base nachzuweisen, dann war die Stellung 1 für das β-Amido- und für das β-Oxychinolin zum Mindesten sehr wahrscheinlich gemacht.

Das β-Amidochinolin liefert nun mit Nitrobenzol, Glycerin und Schwefelsäure erhitzt in ziemlich guter Ausbeute Phenanthrolin (aus 5 Grm. etwa 3 Grm.), das durch seine physikalischen Eigenschaften, Schmelzpunkt der wasserfreien und krystallwasserhältigen Base, der Pikrinsäureverbindung, endlich Analyse des Chromates leicht erkannt werden konnte; eine zweite Base zu isoliren gelang aber nicht, die gewünschte Entscheidung muss daher auf anderem Wege versucht werden.

Immerhin hat der Nachweis einiges Interesse, dass die grosse Ähnlichkeit zwischen Chinolinderivaten und solchen der aromatischen Reihe sich auch in der Fähigkeit zeigt, abermals die Chinolin-Glycerinreaction einzugehen.

Das β-Amidochinolin habe ich in einer Ausbeute von etwa 50 Percent in ein Oxychinolin verwandelt, welches alle Eigenschaften des β-Oxychinolins zeigt. Ob letzteres mit meinem Metaoxychinolin identisch ist, halte ich für sehr fraglich. Die Differenzen im Schmelzpunkt sind sehr bedeutend (β-Oxychinolin 224—228 Riemerschmid, 223—224 Skraup, Metaoxychinolin 235 bis 238), das Metaoxychinolin zeigt grüne Fluorescenz, das β-Oxychinolin nicht, letzteres scheint weit luftempfindlicher und weit schwieriger ganz rein darstellbar zu sein, wie ersteres. Ebenso krystallisirt die Pikrinsäureverbindung des β-Oxychinolins stets in Blättern, die des Metaoxychinolins immer in Nadeln.

Über ein neues Resorcinblau.

Von R. Benedikt und P. Julius.

(Aus dem chemischen Laboratorium der technischen Hochschule in Wien.)

Resorcin geht, wie bekannt, in Weselsky's Diazoresorcin über, wenn man seine ätherische Lösung mit rother rauchender Salpetersäure versetzt.

Lässt man dagegen eine Lösung von salpetrigsaurem Kali in concentrirter Schwefelsäure (Lieberman's Reagenz) auf eine ebensolche Resorcinlösung einwirken, so erhält man Weselsky's Diazoresorufin.

Von diesen beiden Farbstoffen ist ein dritter verschieden, welchen man beim Verschmelzen von Resorcin mit salpetrigsaurem Natron erhält.

55 Grm. Resorcin (1 Molekül) werden mit 18 Grm. salpetrigsaurem Natron (circa $^1/_2$ Molekül) gemischt und in einem geräumigen Kolben im Paraffinbade allmälig auf 130° erhitzt. Die Masse kommt in starkes Schäumen unter reichlicher Entwicklung von Ammoniak, wird intensiv blau und erstarrt. Man löst in wenig Wasser, filtrirt und salzt aus. Der Niederschlag, das Natronsalz des neuen Farbstoffes, kann aus wenig Wasser umkrystallisirt werden und wird dann in Form undeutlicher Krystalle erhalten, welche nach dem Trocknen an der Luft kupferrothen Reflex zeigen.

Die wässrige Lösung ist schmutzig blauviolett gefärbt. In absolutem Alkohol ist die Substanz schwer löslich, die Flüssigkeit ist rein blau. Zuweilen zeigt sie eine intensive grüne Fluorescenz, was offenbar von der Beimengung eines zweiten Farbstoffes herrührt. Aus einer mit Alkohol versetzten Lösung lässt sich der Farbstoff mit Äther in blauen Flocken fällen.

Aus der wässrigen Lösung scheidet sich beim Ansäuern der freie Farbstoff in dunkelrothen Flocken aus, die sich in Alkohol

leicht lösen und daraus durch Wasser wieder gefällt werden. In concentrirter Schwefelsäure löst er sich mit blauer Farbe.

Durch Zinkstaub und Alkali wird der Farbstoff leicht reducirt, die abfiltrirte Lösung färbt sich an der Luft sehr rasch wieder blau. Durch dieses Verhalten unterscheidet er sich von Weselsky's Diazoresorcin, welches bei der Reduction und Reoxydation in Diazoresorufin übergeht, dessen Lösung carmoisinroth mit zinnoberrother Fluorescenz ist.

Es ist uns bisher nicht gelungen, zum Färben geeignete Derivate dieses Körpers darzustellen. Auch von der Elementaranalyse desselben haben wir Abstand genommen, da davon vorläufig wenig Aufschluss zu erwarten war. Die Reaction als solche, die bisher ohne Analogon dasteht, schien uns interessant genug, um sie in aller Kürze mitzutheilen.

Erwähnt sei noch, dass sich beim Schmelzen von Resorcin mit salpetersaurem Harnstoff Diazoresorufin bildet, und dass sich das Orcin sowohl in dieser Reaction, als auch gegen salpetrigsaures Natron dem Resorcin ähnlich verhält.

Zur Bestimmung der Halogene organischer Körper.

(Mit 9 Holzschnitten.)

Von **Carl Zulkowsky** und **Carl Lepéz**.

Seitdem Kopfer in dem Platin einen bequemen Sauerstoffübertrager für die Elementaranalyse gefunden,[1] haben Andere diese werthvolle Eigenschaft des Platins noch weiter auszunützen gesucht. So unter Anderen Weidel und Schmidt für die Bestimmung des Schwefels organischer Körper[2] und einer von uns zur Ermittlung des nutzbaren Schwefels der Lamming'schen Masse und der Kiese.[3] Auf dieselbe Eigenschaft gründet auch Winkler sein Verfahren der Darstellung von Schwefelsäureanhydrid.

Wir stellten uns nunmehr die Frage, ob die Kopfer'sche Art der Verbrennung organischer Körper nicht etwa zur Bestimmung der Halogene verwerthet werden könnte. Diese Idee ist übrigens nicht neu und es hat bereits Kopfer diesbezügliche Versuche angestellt, welche aber von keinem günstigen Erfolge begleitet waren.[4] Trotz dieser wenig einladenden Ergebnisse hofften wir die Kopfer'sche Methode auch diesem Zwecke anpassen zu können.

Einleitende Versuche.

Kopfer benützte für seine Art der Elementaranalyse ein Gemisch von Asbest und Platinschwarz, Winkler empfahl zur Oxydation des Schwefeldioxyds platinirten Asbest und letzterer

---

[1] Zeitschrift für analyt. Chemie. 17. Jahrgang. S. 1.

[2] Berliner Berichte. 1877. S. 1131.

[3] Berichte der öst. Gesellschaft zur Förderung der chem. Industrie. 1881. S. 2.

[4] Zeitschrift für analyt. Chemie. 17. Jahrgang. S. 23.

bewährt sich in der That vortrefflich bei der Bestimmung des Schwefels; trotzdem ist die Anwendung von Asbest im vorliegenden Falle nicht unbedenklich. Es ist die Möglichkeit vorhanden, dass die Halogene von den basischen Bestandtheilen zum Theil zurückgehalten werden. Platinirter Asbest hat ausserdem die unangenehme Eigenschaft, bei längerem Gebrauche in ein Pulver zu zerfallen, dessen Anwendung so manche Schwierigkeit verursacht. Noch schlechter erwies sich mit Salzsäure ausgekochte und platinirte Chamotte, indem dieselbe die Halogene ziemlich stark zurückhält, so dass wir schliesslich zum Quarze greifen mussten. Gekörnter und platinirter Quarz bietet allerdings den Gasen keine so grosse Oberfläche dar als der faserige Asbest, allein er ist trotzdem wirksam genug, um die Verbrennung, bei Einhaltung gewisser Vorsichtsmassregeln, anstandslos durchzuführen.

Darstellung von platinirtem Quarz.

Reinster Quarzit wird ausgeglüht und im glühenden Zustande mit Wasser abgeschreckt, um ihn mürber und poröser zu gestalten. Die Stücke zerschlägt man in einem eisernen Mörser bis zur Grösse eines Hanfkornes, siebt das feine Pulver als auch die grösseren Stückchen ab und zieht das Brauchbare mit Salzsäure aus, um das anhaftende Eisen zu entfernen.

Zum Platiniren nimmt man auf 100 Theile gekörnten Quarz 4—5 Theile reinstes aus Platinsalmiak dargestelltes Platin,[1] löst dasselbe in Königswasser und dampft den Überschuss des letzteren auf dem Wasserbade ab. Der Rückstand wird in so viel Alkohol gelöst, dass diese Lösung eben hinreicht, den gekörnten Quarz zu bedecken. Nachdem der letztere mit der Platinlösung in einer Schale übergossen, wird der Alkohol auf dem Wasserbade verdampft und der Rückstand auf dem Sandbade zur völligen Trockniss gebracht. Hierauf wird derselbe in ein Rohr gefüllt und im Wasserstoffstrome ausgeglüht. Mit käuflichem Platinchlorid oder käuflichem Platin haben wir die schlimmsten Erfahrungen gemacht, weil dieselben stets Kupfer und Eisen enthalten und die Halogene zurückhalten.

---

[1] Der Platinsalmiak wird im Schiffchen in einem Glasrohr für sich erhitzt und erst darnach Wasserstoff darübergeleitet.

Wahrnehmungen bei der Verbrennung halogenhaltiger Kohlenstoffverbindungen vermittelst platinirten Quarzes.

Wenn man eine halogenhaltige organische Substanz in später zu beschreibender Weise im Sauerstoff und unter Zuhilfenahme von gekörntem platinirtem Quarze verbrennt, so lassen sich hierbei verschiedene Wahrnehmungen machen.

a) Ist die Substanz jodhaltig, so entweicht das Jod mit den sonstigen Verbrennungsproducten (Kohlensäure, Wasser) im freien Zustande. Die Abspaltung des Halogens kann möglicherweise mehrere Zwischenstadien durchlaufen, das Endresultat ist aber immer freies Jod, so dass man an der Farbe der auftretenden Dämpfe das Jod erkennt. Es gibt wohl keine einfachere und sicherere Methode, das Jod einer organischen Verbindung qualitativ nachzuweisen, als eben diese.

b) Ist die Substanz bromhaltig, so entweicht das Brom mit den sonstigen Verbrennungsproducten vorwiegend im freien Zustande (95—99%) und der kleine Rest als Bromwasserstoff.

c) Ist die Substanz chlorhaltig, so entweicht das Chlor theils als solches, theils als Chlorwasserstoffsäure. Obwohl das Verhältniss beider nicht ermittelt wurde, so ist es aus theoretischen und sonstigen Gründen sehr wahrscheinlich, dass die Wasserstoffverbindung dieses Halogens sehr schwer verbrennt und daher in grösserer Menge auftreten dürfte.

Wenn das Halogen nur im freien Zustande oder nur als Wasserstoffverbindung auftritt, so ist dessen Bestimmung sehr leicht durchführbar. Man braucht eben nur ein solches Absorptionsmittel vorzuschlagen, welches für die eine oder die andere Form des Halogens geeignet ist. Weit schwieriger gestaltet sich die Sache, wenn das Halogen im freien Zustande und als Wasserstoffverbindung auftritt. In diesem Falle ist man in der Wahl der Absorptionsmittel ausserordentlich beschränkt und es ist fast zu verwundern, dass uns die Auffindung einer hiefür brauchbaren Substanz gelang. Die Schwierigkeit lässt sich begreifen, wenn man bedenkt, dass dieses Absorptionsmittel sowohl das freie als

auch das gebundene Halogen in eine einheitliche Substanz überführen muss, welche eine genaue quantitative Bestimmung desselben leicht zulässt.

Über die Absorptionsmittel zur Bestimmung der Halogene.

Ist die Substanz jodhaltig, so kann zum Auffangen des freien Jods eine Lösung von Jodkalium benützt werden. In diesem Falle gestaltet sich die Bestimmung des Jods ungemein einfach, indem der Gehalt dieser Lösung auf massanalytischem Wege mit thioschwefelsaurem Natron ermittelt werden kann.

Ein zweites, auch für die anderen Halogene verwendbares Absorptionsmittel ist eine mit Ammoniak versetzte Lösung von Wasserstoffhyperoxyd. Letzteres soll möglichst rein, vornehmlich chlorfrei sein und liefert dasselbe die Firma H. Trommsdorff in Erfurt als 3% Lösung, welche im kühlen und dunklen Raume aufbewahrt werden muss, um eine Zersetzung möglichst hintanzuhalten.[1] Eine Untersuchung dieses Präparates ergab einen sehr kleinen, aber doch bestimmbaren Chlorgehalt, so dass man für genaue Bestimmungen denselben in Rechnung bringen muss.

Es ergaben 25 Cc. 0·0032 Grm. Chlorsilber, und wenn man für die Absorption dieses Volum benöthigt, so wird das Gewicht des Chlorsilbers von dem Gewichte der erhaltenen Halogen-Silberverbindung in Abzug gebracht.

Wenn das Wasserstoffhyperoxyd durch längeres Lagern seinen Gehalt merklich eingebüsst hat, was man durch eine einfache Titration nach Aschoff[2] leicht ermitteln kann, so muss für die Absorption eine grössere Menge verwendet werden. Die Reaction, welche das Jod auf das Absorptionsmittel ausübt, vollzieht sich in zwei Phasen, zum Beispiel:

$$J_2 + H_2O_2 = 2HJ + O_2$$
$$2JH + 2NH_3 = 2NH_4J.$$

Das Jod verschwindet augenblicklich unter Auftreten von Sauerstoffbläschen. Man hat nur Sorge zu tragen, dass eine

---

[1] Am 1. Mai enthielt das frische Präparat 3·28% und am 8. Juli waren noch 1·94% Wasserstoffsuperoxyd vorhanden.

[2] Fresenius quant. Analyse. 6. Auflage. S. 584.

genügende, etwa die doppelte oder dreifache Menge von Hyperoxyd in der vorgeschlagenen Flüssigkeit enthalten sei.

Ist die zu untersuchende Substanz brom- oder chlorhaltig, so kann man als Absorptionsmittel nur die mit Ammoniak versetzte Lösung des Wasserstoffhyperoxyds gebrauchen.

Das Brom und Chlor treten wie bekannt im freien Zustande und als Hydrüre auf. Erstere reagiren auf das Hyperoxyd wie das Jod, letztere verbinden sich einfach mit dem Ammoniak. Das Endergebniss besteht in der Bildung von Brom- und Chlorammonium.

Aus allen diesen Flüssigkeiten lässt sich das Halogen auf bekannte Weise mit salpetersaurem Silber herausfällen und dessen Menge bestimmen.

Zur quantitativen Bestimmung sämmtlicher Halogene ist wohl noch ein zweites Absorptionsmittel denkbar, welches wir aber bis jetzt noch nicht versucht haben, weil dasselbe keine so grosse Genauigkeit zulassen dürfte. Dasselbe wäre eine titrirte Lösung von Ätzkali oder Ätznatron. Wendet man eine gemessene und überschüssige Menge solcher Lösungen an, so wirkt das Chlor je nach der Concentration und Temperatur auf zweifache Weise ein:

I.

$$2KOH + 2Cl = KCl + KOCl + H_2O$$

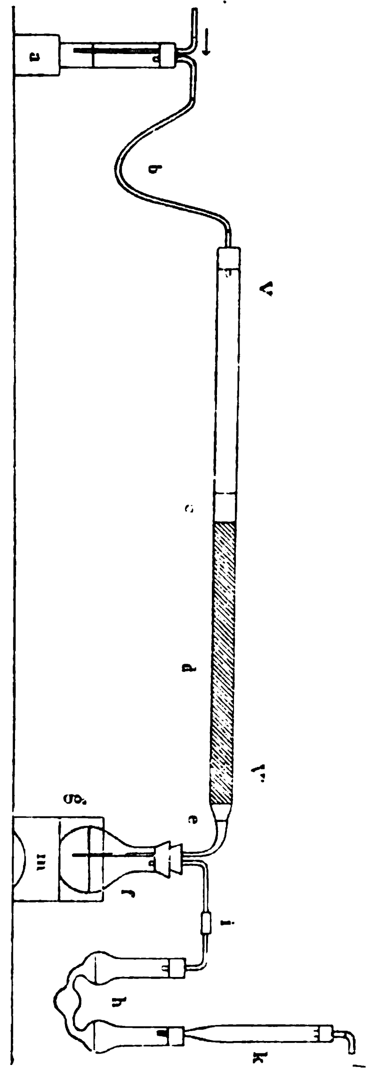
II.

$$6KOH + 6Cl = 5KCl + KClO_3 + 3H_2O$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich, dass ein Atom Chlor in beiden Fällen ein Molekül Ätzkali beansprucht. Wenn man nun den überschüssigen Rest des Ätzkalis alkalimetrisch bestimmt, so lässt sich durch Rechnung sehr leicht die Menge des Chlors bestimmen. Nachdem das Brom und Jod gegen Alkali dasselbe Verhalten zeigen, so liessen sich auch diese Halogene auf gleiche Weise bestimmen. Aber auch für den qualitativen Nachweis des Broms und des Chlors ist die Verbrennungsmethode sehr zu empfehlen, da sich dieselbe für diesen Fall sehr vereinfachen lässt. Man braucht hiefür kein Wasserstoffhyperoxyd, sondern nur eine chlorfreie Lösung von Soda, Pottasche oder selbst nur Wasser vorzuschlagen, um die Natur des Halogens festzustellen.

Beschreibung des Verbrennungs- und Absorptions-apparates.

Nachdem sich die halogenhaltigen Kohlenstoffverbindungen bei der Verbrennung ungleich verhalten, das Jod im freien Zustande, das Brom und Chlor hingegen theils als solche, theils als Hydrüre auftreten, so verwendet man nicht in allen Fällen denselben Verbrennungs- und Absorptionsapparat, obzwar sich der Unterschied bei ersterem nur auf die Dimensionen beschränkt. Ebenso sind verschiedenartige Hilfsvorrichtungen nöthig, je nachdem die Substanz fest oder flüssig, leicht oder schwer flüchtig ist.



Die Einrichtung des gewöhnlichen Apparates ergibt sich aus Fig. 1.

a Indicator mit Wasser gefüllt, welcher mit dem Sauerstoffgasometer in Verbindung steht und die Stärke des Gasstromes anzuzeigen hat.

b Verbindungsschlauch.

VV' Verbrennungsrohr aus schwer schmelzbarem Glase, welches zu einer langen, nach abwärts gebogenen Spitze ausgezogen erscheint. Darin ist:

c Eine Platinblechrolle, um dem gekörnten Platinquarz einen Halt zu geben.

d Platinirter Quarz.

e Ein lockerer Pfropf von langfaserigem Asbest, um das Verstäuben von Platin zu verhüten.

f Ein Kölbchen, etwa 80—100 Cc. fassend.

g Ein kleines Glasschälchen, welches mit kalten Wasser gefüllt wird, um einer Erhitzung und der hiedurch bewirkten Zersetzung des Wasserstoffsuperoxydes vorzubeugen.

h Peligotröhre mit dem Kölbchen durch ein kurzes Kautschuckröhrchen *i* verbunden.

k Rohraufsatz, mit Glaswolle gefüllt und bei *l* mit einem kleinen Glasröhrchen versehen.

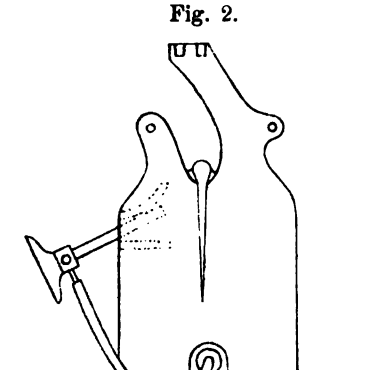
m Ein Steg aus Pappendeckel oder dünnen Brettchen zur Unterstützung.

f, *h* und *k* dienen zur Absorption.

Zum Erhitzen des Verbrennungsrohres wird ein Erlenmeyer'scher (nicht Glaser'scher) Ofen verwendet. Nachdem dasselbe kürzer als der Ofen ist, so muss diejenige Thonrinne, auf welcher das Rohrende *V* aufruht, hinweggenommen werden. Ein kürzerer Ofen wäre jedenfalls zweckmässiger, da dieses Rohrende innerhalb des Ofens schwerer zugänglich ist und deshalb Unbequemlichkeiten in der Handhabung verursacht.

Das Verbrennungsrohr wird in den Ofen so eingesetzt, dass das rechtsseitige Ende mit der abgebogenen Spitze möglichst wenig herausragt, damit der Asbestpfropf ins Glühen kommen kann. Leider reicht bei dem Erlenmeyer'schen Ofen die Brennerreihe nicht so weit, so dass man genöthigt ist, einen separaten Bunsen'schen Brenner seitlich einzuschieben, der sich zwischen den Verbindungsstangen festklemmt und in dieser Lage ohne jedwede Stütze erhält, wie dies aus folgender rechtsseitiger Ansicht hervorgeht. (Fig. 2.) Das Gas für denselben kann dem Gasrohre des Ofens am rechten Ende entnommen werden.

Fig. 2.



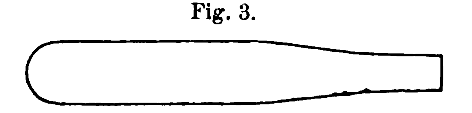
Verfahren bei festen oder flüssigen Körpern, welche schwer flüchtig sind.

Man beginnt die Analyse mit der Füllung des Absorptionsapparates. Zu diesem Zwecke bereitet man sich die zu dem Ver-

suche nöthige Menge der Absorptionsflüssigkeit, indem man 25—30 Cc. Wasserstoffsuperoxyd (von circa 3% Gehalt) mit 5 Cc. concentrirtem Ammoniak vermischt und mit diesem Gemenge sowohl das Kölbchen *f* und die Peligotröhre *h* beschickt, als auch die im Rohraufsatz *k* befindliche Glaswolle tränkt. Enthält das Wasserstoffsuperoxyd bestimmbare Mengen von Chlor, so muss natürlich mit gemessenen Mengen desselben gearbeitet und das Resultat in früher beschriebener Art corrigirt werden. Hierauf wird die Spitze des Verbrennungsrohres mit dem Kölbchen so vereinigt, dass dieselbe in die Flüssigkeit eintaucht. Das Kölbchen wird in die kleine, mit kaltem Wasser gefüllte Glasschale eingesenkt und das Ganze auf den Steg gesetzt. Hat man das Verbrennungsrohr in die richtige Lage gebracht, das heisst so tief als möglich in den Ofen eingesetzt, so wird das Stück *ce* angeheizt und zum hellen Rothglühen gebracht. Während des Anheizens lässt man entweder das Rohrende *V* offen und dann kann man die Peligotröhre gleich von Anfang an mit dem Kölbchen *f* fest verbinden, oder man schliesst *V* und leitet einen langsamen Sauerstoffstrom hindurch; dann muss jedoch die Peligotröhre erst mitverbunden werden, wenn die Substanz bereits in das Rohr eingeführt ist. Es setzt nämlich die Sperrflüssigkeit in *h* und *k* dem Gasstrome einen Widerstand entgegen und dieser bewirkt ein Anwachsen des Druckes in *f*. Da nun beim Einführen der Substanz der Stöpsel bei *V* entfernt werden muss, so würde in diesem Momente durch den Überdruck die Sperrflüssigkeit in das Rohr empor gehoben werden und ein Zerspringen desselben herbeiführen.

Die zu analysirende Substanz wird in einer Menge von $^1/_4$—$^1/_2$ Grm. abgewogen. Ist dieselbe fest und schwer flüchtig, so wird sie in ein Porzellanschiffchen eingewogen. Ist sie flüssig und schwer flüchtig, so wiegt man selbe in einem Glasröhrchen ab, welches beistehend (Fig. 3) in Naturgrösse abgebildet ist und

Fig. 3.



welches man bei der Wägung und dem Transporte mit einem Kautschuckröhrchen mit eingestecktem Glasstabe verschlossen

hält. Auch lässt sich statt dessen ein Röhrchen mit eingeschliffenem Stöpsel verwenden. Selbstverständlich dürfen diese Verschlussvorrichtungen nicht mit der Flüssigkeit in Berührung kommen, weil sie nicht in das Verbrennungsrohr eingeführt werden; ferner muss die Füllung mit Hilfe einer feinen Saugpipette erfolgen. Aus Kügelchen mit capillarer Spitze, wie sie sonst bei der Elementaranalyse von Flüssigkeiten üblich sind, kann kein gleichförmiges und ruhiges Verdampfen erzielt werden; daher sind dieselben hier nicht anwendbar.

Sollte die Substanz fest, aber doch so weit flüchtig sein, dass nach der Abwage bis zur Einführung in das Verbrennungsrohr ein wägbarer Verlust zu erwarten stünde, so benützt man zum Wägen ebenfalls obiges Röhrchen.

Wurde die Substanz in ein Röhrchen eingewogen, so wird dasselbe unmittelbar vor der Einführung in das Verbrennungsrohr geöffnet und auf ein Porzellanschiffchen etwas schräg gestellt. Die Beschickung des Verbrennungsrohres erfolgt immer dann, sobald die Schichte des platinirten Quarzes gehörig glüht. Das bereit gehaltene Schiffchen wird darnach so weit eingeschoben, dass dasselbe 8—10 Ctm. von der Platinblechrolle entfernt ist, das Rohrende *V* sofort geschlossen und falls dies nicht schon früher geschehen, das Peligotrohr sammt Aufsatz mit dem Kölbchen *f* verbunden. Sodann leitet man dem Verbrennungsrohre per Minute circa 25 Cc. Sauerstoff zu und behält diese Geschwindigkeit während der ganzen Verbrennung bei. Sobald bei *l* Sauerstoff austritt, kann zur eigentlichen Verbrennung geschritten werden. Man zündet je nach der Flüchtigkeit der zu analysirenden Substanz in grösserer oder geringerer Entfernung links vom Schiffchen ein kleines Flämmchen an und bedeckt das Rohr an dieser Stelle mit einem Ziegel. Der übrige Theil des Rohres, soweit dasselbe nicht erhitzt wird, bleibt unbedeckt, um dasselbe möglichst kalt zu erhalten. Die Temperatur wird nun durch allmählige Vergrösserung der Flamme so regulirt, dass eine langsame und gleichförmige Verdampfung oder Zersetzung der eingeführten Substanz stattfindet.

In keinem Falle darf die Flüssigkeit oder die geschmolzene Substanz ins Sieden kommen, da sonst der Versuch unbedingt verloren ist, eventuell auch eine Explosion stattfinden kann.[1]

Bei der Regulirung der Temperatur leistet auch das Vertauschen der heisseren Ziegeln, welche den glühenden Theil des Rohres bedecken, gegen die kälteren, die sich über der Substanz befinden, oft gute Dienste. Specielle Regeln lassen sich hier selbstverständlich nicht aufstellen, da Körper von verschiedenem Siedepunkte und verschiedener Zersetzbarkeit ein abweichendes Arbeiten verlangen.

Man hat sich stets gegenwärtig zu halten, dass die Verbrennung nur mit dem zugeleiteten Sauerstoff bewirkt wird, dass somit dieser in jedem Momente überschüssig sein muss.

Tritt einmal der Fall ein, dass mehr flüchtige Producte entwickelt werden, als der zuströmende Sauerstoff zu verbrennen vermag, so ist das Überdestilliren unverbrannter Substanz unausweichlich. Den Eintritt der Destillation erkennt man sofort an dem rechten Rohrende, welches sich mit den Destillationsproducten beschlägt; auch nehmen die Austrittsgase einen eigenthümlichen brenzlichen Geruch an, der trotz der Gegenwart des Ammoniaks erkennbar ist.

Der Beginn der Verbrennung ist bei jodhaltigen Substanzen durch die violette Färbung der Austrittsproducte, bei brom- und chlorhaltigen Körpern durch das Auftreten von Nebeln oberhalb der Absorptionsflüssigkeit charakterisirt. Bei Jodverbindungen macht sich die Nebelbildung nur sehr schwach bemerkbar. Zum Zurückhalten dieser Nebel dient die Glaswolle, ohne welche diese Verbrennungsmethode überhaupt gar nicht durchführbar wäre. Die Austrittsgase, welche dieselbe passiren, dürfen natürlich nicht die geringste Spur eines Nebels zeigen.

Obwohl diese Nebel die Verdichtung erschweren, so sind sie anderseits eine willkommene Erscheinung, weil sie den Beginn und das Ende der Verbrennung anzeigen. Deshalb wählten wir Ammoniak und kein Ätzkali, auch wenn selbes leicht chlorfrei zu beschaffen wäre.

---

[1] Dieser Gefahr kann übrigens dadurch vorgebeugt werden, dass man den sonst leeren Raum zwischen Schiffchen und Platinrolle mit gekörntem Quarz anfüllt.

Die Verkohlung, Verdampfung oder Verbrennung der Substanz kann in den meisten Fällen mit einer einzigen Flamme zu Ende geführt werden; selten wird noch eine zweite, dem Schiffchen nähere Flamme nothwendig sein.

Ist alle Substanz verbrannt, so bringt man auch den, bisher nicht erhitzten Theil des Rohres zum Glühen und wartet so lange, bis die in das Kölbchen *f* eintretenden Gasblasen keine Nebelbildung mehr bewirken. Dieser Punkt ist, von dem Momente an gerechnet, wo das ganze Rohr glüht, bei Jodverbindungen in circa 10 Minuten, bei Bromverbindungen in circa 15 Minuten erreicht. Bei chlorhaltigen Substanzen macht sich ein grosser Unterschied bemerkbar, weil die, wenn auch schwache Nebelbildung noch nach $^1/_2$—1 Stunde wahrnehmbar ist. Das Platin scheint nach Allem das Chlor oder die Chlorwasserstoffsäure mit grosser Kraft zurückzuhalten; man muss sich also begnügen, als Ende der Operation jenen Zeitpunkt anzusehen, bei welchem die Nebelbildung auf ein gewisses Minimum gesunken ist.

Verfahren bei leichtflüchtigen Flüssigkeiten.

Dieselben lassen sich nicht direct in das Rohr einführen, weil trotz aller Gegenmassregeln eine stärkere Verdampfung stattfindet, als der Sauerstoffzufuhr entspricht. Nach mehrfachen missglückten Versuchen wählten die Verfasser das nachfolgend beschriebene Verfahren, welches auch in diesem Falle ein vollkommen sicheres Arbeiten gestattet.

Das Princip desselben besteht darin, dass ausserhalb des Verbrennungsrohres über die zu analysirende Flüssigkeit ein regulirbarer, langsamer Sauerstoffstrom geleitet wird. Der mit Flüssigkeitsdampf beladene Sauerstoff tritt mit einem stärkeren und überschüssigen Sauerstoffstrom gleichzeitig in das Rohr zur Verbrennung ein.

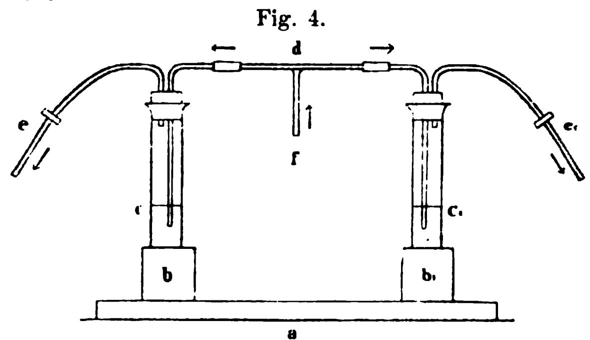
Hiezu sind folgende Geräthe erforderlich:

A. Vorrichtung zur Zweitheilung des Sauerstoffstromes (Fig. 4).

Der Sauerstoff des Gasometers tritt vermittelst eines Schlauches bei *f* in das Gabelrohr ein, theilt sich in demselben in zwei Ströme, von welchen einer durch c, der zweite durch c_1 geführt wird. Der Austritt erfolgt bei e und e_1, und zwar in ver-

schiedener Stärke, je nachdem man den einen oder den andern Zweigstrom stärker drosselt. Dadurch lässt sich die Verdampfungsgeschwindigkeit der zu analysirenden Flüssigkeit vollkommen beherrschen.

Fig. 4.



a Holzbrettchen.

bb' Ausgehöhlte Korkstöpsel, welche als Träger dienen.

c Eprouvette mit Wasser gefüllt und als Indicator dienend.

c_1 Eprouvette zu gleichem Zwecke, mit Schwefelsäure gefüllt; ist für denjenigen Sauerstoffstrom bestimmt, welcher über die Substanz geleitet wird. Die Schwefelsäure trocknet denselben und verhütet einen Beschlag von Feuchtigkeit in dem Flüssigkeitsbehälter.

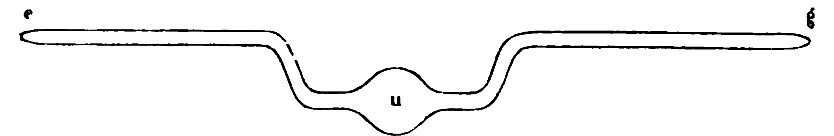
d Gabelrohr für die Zweitheilung des Sauerstoffstromes.

ee' Kautschuckröhrchen mit Schraubenquetschern, welche mit dem Stöpsel des Verbrennungsrohres communiciren.

B. Kugelröhrchen zum Abwägen der Substanz in beistehend gezeichneter Form und halber Grösse (Fig. 5). Dasselbe wird aus einem Glasröhrchen von passender Stärke durch Aufblasen des mittleren Theiles *n* und nachheriges Biegen und Ausziehen hergestellt.



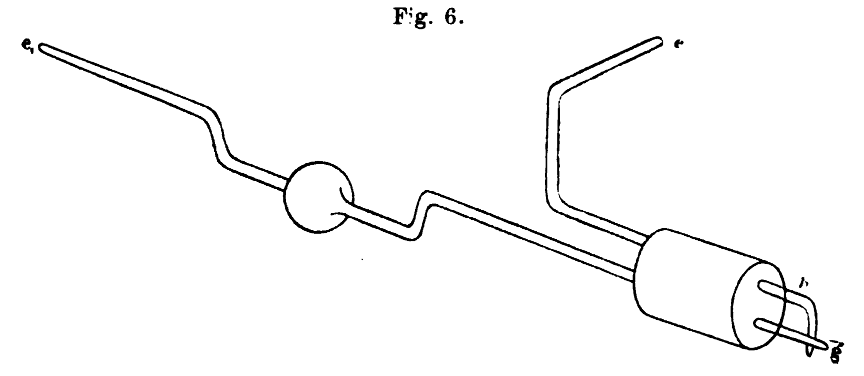
Fig. 5.



Man bestimmt die Tara des Kugelröhrchens, saugt mit Hilfe eines Schlauches eine passende Menge der fraglichen Flüssigkeit ein und trocknet den in dieselbe eingetauchten Theil durch gelindes Erwärmen über einer heissen Platte. Die beiden Endspitzen werden zugeschmolzen, das gefüllte Kugelrohr gewogen und hieraus ergibt sich das Gewicht der eingeführten Flüssigkeit.

Die Zweitheilung des Sauerstoffstromes erfordert, dass der Stöpsel des Verbrennungsrohres mit zwei Bohrungen versehen ist. In die eine kommt das Kugelrohr, dessen Spitzen vorher mit einem Diamant geritzt wurden, in die zweite ein dickwandiges Röhrchen, dessen Ende *h* (Fig. 6) so weit abgebogen wird, dass beim Drehen desselben in der Bohrung die Spitze *g* erfasst werden kann, ohne die Wand des Verbrennungsrohres zu streifen. Zur

Fig. 6.



Vornahme der Verbrennung werden die Absorptionsapparate in schon beschriebener Weise gefüllt und vorgelegt. Das Verbrennungsrohr wird mit dem ausgerüsteten Stöpsel geschlossen und die beiden Röhrchen *eh* und $e_1 g$ mit dem Apparate zur Zweitheilung des Sauerstoffstromes verbunden. Man leitet anfänglich nur durch *eh* einen langsamen Sauerstoffstrom zu. Die Quarzschichte wird hierauf angeheizt und sobald der Absorptionsapparat mit Sauerstoff gefüllt ist, kann die Verbrennung beginnen. Man verstärkt zunächst den Sauerstoffstrom auf das übliche Mass, dreht das Zuführungsrohr *eh* so weit, dass die Spitze *g* abbricht, worauf man dasselbe wieder in seine frühere Lage bringt. Ebenso wird die zweite Spitze des Kugelrohres e_1, welche im Kautschukschlauche steckt, abgebrochen. Der Quetschhahn dieses Schlauches wird nun vorsichtig so weit gelüftet, dass ein sehr langsamer Sauerstoffstrom die Kugelröhre passirt und in dem zugehörigen Indicator eine Blase in etwa 2—3 Secunden auftritt. Nunmehr ist die Verbrennung in Gang gesetzt, welche weiter keine besondere Aufmerksamkeit erfordert. Ist die Substanz in dem Kugelrohr bis auf einen kleinen Rest verdampft, so kann selbstverständlich der dasselbe passirende Sauerstoffstrom verstärkt

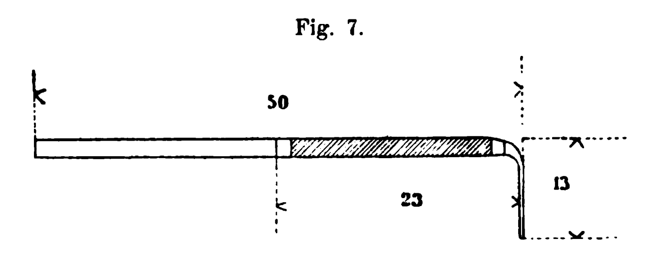
werden. Ist jeder Rest von Flüssigkcit verschwunden, so lässt man die Hauptmenge des Sauerstoffes in die Kugelröhre eintreten, während man den andern Zweigstrom reducirt. Nunmehr wird das ganze Verbrennungsrohr angeheizt und die Verbrennung wie sonst zu Ende geführt.

Nach diesem Verfahren wurden folgende Substanzen analysirt: Jodmethyl, Jodäthyl und Bromäthyl. (S. Beleganalysen.)

Specielles Verfahren bei der Analyse von Jodverbindungen.

Die Jodverbindungen lassen sich sehr leicht verbrennen, bedürfen nicht viel von platinirtem Quarz, also nur ein kleineres Verbrennungsrohr. Die erforderlichen Dimensionen in Centimetern sind aus folgender Zeichnung zu entnehmen. (Fig. 7.)

Fig. 7.



Nach Beendigung der Verbrennung verlangsamt man den Gasstrom und lässt das Rohr etwas erkalten, bevor man zur Entleerung der Vorlagen schreitet. Ein Theil des Jods setzt sich in der nach abwärts gebogenen Spitze in Form kleiner Krystalle an. Um diese herabzuspülen und rasch in Lösung zu bringen, bläst man mit Hilfe eines bei *l* (s. Fig. 1) angesetzten Kautschukröhrchens vorsichtig Luft ein, so dass die Superoxydlösung in die Spitze emporsteigt. Sobald man zu blasen aufgehört, sinkt die Flüssigkeit rasch wieder zurück und reisst gleichzeitig die lockerer haftenden Jodtheilchen mit sich. Diese lösen sich nun leicht unter lebhafter Sauerstoff-Entwicklung auf. Das Ausspülen wird so lange wiederholt, bis alles Jod entfernt und in Lösung überführt ist. Sollte der Fall eintreten, dass nicht genug Superoxyd vorhanden wäre, um sämmtliches Jod zu lösen, so wird die Peligotröhre abgelöst, der Stopfen des Kolbens gelüftet, etwas Superoxyd zugesetzt und direct in denselben Luft bei *i* mittelst

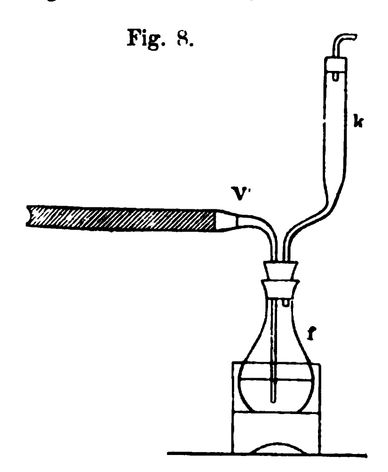
eines Schlauches eingeblasen. Die Genauigkeit des Resultats wird bei ungenügender Menge von Superoxyd nicht beeinträchtigt, weil durch Einwirkung von Jod auf das jedenfalls überschüssige Ammoniak kein Jodat gebildet wird, sondern Jodstickstoff, eventuell Jodamin entsteht, welche bei weiterem Zusatze von Superoxyd Jodammonium liefern.

Ist das Ausspülen der Rohrspitze beendet, so wird der Absorptionsapparat von dem Verbrennungsrohre entfernt und erst jetzt der langsame Sauerstoffstrom unterbrochen, weil sonst leicht ein Zurücksteigen der Flüssigkeit eintreten könnte. Der Absorptionsapparat wird demontirt, die Flüssigkeit zusammengespült und die Spitze des Verbrennungsrohres aus- und inwendig gereinigt. Die vereinigten Absorptions- und Waschflüssigkeiten werden in einer Schale auf dem Wasserbade erhitzt, um das Ammoniak und Ammoncarbonat möglichst zu verjagen und das Ganze auf ein kleineres Volum zu bringen. Alsdann setzt man Silbernitrat und zuletzt Salpetersäure, zu um das Jod zu fällen. Die Beschreibung der weiteren Operationen ist für den Analytiker überflüssig.

Nachdem das Jod bei der Verbrennung quantitativ als solches erhalten wird, so lässt sich die Jodbestimmung dadurch wesentlich vereinfachen, dass man statt des Superoxydes und Ammoniaks Jodkalium vorschlägt und das aufgenommene Jod massanalytisch bestimmt.

Der hiefür erforderliche Absorptionsapparat (Fig. 8) erhält folgende Einrichtung:

Fig. 8.



V' Ende des Verbrennungsrohres.
f Kölbchen in früherer Grösse mit 20—25 Cc. einer 20procentigen Jodkaliumlösung gefüllt.
k Rohraufsatz mit Glaswolle beschickt, die mit derselben Jodkaliumlösung befeuchtet wird.

Das rechtsseitige Abbiegen des Rohres *k* hat den Zweck, dasselbe der Ofenhitze möglichst zu entziehen. Statt dessen könnte man auch zwischen Ofen und Rohr einen Schirm aus Pappe einschalten.

Ist die Verbrennung beendet, so wird zum Lösen der in der Rohrspitze befindlichen Jodkrystalle bei langsamem Sauerstoffstrome ebenfalls Luft eingeblasen. Die braune Jodlösung sammt Waschflüssigkeit wird dann mit $^1/_{10}$ thioschwefelsaurem Natron in bekannter Art titrirt. Im Nachstehenden sind die Ergebnisse der Beleganalysen verzeichnet, wobei bemerkt werden muss, dass es oft sehr schwierig war, geeignete Substanzen in absolut reinem Zustande zu erhalten. In solchen Fällen wurde der Jodgehalt nicht durch Rechnung, sondern durch die bisher anerkannt beste Methode von Carius ermittelt. Die aus der Theorie oder nach Carius gefundenen Zahlen stimmen mit den durch Verbrennung gefundenen auf das Beste überein, wie dies aus nachfolgender Tabelle hervorgeht.

Einwage in Grammen	Jodgehalt				Durch Verbrennung gefunden			
	Theoretisch		nach Carius		Gewichts-analytisch		Mass-analytisch	
	gr.	%	gr.	%	gr.	%	gr.	%
Jodoform rein, CHJ_3								
0·5556	0·5373	96·70	—	—	0·5375	96·74	—	—
0·5542	0·5359	96·70	—	—	0·5361	96·72	—	—
0·3254	0·3147	96·70	—	—	—	—	0·3152	96·86
Jodoform käuflich								
0·3292	—	—	0·3156	95·88	—	—	—	—
0 3954	—	—	—	—	0·3795	95·98	—	—
0·3268	—	—	—	—	0·3136	95·96	—	—
Jodmethyl rein, CH_3J.								
0·5060	0·4525	89·43	—	—	0·4523	89·39	—	—
0·4806	0·4298	89·43	—	—	—	—	0·4305	89·58
Jodäthyl käuflich								
0·5034	—	—	0·4069	80·81	—	—	—	—
0·2208	—	—	—	—	0·1783	80·75	—	—
0·3168	—	—	—	—	0·2557	80·70	—	—
Jodamyl rein, $C_5H_{11}J$.								
0·3346	0·2145	64·11	—	—	0·2147	64·17	—	—
0 3478	0·2230	64·11	—	—	—	—	0·2232	64·16
Trijodphenol rein, $C_6H_3J_3O$.								
0·4174	0·3368	80·70	0·3356	80·41	—	—	=	—
0·4750	0·3833	80·70	—	—	0·3825	80·53	—	..
0·3960	0·3196	80·70	—	—	—	—	0·3190	80·55

Specielles Verfahren bei Bromverbindungen.

Die Bromverbindungen verbrennen auch ziemlich leicht, desshalb benützt man ein Verbrennungsrohr von gleichen Dimensionen und gleicher Füllung wie beim Jod. Als Absorbtionsflüssigkeit ist nur eine Mischung von Wasserstoffsuperoxyd und

Ammoniak anwendbar, welche in derselben Menge wie beim Jod verwendet werden.

Einwage in Grammen	Bromgehalt				Durch Verbrennung gefunden	
	Theoretisch		nach Carius			
	gr.	%	gr.	%	gr.	%
Bromoform rein, $CHBr_3$.						
0·4870	0·4620	94·86	0.4619	94·85	—	—
0·4860	0·4610	94.86	0.4607	94·80	—	—
0·4026	0·3819	94·86	—	—	0·3807	94·57
0·3062	0·2905	94.86	—	—	0·2893	94·50
Bromäthyl käuflich						
0·3664	—	—	0·2676	73·04	—	—
0·3410	—	—	—	—	0·2479	72·70
0·4450	—	—	—	—	0·3226	72·50
Brombenzol rein, C_6H_5Br.						
0·2956	0·1506	50·94	—	—	0.1502	50·81
0·3394	0·1729	50·94	—	—	0·1729	50·95
Dibrombenzol rein, $C_6H_4Br_2$.						
0·3688	0·2500	67·78	—	—	0·2503	67·86
0·3100	0·2101	—	—	—	0·2103	67·83
Tribromphenol rein? $C_6H_3Br_3O$.						
0·2748	0·1992	72·50	0·1988	72·34	—	—
0·3800	0·2755	72·50	—	—	0·2738	72·04
0·3772	0·2735	72·50	—	—	0·2716	72·02
Bromwasserstoffsaures Tetrabrommethylaurin, rein, $(C_{20}H_{12}Br_4O_{31}HBr)$ + aq						
0·2012	0·1119	55·62	—	—	0·1118	55·58
0·3042	0·1692	55·62	—	—	0·1694	55·69

Wenn die Substanz bromreich ist, so lässt sich das Brom an der Farbe der Verbrennungsproducte erkennen.

Wenn das Wasserstoffsuperoxyd in unzureichender Menge angewendet wird, so bildet sich wahrscheinlich etwas Bromat und dieses wird durch späteren Zusatz von Hyperoxyd nicht reducirt; es ist also eine Reparatur wie bei Jod nicht möglich.

Die vereinigten Absorptions- und Waschflüssigkeiten werden wie beim Jod concentrirt und das Brom in gleicher Weise gefällt.

Aus den angeführten Beleganalysen ist zu ersehen, dass die Verbrennungsmethode auch hier gute Resultate gibt.

Specielles Verfahren bei Chlorverbindungen.

Die Verbrennung von Jod- und Bromverbindungen geht bei erlangter Übung sehr gut von Statten und beansprucht nach der Natur der Substanz $^1/_2$ bis 2 Stunden in den weitesten Grenzen. Weit schwieriger gestaltet sich die Sache bei Chlorverbindungen, welche im Allgemeinen schwerer verbrennen und ausserdem wird das Chlor oder die Salzsäure von dem Platin hartnäckig zurückgehalten, so dass die Verdrängung dieser Gase durch den Sauerstoff viel Zeit beansprucht und doch nicht bis auf Null beendet werden kann.

Kopfer konnte Paradichlorbenzol nur unter Mitanwendung von Silber verbrennen, um auf diese Art die Menge des Kohlenstoffes und des Wasserstoffes zu bestimmen.[1] Will man eine totale Verbrennung ohne Silber zuwege bringen, so muss man eine grössere Menge von platinirtem Quarz, eine merklich höhere Temperatur und somit auch ein längeres und weiteres Verbrennungsrohr anwenden.

Die Dimensionen desselben in Centimetern sind aus folgender Zeichnung (Fig. 9) zu entnehmen.

Fig. 9.

67

36

13

Die Weite des Glasrohres hat etwa 16 Mm. zu betragen; dies hat zur Folge, dass die flüchtigen Producte verhältnissmässig

[1] Zeitschrift für analyt. Chemie, 17. Jahrg. S. 23.

längere Zeit einer höheren Temperatur ausgesetzt bleiben. Als Absorptionsflüssigkeit verwendet man Wasserstoffsuperoxyd und Ammoniak in Mengen wie bei Jod und Brom. Ist Ersteres nicht ausreichend, so bildet sich etwas Chlorat, welches durch nachträglichen Zusatz von Hyperoxyd nicht reducirt wird; daher auch hier eine Reparatur ausgeschlossen ist.

Ist die Verbrennung beendet, so muss man, wie schon früher bemerkt wurde, noch so lange Sauerstoff hindurchleiten, bis die Gasblasen, welche aus der Flüssigkeit emporsteigen, nur eine sehr schwache Nebelbildung verursachen. Dies dauert circa eine Stunde, somit erfordert die Verbrennung hier einen Zeitaufwand von 2 bis 3 Stunden. Salzsaure organische Verbindungen ergeben keine solchen Schwierigkeiten. Salzsaures Methylaurin z. B. verbrannte leicht und die Nebelbildung schwand gänzlich bei einhalbstündigem Durchleiten von Sauerstoff nach beendeter Verbrennung.

In nachstehender Tabelle sind die mit Chlorverbindungen erzielten Resultate verzeichnet:

Einwage in Grammen	Chlorgehalt				Durch Verbrennung gefunden	
	Theoretisch		nach Carius			
	gr.	%	gr.	%	gr.	%
Monochlorbenzol käuflich						
0·2144	—	—	0·0668	31·15	—	—
0·3362	—	—	—	—	0·0988	30·92
Dichlorbenzol rein, $C_6H_4Cl_2$.						
0·2954	0·1426	48·27	0·1425	48·24	—	—
0·2934	0·1416	48·27	—	—	0·1409	48·01
0·2758	0.1331	48·27	—	—	0·1326	48·06
Salzsäurehältiges Methylaurin, rein,[1] ($C_{23}H_{24}ClO_4$).						
0·7928	0·0721	9·10	—	—	0·0728	9·18

[1] Dieses Präparat wird erhalten, indem man eine weingeistige Lösung von Methylaurin mit Salzsäure versetzt und krystallisiren lässt. Die Formel ist durch Elementaranalyse festgestellt, die Constitution jedoch unbekannt.

Einige Erfahrungen über die Kalkmethode zur Bestimmung der Halogene.

Es haben gewiss schon viele Analytiker die unangenehme Erfahrung gemacht, dass es sehr schwer ist, einen chlor- und schwefelfreien Kalk zu beschaffen. Statt Kalk kann man jedoch Magnesia anstandslos verwenden.

Die sogenannte Magnesia usta enthält gewöhnlich gar kein Chlor oder höchstens unbestimmbare Spuren desselben. Sollte aber der Chlorgehalt bestimmbar sein, so kann man denselben durch Waschen mit kochendem Wasser entziehen. Diese Arbeit wird am besten in der Weise durchgeführt, dass man die Magnesia 1 bis 2 Mal mit Wasser auskocht, die Flüssigkeit abgiesst und den Rückstand auf einem Filter ausbreitet und mit kochendem Wasser so lange wäscht, bis sich derselbe chlorfrei erweist.

Die (eventuell gereinigte) Magnesia muss längere Zeit in Platingefässen geglüht werden, um das Wasser und die Kohlensäure zu entfernen. Da sie viel leichter ist als der Kalk, so braucht' man für eine Verbrennung weniger. Die Kalk- oder Magnesiamethode hat die Unannehmlichkeit, dass die organische Substanz Kohle zurücklässt, welche abfiltrirt und sehr gut gewaschen werden muss; ferner dass bei geringerer Hitze eine unvollständige Verkohlung, also eine Braunfärbung der Lösung eintritt. Es wäre sehr leicht möglich, diesem Übelstande dadurch zu begegnen, wenn man am Schlusse Sauerstoff durchleiten würde; nur müsste dem Rohre eine hiefür passende Gestalt gegeben werden. Die Anwendung des Sauerstoffes hätte ausserdem noch den Vortheil, dass etwa gebildetes Cyan zerstört wird. Bedenklich dagegen wäre die Verwendung desselben bei der Analyse jodhaltiger Substanzen, da die Möglichkeit einer Bildung von Jodat nicht ausgeschlossen erscheint.

Über die Anwendbarkeit der Verbrennungsmethode zur Bestimmung des Schwefels organischer Körper.

Es ist selbstverständlich, dass sich die früher geschilderte Methode mit allen ihren Apparaten eben so gut zur Schwefelbestimmung eignet. Als Absorptionsflüssigkeit hat man eine

Mischung von Wasserstoffsuperoxyd und Ammoniak oder bromirte Kalilauge zu benützen. Das Trommsdorff'sche Hyperoxyd enthält bestimmbare Spuren von Schwefelsäure, man muss also mit gemessenen Mengen arbeiten. Die zweite Absorptionsflüssigkeit bereitet man auf folgende Art:

Es werden 100 Grm. mit Alkohol gereinigtes, d. h. schwefelfreies Ätzkali in Wasser gelöst und 100 Grm. Brom unter Abkühlung eintropfen gelassen. Die wirksamen Bestandtheile sind unterbromigsaures Kali und überschüssiges Ätzkali. Ersteres oxydirt das Schwefeldioxyd und letzteres bindet die Schwefelsäure, das Schwefeltrioxyd und die Kohlensäure. Diese Flüssigkeit wird auf 1 Liter verdünnt und für je 0·1 Grm. Schwefel 6 Cc. hievon angewendet. Diese Menge gewährt eine vierfache Sicherheit. Das auftretende Schwefeltrioxyd ist merkwürdigerweise schwer verdichtbar und es muss derselbe Absorptionsapparat wie in Fig. 1 verwendet werden, um es völlig zurückzuhalten. Die auftretende Schwefelsäure verdichtet sich in der abgebogenen Spitze in öligen Tropfen und muss von Zeit zu Zeit von den oberen Lagen weggeheizt werden. Zu diesem Zwecke bestreicht man diese Stellen mit der Flamme eines Brenners.

Wenn die öligen Tropfen nicht mehr auftreten und die Nebelbildung völlig verschwunden ist, so ist der Versuch beendet.

Preis des ganzen Heftes 2 fl. 80 kr. = 5 RMk. 60 Pfg.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden **drei** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften" herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XC. BAND. III. HEFT.

Jahrgang 1884. — October.

(Mit 5 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1885.

INHALT

des 3. Heftes October 1884 des XC. Bandes, II. Abtheilung der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 25 kr. = 2 RMk. 50 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XC. Band. III. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.



XX. SITZUNG VOM 9. OCTOBER 1884.

Der Vicepräsident der Akademie Herr Hofrath Ritter v. Brücke führt den Vorsitz und begrüsst die Mitglieder der Classe bei ihrem Wiederzusammentritte.

Der Vorsitzende gedenkt des Verlustes, welchen die Akademie und speciell diese Classe durch den am 22. September l. J. erfolgten Tod ihres wirklichen Mitgliedes Herrn Dr. Leopold Josef Fitzinger in Hietzing (bei Wien) erlitten hat.

Die Versammlung gibt ihr Beileid hierüber durch Erheben von den Sitzen kund.

Die officielle Nachricht über das am 18. Juli d. J. erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn Hofrathes und Intendanten des k. k. naturhistorischen Hofmuseums Dr. Ferdinand Ritter v. Hochstetter wurde bereits in der Gesammtsitzung der kaiserlichen Akademie vom 18. Juli zur Kenntniss genommen und der Theilnahme an diesem Verluste Ausdruck gegeben.

Se. Excellenz Herr Johann Graf Wilczek dankt für die Erwählung zum Ehrenmitgliede der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

Ferner sind folgende, die diesjährigen Mitgliederwahlen betreffende Dankschreiben eingelangt:

Von den Herren Professoren Dr. Albrecht Schrauf in Wien und Dr. Leopold Gegenbauer in Innsbruck für ihre Wahl zu inländischen correspondirenden Mitgliedern;

von den Herren Professoren Sir William Thomson in Glasgow und Charles Hermite in Paris für ihre Wahl zu ausländischen Ehrenmitgliedern; und

von dem Herrn geheimen Hofrath Prof. Dr. Rudolph Leuckert in Leipzig für seine Wahl zum ausländischen correspondirenden Mitgliede der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe.

Das k. und k. Reichs-Kriegsministerium übermittelt ein Exemplar der von dem Organ der militär-wissenschaftlichen Vereine herausgegebenen Publication: „Erster Jahresbericht über die k. k. Militär-Erziehungs- und Bildungsanstalten, dann über die Officierstöchter-Erziehungs-Institute.“

Die Direction des k. k. militär-geographischen Institutes übermittelt die 27. Lieferung (26 Blätter) der neuen Specialkarte der österr.-ung. Monarchie (1: 75·000).

Das c. M. Herr Prof. R. Maly in Graz übermittelt den von ihm herausgegebenen „Jahresbericht über die Fortschritte der Thier-Chemie oder der physiologischen und pathologischen Chemie.“ XIII. Band. Über das Jahr 1883.

Ferner legt der Secretär folgende Werke vor:

1. „Darstellende und projective Geometrie nach dem gegenwärtigen Stande dieser Wissenschaft, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse höherer Lehranstalten und das Selbststudium.“ III. Band (mit einem Atlas von 42 Tafeln), von Regierungsrath Prof. Dr. G. Ad. V. Peschka in Brünn.
2. Simon Stevin: „Vande Spiegeling der Singkonst“ et „Vande Molens“. Deux traités inédits und Albert Girard: „Invention nouvelle en l'Algebre“, herausgegeben von Herrn Dr. D. Bierens de Haan in Leiden.

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr übersendet eine ihm von Herrn Prof. Moriz Cantor in Heidelberg mitgetheilte Notiz: „Über den sogenannten Seqt der ägyptischen Mathematiker.“

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. L. Boltzmann in Graz übersendet im Nachtrage zu seiner am 17. Juli d. J. vorgelegten Abhandlung: „Über die Eigenschaften monocyclischer und anderer damit verwandter Systeme“ eine vorläufige Mittheilung.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine dritte Fortsetzung seiner in den Sitzungsberichten publicirten Abhandlung: „Zahlentheoretische Studien.“

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Die anatomischen Processe der *Tabes dorsualis*" von Herrn Prof. Dr. A. Adamkiewicz an der Universität in Krakau.
2. „Die doppelte Brechung des Lichtes in Flüssigkeiten," von Herrn Prof. Dr. E. v. Fleischl an der Universität in Wien.
3. „Über trefotropische (nährsalzsuchende) Nutationen der Keimwurzeln," vorläufige Mittheilung von Herrn Prof. Ant. Tomaschek an der technischen Hochschule in Brünn.
4. „Bestimmung des Schwerpunktes von Curven, Flächen und Körpern im Raume und dessen Darstellung in den Projectionsebenen," von Herrn Franz Zrzavý, Obertrigonometer in Wien.

Ferner legt der Secretär folgende versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor:

1. Von Herrn Prof. Dr. Th. Maryniak an der technischen Hochschule in Lemberg. Dasselbe trägt die Aufschrift: „Bestimmung des Widerstandscoëfficienten bei den Propellerschrauben."
2. Von Herrn Prof. N. Fialkowski an der Communal-Realschule im VI. Bezirke Wien's, mit der Aufschrift: „Erste allgemeine Construction und Gleichung der Curven vierter Ordnung, aus welchen sämmtliche vier Kegelschnittlinien als specielle Fälle hervorgehen."

Das w. M. Herr Director E. Weiss erstattet Bericht über zwei Kometenentdeckungen, wovon die erste am 16. Juli d. J. von Barnard in Nashville (Tenn.), die zweite am 17. September l. J. von Wolf in Heidelberg gemacht wurde. Die Elemente und Ephemeride beider Kometen sind an der Wiener Sternwarte, und zwar die des ersteren von Herrn Director Weiss und jene des letzteren von Herrn Dr. C. Zelbr berechnet und durch die Akademie in den Kometen-Circularen Nr. LI und LII publicirt worden.

Der Vice-Präsident der Akademie Herr Hofrath Prof. Dr. E. Ritter v. Brücke überreicht eine von Herrn Dr. Benedetto Morpurgo im Wiener physiologischen Institute durchgeführte Untersuchung: „Über die Entwicklung der Arterienwand.“

Ferner überreicht Herr Hofrath v. Brücke seine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung unter dem Titel: „Über die Wahrnehmung der Geräusche.“

Herr Prof. Dr. E. Lippmann überreicht eine Abhandlung: „Über eine Methode zur Einführung von Sauerstoff in organische Verbindungen“. I. Einwirkung von Benzolhyperoxyd auf Amylen.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 48e année, 2e série, tome XIII. Nrs. 29—39. Paris, 1884; 8°.

Accademia regia di scienze, lettere ed arti in Modena: Memorie. Ser. II. Vol. II. In Modena, 1884; 4°.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch deutsche, der Naturforscher: Leopoldina. Heft XX. Nr. 13—14 u. 15—16. Halle a. S., 1884; 4°.

Annales des Mines. 8e série. Tome IV. 6e livraison de 1883. Paris, 1883; 8°. — 8e série. Tome V. 1re livraison de 1884. Paris, 1884; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österreichischer: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XXII. Jahrgang, Nr. 21—24, 26—28. Wien, 1884; 8°.

Archiv für Mathematik und Physik: II. Reihe, I. Theil 2. Heft. Leipzig, 1884; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3e période, tome XI. Nos. 6 et 7. Genève, Lausanne, Paris, 1884; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCIX. Nrs. 1—12. Paris, 1884; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVII. Jahrgang, Nr. 11—13. Berlin, 1884; 8°.

— deutsche geologische: Zeitschrift. XVI. Bd. 1. Heft. Berlin, 1884; 8°.

Gesellschaft, k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXVII, Nr. 6. Wien, 1884; 8°.

— königliche der Wissenschaften zu Göttingen: Abhandlungen. XXX. Band vom Jahre 1883. Göttingen, 1883; 4°.

— — Göttingische gelehrte Anzeigen. 1883 I. u. II. Band, Göttingen, 1883; 4°.

— österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XIX. Band, August- und September-Heft 1884. Wien, 1884; 8°.

Gewerbe-Verein, nied.-österr.: Wochenschrift. XLV. Jahrgang. Nr. 29—40. Wien, 1884; 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österreichischer: Wochenschrift. IX. Jahrgang. Nr. 29—40. Wien, 1884; 4°.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Jahrgang 1884. 7.—9. Heft. Wien, 1884; 8°.

— — Militär-statistisches Jahrbuch für das Jahr 1878, I. Theil und für das Jahr 1879, II. Theil. Wien, 1884; 4°.

Mittheilungen aus Justus Perthes geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann. XXX. Band, 1884. VII, VIII. & IX und Ergänzungsheft Nr. 75. Gotha; 4°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 28e année, 3e série tome XIV. 512e—513e & 514e livraisons. Paris, 1884; 8°.

Muséum d'Histoire naturelle: Nouvelles Archives. 2e série. Tome VI. Paris, 1884; 4°.

Nature. Vol. XXX. Nr. 768—779. London, 1884; 8°.

Observatoire royal de Bruxelles: Annales. Nouvelle série. Annales astronomiques. Tome IV. Bruxelles 1883; 4°. — Vade-mecum de l'Astronomie par J. C. Houzeau. Bruxelles, 1882; 8°.

— — Annuaire. 49e, 50e et 51e années. Bruxelles, 1881—1883; 12°.

— — Diagrammes du météorographe van Rysselberghe. Années 1879—1882. Bruxelles, 1883; Folio.

— — Observations météorologiques faites aux stations internationales de la Belgique et de Pays-Bas. IVe année 1880. Bruxelles, 1884; 4°.

Observatoire royal de Bruxelles: Bibliothèque générale de l'Astronomie ou Catalogue méthodique des Ouvrages, des Mémoires et des Observations astronomiques depuis l'origine de l'imprimerie jusqu'en 1880. Tome II. Bruxelles, 1882; 8°.

— — Exposition critique de la Méthode de Wronski pour la résolution des problèmes de mécanique céleste, par Ch. Lagrange. 1re partie. Bruxelles, 1882; 4°.

Repertorium der Physik. XX. Band, 6.—9. Heft. München und Leipzig, 1884; 8°.

Société des Ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux. 37e année, 4e série, 5e—7e cahiers. Paris, 1884; 8°.

— mathématique de France: Bulletin. Tome XII. Nrs. 2 & 3. Paris, 1884; 8°.

— philomatique de Paris: Bulletin. 7e série, tome VIII. Nr. 3. 1883—1884. Paris, 1884; 8°.

Society, the royal geographical: Proceedings and Monthly Record of Geography. Vol. VI. Nrs. 7—9. London, 1884; 8°.

— the royal of Canada: Proceedings and Transactions for the years 1882 and 1883. Volume I. Montreal, 1883; 4°.

Verein, militär-wissenschaftlicher in Wien: Organ. XXIX. Band. 1. Heft und Separat-Beilage. Wien, 1884; 8°.

— zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien: Schriften. XXIV. Band. Vereinsjahr 1883—1884. Wien, 1884; 8°.

Vierteljahresschrift, österreichische für wissenschaftliche Veterinärkunde. LXI. Band, 2. Heft. (Jahrgang 1884. II.) Wien, 1884; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXIV. Jahrgang. Nr. 29 bis 40. Wien, 1884; 4°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. V. Jahrgang, Nr. 10—12. Wien, 1884; 8°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. IV. Jahrgang. 7., 8. und 9. Heft. Berlin, 1884; 4°.

Zahlentheoretische Studien.

Von **Leopold Gegenbauer.**

Multiplicirt man die Gleichung:

$$1.)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\rho_{\varkappa,\tau}(n)}{n^s} = \zeta(\tau s)\,\zeta(s-\varkappa)$$

zuerst mit $\zeta(\tau s)^{\beta}$, sodann mit $\zeta(s-\varkappa)^{\beta}$ und berücksichtigt, dass

$$2.)\quad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{f_{\beta}(m)}{m^{\sigma}} = \zeta(\sigma)^{\beta}$$

ist, so erhält man die Relationen:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\rho_{\varkappa,\tau}(n) f_{\beta}(m)}{(n m^{\tau})^s} = \zeta(\tau s)^{\beta+1}\,\zeta(s-\varkappa)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{n^{\varkappa} f_{\beta+1}(m)}{(n m^{\tau})^s}$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\rho_{\varkappa,\tau}(n) f_{\beta}(m)\, m^{\varkappa}}{(m n)^s} = \zeta(\tau s)\,\zeta(s-\varkappa)^{\beta+1}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{f_{\beta+1}(n)\, n^{\varkappa}}{(n m^{\tau})^s}$$

und daher ist:

$$3.)\quad \sum_{d_\tau} \rho_{\varkappa,\tau}(d_\tau) f_{\beta}\left(\sqrt[\tau]{\frac{r}{d_\tau}}\right) = \sum_{d_\tau} d_\tau^{\varkappa} f_{\beta+1}\left(\sqrt[\tau]{\frac{r}{d_\tau}}\right)$$

$$4.)\quad \sum_{d} \rho_{\varkappa,\tau}\left(\frac{r}{d}\right) d^{\varkappa} f_{\beta}(d) = \sum_{d_\tau} d_\tau^{\varkappa} f_{\beta+1}(d_\tau),$$

wo die Summation bezüglich d_τ über alle Divisoren von r zu erstrecken ist, deren complementärer Divisor eine τte Potenz ist. Von den speciellen Fällen dieser Formeln mögen die folgenden angeführt werden:

$$5.)\quad \sum_{d_\tau} \rho_{\varkappa,\tau}(d_\tau) = \sum_{d_\tau} d_\tau^\varkappa \psi\left(\sqrt[\tau]{\frac{r}{d_\tau}}\right)$$

$$6.)\quad \sum_{d} \psi_\varkappa(d) f_\beta\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d} d^\varkappa f_{\beta+1}\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$7.)\quad \sum_{d} \rho_{\varkappa,\tau}\left(\frac{r}{d}\right) d^\varkappa = \sum_{d_\tau} d^\varkappa \psi(d_\tau)$$

$$8.)\quad \sum_{d} \psi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) d^\varkappa = \sum_{d} d^\varkappa \psi(d).$$

Die Formel 8.) hat schon Herr Liouville mitgetheilt.

Schreibt man in der Gleichung 1.) für $s : s-\lambda$ und multiplicirt mit $\zeta(\sigma s)$, so erhält man:

$$9.)\quad \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\rho_{\varkappa,\tau}(n)\, n^\lambda}{(n\, m^\sigma)^s} = \zeta(\tau s - \tau\lambda).\zeta(\sigma s)\, \zeta(s-\varkappa-\lambda)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{m^{\tau\lambda}\, \rho_{\varkappa+\lambda,\,\sigma}(n)}{(n\, m^\tau)^s}$$

und demnach besteht die Relation:

$$10.)\quad \sum_{d_\sigma} \rho_{\varkappa,}\ (d_\sigma)\, d_\sigma^\lambda = \sum_{d_\tau} d_\tau^\lambda \rho_{\varkappa+\lambda,\,\sigma}\left(\frac{r}{d_\tau}\right).$$

Von den speciellen Fällen dieser Formel sollen die folgenden erwähnt werden:

$$11.)\quad \sum_{d_\sigma} \rho_{\varkappa,\tau}(d_\sigma) = \sum_{d_\tau} \rho_{\varkappa,\sigma}(d_\tau)$$

$$12.)\quad \sum_{d} \psi(d_\sigma)\, d_\sigma^\varkappa = \sum_{d} \rho_{\varkappa,\tau}\left(\frac{r}{d}\right) d^\varkappa$$

$$13.)\quad \sum_{d} \psi_\varkappa(d)\, d^\lambda = \sum_{d} \psi_{\varkappa+\lambda}\left(\frac{r}{d}\right) d^\lambda$$

$$14.)\quad \sum_d \psi_{2\varkappa}(d)\,d^{\varkappa} = \sum_d \psi_{3\varkappa}\left(\frac{r}{d}\right) d^{\varkappa}.$$

Die Formel 14.) verdankt man ebenfalls Herrn Liouville.

Setzt man in der Gleichung 9.) $\sigma = \tau$, so kann man dieselbe auch in folgender Form schreiben:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\rho_{\varkappa,\tau}(n)\,n^{\lambda}}{(n\,m^{\tau})^{s}} = \zeta(s-\varkappa-\lambda).\zeta(\tau s)\,\zeta(\tau s-\tau\lambda)$$

$$= \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\psi_{\lambda\tau}(n)\,m^{\varkappa+\lambda}}{(n\,m^{\tau})^{s}},$$

und daher hat man:

$$15.)\quad \sum_{d_\tau} \rho_{\varkappa,\tau}(d_\tau)\,d_\tau^{\lambda} = \sum_{d_\tau} \psi_{\tau\lambda}\left(\sqrt[\tau]{\frac{r}{d_\tau}}\right) d_\tau^{\varkappa+\lambda}.$$

Specielle Fälle dieser Gleichung sind die Relationen:

$$16.)\quad \sum_d \psi_{\varkappa}(d)\,d^{\lambda} = \sum_d \psi_{\lambda}\left(\frac{r}{d}\right) d^{\varkappa+\lambda}$$

$$17.)\quad \sum_d \psi_1(d) = \sum_d d\psi\left(\frac{r}{d}\right),$$

von denen die letztere von Liouville mitgetheilt wurde.

Setzt man in der Gleichung 1.) $\tau = 2$ und multiplicirt sodann mit:

$$18.)\quad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\lambda(m)}{m^{s}} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)},$$

so erhält man:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\rho_{\varkappa,2}(n)\,\lambda(m)}{(mn)^{s}} = \zeta(2s)^{2}\cdot\frac{\zeta(s-\varkappa)}{\zeta(s)}$$

$$= \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\varphi_{\varkappa}(m)\,\psi(n)}{(m\,n^{2})^{s}},$$

und demnach ist:

$$19.)\quad \sum_{d} \rho_{\varkappa,2}(d)\lambda\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d_2} \varphi_\varkappa(d_2)\,\psi\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right).$$

Aus der Gleichung 1.) leitet man ferner für $\tau = 1$ leicht folgende Relation ab:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\psi_\varkappa(m)\,\psi_{\varkappa_1}(n)\,m^{\varkappa_2}}{(mn)^s} = \zeta(s-\varkappa_2)\,\zeta(s-\varkappa-\varkappa_2)\,\zeta(s)\,\zeta(s-\varkappa_1)$$

$$= \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\psi_{\varkappa_2}(m)\,\psi_{\varkappa+\varkappa_2-\varkappa_1}(n)\,n^{\varkappa_1}}{(mn)^s},$$

also ist:

$$20.)\quad \sum_{d} \psi_\varkappa(d)\,\psi_{\varkappa_1}\left(\frac{r}{d}\right)d^{\varkappa_2} = \sum_{d} \psi_{\varkappa_2}\left(\frac{r}{d}\right)\psi_{\varkappa+\varkappa_2-\varkappa_1}(d)\,d^{\varkappa_1}$$

Man hat ferner:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{f_\beta(n)\,\varphi_\varkappa(m)}{(mn)^s} = \zeta(s)^{\beta-1}\,\zeta(s-\varkappa)$$

$$= \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{n^\varkappa f_{\beta-1}(m)}{(mn)^s}$$

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{f_{\beta-2}(m)\,\psi_\varkappa(n)}{(mn)^s}$$

und demnach bestehen die Relationen:

$$21.)\quad \sum_{d} f_\beta(d)\,\varphi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d} d^\varkappa f_{\beta-1}\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$22.)\quad \sum_{d} f_\beta(d)\,\varphi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d} f_{\beta-2}(d)\,\psi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right),$$

aus denen die von mir schon früher mitgetheilte specielle Formel:

$$\sum_{d} \psi(d)\,\varphi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \psi_\varkappa(r)$$

folgt, welche für gerade r die neue Relation:

$$23.)\quad \sum_d (-1)^{\frac{r}{d}-1}\psi(d)\,\varphi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \psi_\varkappa(r) - 2(2^\varkappa - 1)\,\psi_\varkappa\left(\frac{r}{2}\right)$$

liefert.

Es ist auch:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\varphi_\varkappa(m)\,f_\beta(n)}{(m^2 n)^s} = \zeta(2s-\varkappa)\,.\,\frac{\zeta(s)^\beta}{\zeta(2s)}$$

$$= \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{m^\varkappa f_{\beta-2}(n)\,\psi(n^2\pi^{\beta-3}(n))}{(\beta-2)^{\bar\omega(n)}(m^2 n)^s},$$

und daher:

$$24.)\quad \sum_{d_2} f_\beta(d_2)\,\varphi_\varkappa\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \sum_{d_2} \frac{f_{\beta-2}(d_2)\,\psi(d_2^2\pi^{\beta-3}(d_2))}{(\beta-2)^{\bar\omega(d_2)}}\left(\frac{r}{d_2}\right)^{\frac{\varkappa}{2}}.$$

Von den speciellen Fällen dieser Formel mögen die folgenden hervorgehoben werden:

$$25.)\quad \sum_{d_2} \varphi_\varkappa\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \sum_{d_2} \left(\frac{r}{d_2}\right)^{\frac{\varkappa}{2}}\mu^2(d_2)$$

$$26.)\quad \sum_{d_2} \psi(d_2)\,\varphi_\varkappa\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \sum_{d_2} \left(\frac{r}{d_2}\right)^{\frac{\varkappa}{2}}\omega(d_2)$$

$$27.)\quad \sum_{d_2} f_3(d_2)\,\varphi_\varkappa\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \sum_{d_2} \left(\frac{r}{d_2}\right)^{\frac{\varkappa}{2}}\psi(d_2^2)$$

$$28.)\quad \sum_{d_2} f_4(d_2)\,\varphi_\varkappa\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \sum_{d_2} \left(\frac{r}{d_2}\right)^{\frac{\varkappa}{2}}\psi^2(d_2).$$

Multiplicirt man die bekannte Gleichung:

$$29.)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f_{\beta-2}(n)\,\psi(n^2\pi^{\beta-3}(n))}{(\beta-2)^{\bar\omega(n)}\,n^s} = \frac{\zeta(s)^\beta}{\zeta(2s)}$$

mit $\zeta(4s)$, so erhält man:

$$\sum_{m,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{f_{\beta-2}(n)\,\psi(n^2\pi^{\beta-3}(n))}{(\beta-2)^{\bar\omega(n)}(nm^4)^s} = \zeta(s)^\beta\,.\,\frac{\zeta(4s)}{\zeta(2s)}$$

$$= \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{f_\beta(n)\,\lambda(m)}{(nm^2)^s}$$

und daher ist:

$$30.)\quad \sum_{d_4} \frac{f_{\beta-2}(d_4)\,\psi(d_4^2\pi^{\beta-3}(d_4))}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(d_4)}} = \sum_{d_2} f_\beta(d_2)\,\lambda\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right).$$

Von den speciellen Fällen dieser Relation sollen die folgenden erwähnt werden:

$$31.)\quad \sum_{d_4} \mu^2(d_4) = \sum_{d_2} \lambda\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$32.)\quad \sum_{d_4} \omega(d_4) = \sum_{d_2} \psi(d_2)\,\lambda\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$33.)\quad \sum_{d_4} \psi(d_4^2) = \sum_{d_2} f_3(d_2)\,\lambda\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$34.)\quad \sum_{d_4} \psi^2(d_4) = \sum_{d_2} f_4(d_2)\,\lambda\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right).$$

Die Formel 31.) liefert das Theorem:

Die Anzahl derjenigen quadratischen Divisoren einer ganzen Zahl, welche so beschaffen sind, dass ihre Quadratwurzel aus einer geraden Anzahl von Primzahlen zusammengesetzt ist, übertrifft die Anzahl der übrigen quadratischen Divisoren um die Anzahl derjenigen durch kein Quadrat theilbaren Divisoren, deren complementärer Divisor eine vierte Potenz ist.

Aus 29.) folgt ferner:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{f_{\beta-2}(n)\,f_{\gamma-2}(m)\,\psi(n^2\pi^{\beta-3}(n))\,\psi(m^2\pi^{\gamma-3}(m))}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(n)}\,(\gamma-2)^{\bar{\omega}(m)}\,(mn^2)^s} =$$

$$= \zeta(s)^\gamma \cdot \frac{\zeta(2s)^{\beta-1}}{\zeta(4s)}$$

$$= \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{f_\gamma(m)\,f_{\beta-3}(n)\,\psi(n^2\pi^{\beta-4}(n))}{(\beta-3)^{\bar{\omega}(n)}\,(mn^2)^s},$$

und daher hat man die Gleichung:

$$35.)\quad \sum_{d_2} \frac{f_{\beta-2}\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) f_{\gamma-2}(d_2)\, \psi\left(\frac{r}{d_2}\, \pi^{\beta-3}\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\right) \psi\left(d_2^2\, \pi^{\gamma-3}(d_2)\right)}{(\beta-2)^{\bar{\omega}\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)} (\gamma-2)^{\bar{\omega}(d_2)}} =$$

$$= \sum_{d_2} \frac{f_{\gamma}(d_2)\, f_{\beta-3}\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) \psi\left(\frac{r}{d_2}\, \pi^{\beta-4}\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\right)}{(\beta-3)^{\bar{\omega}\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)}}.$$

Von den speciellen Fällen dieser Formel mögen die folgenden angegeben werden:

$$36.)\quad \sum_{d_2} \frac{\omega\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) f_{\gamma-2}(d_2)\, \psi\left(d_2^2\, \pi^{\gamma-3}(d_2)\right)}{(\gamma-2)^{\bar{\omega}(d_2)}} = \sum_{d_2} f_{\gamma}(d_2)\, \mu^2\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$37)\quad \sum_{d_2} \frac{f_{\gamma-2}(d_2)\, \psi\left(\frac{r}{d_2}\right) \psi\left(d_2^2\, \pi^{\gamma-3}(d_2)\right)}{(\gamma-2)^{\bar{\omega}(d_2)}} = \sum_{d_2} f_{\gamma}(d_2)\, \omega\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$38.)\quad \sum_{d_2} \frac{\psi^2\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) f_{\gamma-2}(d_2)\, \psi\left(d_2^2\, \pi^{\gamma-3}(d_2)\right)}{(\gamma-2)^{\bar{\omega}(d_2)}} = \sum_{d_2} f_{\gamma}(d_2)\, \psi\left(\frac{r}{d_2}\right)$$

$$39.)\quad \sum_{d_2} \omega\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) \mu^2(d_2) = \sum_{d_2} \mu^2\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$40.)\quad \sum_{d_2} \omega\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) \omega(d_2) = \sum_{d_2} \psi(d_2)\, \mu^2\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$41.)\quad \sum_{d_2} \omega\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) \psi(d_2^2) = \sum_{d_2} f_3(d_2)\, \mu^2\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$42.)\quad \sum_{d_2} \omega\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) \psi^2(d_2) = \sum_{d_1} f_4(d_2)\, \mu^2\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$43.)\quad \sum_{d_2} \psi\left(\frac{r}{d_2}\right) \mu^2(d_2) = \sum_{d_2} \omega\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$44.)\quad \sum_{d_2} \psi\left(\frac{r}{d_2}\right) \omega(d_2) = \sum_{d_2} \psi(d_2)\, \omega\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$45.)\quad \sum_{d_2} \psi\left(\frac{r}{d_2}\right)\psi(d_2^2) \quad = \sum_{d_2} f_3(d_2)\,\omega\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$46.)\quad \sum_{d_2} \psi\left(\frac{r}{d_2}\right)\psi^2(d_2) \quad = \sum_{d_2} f_4(d_2)\,\omega\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$47.)\quad \sum_{d_2} \psi^2\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\mu^2(d_2) = \sum_{d_2} \psi\left(\frac{r}{d_2}\right)$$

$$48.)\quad \sum_{d_2} \psi^2\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\omega(d_2) = \sum_{d_2} \psi(d_2)\,\psi\left(\frac{r}{d_2}\right)$$

$$49.)\quad \sum_{d_2} \psi^2\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\psi(d_2^2) = \sum_{d_2} f_3(d_2)\,\psi\left(\frac{r}{d_2}\right)$$

$$50.)\quad \sum_{d_2} \psi^2\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\psi^2(d_2) = \sum_{d_2} f_4(d_2)\,\psi\left(\frac{r}{d_2}\right).$$

Die Formeln 39.) und 43.) liefern folgende arithmetische Theoreme:

Die Quadratwurzeln aus jenen quadratischen Divisoren einer Zahl n, deren complementärer Divisor durch kein Quadrat theilbar ist, lassen sich eben so oft in zwei zu einander relativ prime Zahlen zerlegen, als die Zahl n quadratische Divisoren besitzt, welche durch keine vierte Potenz theilbar sind.

Die Quadratwurzeln aus den quadratischen Divisoren einer Zahl lassen sich eben so oft in zwei zu einander relativ prime Zahlen zerlegen, als jene quadratischen Divisoren, deren complementärer Divisor durch kein Quadrat theilbar ist, Theiler besitzen.

Aus den Gleichungen 2.) und 29.) folgt die Relation:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{f_{\beta-2}(n)\,\psi(n^2\pi^{\beta-3}(n))\,f_\gamma(m)}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(n)}(mn)^s} =$$

$$= \frac{\zeta(s)^{\beta+\gamma}}{\zeta(2s)}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{f_{\beta+\gamma-2}(r)\,\psi(r^2\pi^{\beta+\gamma-3}(r))}{(\beta+\gamma-2)^{\bar{\omega}(r)}}$$

$$=\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty}\frac{f_{\beta+\gamma}(m)\,\mu(n)}{(mn^2)^s},$$

aus welcher sich folgende Formeln ergeben:

51.) $$\sum_d \frac{f_{\beta-2}(d)\,\psi(d^2\pi^{\beta-3}(d))}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(d)}}f_\gamma\left(\frac{r}{d}\right)=$$
$$=\frac{f_{\beta+\gamma-2}(r)\,\psi(r^2\pi^{\beta+\gamma-3}(r))}{(\beta+\gamma-2)^{\bar{\omega}(r)}}$$

52.) $$\sum_d \frac{f_{\beta-2}(d)\,\psi(d^2\pi^{\beta-3}(d))f_\gamma\left(\frac{r}{d}\right)}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(d)}}=$$
$$=\sum_{d_2} f_{\beta+\gamma}(d_2)\,\mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right).$$

Von den speciellen Fällen dieser Formeln mögen die folgenden angeführt werden:

53.) $$\sum_d \mu^2(d)f_\gamma\left(\frac{r}{d}\right)=\frac{f_{\gamma-1}(r)\,\psi(r^2\pi^{\gamma-2}(r))}{(\gamma-1)^{\bar{\omega}(r)}}$$

54.) $$\sum_d \omega(d)\,f_\gamma\left(\frac{r}{d}\right)=\frac{f_\gamma(r)\,\psi(r^2\pi^{\gamma-1}(r))}{\gamma^{\bar{\omega}(r)}}$$

55.) $$\sum_d \psi(d^2)f_\gamma\left(\frac{r}{d}\right)=\frac{f_{\gamma+1}(r)\,\psi(r^2\pi^{\gamma}(r))}{(\gamma+1)^{\bar{\omega}(r)}}$$

56.) $$\sum_d \psi^2(d)\,f_\gamma\left(\frac{r}{d}\right)=\frac{f_{\gamma+2}(r)\,\psi(r^2\pi^{\gamma+1}(r))}{(\gamma+2)^{\bar{\omega}(r)}}$$

57.) $$\sum_d \mu^2(d)=\omega(r)$$

58.) $$\sum_d \mu^2(d)\,\psi\left(\frac{r}{d}\right)=\psi(r^2)$$

59.) $$\sum_d \mu^2(d)f_2\left(\frac{r}{d}\right)=\psi^2(r)$$

60.) $$\sum_d \omega(d)=\psi(r^2)$$

$$61.)\quad \sum_{d} \omega(d)\,\psi\left(\frac{r}{d}\right) = \psi^2(r)$$

$$62.)\quad \sum_{d} \psi(d^2) = \psi^2(r)$$

$$63.)\quad \sum_{d_2} \psi(d_2)\,\mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \omega(r)$$

$$64.)\quad \sum_{d_2} f_3(d_2)\,\mu\left(\sqrt{\frac{r}{d}}\right) = \psi(r^2)$$

$$65.)\quad \sum_{d_2} f_4(d_2)\,\mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \psi^2(r).$$

Die Formeln 60.) und 62.), welche ich schon früher abgeleitet habe, hat zuerst Herr Liouville mitgetheilt.

Von den in diesen Formeln enthaltenen arithmetischen Sätzen sollen die folgenden mitgetheilt werden:

Das Quadrat einer Zahl besitzt eben so viele Divisoren, als diejenigen von ihren Theilen, deren complementäre Divisoren durch kein Quadrat theilbar sind.

Diejenigen Divisoren einer Zahl, deren complementäre Divisoren keinen quadratischen Factor besitzen, lassen sich eben so oft in ein Product von drei Factoren zerlegen, als das Quadrat der Anzahl der Divisoren der Zahl beträgt.

Die Divisoren einer Zahl lassen sich eben so oft in zwei zu einander relativ prime Zahlen zerlegen, als das Quadrat der Zahl Divisoren besitzt.

Die Anzahl der Theiler derjenigen Divisoren einer Zahl, deren complementäre Divisoren Quadrate eines Productes einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen sind, übertrifft die Anzahl der Theiler der übrigen durch keine vierte Potenz theilbaren quadratischen Divisoren um die Anzahl jener Divisoren der Zahl, welche keinen quadratischen Factor besitzen.

Multiplicirt man die Formel 29.) mit:

$$66.)\quad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\lambda(m) f_{\gamma-1}(m)\,\psi(m^2\,\pi^{\gamma-2}(m))}{(\gamma-1)^{\bar{\omega}(m)}\,m^s} = \frac{\zeta(2s)^\gamma}{\zeta(s)^{\gamma+1}},$$

so erhält man:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{f_{\beta-2}(n) f_{\gamma-1}(m) \lambda(m) \psi(n^2 \pi^{\beta-3}(n)) \psi(m^2 \pi^{\gamma-2}(m))}{(\beta-2)^{\tilde{\omega}(n)} (\gamma-1)^{\tilde{\omega}(m)} (mn)^s} =$$

$$= \frac{\zeta(2s)^{\gamma-1}}{\zeta(s)^{\gamma-\beta+1}}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n) f_{\gamma-\beta+1}(n) f_{\beta-2}(m)}{(nm^2)^s}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{f_{\beta-1}(m) f_{\gamma-\beta-1}(n) \lambda(n) \psi(n^2 \pi^{\gamma-\beta-2}(m))}{(\gamma-\beta-1)^{\tilde{\omega}(n)} (nm^2)^s}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n) f_{\beta-2}(n) f_{\gamma-1}(m)}{(mn)^s},$$

und daher hat man die Relationen:

$$67.)\quad \sum_d \frac{\lambda(d) f_{\gamma-1}(d) \psi(d^2 \pi^{\gamma-2}(d)) f_{\beta-2}\left(\frac{r}{d}\right) \psi\left(\frac{r^2}{d^2} \pi^{\beta-3}\left(\frac{r}{d}\right)\right)}{(\beta-2)^{\tilde{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)} (\gamma-1)^{\tilde{\omega}(d)}} =$$

$$= \sum_{d_2} \lambda(d_2) f_{\gamma-\beta+1}(d_2) f_{\beta-2}\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$68.)\quad \sum_d \frac{\lambda(d) f_{\gamma-1}(d) \psi(d^2 \pi^{\gamma-2}(d)) f_{\beta-2}\left(\frac{r}{d}\right) \psi\left(\frac{r^2}{d^2} \pi^{\beta-3}\left(\frac{r}{d}\right)\right)}{(\beta-2)^{\tilde{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)} (\gamma-1)^{\tilde{\omega}(d)}} =$$

$$= \sum_{d_2} \frac{f_{\gamma-\beta-1}(d_2) \psi(d_2^2 \pi^{\gamma-\beta-2}(d_2)) \lambda(d_2) f_{\beta-1}\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)}{(\gamma-\beta-1)^{\tilde{\omega}(d_2)}}$$

$$69.)\quad \sum_d \frac{\lambda(d) f_{\gamma-1}(d) \psi(d^2 \pi^{\gamma-2}(d)) f_{\beta-2}\left(\frac{r}{d}\right) \psi\left(\frac{r^2}{d^2} \pi^{\beta-3}\left(\frac{r}{d}\right)\right)}{(\beta-2)^{\tilde{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)} (\gamma-1)^{\tilde{\omega}(d)}} =$$

$$= \sum_d \lambda\left(\frac{r}{d}\right) f_{\beta-2}(d) f_{\gamma-1}\left(\frac{r}{d}\right).$$

Specielle Fälle dieser Relationen sind die folgenden Formeln:

$$70.)\ \sum_{d} \frac{\lambda(d) f_{\gamma-1}(d)\, \psi(d^2 \pi^{\gamma-2}(d))\, \mu^2\left(\frac{r}{d}\right)}{(\gamma-1)^{\bar{\omega}(d)}} = \\ = \sum_{d_2} \lambda(d_2) f_{\gamma}(d_2)\, \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$71.)\ \sum_{d} \frac{\lambda(d) f_{\gamma-1}(d)\, \psi(d^2 \pi^{\gamma-2}(d))\, \omega\left(\frac{r}{d}\right)}{(\gamma-1)^{\bar{\omega}(d)}} = \\ = \lambda(r) f_{\gamma-1}(r)$$

$$72.)\ \sum_{d} \frac{\lambda(d) f_{\gamma-1}(d)\, \psi(d^2 \pi^{\gamma-2}(d))\, \psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right)}{(\gamma-1)^{\bar{\omega}(d)}} = \\ = \sum_{d_2} \lambda(d_2) f_{\gamma-2}(d_2)$$

$$73.)\ \sum_{d} \frac{\lambda(d) f_{\gamma-1}(d)\, \psi(d^2 \pi^{\gamma-2}(d))\, \psi^2\left(\frac{r}{d}\right)}{(\gamma-1)^{\bar{\omega}(d)}} = \\ = \sum_{d_2} \lambda(d_2) f_{\gamma-3}(d_2)\, \psi\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$74.)\ \sum_{d} \frac{\lambda(d) f_{\gamma-1}(d)\, \psi(d^2 \pi^{\gamma-2}(d))\, \mu^2\left(\frac{r}{d}\right)}{(\gamma-1)^{\bar{\omega}(d)}} = \\ = \frac{\lambda(r) f_{\gamma-2}(r)\, \psi(r^2 \pi^{\gamma-3}(r))}{(\gamma-2)^{\bar{\omega}(r)}}$$

$$75.)\ \sum_{d} \frac{\lambda(d) f_{\gamma-1}(d)\, \psi(d^2 \pi^{\gamma-2}(d))\, \omega\left(\frac{r}{d}\right)}{(\gamma-1)^{\bar{\omega}(d)}} = \\ = \sum_{d_2} \frac{\lambda(d_2) f_{\gamma-3}(d_2)\, \psi(d_2^2 \pi^{\gamma-4}(d_2))}{(\gamma-3)^{\bar{\omega}(d_2)}}$$

76.) $$\sum_d \frac{\lambda(d) f_{\gamma-1}(d)\,\psi(d^2\pi^{\gamma-2}(d))\,\psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right)}{(\gamma-1)^{\bar{\omega}(d)}} = \\ = \sum_{d_2} \frac{\lambda(d_2) f_{\gamma-4}(d_2)\,\psi(d_2^2\pi^{\gamma-5}(d_2))\,\psi\left(\sqrt{\frac{|r|}{d_2}}\right)}{(\gamma-4)^{\bar{\omega}(d_2)}}$$

77.) $$\sum_d \frac{\lambda(d) f_{\gamma-1}(d)\,\psi(d^2\pi^{\gamma-2}(d))\,\mu^2\left(\frac{r}{d}\right)}{(\gamma-1)^{\bar{\omega}(d)}} = \\ = \sum_d \lambda(d) f_{\gamma-1}(d)\,\mu\left(\frac{r}{d}\right)$$

78.) $$\sum_d \frac{\lambda(d) f_{\gamma-1}(d)\,\psi(d^2\pi^{\gamma-2}(d))\,\psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right)}{(\gamma-1)^{\bar{\omega}(d)}} = \\ = \sum_d \lambda(d) f_{\gamma-1}(d)$$

79.) $$\sum_d \frac{\lambda(d) f_{\gamma-1}(d)\,\psi(d^2\pi^{\gamma-2}(d))\,\psi^2\left(\frac{r}{d}\right)}{(\gamma-1)^{\bar{\omega}(d)}} = \\ = \sum_d \lambda(d) f_{\gamma-1}(d)\,\psi\left(\frac{r}{d}\right)$$

80.) $$\sum_d \lambda(d)\,\omega(d)\,\mu^2\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d_2} \lambda(d_2)\,\mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \mu(r)$$

81.) $$\sum_d \lambda(d)\,\omega(d)\,\omega\left(\frac{r}{d}\right) = 0 \qquad (r > 1)$$

82.) $$\sum_d \lambda(d)\,\omega(d)\,\omega\left(\frac{r}{d}\right) = 1 \qquad (r = 1)$$

83.) $$\sum_d \lambda(d)\,\omega(d)\,\psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right) = \sum_{d_2} \lambda(d_2)\,\mu(d_2) = 1$$

84.) $$\sum_d \lambda(d)\,\omega(d)\,\psi^2\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d_2} \lambda(d_2)\,\psi(d_2)\,\mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \lambda(r)\,\omega(r)$$

85.) $$\sum_d \lambda(d)\,\psi(d^2)\,\psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right) = 0\,,$$

wenn r kein Quadrat ist,

86.) $\sum_{d} \lambda(d)\, \psi(d^2) \psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right) = 1$,

wenn r ein Quadrat ist,

87.) $\sum_{d} \lambda(d) \psi(d^2) \psi^2\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d_2} \lambda(d_2) \mu(d_2) \psi\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \rho_{0,2}(r)$

88.) $\sum_{d} \lambda(d) \psi^2(d) \mu^2\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d_2} \lambda(d_2) f_3(d_2) \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \lambda(r) \psi(r^2)$

89.) $\sum_{d} \lambda(d) \psi^2(d) \omega\left(\frac{r}{d}\right) = \lambda(r)\, \psi(r)$

90.) $\sum_{d} \lambda(d) \psi^2(d) \psi^2\left(\frac{r}{d}\right) = 0$,

wenn r kein Quadrat ist,

91.) $\sum_{d} \lambda(d) \psi^2(d) \psi^2\left(\frac{r}{d}\right) = 1$,

wenn r ein Quadrat ist.

Aus diesen Formeln ergeben sich folgende arithmetische Theoreme:

Diejenigen Divisoren einer Zahl, deren complementäre Divisoren aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt sind, lassen sich einmal öfter in zwei zu einander relativ prime Zahlen zerlegen, als die übrigen Divisoren, deren complementäre Divisoren durch kein Quadrat theilbar sind.

Die Anzahl der Divisoren der Quadrate derjenigen Theiler einer Zahl, deren complementäre Divisoren aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt sind, übertrifft die Anzahl der Divisoren der Quadrate der übrigen Theiler der Zahl, deren complementäre Divisoren durch kein Quadrat theilbar sind, um die Anzahl der Zerlegungen der Zahl in zwei zu einander relativ prime Zahlen.

Die Summe der Quadrate der Anzahlen derjenigen Divisoren einer Zahl, deren complementäre Divisoren aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt sind, übertrifft die Summe der Quadrate der Anzahlen der übrigen Divisoren, deren complementäre Divisoren keine quadratischen Theiler besitzen, um die Anzahl der Divisoren der Zahl.

Man hat ferner:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n) f_{\beta-1}(n) \psi(n^2 \pi^{\beta-2}(n)) \rho_{\varkappa,\tau}(m)}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(n)} (mn^\tau)^s} =$$

$$= \left(\frac{\zeta(2\tau s)}{\zeta(\tau s)}\right)^\beta \zeta(s-\varkappa)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n) f_\beta(n) m^\varkappa}{(mn^\tau)^s}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n) f_{\beta-2}(n) \psi(n^2 \pi^{\beta-3}(n)) \rho_{\varkappa,2\tau}(m)}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(n)} (mn^\tau)^s}$$

und daher bestehen die Relationen:

92.) $$\sum_{m,n} \frac{\lambda(n) f_{\beta-1}(n) \psi(n^2 \pi^{\beta-2}(n)) \rho_{\varkappa,\tau}(m)}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(n)}} =$$

$$= \sum_{m,n} \lambda(n) f_\beta(n) m^\varkappa \quad (mn^\tau = r)$$

93.) $$\sum_{m,n} \frac{\lambda(n) f_{\beta-1}(n) \psi(n^2 \pi^{\beta-2}(n)) \rho_{\varkappa,\tau}(m)}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(n)}} =$$

$$= \sum_{m,n} \frac{\lambda(n) f_{\beta-2}(n) \psi(n^2 \pi^{\beta-3}(n)) \rho_{\varkappa,2\tau}(m)}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(n)}} \quad (mn^\tau = r).$$

Von den speciellen Fällen dieser Formeln mögen die folgenden erwähnt werden:

94.) $$\sum_d \frac{\lambda(d) f_{\beta-1}(d) \psi(d^2 \pi^{\beta-2}(d))\, \psi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right)}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(d)}} =$$

$$= \sum_d \lambda\left(\frac{r}{d}\right) f_\beta\left(\frac{r}{d}\right) d^\varkappa.$$

95.) $$\sum_d \frac{\lambda(d) f_{\beta-1}(d) \psi(d^2 \pi^{\beta-2}(d))\, \psi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right)}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(d)}} =$$

$$= \sum_d \frac{\lambda(d) f_{\beta-2}(d) \psi(d^2 \pi^{\beta-3}(d)) \rho_{\varkappa,2}\left(\frac{r}{d}\right)}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(d)}}$$

$$96.)\quad \sum_{m,n} \mu(n)\,\rho_{\varkappa,\tau}(m) = r^{\varkappa} \qquad (mn^{\tau}=r)$$

$$97.)\quad \sum_{m,n} \lambda(n)\,\psi(n^2)\,\rho_{\varkappa,\tau}(m) = \sum_{m,n} \lambda(n)\,\psi(n)\,m^{\varkappa} \qquad (mn^{\tau}=r)$$

$$98.)\quad \sum_{m,n} \lambda(n)\,\psi^2(n)\,\rho_{\varkappa,\tau}(m) = \sum_{m,n} \lambda(n)\,f_3(n)\,m^{\varkappa} \qquad (mn^{\tau}=r)$$

$$99.)\quad \sum_{m,n} \lambda(n)\,\omega(n)\,\rho_{\varkappa,\tau}(m) = \sum_{m,n} \mu(n)\,\rho_{\varkappa,2\tau}(m) \qquad (mn^{\tau}=r)$$

$$100.)\quad \sum_{m,n} \lambda(n)\,\psi(n^2)\,\rho_{\varkappa,\tau}(m) = \sum_{m,n} \lambda(n)\,\omega(n)\,\rho_{\varkappa,2\tau}(m) \qquad (mn^{\tau}=r)$$

$$101.)\quad \sum_{m,n} \lambda(n)\,\psi^2(n)\,\rho_{\varkappa,\tau}(m) = \sum_{m,n} \lambda(n)\,\psi(n^2)\,\rho_{\varkappa,2\tau}(m) \qquad (mn^{\tau}=r)$$

$$102.)\quad \sum_{d} \mu(d)\,\psi_{\varkappa}\left(\frac{r}{d}\right) = r^{\varkappa}$$

$$103.)\quad \sum_{d} \lambda(d)\,\psi(d^2)\,\psi_{\varkappa}\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d} \lambda\left(\frac{r}{d}\right)\psi\left(\frac{r}{d}\right) d^{\varkappa}$$

$$104.)\quad \sum_{d} \lambda(d)\,\omega(d)\,\psi_{\varkappa}\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d} \mu\left(\frac{r}{d}\right)\rho_{\varkappa,2}(d)$$

$$105.)\quad \sum_{d} \lambda(d)\,\psi(d^2)\,\psi_{\varkappa}\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d} \lambda(d)\,\psi(d)\,\rho_{\varkappa,2}\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$106.)\quad \sum_{d} \lambda(d)\,\psi^2(d)\,\psi_{\varkappa}\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d} \lambda(d)\,\psi(d^2)\,\rho_{\varkappa,2}\left(\frac{r}{d}\right)$$

Die specielle Formel 103.) verdankt man Herrn Liouville.

Von den in diesen Formeln enthaltenen arithmetischen Sätzen möge der folgende erwähnt werden.

Die Summe der $\varkappa$ten Potenzen der Divisoren jener Theiler einer Zahl, deren complementäre Divisoren Producte einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen sind, übertrifft die Summe der $\varkappa$ten Potenzen der Divisoren der übrigen Theiler der

Zahl, deren complementäre Divisoren keinen quadratischen Factor besitzen, um die $\varkappa$te Potenz der Zahl.

Schreibt man in der Gleichung 1.) für $\tau : 2\tau$ und multiplicirt sodann mit:

$$107.)\quad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\mu^2(m)}{m^{\tau s}} = \frac{\zeta(\tau s)}{\zeta(2\tau s)},$$

so erhält man:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\mu^2(m)\,\rho_{\varkappa,\,2\tau}(n)}{(nm^{\tau})^s} = \zeta(\tau s)\,\zeta(s-\varkappa)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\rho_{\varkappa,\,\tau}(r)}{r^s},$$

und daher ist:

$$108.)\quad \sum_{d_\tau} \rho_{\varkappa,2\tau}(d_\tau)\,\mu^2\left(\sqrt[\tau]{\frac{r}{d_\tau}}\right) = \rho_{\varkappa,\,\tau}(r)$$

und speciell:

$$109.)\quad \sum_{d} \rho_{\varkappa,\,2}(d)\,\mu^2\left(\frac{r}{d}\right) = \psi_\varkappa(r).$$

Es ist ferner:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\mu^2(m)\,\psi_\varkappa(n)}{(mn)^s} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}\cdot\zeta(s-\varkappa)$$

$$= \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{m^\varkappa\,\omega(n)}{(mn)^s}$$

und demnach:

$$110.)\quad \sum_{d} \psi_\varkappa(d)\,\mu^2\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d} d^\varkappa\,\omega\left(\frac{r}{d}\right).$$

Aus der Gleichung 107.) folgt auch:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\mu^2(n)\, m^x}{(mn)^s} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)} \cdot \frac{\zeta(s-x)}{\zeta(s)}$$

$$= \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\omega(m)\, \varphi_x(n)}{(mn)^s},$$

und daher ist:

$$111.) \quad \sum_d \mu^2\left(\frac{r}{d}\right) d^x = \sum_d \omega\left(\frac{r}{d}\right) \varphi_x(d).$$

Man hat:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\mu^2(m)\, \mu^2(n)}{(mn)^s} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)} \cdot \frac{1}{\zeta(2s)}$$

$$= \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\omega(n)\, \mu(m)}{(nm^2)^s},$$

und daher:

$$112.) \quad \sum_{d_2} \omega(d_2)\, \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \sum_d \mu^2(d)\, \mu^2\left(\frac{r}{d}\right).$$

Aus der Gleichung:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\mu^2(m)\, \varphi_x(n)}{(mn)^s} = \frac{\zeta(s-x)}{\zeta(2s)}$$

$$= \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{m^x\, \mu(n)}{(mn^2)^s}$$

folgt die Relation:

$$113.) \quad \sum_d \mu^2(d)\, \varphi_x\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d_2} d_2^x\, \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

und speciell:

$$114.) \quad \sum_d \mu^2(d)\, \varphi\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d_2} d_2\, \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right),$$

aus welcher Gleichung sich das folgende arithmetische Theorem ergibt:

Die Summe derjenigen Divisoren einer Zahl, deren complementäre Divisoren Quadrate eines Productes einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen sind, übertrifft die Summe der übrigen Theiler, deren complementäre Divisoren Quadrate aber durch keine vierte Potenz theilbar sind, um die Anzahl derjenigen Zahlen, welche kleiner als diejenigen Divisoren, deren complementäre Divisoren keinen quadratischen Factor besitzen, und zu denselben relativ prim sind.

Man hat ferner die Relationen:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{(-1)^{(\varkappa+1)\bar{\omega}(n)} \mu^2(m)\pi^\varkappa(n)\varphi_\varkappa(n)}{(mn)^s n^\varkappa} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}\zeta(s-\varkappa)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu(n)n^\varkappa \omega(m)}{(mn)^s}$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\mu^2(m)\lambda(n)n^\varkappa}{(mn)^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(2s-2\varkappa)}{\zeta(s-\varkappa)\zeta(2s)}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\lambda(r)\varphi_\varkappa(r)}{r^s},$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n)\varphi_\varkappa(n)}{(mn)^s} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)} \cdot \frac{\zeta(2s-2\varkappa)}{\zeta(s-\varkappa)}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\omega(m)\lambda(n)n^\varkappa}{(mn)^s},$$

und daher bestehen die Gleichungen:

115.) $$\sum_d \frac{(-1)^{(\varkappa+1)\bar{\omega}(d)} \pi^\varkappa(d)\varphi_\varkappa(d)\mu^2\left(\frac{r}{d}\right)}{d^\varkappa} = \sum_d \mu(d) d^\varkappa \omega\left(\frac{r}{d}\right)$$

116.) $$\sum_d \lambda(d) d^\varkappa \mu^2\left(\frac{r}{d}\right) = \lambda(r)\varphi_\varkappa(r)$$

117.) $$\sum_d \lambda(d)\varphi_\varkappa(d) = \sum_d \lambda(d) d^\varkappa \omega\left(\frac{r}{d}\right).$$

Es ist:

$$\frac{\zeta(s)\,\zeta(s-\varkappa)}{\zeta(2s)} = \prod_p \frac{1+\dfrac{1}{p^s}}{1-\dfrac{p^\varkappa}{p^s}}$$

$$= \prod_p \left\{\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{p^{\lambda\varkappa}}{p^{\lambda s}}\right\}$$

$$= \prod_p \left\{1+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{p^{\lambda\varkappa}\left(1+\dfrac{1}{p^\varkappa}\right)}{p^{\lambda s}}\right\},$$

wo die Producte über alle Primzahlen p zu erstrecken sind.

Die letzte Gleichung verwandelt sich sofort in:

$$\frac{\zeta(s)\,\zeta(s-\varkappa)}{\zeta(2s)} = \sum_{\nu_1,\nu_2,\ldots} \frac{(p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\ldots)^\varkappa\left\{1+\dfrac{1}{p_1^\varkappa}\right\}\left\{1+\dfrac{1}{p_2^\varkappa}\right\}\ldots}{(p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\ldots)^s}$$

und daher ist, wenn:

$$n^\varkappa\left(1+\frac{1}{p_1^\varkappa}\right)\left(1+\frac{1}{p_2^\varkappa}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p_r^\varkappa}\right) = \omega_\varkappa(n) \quad (n = p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\ldots p_r^{\nu_r})$$

gesetzt wird:

$$118.)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\omega_\varkappa(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\,\zeta(s-\varkappa)}{\zeta(2s)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{\omega_\varkappa(r)}{r^s} = \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\mu^2(n)\,m^\varkappa}{(mn)^s}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\mu(n)\,\psi_\varkappa(m)}{(mn^2)^s},$$

und daher hat man:

$$119.)\quad \sum_d \mu^2\left(\frac{r}{d}\right)d^\varkappa = \omega_\varkappa(r)$$

120.) $\sum_{d_2} \psi_\varkappa(d_2)\mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \omega_\varkappa(r).$

Multiplicirt man die Formel 118.) der Reihe nach mit $\zeta(s)^\beta$, $\zeta(2s)^\beta$, $\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-\varkappa)}$, $\left(\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\right)^\beta$, $\frac{\zeta(2s)^\beta}{\zeta(s)^{\beta+1}}$, so erhält man die Gleichungen:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\omega_\varkappa(n) f_\beta(m)}{(mn)^s} = \frac{\zeta(s)^{\beta+1}}{\zeta(2s)} \zeta(s-\varkappa)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{f_{\beta-1}(n)\,\psi(n^2\,\pi^{\beta-2}(n))\,m^\varkappa}{(\beta-1)^{\bar\omega(n)}\,(mn)^s}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{f_{\beta-2}(n)\,\psi(n^2\,\pi^{\beta-3}(n))\,\psi_\varkappa(m)}{(\beta-2)^{\bar\omega(n)}\,(mn)^s}$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\omega_\varkappa(n) f_\beta(m)}{(nm^2)^s} = \zeta(2s)^{\beta-1}\,\zeta(s)\,\zeta(s-\varkappa)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{f_{\beta-1}(m)\,\psi_\varkappa(n)}{(nm^2)^s}.$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{(-1)^{(\varkappa+1)\bar\omega(n)}\,\pi^\varkappa(n)\,\varphi_\varkappa(n)\,\omega_\varkappa(m)}{(mn)^s\,m^\varkappa} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\omega(r)}{r^s}$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\omega_\varkappa(n)\,\lambda(m) f_\beta(m)}{(mn)^s} =$$

$$= \left(\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\right)^{\beta-1} \zeta(s-\varkappa)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n)\,f_{\beta-1}(n)\,m^\varkappa}{(mn)^s}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n) f_{\beta-2}(n) \psi(n^2 \pi^{\beta-3}(n)) \psi_x(m)}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(n)} (mn)^s}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n) f_{\beta-3}(n) \psi(n^2 \pi^{\beta-4}(n)) \rho_{x,2}(m)}{(\beta-3)^{\bar{\omega}(n)} (mn)^s}$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n) f_{\beta-1}(n) \psi(n^2 \pi^{\beta-2}(n)) \omega_x(m)}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(n)} (mn)^s} =$$

$$= \frac{\zeta(2s)^{\beta-1}}{\zeta(s)^\beta} \zeta(s-x)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n) f_{\beta-2}(n) \psi(n^2 \pi^{\beta-3}(n)) m^x}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(n)} (mn)^s}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n) f_{\beta-1}(n) \varphi_x(m)}{(mn)^s},$$

aus welchen sich folgende Relationen ergeben:

121.) $$\sum_d \omega_x(d) f_\beta\left(\frac{r}{d}\right) = r^x \sum_d \frac{f_{\beta-1}(d) \psi(d^2 \pi^{\beta-2}(d))}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(d)} d^x}$$

122.) $$\sum_d \omega_x(d) f_\beta\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \frac{f_{\beta-2}(d) \psi(d^2 \pi^{\beta-3}(d)) \psi_x\left(\frac{r}{d}\right)}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(d)}}$$

123.) $$\sum_{d_2} \omega_x(d_2) f_\beta\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \sum_{d_2} \psi_x(d_2) f_{\beta-1}\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

124.) $$\sum_d (-1)^{(x+1)\bar{\omega}(d)} \pi^x(d) \varphi_x(d) \omega_x\left(\frac{r}{d}\right) d^x = r^x \omega(r)$$

125.) $$\sum_d \lambda(d) f_\beta(d) \omega_x\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d d^x \lambda\left(\frac{r}{d}\right) f_{\beta-1}\left(\frac{r}{d}\right)$$

126.) $$\sum_d \lambda(d) f_\beta(d) \omega_x\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \frac{\lambda(d) f_{\beta-2}(d) \psi(d^2 \pi^{\beta-3}(d)) \psi_x\left(\frac{r}{d}\right)}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(d)}}$$

127.) $$\sum_d \lambda(d) f_\beta(d) \omega_x\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \frac{\lambda(d) f_{\beta-3}(d) \psi(d^2 \pi^{\beta-4}(d)) \rho_{x,2}\left(\frac{r}{d}\right)}{(\beta-3)^{\bar{\omega}(d)}}$$

128.) $$\sum_d \frac{\lambda(d) f_{\beta-1}(d) \psi(d^2 \pi^{\beta-2}(d)) \omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right)}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(d)}} = r^\varkappa \sum_d \frac{\lambda(d) f_{\beta-2}(d) \psi(d^2 \pi^{\beta-3}(d))}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(d)} d^\varkappa}$$

129.) $$\sum_d \frac{\lambda(d) f_{\beta-1}(d) \psi(d^2 \pi^{\beta-2}(d)) \omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right)}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(d)}} = \sum_d \lambda(d) f_{\beta-1}(d) \varphi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right)$$

130.) $$\sum_d \omega_\varkappa(d) = \sum_d \omega\left(\frac{r}{d}\right) d^\varkappa$$

131.) $$\sum_d \omega_\varkappa(d)\, \psi\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right) d^\varkappa$$

132.) $$\sum_d \omega_\varkappa(d) f_3\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \psi^2\left(\frac{r}{d}\right) d^\varkappa$$

133.) $$\sum_d \omega_\varkappa(d) = \sum_d \psi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) \mu^2(d)$$

134.) $$\sum_d \omega_\varkappa(d)\, \psi\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \psi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) \omega(d)$$

135.) $$\sum_d \omega_\varkappa(d) f_3\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \psi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) \psi(d^2)$$

136.) $$\sum_d \omega_\varkappa(d) f_4\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \psi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) \psi^2(d)$$

137.) $$\sum_{d_2} \omega_\varkappa(d_2) = \psi_\varkappa(r)$$

138.) $$\sum_{d_2} \omega_\varkappa(d_2) f_3\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \sum_{d_2} \psi_\varkappa(d_2)\, \psi\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

139.) $$\sum_{d_2} \omega_\varkappa(d_2)\, \psi\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \sum_{d_2} \psi_\varkappa(d_2)$$

$$140.)\quad \sum_d \lambda(d)\,\omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = r^\varkappa$$

$$141.)\quad \sum_d \lambda(d)\,\psi(d)\,\omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d d^\varkappa \lambda\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$142.)\quad \sum_d \lambda(d) f_3(d)\,\omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d d^\varkappa \lambda\left(\frac{r}{d}\right)\psi\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$143.)\quad \sum_d \lambda(d)\,\omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \mu(d)\,\psi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$144.)\quad \sum_d \lambda(d)\,\psi(d)\,\omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \lambda(d)\,\omega(d)\,\psi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$145.)\quad \sum_d \lambda(d) f_3(d)\,\omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \lambda(d)\,\psi(d^2)\,\psi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$146.)\quad \sum_d \lambda(d) f_4(d)\,\omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \lambda(d)\,\psi^2(d)\,\psi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$147.)\quad \sum_d \lambda(d)\,\psi(d)\,\omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \mu(d)\,\rho_{\varkappa,2}\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$148.)\quad \sum_d \lambda(d) f_3(d)\,\omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \lambda(d)\,\omega(d)\,\rho_{\varkappa,2}\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$149.)\quad \sum_d \lambda(d) f_4(d)\,\omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \lambda(d)\,\psi(d^2)\,\rho_{\varkappa,2}\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$150.)\quad \sum_d \lambda(d) f_5(d)\,\omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \lambda(d)\,\psi^2(d)\,\rho_{\varkappa,2}\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$151.)\quad \sum_d \lambda(d)\,\omega(d)\,\omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \mu\left(\frac{r}{d}\right) d^\varkappa$$

$$152.)\quad \sum_d \lambda(d)\,\psi(d^2)\,\omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \lambda\left(\frac{r}{d}\right)\omega\left(\frac{r}{d}\right) d^\varkappa$$

$$153.)\quad \sum_d \lambda(d)\,\psi^2(d)\,\omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \lambda\left(\frac{r}{d}\right)\psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right) d^\varkappa$$

154.) $\sum_{d} \lambda(d)\, \omega(d)\, \omega_{\varkappa}\left(\frac{r}{d}\right) = \varphi_{\varkappa}(r)$

155.) $\sum_{d} \lambda(d) \psi(d^{2})\, \omega_{\varkappa}\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d} \lambda(d)\, \varphi_{\varkappa}\left(\frac{r}{d}\right)$

156.) $\sum_{d} \lambda(d) \psi^{2}(d)\, \omega_{\varkappa}\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d} \lambda(d)\, \psi(d) \varphi_{\varkappa}\left(\frac{r}{d}\right).$

Man hat ferner:

$$\sum_{m,\, n=1}^{m,\, n=\infty} \frac{\omega(n)\, \varphi_{\varkappa+\lambda}(m)}{(m\, n)^{s}} = \frac{1}{\zeta(2s)} \zeta(s-\varkappa)\, \zeta(s-\varkappa-\lambda)$$

$$= \sum_{m,\, n=1}^{m,\, n=\infty} \frac{\mu(n)\, \psi_{\lambda}(m) m^{\varkappa}}{(m\, n^{2})^{s}},$$

und daher ist:

157.) $\sum_{d} \omega_{\varkappa}(d)\, \varphi_{\varkappa+\lambda}\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d_2} \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) \psi_{\lambda}(d_2)\, d_2^{\varkappa}$

und speciell:

158.) $\sum_{d} \omega_{\varkappa}(d)\, \varphi_{\varkappa}\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d_2} \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) \psi(d_2)\, d_2^{\varkappa}$

159.) $\sum_{d} \omega_{\varkappa}(d)\, \varphi\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d_2} \mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) d_2\, \psi_{\varkappa-1}(d_2).$

Es ist auch:

$$\sum_{m,\, n=1}^{m,\, n=\infty} \frac{\omega_{\varkappa}(n) \lambda(m) \varphi_{\varkappa}(m)}{(m n)^{s}} = \frac{\zeta(s)^{2}}{\zeta(2s)} \cdot \frac{\zeta(2s-2\varkappa)}{\zeta(2s)}$$

$$= \sum_{m,\, n=1}^{m,\, n=\infty} \frac{\omega(n)\, \varphi_{\varkappa}(m)}{(n m^{2})^{s}}$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\omega_\varkappa(n)}{(nm^\tau)^s} = \zeta(\tau s)\,\zeta(s-\varkappa)\,\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\rho_{\varkappa,\tau}(n)\,\mu^2(m)}{(mn)^s}$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\omega_\varkappa(n)\,\lambda(m)\,P_{\varkappa,\tau}(m)}{(nm)^s} = \frac{\zeta(2\tau s-2\tau\varkappa)}{\zeta(\tau s-\tau\varkappa)}\,\zeta(s-\varkappa)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n)}{(mn^\tau)^{s-\varkappa}}$$

und daher hat man die Relationen:

$$160.)\quad \sum_d \omega_\varkappa(d)\,\lambda\left(\frac{r}{d}\right)\varphi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d_2} \omega(d_2)\,\varphi_\varkappa\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)$$

$$161.)\quad \sum_{d_\tau} \omega_\varkappa(d_\tau) = \sum_d \rho_{\varkappa,\tau}(d)\mu^2\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$162.)\quad \sum_d \omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right)\lambda(d)P_{\varkappa,\tau}(d) = r^\varkappa \sum_{d_\tau} \lambda\left(\sqrt[\tau]{\frac{r}{d_\tau}}\right)$$

$$163.)\quad \sum_d \omega(d)\,\lambda\left(\frac{r}{d}\right)\rho_{0,\tau}\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d_\tau} \lambda\left(\sqrt[\tau]{\frac{r}{d_\tau}}\right).$$

Man hat ferner:

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)\,\zeta(s-\varkappa)} = \prod_p \frac{1-\dfrac{p^\varkappa}{p^s}}{1+\dfrac{1}{p^s}}$$

$$= \prod_p \left\{\left(1-\frac{p^\varkappa}{p^s}\right)\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{p^{\lambda s}}\right\}$$

$$= \prod_p \left\{1+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda\,\{p^\varkappa+1\}}{p^{\lambda s}}\right\}$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2,\ldots} \frac{(-1)^{\nu_1+\nu_2+\cdots}\,(1+p_1^\varkappa)\,(1+p_2^\varkappa)\ldots}{(p_1^{\nu_1}\,p_2^{\nu_2}\ldots)^s}$$

und daher ist:

$$164.)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{\varkappa\,\tilde{\omega}(n)}\,\lambda(n)\pi^{\varkappa}(n)\,\omega_{\varkappa}(n)}{n^{s+\varkappa}} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)\,\zeta(s-\varkappa)},$$

aus welcher Formel für $\varkappa=0$ die von mir schon früher mitgetheilte specielle Relation:

$$165.)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda(n)\,\omega(n)}{n^{s}} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)^{2}}$$

folgt.

Aus der Gleichung 164.) ergeben sich sofort die Formeln:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{(-1)^{\varkappa\,\tilde{\omega}(n)}\,\lambda(n)\,\pi^{\varkappa}(n)\,\omega_{\varkappa}(n)\,m^{\varkappa}}{(mn)^{s}} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\lambda(r)}{r^{s}}$$

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{(-1)^{\varkappa\,\tilde{\omega}(n)}\,\lambda(n)\,\pi^{\varkappa}(n)\,\omega_{\varkappa}(n)\,\mu^{2}(m)}{(mn)^{s}} = \frac{1}{\zeta(s-\varkappa)} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\mu(r)\,r^{k}}{r^{s}}$$

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{(-1)^{\varkappa\,\tilde{\omega}(n)}\,\lambda(n)\,\pi^{\varkappa}(n)\,\omega_{\varkappa}(n)\,\omega_{\varkappa+\lambda}(m)}{(mn)^{s}} = \frac{\zeta(s-\varkappa-\lambda)}{\zeta(s-\varkappa)} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\varphi_{\lambda}(r)\,r^{\varkappa}}{r^{s}}$$

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{(-1)^{\varkappa\,\tilde{\omega}(n)}\,\lambda(n)\,\pi^{\varkappa}(n)\,\omega_{\varkappa}(n)\,\rho_{\varkappa,\,\tau}(m)}{(mn)^{s}} = \zeta(\tau s)\,\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\lambda(n)}{(nm^{\tau})^{s}}$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{(-1)^{\varkappa\tilde{\omega}(n)}\lambda(n)\,\pi^{\varkappa}(n)\,\omega_{\varkappa}(n)\,\varphi_{\varkappa+\lambda}(m)}{(mn)^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)^2}\cdot\frac{\zeta(s-\varkappa-\lambda)}{\zeta(s-\varkappa)}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n)\,\omega(n)\,\varphi_{\lambda}(m)\,m^{\varkappa}}{(mn)^s}$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{(-1)^{\varkappa\tilde{\omega}(n)}\lambda(n)\pi^{\varkappa}(n)\,\omega_{\varkappa}(n)\lambda(m)\varphi_{\varkappa}(m)}{(mn)^s} = \frac{\zeta(2s-2\varkappa)}{\zeta(s-\varkappa)^2}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\lambda(r)\,\omega(r)\,r^{\varkappa}}{r^s}$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{(-1)^{\varkappa\tilde{\omega}(n)}\,\pi^{\varkappa}(n)\,\omega_{\varkappa}(n)\,\lambda(n)\,\lambda(m)\,f_{\beta}(m)}{(mn)^s} =$$

$$= \left(\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\right)^{\beta+1}\frac{1}{\zeta(s-\varkappa)}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(m)\,f_{\beta+1}(n)\,\mu(m)\,m^{\varkappa}}{(mn)^s}$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{(-1)^{\varkappa\tilde{\omega}(n)}\,\pi^{\varkappa}(n)\,\omega_{\varkappa}(n)\,\lambda(n)\,\lambda(m)\,f_{\beta-1}(m)\,\psi(m^2\pi^{\beta-2}(m))}{(\beta-1)^{\tilde{\omega}(m)}\,(mn)^s} =$$

$$= \frac{\zeta(2s)^{\beta+1}}{\zeta(s)^{\beta+2}}\,\frac{1}{\zeta(s-\varkappa)}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n) f_{\beta}(n)\,\psi\,(n^2\pi^{\beta-1}(n))\,\mu(m)\,m^{\varkappa}}{\beta^{\tilde{\omega}(n)}\,(mn)^s}$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{(-1)^{\varkappa\tilde{\omega}(n)}\,\pi^{\varkappa}(n)\,\omega_{\varkappa}(n)\,\lambda(n)\,f_{\beta-2}(m)\,\psi(m^2\pi^{\beta-3}(m))}{(\beta-2)^{\tilde{\omega}(m)}\,(mn)^s} =$$

$$= \frac{\zeta(s)^{\beta-1}}{\zeta(s-\varkappa)}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{f_{\beta-1}(n)\,\mu(m)\,m^{\varkappa}}{(mn)^s}$$

aus welchen sich folgende Relationen ergeben:

166.) $$\sum_d \frac{(-1)^{\varkappa\bar{\omega}(d)}\lambda(d)\pi^{\varkappa}(d)\,\omega_{\varkappa}(d)}{d^{\varkappa}} = \frac{\lambda(r)}{r^{\varkappa}}$$

167.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\bar{\omega}(d)}\lambda(d)\pi^{\varkappa}(d)\,\omega_{\varkappa}(d)\,\mu^2\left(\frac{r}{d}\right) = \mu(r)\,r^{\varkappa}$$

168.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\bar{\omega}(d)}\lambda(d)\pi^{\varkappa}(d)\,\omega_{\varkappa}(d)\,\omega_{\varkappa+\lambda}\left(\frac{r}{d}\right) = \varphi_{\lambda}(r)\,r^{\varkappa}$$

169.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\bar{\omega}(d)}\lambda(d)\pi^{\varkappa}(d)\,\omega_{\varkappa}(d)\,\rho_{\varkappa,\tau}\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d_\tau} \lambda(d_\tau)$$

170.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\bar{\omega}(d)}\lambda(d)\,\pi^{\varkappa}(d)\,\omega_{\varkappa}(d)\,\varphi_{\varkappa+\lambda}\left(\frac{r}{d}\right) =$$
$$= \sum_d \lambda\left(\frac{r}{d}\right)\omega\left(\frac{r}{d}\right)\varphi_{\lambda}(d)\,d^{\varkappa}$$

171.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\bar{\omega}(d)}\pi^{\varkappa}(d)\,\omega_{\varkappa}(d)\,\varphi_{\varkappa}\left(\frac{r}{d}\right) = \omega(r)\,r^{\varkappa}$$

172.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\bar{\omega}(d)}\pi^{\varkappa}(d)\,\omega_{\varkappa}(d) f_{\beta}\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \lambda(d)\,f_{\beta+1}\left(\frac{r}{l}\right)\mu(d)\,d^{\varkappa}$$

173.) $$\sum_d \frac{(-1)^{\varkappa\bar{\omega}(d)}\pi^{\varkappa}(d)\,\omega_{\varkappa}(d)\,f_{\beta-1}\left(\frac{r}{d}\right)\psi\left(\frac{r^2}{d^2}\,\pi^{\beta-2}\left(\frac{r}{d}\right)\right)}{(\beta-1)^{\bar{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)}} =$$
$$= \sum_d \frac{\lambda(d)\,f_{\beta}\left(\frac{r}{d}\right)\psi\left(\frac{r^2}{d^2}\,\pi^{\beta-1}\left(\frac{r}{d}\right)\right)\mu(d)\,d^{\varkappa}}{\beta^{\bar{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)}}$$

174.) $$\sum_d \frac{(-1)^{\varkappa\bar{\omega}(d)}\pi^{\varkappa}(d)\,\omega_{\varkappa}(d)\,\lambda(d)\,f_{\beta-2}\left(\frac{r}{d}\right)\psi\left(\frac{r^2}{d^2}\,\pi^{\beta-3}\left(\frac{r}{d}\right)\right)}{(\beta-2)^{\bar{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)}} =$$
$$= \sum_d f_{\beta-1}\left(\frac{r}{d}\right)\mu(d)\,d^{\varkappa}$$

175.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\bar{\omega}(d)}\lambda(d)\,\pi^{\varkappa}(d)\,\omega_{\varkappa}(d)\,\psi_{\varkappa}\left(\frac{r}{d}\right) = 0$$

wenn r kein Quadrat ist,

176.) $\sum_d (-1)^{\varkappa(\tilde{\omega})d} \lambda(d) \pi^\varkappa(d)\, \omega_\varkappa(d) \psi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = 1$

wenn r ein Quadrat ist,

177.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\tilde{\omega}(d)} \lambda(d) \pi^\varkappa(d)\, \omega_\varkappa(d)\, \omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \\ = 0 \qquad (r > 1)$$

178.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\tilde{\omega}(d)} \lambda(d) \pi^\varkappa(d)\, \omega_\varkappa(d)\, \omega_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \\ = 1 \qquad (r = 1)$$

179.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\tilde{\omega}(d)} \lambda\left(\frac{r}{d}\right) \pi^\varkappa(d)\, \omega_\varkappa(d) \varphi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \\ = \omega(r) \qquad (r > 1)$$

180.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\tilde{\omega}(d)} \lambda(d) \pi^\varkappa(d)\, \omega_\varkappa(d) \varphi_\varkappa\left(\frac{r}{d}\right) = \\ = 1 \qquad (r = 1)$$

181.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\tilde{\omega}(d)} \pi^\varkappa(d)\, \omega_\varkappa(d) = \sum_d \mu^2(d) d^\varkappa \psi\left(\frac{r}{d}\right)$$

182.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\tilde{\omega}(d)} \pi^\varkappa(d)\, \omega_\varkappa(d) \psi\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \mu^2(d) d^\varkappa f_3\left(\frac{r}{d}\right)$$

183.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\tilde{\omega}(d)} \pi^\varkappa(d)\, \omega_\varkappa(d)\, \omega\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \mu^2(d) d^\varkappa \psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right)$$

184.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\tilde{\omega}(d)} \pi^\varkappa(d)\, \omega_\varkappa(d) \psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right) = \sum_d \mu^2(d) d^\varkappa \psi^2\left(\frac{r}{d}\right)$$

185.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\tilde{\omega}(d)} \pi^\varkappa(d)\, \omega_\varkappa(d) \lambda(d)\, \omega\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \mu(d) d^\varkappa$$

186.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\tilde{\omega}(d)} \pi^\varkappa(d)\, \omega_\varkappa(d) \lambda(d)\, \psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right) = \sum_d \psi\left(\frac{r}{d}\right) \mu(d) d^\varkappa$$

187.) $$\sum_d (-1)^{\varkappa\tilde{\omega}(d)} \pi^\varkappa(d)\, \omega_\varkappa(d) \lambda(d) \psi^2\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d f_3\left(\frac{r}{d}\right) \mu(d) d^\varkappa.$$

Setzt man:

$$188.)\quad \eta(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\Delta}{n}\right) \frac{1}{n^s}.$$

so hat man bekanntlich:

$$189.)\quad \eta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \left(\frac{\Delta}{p}\right)\frac{1}{p^s}}.$$

Daher ist:

$$\frac{\eta(s-\mu)}{\zeta(s-\varkappa)} =$$

$$= \prod_p \frac{1 - \frac{p^\varkappa}{p^s}}{1 - \left(\frac{\Delta}{p}\right)\frac{1}{p^s}}$$

$$= \prod_p \left\{\left(1 - \frac{p^\varkappa}{p^s}\right) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left(\frac{\Delta}{p}\right)^\lambda \frac{p^{\lambda\mu}}{p^{\lambda s}}\right\}$$

$$= \prod_p \left\{1 + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{p}\right)^{\lambda-1} p^{\lambda\mu} \left\{\left(\frac{\Delta}{p}\right) - p^{\varkappa-\mu}\right\}}{p^{\lambda s}}\right\}$$

$$= \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots} \frac{\left(\frac{\Delta}{p_1}\right)^{\nu_1-1}\left(\frac{\Delta}{p_2}\right)^{\nu_2-1} \cdots \left\{\left(\frac{\Delta}{p_1}\right) - p_1^{\varkappa-\mu}\right\}\left\{\left(\frac{\Delta}{p_2}\right) - p_2^{\varkappa-\mu}\right\} \cdots}{(p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots)^{s-\mu}}$$

Setzt man nun:

$$190.)\quad n^\mu \left(\frac{\Delta}{p_1}\right)^{\nu_1-1}\left(\frac{\Delta}{p_2}\right)^{\nu_2-1} \cdots \left(\frac{\Delta}{p_r}\right)^{\nu_r-1} \left\{\left(\frac{\Delta}{p_1}\right) - p_1^{\varkappa-\mu}\right\}\left\{\left(\frac{\Delta}{p_2}\right) - p_2^{\varkappa-\mu}\right\} \cdots$$
$$\left\{\left(\frac{\Delta}{p_r}\right) - p_r^{\varkappa-\mu}\right\} = \chi_{\varkappa,\mu}(\Delta, n) \qquad (n = p^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots p_r^{\nu_r}),$$

so hat man die Relation:

$$191.)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta, n)}{n^s} = \frac{\eta(s-\mu)}{\zeta(s-\varkappa)}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich durch Multiplication mit $\zeta(s-\varkappa)$ sofort die Relation:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta,n)m^{\varkappa}}{(mn)^s} = \eta(s-\mu)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{r}\right) r^{\mu}}{r^s},$$

und daher hat man:

$$192.)\quad \sum_d \chi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right) d^{\varkappa} = \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^{\mu},$$

und speciell, wenn Δ und r einen gemeinsamen Theiler haben:

$$193.)\quad \sum_d \chi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right) d^{\varkappa} = 0.$$

Der auf der linken Seite der Gleichung 192.) stehende Ausdruck ist, wie man sieht, von $\varkappa$ unabhängig.

Man hat nun:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta,x)}{x^{\varkappa}} = \sum_{x,y=1}^{x.y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{xy}\right) \frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta,x)}{x^{\varkappa}}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon\left(\frac{n}{r}\right) \left(\sum_d \frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta,d)}{d^{\varkappa}}\right).$$

und daher ist nach 192.):

$$194.)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta,x)}{x^{\varkappa}} = \sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{\Delta}{x}\right) x^{\mu-\varkappa}$$

Ist speciell $\varkappa = \mu$, so verwandelt sich diese Relation in:

$$195.)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \frac{\chi_{\mu,\mu}(\Delta,x)}{x^{\mu}} = \sum_{x=1}^{x=n} \left(\frac{\Delta}{x}\right).$$

Ist Δ eine Fundamentaldiscriminante einer quadratischen Form, so ist die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Summe stets gleich Null, wenn n ein Vielfaches von Δ ist, und

kann daher, wie auch n beschaffen sein mag, dem absoluten Betrage nach $\frac{\Delta}{2}$ niemals überschreiten. Man hat also in diesem Falle:

$$196.)\quad \sum_{x=1}^{x=\varkappa\Delta}\left[\frac{\varkappa\Delta}{x}\right]\frac{\chi_{\mu,\mu}(\Delta,x)}{x^{\mu}}=0$$

$$197.)\quad \sum_{x=1}^{x=\varkappa\Delta}\eta_{\varkappa,\varkappa\Delta,x}\frac{\chi_{\mu,\mu}(\Delta,x)}{x^{\mu}}=0$$

$$198.)\quad -\frac{\Delta}{2}\leqq\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\frac{\chi_{\mu,\mu}(\Delta,x)}{x^{\mu}}\leqq\frac{\Delta}{2}.$$

Sind Δ und r zwei ungerade Zahlen, so folgt aus der Formel 192.) die folgende:

$$199.)\quad \Delta^{\mu}\sum_{d}\chi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta,\frac{r}{d}\right)d^{\varkappa}=(-1)^{\frac{(\Delta-1)(r-1)}{4}}r^{\mu}\sum_{d'}\chi_{\varkappa,\mu}\left(r,\frac{\Delta}{d'}\right)d'^{\varkappa},$$

wo die Summation bezüglich d über alle Divisoren von r, die Summation bezüglich d' über alle Divisoren von Δ zu erstrecken ist.

Man hat ferner:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta,n)\,\rho_{\varkappa,\tau}(m)}{(mn)^{s}}=\eta(s-\mu)\,\zeta(\tau s)$$
$$=\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\left(\frac{\Delta}{n}\right)n^{\mu}}{(nm^{\tau})^{s}}$$

und daher:

$$200.)\quad \sum_{d}\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta,d)\,\rho_{\varkappa,\tau}\left(\frac{r}{d}\right)=\sum_{d_\tau}\left(\frac{\Delta}{d_\tau}\right)d_{\tau}^{\mu}$$

$$201.)\quad \sum_{d}\chi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta,\frac{r}{d}\right)\rho_{\varkappa,\tau}(d)=\sum_{d}\chi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta,\frac{r}{d}\right)\rho_{\varkappa,\tau}(d)$$

$$202.)\quad \sum_{d}\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta,d)\,\psi_{\varkappa}\left(\frac{r}{d}\right)=\sum_{d}\left(\frac{\Delta}{d}\right)d^{\mu}$$

203.) $$\sum_d \chi_{0,\mu}(\Delta, d)\,\psi\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) d^{\mu}.$$

Es ist ferner:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta, n)\, m^{\varkappa+\lambda}}{(mn)^s} = \eta(s-\mu)\,\frac{\zeta(s-\varkappa-\lambda)}{\zeta(s-\varkappa)}$$
$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{n}\right) n^{\mu} m^{\varkappa}\, \varphi_{\varkappa+\lambda}(m)}{(mn)^s},$$

und daher hat man:

204.) $$\sum_d \chi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right) d^{\varkappa+\lambda} = r^{\varkappa} \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) \varphi_{\varkappa+\lambda}\left(\frac{r}{d}\right) d^{\mu-\varkappa},$$

aus welcher Relation, falls Δ und r keinen gemeinsamen Theiler haben, die folgende sich ergibt:

205. $$\sum_d \chi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right) d^{\varkappa+\lambda} = r^{\varkappa} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) \varphi_{\varkappa+\lambda}\left(\frac{r}{d}\right) d^{\mu-\varkappa}.$$

Man hat auch:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta, n)\, \varphi_{\varkappa-\lambda}(m)\, m^{\lambda}}{(mn)^s} = \frac{\eta(s-\mu)}{\zeta(s-\lambda)}$$
$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\chi_{\lambda,\mu}(\Delta, r)}{r^s}$$

und demnach:

206.) $$\sum_d \chi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right) \varphi_{\varkappa-\lambda}(d)\, d^{\lambda} = \chi_{\lambda,\mu}(\Delta, r) \quad (\lambda < \varkappa).$$

Um einen analogen Ausdruck der zahlentheoretischen Function $\chi_{\lambda,\mu}(\Delta, r)$ für $\lambda \geqq \varkappa$ zu erhalten, multiplicire ich die Gleichung 191.) mit $\frac{\zeta(s-\varkappa)}{\zeta(s-\varkappa-\lambda)}$, wodurch folgende Relation entsteht:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{(-1)^{(\lambda+1)\tilde{\omega}(m)} \pi^{\lambda}(m)\varphi_{\lambda}(m) m^{\varkappa-\lambda} \chi_{\varkappa,\mu}(\Delta,n)}{(mn)^s} =$$

$$= \frac{\eta(s-\mu)}{\zeta(s-\varkappa-\lambda)}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\chi_{\varkappa+\lambda,\mu}(\Delta,r)}{r^s},$$

aus welcher folgt:

$$207.)\quad \sum_d (-1)^{(\lambda+1)\tilde{\omega}(d)} \chi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta,\frac{r}{d}\right) \pi^{\lambda}(d)\varphi_{\lambda}(d) d^{\varkappa-\lambda} = \chi_{\varkappa+\lambda,\mu}(\Delta,r),$$

oder durch Vertauschung von $\varkappa$ und λ:

$$208.)\quad \sum_d (-1)^{(\varkappa+1)\tilde{\omega}(d)} \chi_{\lambda,\mu}\left(\Delta,\frac{r}{d}\right) \pi^{\varkappa}(d)\varphi_{\varkappa}(d) d^{\lambda-\varkappa} = \chi_{\varkappa+\lambda,\mu}(\Delta,r).$$

Es ist:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{m}\right) m^{\mu} n^{\varkappa} \mu(n)}{(mn)^s} = \frac{\eta(s-\mu)}{\zeta(s-\varkappa)}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta,r)}{r^s}$$

und daher:

$$209.)\quad \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) \mu\left(\frac{r}{d}\right) d^{\mu-\varkappa} = \frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta,r)}{r^{\varkappa}}$$

und, falls Δ und r zu einander relativ prim sind:

$$210.)\quad \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) \mu(d) d^{\varkappa-\mu} = \left(\frac{\Delta}{r}\right) \frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta,r)}{r^{\mu}}$$

Ist speciell $\varkappa = \mu$, so erhält man aus 209.) und 210.):

$$211.)\quad \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) \mu\left(\frac{r}{d}\right) = \frac{\chi_{\mu,\mu}(\Delta,r)}{r^{\mu}}$$

$$212.)\quad \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) \mu(d) = \left(\frac{\Delta}{r}\right) \frac{\chi_{\mu,\mu}(\Delta,r)}{r^{\mu}}$$

Aus der Gleichung 210.) ergibt sich sofort die neue Formel:

$$213.)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\left(\frac{\Delta}{x}\right)\mu(x)x^{\varkappa-\mu}=\sum_{x=1}^{x=n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta,x)}{x^{\mu}}$$

falls Δ zu allen Zahlen von 1 bis n relativ prim ist.

Man hat ferner:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta,n)\,\omega(m)\,m^{\varkappa}}{(m\,n)^{s}}=\frac{\eta(s-\mu)\,\zeta(s-\varkappa)}{\zeta(2s-2\varkappa)}$$

Nun ist:

$$\frac{\eta(s-\mu)\,\zeta(s-\varkappa)}{\zeta(2s-2\varkappa)}=$$

$$=\prod_p\frac{1+\frac{p^{\varkappa}}{p^{s}}}{1-\left(\frac{\Delta}{p}\right)\frac{p^{\mu}}{p^{s}}}$$

$$=\prod_p\left\{\left(1+\frac{p^{\varkappa}}{p^{s}}\right)\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left(\frac{\Delta}{p}\right)^{\lambda}\frac{p^{\lambda\mu}}{p^{\lambda s}}\right\}$$

$$=\prod_p\left\{1+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{\left(\frac{\Delta}{p}\right)^{\lambda-1}p^{\lambda\mu}\left\{\left(\frac{\Delta}{p}\right)+p^{\varkappa-\mu}\right\}}{p^{\lambda s}}\right\}$$

$$=\sum_{\nu_1,\nu_2\ldots}\frac{\left(\frac{\Delta}{p_1}\right)^{\nu_1-1}\left(\frac{\Delta}{p_2}\right)^{\nu_2-1}\cdots\left\{\left(\frac{\Delta}{p_1}\right)+p_1^{\varkappa-\mu}\right\}\left\{\left(\frac{\Delta}{p_2}\right)+p_2^{\varkappa-\mu}\right\}\cdots}{(p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\ldots)^{s-\mu}}$$

Setzt man nun:

$$214.)\quad n^{\mu}\left(\frac{\Delta}{p_1}\right)^{\nu_1-1}\left(\frac{\Delta}{p_2}\right)^{\nu_2-1}\cdots\left(\frac{\Delta}{p^{r}}\right)^{\nu_r-1}\left\{\left(\frac{\Delta}{p_1}\right)+p_1^{\varkappa-\mu}\right\}\left\{\left(\frac{\Delta}{p_2}\right)+p_2^{\varkappa-\mu}\right\}$$
$$\cdots\left\{\left(\frac{\Delta}{p_r}\right)+p_r^{\varkappa-\mu}\right\}=\psi_{\varkappa,\mu}(\Delta,n)\qquad (n=p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\ldots p_r^{\nu_r}),$$

so erhält man:

$$215.)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\psi_{\varkappa,\mu}(\Delta,n)}{n^{s}}=\frac{\eta(s-\mu)\,\zeta(s-\varkappa)}{\zeta(2s-2\varkappa)}.$$

Man hat also die Relation:

$$216.)\quad \sum_d \chi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right) \omega(d)\, d^{\varkappa} = \psi_{\varkappa,\mu}(\Delta, r).$$

Multiplicirt man die Gleichung 215.) mit $\frac{\zeta(2s-2\varkappa)^{\beta}}{\zeta(s-\varkappa)^{\beta+1}}$, so erhält man:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\psi_{\varkappa,\mu}(\Delta, n)\lambda(m) f_{\beta-1}(m)\,\psi(m^2\pi^{\beta-2}(m))\, m^{\varkappa}}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(m)}(mn)^s} =$$

$$= \eta(s-\mu)\,\frac{\zeta(2s-2\varkappa)^{\beta-1}}{\zeta(s-\varkappa)^{\beta}}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{n}\right) n^{\mu}\, m^{\varkappa}\,\lambda(m) f_{\beta-2}(m)\,\psi(m^2\pi^{\beta-3}(m))}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(m)}(mn)^s}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta, n)\lambda(m) f_{\beta-1}(m)\, m^{\varkappa}}{(mn)^s}$$

und daher hat man die Relationen:

$$217.)\quad \sum_d \frac{\psi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\lambda(d) f_{\beta-1}(d)\,\psi(d^2\pi^{\beta-2}(d))\, d^{\varkappa}}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(d)}} =$$

$$= r^{\varkappa}\sum_d \frac{\left(\frac{\Delta}{d}\right)\lambda\left(\frac{r}{d}\right) f_{\beta-2}\left(\frac{r}{d}\right)\psi\left(\frac{r^2}{d^2}\pi^{\beta-3}\left(\frac{r}{d}\right)\right) d^{\mu-\varkappa}}{(\beta-2)^{\bar{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)}}$$

$$218.)\quad \sum_d \frac{\psi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\lambda(d) f_{\beta-1}(d)\,\psi(d^2\pi^{\beta-2}(d))\, d^{\varkappa}}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(d)}} =$$

$$= \sum_d \chi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\lambda(d) f_{\beta-1}(d)\, d^{\varkappa}.$$

Von den speciellen Fällen dieser Formeln mögen die folgenden erwähnt werden:

$$219.)\quad \sum_d \psi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\mu(d)\, d^{\varkappa} \qquad = r^{\varkappa}\sum_{d_2}\left(\frac{\Delta}{d_2}\right)\mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) d_2^{\,\mu-\varkappa}$$

$$220.)\quad \sum_d \psi_{x,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\lambda(d)\,\omega(d)\,d^x = r^x \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\mu\left(\frac{r}{d}\right) d^{\mu-}$$

$$221.)\quad \sum_d \psi_{x,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\lambda(d)\,\psi(d^2)\,d^x = r^x \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\lambda\left(\frac{r}{d}\right)\omega\left(\frac{r}{d}\right) d^{\mu-x}$$

$$222.)\quad \sum_d \psi_{x,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\lambda(d)\,\psi^2(d)\,d^x = r^x \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\lambda\left(\frac{r}{d}\right)\psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right) d^{\mu-x}$$

$$223.)\quad \sum_d \psi_{x,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\mu(d)\,d^x \qquad = r^x \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\mu^2(d)\,d^{\mu-x}$$

$$224.)\quad \sum_d \psi_{x,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\lambda(d)\,\omega(d)\,d^x = \chi_{x,\mu}(\Delta, r)$$

$$225.)\quad \sum_d \psi_{x,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\lambda(d)\,\psi(d^2)\,d^x = \sum_d \chi_{x,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\lambda(d)\,d^x$$

$$226.)\quad \sum_d \psi_{x,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\lambda(d)\,\psi^2(d)\,d^x = \sum_d \chi_{x,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\lambda(d)\,\psi(d)\,d^x.$$

Wenn Δ und r keinen gemeinsamen Theiler haben, ergeben sich aus den Gleichungen 219.)—223.) die folgenden:

$$227.)\quad \sum_d \psi_{x,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\mu(d)\,d^x \qquad = r^x\left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_{d_2} \left(\frac{\Delta}{\frac{r}{d_2}}\right)\mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) d_2^{\,\mu-x}$$

$$228.)\quad \sum_d \psi_{x,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\lambda(d)\,\omega(d)\,d^x = r^\mu\left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\mu(d)\,d^{x-\mu}$$

$$229.)\quad \sum_d \psi_{x,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\lambda(d)\,\psi(d^2)\,d^x = r^\mu\left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\lambda(d)\,\omega(d)\,d^{x-\mu}$$

$$230.)\quad \sum_d \psi_{x,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\lambda(d)\,\psi^2(d)\,d^x = r^\mu\left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\lambda(d)\,\psi(d^2)\,d^{x-\mu}$$

$$231.)\quad \sum_d \psi_{x,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\mu(d)\,d^x \qquad = r^\mu\left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\mu^2\left(\frac{r}{d}\right) d^{x-\mu}.$$

Multiplicirt man ferner die Gleichung 215.) der Reihe nach mit: $\zeta(2-s)\ \ \zeta(2s-2x)$, $\zeta(s-x)^3$, $\dfrac{\zeta(s)\,\zeta(2s-2x)}{\zeta(2s)\,\zeta(s-x)}$, $\left(\dfrac{\zeta(2s-2x)}{\zeta(s-x)}\right)^3$, so erhält man die Gleichungen:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\psi_{\varkappa,\mu}(\Delta, n)\, \rho_{2\varkappa,\tau}(m)}{(m^2 n)^s} = \eta(s-\mu) \,.\, \zeta(2\tau s)\, \zeta(s-\varkappa)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{m}\right) m^{\mu} \rho_{\varkappa,2\tau}(n)}{(mn)^s}$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\psi_{\varkappa,\mu}(\Delta, n) f_{\beta}(m) m^{\varkappa}}{(mn)^s} = \eta(s-\mu) . \frac{\zeta(s-\varkappa)^{\beta+1}}{\zeta(2s-2\varkappa)}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{n}\right) n^{\mu} m^{\varkappa} f_{\beta-1}(m)\, \psi(m^2 \pi^{\beta-2}(m))}{(\beta-1)^{\tilde{\omega}(m)} (mn)^s}.$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\psi_{\varkappa,\mu}(\Delta, n) \lambda(m) \varphi_{\varkappa}(m)}{(mn)^s} = \frac{\eta(s-\mu)\, \zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\psi_{0,\mu}(\Delta, r)}{r^s}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{m}\right) m^{\mu} \mu^2(n)}{(mn)^s}$$

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\psi_{\varkappa,\mu}(\Delta, n)\, \lambda(m) f_{\beta}(m) m^{\varkappa}}{(mn)^s} = \eta(s-\mu) \left(\frac{\zeta(2s-2\varkappa)}{\zeta(s-\varkappa)}\right)^{\beta-1}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{m}\right) m^{\mu} \lambda(n) f_{\beta-1}(n) n^{\varkappa}}{(mn)^s}$$

aus welchen sich folgende Relationen ergeben:

232.) $$\sum_{d_2} \psi_{\varkappa,\mu}(\Delta, d_2)\, \rho_{2\varkappa,\tau}\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \sum_{d} \left(\frac{\Delta}{d}\right) d^{\mu} \rho_{\varkappa,2\tau}\left(\frac{r}{d}\right)$$

233.) $$\sum_{d} \psi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right) f_{\beta}(d)\, d^{\varkappa} = r^{\varkappa} \sum_{d} \frac{\left(\frac{\Delta}{d}\right) f_{\beta-1}\left(\frac{r}{d}\right) \psi\left(\frac{r^2}{d^2} \pi^{\beta-2}\left(\frac{r}{d}\right)\right) d^{\mu-\varkappa}}{(\beta-1)^{\tilde{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)}}$$

234.) $$\sum_{d} \psi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right) \lambda(d)\, \varphi_{\varkappa}(d) = \psi_{0,\mu}(\Delta, r)$$

$$235.)\quad \sum_d \psi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta,\frac{r}{d}\right)\lambda(d)\varphi_\varkappa(d) = \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) d^\mu \mu^2\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$236.)\quad \sum_d \psi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta,\frac{r}{d}\right)\lambda(d) f_\beta(d) d^\varkappa = r^\varkappa \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\lambda\left(\frac{r}{d}\right) f_{\beta-1}\left(\frac{r}{d}\right) d^{\mu-\varkappa}$$

Von den speciellen Fällen dieser Formeln mögen die folgenden erwähnt werden:

$$237.)\quad \sum_{d_2} \psi_{\varkappa,\mu}(\Delta,d_2)\,\psi_{2\varkappa}\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) = \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) d^\mu \rho_{\varkappa,2}\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$238.)\quad \sum_d \psi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta,\frac{r}{d}\right) d^\varkappa = r^\varkappa \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\omega\left(\frac{r}{d}\right) d^{\mu-\varkappa}$$

$$239.)\quad \sum_d \psi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta,\frac{r}{d}\right)\psi(d)\, d^\varkappa = r^\varkappa \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right) d^{\mu-\varkappa}$$

$$240.)\quad \sum_d \psi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta,\frac{r}{d}\right) f_3(d) d^\varkappa = r^\varkappa \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\psi^2\left(\frac{r}{d}\right) d^{\mu-\varkappa}$$

$$241.)\quad \sum_d \psi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta,\frac{r}{d}\right)\lambda(d)\, d^\varkappa = \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^\mu$$

$$242.)\quad \sum_d \psi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta,\frac{r}{d}\right)\lambda(d)\,\psi(d)\, d^\varkappa = r^\varkappa \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\lambda\left(\frac{r}{d}\right) d^{\mu-\varkappa}$$

$$243.)\quad \sum_d \psi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta,\frac{r}{d}\right)\lambda(d) f_3(d)\, d^\varkappa = r^\varkappa \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\lambda\left(\frac{r}{d}\right)\psi\left(\frac{r}{d}\right) d^{\mu-\varkappa}$$

$$244.)\quad \sum_d \frac{\psi_{\varkappa,\mu}(\Delta,d)\,\lambda(d)}{d^\varkappa} = \lambda(r)\left(\frac{\Delta}{r}\right) r^{\mu-\varkappa}.$$

Schreibt man in der Gleichung 215.) für $s, \varkappa : \tau s, \tau\varkappa$ und multiplicirt sodann mit $\frac{\zeta(2s)\,\zeta(2\tau s-2\tau\varkappa)}{\zeta(s)\,\zeta(\tau s-\tau\varkappa)}$, so erhält man:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\psi_{\tau\varkappa,\mu}(\Delta,n)\lambda(m)P_{\varkappa,\tau}(m)}{(m\,n^\tau)^s} = \eta(\tau s-\mu)\,.\,\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n)\left(\frac{\Delta}{m}\right) m^\mu}{(nm^\tau)^s}$$

und daher ist:

$$245.)\quad \sum_{d_\tau} \psi_{\tau\varkappa,\mu}\left(\Delta, \sqrt[\tau]{\frac{r}{d_\tau}}\right) \lambda(d_\tau) P_{\varkappa,\tau}(d_\tau) = \sum_{d_\tau} \lambda(d_\tau) \left(\frac{\Delta}{\sqrt[\tau]{\frac{r}{d_\tau}}}\right) \left(\frac{r}{d_\tau}\right)^{\frac{\mu}{\tau}}$$

Ist speciell $\tau = 1$, so hat man:

$$246.)\quad \sum_d \psi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right) \lambda(d)\, \psi_\varkappa(d) = \sum_d \lambda\left(\frac{r}{d}\right) \left(\frac{\Delta}{d}\right) d^\mu,$$

und falls Δ und r keinen gemeinsamen Theiler haben:

$$247.)\quad \sum_d \psi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right) \lambda(d)\, \psi_\varkappa(d) = \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^\mu \sum_d \frac{\lambda(d)\left(\frac{\Delta}{d}\right)}{d^\mu}$$

Man hat auch:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\psi_{\varkappa,\mu}(\Delta, n)\lambda(m)\psi_\varkappa(m)}{(mn)^s} = \frac{\eta(s-\mu)}{\zeta(s)}\zeta(2s)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\chi_{0,\mu}(\Delta, n)}{(nm^2)^s}$$

und daher:

$$248.)\quad \sum_d \psi_{\varkappa,\mu}\left(\Delta, \frac{r}{d}\right) \lambda(d)\psi_\varkappa(d) = \sum_{d_2} \chi_{0,\mu}(\Delta, d_2).$$

Berücksichtigt man, dass $\psi_{0,0}(\Delta, n)$ die Anzahl der Lösungen der Congruenz:

$$x^2 \equiv \Delta \,(\text{mod. } n)$$

ist, so erhält man aus den obigen Formeln folgende Theoreme:

Unter denjenigen Divisoren d_1 einer Zahl r, welche durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar sind, übertrifft die Anzahl derjenigen, für welche das verallgemeinerte Legendre'sche Symbol $\left(\frac{\Delta}{d_1}\right)$ den Werth $+1$ hat, die Anzahl derjenigen, für welche dieses Zeichen gleich -1 ist, um eben so viel, als die Anzahl der Lösungen derjenigen von den Congruenzen:

$$x^2 \equiv \Delta \,(\text{mod. } d_1)$$

in welchen der Modul einen aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primfactoren zusammengesetzten complementären Divisor besitzt, die Anzahl der Lösungen der übrigen Congruenzen übertrifft, deren Module complementäre Divisoren ohne quadratischen Theiler besitzen.

Die Anzahl der Lösungen der Congruenzen:

$$x^2 \equiv (\text{mod. } d),$$

wo d alle Divisoren einer Zahl r durchläuft, ist gleich der Anzahl der Zerlegungen derjenigen Divisoren von r, für welche das Symbol $\left(\frac{\Delta}{d'}\right)$, wo $d'd = r$ ist, den Werth $+1$ hat, in zwei theilerfremde Zahlen, vermindert um die Anzahl der entsprechenden Zerlegungen jener Divisoren, für deren complementären Divisor d' das Zeichen $\left(\frac{\Delta}{d'}\right)$ den Werth -1 hat.

Diejenigen Divisoren d der zu Δ theilerfremden Zahl r, für deren complementären Divisor d' das Symbol $\left(\frac{\Delta}{d'}\right)$ gleich $+1$ ist, haben um so viele Theiler mehr, als die übrigen Divisoren, als die Summe beträgt, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Theiler jedes Divisors d von r mit der Anzahl der Lösungen der Congruenz:

$$x^2 \equiv \Delta \left(\text{mod. } \frac{r}{d}\right)$$

multiplicirt und die so entstandenen Zahlen addirt.

Bezeichnet d einen Divisor von r, so haben unter den Congruenzen:

$$x^2 \equiv \Delta (\text{mod. } d)$$

diejenigen, deren Modul einen aus einer geraden Anzahl von Primfactoren zusammengesetzten complementären Divisor besitzt, eine Lösung mehr oder weniger, als die übrigen Congruenzen, je nachdem das verallgemeinerte Legendre'sche Symbol $\left(\frac{\Delta}{r}\right)$ den Werth $+1$ oder -1 hat.

Es ist ferner:

$$\sum_{m,\, n=1}^{m,\, n=\infty} \frac{\psi_{0,0}(\Delta, n)}{(nm^2)^s} = \eta(s)\zeta(s)$$

$$= \sum_{m,\, n=1}^{m,\, n=\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{n}\right)}{(mn)^s}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)}{r^s}$$

Nun ist aber:

$$\tau \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) = \varphi(\Delta, r)$$

die Anzahl der Darstellungen von r durch das System der quadratischen Formen der Discriminante Δ, wenn τ die Anzahl der Transformationen einer Form der Discriminante Δ in sich selbst bezeichnet.

Man hat daher:

249.) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi(\Delta, n)}{n^s} = \tau\zeta(s)\eta(s)$$

250.) $$\sum_{m,\, n=1}^{m,\, n=\infty} \frac{\psi_{0,0}(\Delta, n)}{(nm^2)^s} = \frac{1}{\tau}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi(\Delta, n)}{n^s},$$

und demnach:

251.) $$\sum_{d_2} \psi_{0,0}(\Delta, d_2) = \frac{\varphi(\Delta, r)}{\tau}.$$

Da:

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}\,]} \left[\frac{n}{x^2}\right] = \sum_{x=1}^{x=n} \rho_{0,2}(x)$$

$$= \bar{\rho}_{0,2}(n)$$

ist, so hat man:

$$\sum_{y=1}^{y=n} \bar{\rho}_{0,2}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right) \psi_{0,0}(\Delta, y) = \sum_{x,\, y=1}^{x,\, y=n} \left[\frac{n}{x^2 y}\right] \psi_{0,0}(\Delta, y)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \left[\frac{n}{r}\right] \left(\sum_{d_2} \psi_{0,0} (\Delta, d_2) \right)$$

und daher nach der letzten Relation:

$$252.) \quad \tau \sum_{y=1}^{y=n} \bar{\rho}_{0,2} \left(\left[\frac{n}{x}\right] \right) \psi_{0,0}(\Delta, y) = \sum_{y=0}^{y=n} \left[\frac{n}{y}\right] \varphi(\Delta, y)$$

Aus der Gleichung 251.) folgt bekanntlich das Theorem:

Jede Zahl r lässt sich so oft durch das System der quadratischen Formen der Discriminante Δ darstellen, als das Product aus der Anzahl der Transformationen einer Form der Discriminante Δ in sich selbst und der Anzahl der Lösungen der Congruenzen:

$$x^2 \equiv \Delta (\text{mod. } d_2)$$

beträgt, wo d_2 die verschiedenen Divisoren von r durchläuft, deren complementäre Divisoren Quadrate sind.

Als Corollare dieses Theorems mögen folgende Sätze erwähnt werden:

Jede ungerade oder einfachgerade Zahl r lässt sich viermal so oft durch die Form x^2+y^2 darstellen, als diejenigen ihrer Divisoren, welche nur Primtheiler von der Form $4s+1$ und einen quadratischen complementären Divisor besitzen, sich im Producte von zwei theilerfremden Zahlen zerlegen lassen.

Diejenigen Theiler einer ungeraden oder einfachgeraden Zahl r mit quadratischem complementären Divisor, deren sämmtliche Primtheiler die Form $4s+1$ haben, lassen sich eben so oft in ein Product von zwei zu einander relativ primen Zahlen zerlegen, als der Überschuss der Anzahl der Divisoren von r von der Form $4s+1$ über die Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren beträgt.

Diejenigen Theiler einer ungeraden Zahl r oder einer einfachgeraden Zahl $2r$ mit complementärem quadratischen Divisor, deren sämmtliche Primtheiler die Form $4s+1$ haben, lassen sich eben so oft in zwei Zahlen ohne gemeinsamen Theiler zerlegen, als der Überschuss der Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{r+1}{2}, \frac{r+2}{4}, \frac{r+3}{6}, \ldots, \frac{2r}{2r}$$

enthalten sind, über die Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{r}{2}, \frac{r+1}{4}, \frac{r+2}{6}, \ldots, \frac{2r-2}{2r-2}$$

enthalten sind, beträgt.

Jede ungerade Zahl lässt sich doppelt so oft durch die Form x^2+2y^2 darstellen, als die Anzahl der Darstellungen derjenigen von ihren Divisoren mit quadratischem complementären Divisor, deren Primtheiler eine der Formen $8s+1$, $8s+3$ besitzen, als Producte von zwei theilerfremden Zahlen beträgt.

Jede ungerade Zahl lässt sich doppelt so oft durch die Form x^2+3y^2 darstellen, als die Anzahl der Darstellungen derjenigen von ihren Divisoren mit quadratischem complementären Divisor, welche nur Primfactoren von der Form $3s+1$ besitzen, als Producte von zwei theilerfremden Zahlen beträgt.

Da

$$\left[\sqrt{m}\right] = \left[\sqrt{m-1}\right] + \sigma$$

ist, wo σ die Werthe 1 oder 0 hat, je nachdem m ein Quadrat ist oder nicht, so gibt die Differenz:

$$\sum_{x=0}^{x=\left[\sqrt{\frac{m}{a}}\right]} \left[\sqrt{m-ax^2}\right] - \sum_{x=0}^{x=\left[\sqrt{\frac{m-1}{a}}\right]} \left[\sqrt{m-1-ax^2}\right]$$

die Anzahl der Zerlegungen der Zahl m in ein einfaches und ein a-faches Quadrat an.

Man hat daher, falls r kein Quadrat ist, die Relationen:

$$8\sum_{x=0}^{x=\left[\sqrt{r}\right]} \left[\sqrt{r-x^2}\right] - 8\sum_{x=0}^{x=\left[\sqrt{r-1}\right]} \left[\sqrt{r-1-x^2}\right] =$$

$$= \varphi(-4, r)$$

$$= 4\sum_{d_2} \psi_{0,0}(-4, d_2)$$

$$4\sum_{x=0}^{x=\left[\sqrt{\frac{r}{2}}\right]}\left[\sqrt{r-2x^2}\right]-4\sum_{x=0}^{x=\sqrt{\left[\frac{r-1}{2}\right]}}\left[\sqrt{r-1-2x^2}\right]=$$

$$=\varphi(-8,r)$$

$$=2\sum_{d_2}\psi_{0,0}(-8,d_2)$$

$$4\sum_{x=0}^{x=\left[\sqrt{\frac{r}{3}}\right]}\left[\sqrt{r-3x^2}\right]-4\sum_{x=0}^{x=\left[\sqrt{\frac{r-1}{3}}\right]}\left[\sqrt{r-1-3x^2}\right]=$$

$$=\varphi(-12,r)$$

$$=2\sum_{d_2}\psi_{0,0}(-12,d_2),$$

von denen die erste auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$8\sum_{x=1}^{x=r}(-1)^{x-1}\left[\frac{r}{2x-1}\right]-8\sum_{x=1}^{x=r-1}(-1)^{x-1}\left[\frac{r-1}{2x-1}\right]=$$

$$=\varphi(-4,r).$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich sofort die folgenden Formeln:

253.) $$8\sum_{x=0}^{x=[\sqrt{r}]}\left[\sqrt{r-x^2}\right]=\sum_{x=1}^{x=r}\varphi(-4,x)+4$$

254.) $$4\sum_{x=0}^{x=\left[\sqrt{\frac{r}{2}}\right]}\left[\sqrt{r-2x^2}\right]=\sum_{x=1}^{x=r}\varphi(-8,x)$$

255.) $$4\sum_{x=0}^{x=\left[\sqrt{\frac{r}{3}}\right]}\left[\sqrt{r-3x^2}\right]=\sum_{x=1}^{x=r}\varphi(-12,x)$$

256.) $$8\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{r+1}{2}\right]}(-1)^{x-1}\left[\frac{r}{2x-1}\right]=\sum_{x=1}^{x=r}\varphi(-4,x)+4$$

257.) $$\sum_{x=1}^{x=r}\varphi(-4,x)+4\sum_{x=1}^{x=r}(-1)^{\left[\frac{r+x}{2x}\right]}=4(r-1).$$

Aus der Gleichung 249.) folgen ferner die Relationen:

$$\frac{1}{\tau}\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\varphi(\Delta,n)f_{\beta-2}(m)\,\psi(m^2\pi^{\beta-3}(m))}{(\beta-2)^{\tilde\omega(m)}(mn)^s}=\eta(s)\,\frac{\zeta(s)^{\beta+1}}{\zeta(2s)}$$

$$=\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\left(\frac{\Delta}{m}\right)f_{\beta-1}(n)\,\psi(n^2\pi^{\beta-2}(n))}{(\beta-1)^{\tilde\omega(n)}(mn)^s}$$

$$=\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{f_\beta(m)\,\psi_{0,0}(\Delta,n)}{(mn)^s}$$

$$\frac{1}{\tau}\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\varphi(\Delta,n)f_\beta(m)}{(mn)^s}=\eta(s)\,\zeta(s)^{\beta+1}$$

$$=\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\left(\frac{\Delta}{m}\right)f_{\beta+1}(n)}{(mn)^s}$$

$$\frac{1}{\tau}\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\varphi(\Delta,n)\,\varphi_\varkappa(m)}{(mn)^s}=\zeta(s-\varkappa)\,\eta(s)$$

$$=\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\left(\frac{\Delta}{n}\right)m^\varkappa}{(mn)^s}$$

$$\frac{1}{\tau}\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\varphi(\Delta,n)\,\lambda(m)}{(mn)^s}=\eta(s)\,\zeta(2s)$$

$$=\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\left(\frac{\Delta}{n}\right)}{(nm^2)^s}$$

$$\frac{1}{\tau}\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\varphi(\Delta,n)\,\lambda(m)\,f_{\beta-2}(m)\,\psi(m^2\pi^{\beta-3}(m))}{(\beta-2)^{\tilde\omega(m)}(mn)^s}=\eta(s)\left(\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\right)^{\beta-1}$$

$$=\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\left(\frac{\Delta}{n}\right)\lambda(m)f_{\beta-1}(m)}{(mn)^s}$$

$$\frac{1}{\tau}\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\varphi(\Delta,n)m^{\varkappa}}{(mn^{\lambda})^{s}}=\zeta(\lambda s)\zeta(s-\varkappa).\eta(\lambda s)$$

$$=\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\left(\frac{\Delta}{n}\right)\rho_{\varkappa,\lambda}(m)}{(mn^{\lambda})^{s}}$$

$$\frac{1}{\tau}\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\varphi(\Delta,n)\mu(m)m^{\varkappa}}{(mn)^{s}}=\eta(s).\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-\varkappa)}$$

$$=\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{(-1)^{(\varkappa+1)\,\bar{\omega}(n)}\,\pi^{\varkappa}(n)\varphi_{\varkappa}(n)\left(\frac{\Delta}{m}\right)}{(mn)^{s}m^{\varkappa}}$$

$$=\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\chi_{\varkappa,0}(\Delta,n)}{(mn)^{s}}$$

$$\frac{1}{\tau}\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\varphi(\Delta,n)\mu(m)}{(nm^{2})^{s}}=\frac{\eta(s)\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

$$=\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{\psi_{0,0}(\Delta,r)}{r^{s}}$$

$$\frac{1}{\tau}\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\varphi(\Delta,n)\mu^{2}(m)}{(mn^{2})^{s}}=\eta(2s)\,\zeta(s)$$

$$=\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\left(\frac{\Delta}{n}\right)}{(mn^{2})^{s}}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich sofort folgende Relationen:

$$258.)\quad \sum_{d}\frac{\varphi\left(\Delta,\frac{r}{d}\right)f_{\beta-2}(d)\,\psi(d^{2}\pi^{\beta-3}(d))}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(d)}}=$$

$$=\tau\sum_{d}\frac{\left(\frac{\Delta}{d}\right)f_{\beta-1}\left(\frac{r}{d}\right)\psi\left(\frac{r^{2}}{d^{2}}\pi^{\beta-2}\left(\frac{r}{d}\right)\right)}{(\beta-1)^{\bar{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)}}$$

$$259.)\quad \sum_{d}\varphi(\Delta,d)f_{\beta}\left(\frac{r}{d}\right)\qquad=\tau\sum_{d}\left(\frac{\Delta}{d}\right)f_{\beta+1}\left(\frac{r}{d}\right)$$

260.) $\sum_d \varphi(\Delta, d)\varphi_x\left(\frac{r}{d}\right) \qquad = \tau r^x \sum_d \frac{\left(\frac{\Delta}{d}\right)}{d^x}$

261.) $\sum_d \varphi(\Delta, d)\lambda\left(\frac{r}{d}\right) \qquad = \tau \sum_{d_2} \left(\frac{\Delta}{d_2}\right)$

262.) $\sum_d \varphi(\Delta, d)\lambda(d) \qquad = \tau \lambda(r) \sum_{d_2} \left(\frac{\Delta}{d_2}\right)$

263.) $\sum_d \frac{\varphi\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\lambda(d) f_{\beta-2}(d)\psi(d^2\pi^{\beta-3}(d))}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(d)}} =$

$$= \tau \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\lambda\left(\frac{r}{d}\right) f_{\beta-1}\left(\frac{r}{d}\right)$$

264.) $\sum_{d_\lambda} \varphi\left(\Delta, \sqrt[\lambda]{\frac{r}{d_\lambda}}\right) d_\lambda^x \qquad = \tau \sum_{d_\lambda} \left(\frac{\Delta}{\sqrt[\lambda]{\frac{r}{d_\lambda}}}\right) \rho_{x,\lambda}(d_\lambda)$

265.) $\sum_d \varphi\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\mu(d) d^x =$

$$= \frac{\tau}{r^x} \sum_d (-1)^{(x+1)\bar{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)} \left(\frac{\Delta}{d}\right) \pi^x\left(\frac{r}{d}\right) \varphi_x\left(\frac{r}{d}\right) d^x$$

266.) $\sum_d \varphi\left(\Delta, \frac{r}{d}\right)\mu(d) d^x \qquad = \tau \sum_d \chi_{x,0}(\Delta, d)$

267.) $\sum_{d_2} \varphi\left(\Delta, \sqrt{\frac{r}{d_2}}\right)\mu^2(d_2) = \tau \sum_{d_2} \left(\frac{\Delta}{\sqrt{\frac{r}{d_2}}}\right)$

268.) $\sum_d \varphi(\Delta, d_2)\mu\left(\sqrt{\frac{r}{d_2}}\right) \qquad = \tau \psi_{0,0}(\Delta, r)$

269.) $\sum_d \varphi(\Delta, d)\mu^2\left(\frac{r}{d}\right) \qquad = \tau \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\omega\left(\frac{r}{d}\right)$

270.) $\sum_d \varphi(\Delta, d)\omega\left(\frac{r}{d}\right) \qquad = \tau \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right)$

271.) $\sum_d \varphi(\Delta, d)\psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right) \qquad = \tau \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)\psi^2\left(\frac{r}{d}\right)$

$$272.)\quad \sum_d \varphi(\Delta, d) = \tau \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) \psi\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$273.)\quad \sum_d \varphi(\Delta, d) \lambda\left(\frac{r}{d}\right) \omega\left(\frac{r}{d}\right) = \tau \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) \lambda\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$274.)\quad \sum_d \varphi(\Delta, d) \lambda\left(\frac{r}{d}\right) \psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right) = \tau \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) \lambda\left(\frac{r}{d}\right) \psi\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$275.)\quad \sum_d \varphi(\Delta, d) \lambda\left(\frac{r}{d}\right) \psi^2\left(\frac{r}{d}\right) = \tau \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) \lambda\left(\frac{r}{d}\right) f_3\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$276.)\quad \sum_d \varphi\left(\Delta, \frac{r}{d}\right) d^x = \tau \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) \psi_x\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$277.)\quad \sum_d \varphi\left(\Delta, \frac{r}{d}\right) \mu(d) = \tau \left(\frac{\Delta}{r}\right)$$

Von den in diesen Formeln enthaltenen arithmetischen Sätzen mögen die folgenden besonders hervorgehoben werden:

Die Anzahl der Darstellungen derjenigen Divisoren einer Zahl, deren complementärer Divisor aus einer geraden Anzahl von Primzahlen zusammengesetzt ist, durch das System der quadratischen Formen der Discriminante Δ übertrifft die Anzahl der analogen Darstellungen der übrigen Divisoren um das Product aus der Anzahl der Transformationen einer Form der Discriminante Δ in sich selbst und dem Uberschusse der Anzahl derjenigen Divisoren d_2 mit quadratischem complementären Divisor, für welche das verallgemeinerte Legendre'sche Symbol $\left(\frac{\Delta}{d_2}\right)$ den Werth $+1$ hat, über die Anzahl der Divisoren d_2, für welche das Zeichen gleich -1 ist.

Die Anzahl der Darstellungen derjenigen Divisoren einer ungeraden oder einfach geraden Zahl, deren complementärer Divisor aus einer geraden Anzahl von Primzahlen zusammengesetzt ist, durch die quadratische Form x^2+y^2 übertrifft die Anzahl der analogen Darstellungen der übrigen Divisoren um den vierfachen Überschuss der Anzahl derjenigen Divisoren mit quadratischem complementären Divisor, welche die Form $4s+1$

besitzen, über die Anzahl der genannten Divisoren von der Form $4s-1$.

Die Anzahl der Darstellungen derjenigen Divisoren einer Zahl r, deren complementäre Divisoren Quadrate eines Productes einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen sind, durch das System der quadratischen Formen der Discriminante Δ übertrifft die Anzahl der analogen Darstellungen der übrigen Theiler, deren complementäre Divisoren Quadrate und durch keine vierte Potenz theilbar sind, um das Product aus der Anzahl der Transformationen einer Form der Discriminante Δ in sich selbst und der Anzahl der Lösungen der Congruenz:

$$x^2 \equiv \Delta \text{ (mod. } r).$$

Besitzt eine Zahl mindestens einen Primtheiler von der Form $4s-1$, so lassen sich diejenigen ihrer Divisoren, deren complementäre Divisoren Quadrate eines Productes einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen sind, eben so oft durch die quadratische Form x^2+y^2 darstellen, als die übrigen Divisoren von r, deren complementäre Divisoren Quadrate und durch keine vierte Potenz theilbar sind; haben aber sämmtliche Primtheiler von r die Form $4s+1$, so übertrifft die Anzahl der ersten Darstellungen die Anzahl der zweiten um die vierfache Anzahl der Zerlegungen von r in zwei theilerfremde Zahlen.

Besitzt eine ungerade Zahl mindestens einen Primtheiler von der Form $8s-1$ oder $8s-3$, so lassen sich diejenigen ihrer Divisoren, deren complementäre Divisoren Quadrate eines Productes einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen sind, eben so oft durch die quadratische Form x^2+2y^2 darstellen, als die übrigen Divisoren von r, deren complementäre Divisoren Quadrate und durch keine vierte Potenz theilbar sind; haben aber alle Primfactoren von r eine der Formen $8s+1$, $8s+3$, so übertrifft die Anzahl der ersten Darstellungen die Anzahl der zweiten um die doppelte Anzahl der Zerlegungen der Zahl r in ein Product von zwei Factoren ohne gemeinsamen Theiler.

Besitzt eine ungerade Zahl r mindestens einen Primtheiler von der Form $3s-1$, so lassen sich diejenigen von ihren Divisoren, deren complementäre Divisoren Quadrate eines Productes einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen sind, eben

so oft durch die quadratische Form x^2+3y^2 darstellen, als die übrigen Divisoren, deren complementäre Divisoren Quadrate und durch keine vierte Potenz theilbar sind; haben aber sämmtliche Primfactoren von r die Form $3s+1$, so übertrifft die Anzahl der ersten Darstellungen die Anzahl der zweiten um die doppelte Anzahl der Zerlegungen von r in zwei theilerfremde Zahlen.

Die Anzahl der Darstellungen derjenigen Divisoren einer Zahl, deren complementäre Divisoren durch kein Quadrat theilbar sind, durch das System der quadratischen Formen der Discriminante Δ ist gleich dem Producte aus der Anzahl der Transformationen einer Form der Discriminante Δ in sich selbst und dem Überschusse der Anzahl der Zerlegungen derjenigen Divisoren, für deren complementären Divisor d' das verallgemeinerte Legendre'sche Symbol $\left(\frac{\Delta}{d'}\right)$ den Werth $+1$ hat, in zwei theilerfremde Zahlen, über die Anzahl der analogen Zerlegungen derjenigen Divisoren, für welche $\left(\frac{\Delta}{d'}\right)$ gleich -1 ist.

Die Anzahl der Darstellungen derjenigen Divisoren einer ungeraden Zahl, deren complementärer Divisor durch kein Quadrat theilbar ist, durch die quadratische Form x^2+y^2 ist gleich dem vierfachen Überschusse der Anzahl der Zerlegungen derjenigen Divisoren, deren complementärer Divisor die Form $4s+1$ besitzt, in zwei theilerfremde Zahlen über die Anzahl der analogen Zerlegungen der übrigen Divisoren.

Die Anzahl der Darstellungen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, deren complementäre Divisoren durch kein Quadrat theilbar sind, durch die quadratische Form x^2+2y^2 ist gleich dem doppelten Überschusse der Anzahl der Zerlegungen derjenigen Divisoren, deren complementäre Divisoren von der Form $8s+1$ oder $8s+3$ sind, in zwei theilerfremde Zahlen über die Anzahl der entsprechenden Zerlegungen der übrigen Divisoren.

Die Anzahl der Zerlegungen derjenigen Divisoren einer ungeraden Zahl, deren complementäre Divisoren die Form $3s+1$ besitzen, in zwei theilerfremde Zahlen übertrifft die Anzahl der analogen Zerlegungen der übrigen durch 3 nicht theilbaren Divi-

soren um die halbe Anzahl der Darstellungen derjenigen Divisoren, deren complementäre Divisoren keinen quadratischen Factor enthalten, durch die quadratische Form x^2+3y^2.

Die Anzahl der Darstellungen aller Divisoren einer Zahl durch das System der quadratischen Formen der Discriminante Δ ist gleich dem Producte aus der Anzahl der Transformationen einer Form der Discriminante Δ in sich selbst und dem Überschusse der Anzahl der Theiler derjenigen Divisoren, für deren complementären Divisor d' das Symbol $\left(\frac{\Delta}{d'}\right)$ den Werth $+1$ hat, über die Anzahl der Theiler der übrigen zu Δ theilerfremden Divisoren.

Die Anzahl der Darstellungen aller Divisoren einer ungeraden oder einfach geraden Zahl durch die quadratische Form x^2+y^2 ist gleich dem vierfachen Überschusse der Anzahl der Theiler derjenigen Divisoren, deren complementärer Divisor die Form $4s+1$ hat, über die Anzahl der Theiler der übrigen ungeraden Divisoren.

Die Anzahl der Darstellungen aller Divisoren einer ungeraden Zahl durch die quadratische Form x^2+2y^2 ist gleich dem doppelten Überschusse der Anzahl der Theiler derjenigen Divisoren, deren complementärer Divisor von der Form $8s+1$ oder $8s+3$ ist, über die Anzahl der Theiler der übrigen Divisoren.

Die Anzahl der Darstellungen aller Divisoren einer ungeraden Zahl durch die quadratische Form x^2+3y^2 ist gleich dem doppelten Überschusse der Anzahl der Theiler derjenigen Divisoren, deren complementärer Divisor die Form $3s+1$ hat, über die Anzahl der Theiler der übrigen durch 3 nicht theilbaren Divisoren.

Die Anzahl der Darstellungen derjenigen Divisoren einer Zahl r, deren complementärer Divisor aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, durch das System der quadratischen Formen der zu r theilerfremden Discriminante Δ ist um die Anzahl der Transformationen einer Form der Discriminante Δ in sich selbst grösser oder kleiner als die Anzahl der analogen Darstellungen der übrigen Divisoren, deren complementärer Divisor keinen quadratischen Factor ent-

hält, je nachdem das verallgemeinerte Legendre'sche Symbol $\left(\frac{\Delta}{r}\right)$ den Werth $+1$ oder -1 hat.

Die Anzahl der Darstellungen derjenigen Divisoren einer Zahl r, deren complementärer Divisor aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, durch die quadratische Form x^2+y^2 ist um zwei grösser oder kleiner, als die Anzahl der analogen Darstellungen der übrigen Divisoren, deren complementärer Divisor keinen quadratischen Factor enthält, je nachdem r von der Form $4s+1$ oder von der Form $4s-1$ ist.

Die Anzahl der Darstellungen derjenigen Divisoren einer ungeraden Zahl, deren complementärer Divisor aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, durch die quadratische Form x^2+2y^2 ist um zwei grösser oder kleiner als die Anzahl der analogen Darstellungen der übrigen Divisoren, deren complementärer Divisor keinen quadratischen Factor enthält, je nachdem r eine der Formen $8s+1$, $8s+3$ besitzt oder nicht.

Die Anzahl der Darstellungen derjenigen Divisoren einer ungeraden durch 3 nicht theilbaren Zahl, deren complementärer Divisor aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, durch die quadratische Form x^2+3y^2 ist um zwei grösser oder kleiner als die Anzahl der analogen Darstellungen der übrigen Divisoren, deren complementärer Divisor keinen quadratischen Factor enthält, je nachdem r von der Form $3s+1$ ist oder nicht.

Schliesslich soll noch mit Hilfe des von mir in der Arbeit: „Über das verallgemeinerte Legendre'sche Symbol" (Sitzungsb. der k. Akad. d. Wissensch., mathem.-naturw. Classe, 84. Bd., Abth. II., p. 1089 ff.) angewandten Verfahrens ein neuer Beweis der Zeller'schen Regel zur Bestimmung des Legendre'schen Zeichens in der allgemeineren Form, welche ihr Herr Ernst Schering gegeben hat („Bestimmung des quadratischen Restcharakters". Abhandl. der k. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, Bd. 24) mitgetheilt werden.

Es seien n und n_1 zwei Zahlen ohne gemeinsamen Theiler, von denen mindestens die erste ungerade ist. Durch Anwendung

des **Euklid**'schen Verfahrens erhält man das folgende System von Gleichungen:

$$
278.)\quad
\begin{aligned}
n &= \mu_1 n_1 - n_2 \\
n_1 &= \mu_2 n_2 - n_3 \\
n_2 &= \mu_3 n_3 - n_4 \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
n_{\nu-2} &= \mu_{\nu-1} n_{\nu-1} - n_\nu \\
n_{\nu-2} &= \mu_\nu n_\nu
\end{aligned}
$$

wo nach den gemachten Voraussetzungen $n_\nu = \pm 1$ ist. Es sei ferner $\varepsilon_\varkappa$ das Zeichen von $n_\varkappa$, also:

$$\varepsilon_\varkappa n_\varkappa > 0$$

und:

$$n_\varkappa = 2^{\lambda_\varkappa} \bar{n}_\varkappa$$

wo $\bar{n}$ eine ungerade Zahl ist. Da n ungerade ist, so ist $\lambda_0 = 0$ und $n = \bar{n}_0$.

Man sieht sofort, dass, falls $\lambda_\varkappa > 0$ ist, $\lambda_{\varkappa-1} = \lambda_{\varkappa+1} = 0$ sein muss, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, zwei aufeinanderfolgende Zahlen der Reihe $n, n_1, n_2, \ldots, n_{\nu-1}, n_\nu$ einen gemeinsamen Theiler hätten, woraus unmittelbar folgen würde, dass alle genannten Zahlen, also auch n und n_1 einen solchen haben, was der gemachten Voraussetzung widerspricht.

Nach dem quadratischen Reciprocitätsgesetze ist:

$$\left(\frac{-\bar{n}_\varkappa}{\bar{n}_{\varkappa-1}}\right)\left(\frac{\bar{n}_{\varkappa-1}}{\bar{n}_\varkappa}\right) = (-1)^{\frac{(\bar{n}_{\varkappa-1}-1)(\bar{n}_\varkappa+1)-(\varepsilon_{\varkappa-1}-1)(\varepsilon_\varkappa+1)}{4}}$$

ferner ist:

$$\left(\frac{n_{\varkappa-1}}{\bar{n}_\varkappa}\right) = \left(\frac{2^{\lambda_{\varkappa-1}}\,\bar{n}_{\varkappa-1}}{\bar{n}_\varkappa}\right) = \left(\frac{-2^{\lambda_{\varkappa+1}}\,\bar{n}_{\varkappa+1}}{\bar{n}_\varkappa}\right)$$

und daher hat man:

$$\left(\frac{\bar{n}_{\varkappa-1}}{\bar{n}_\varkappa}\right) = \left(-\frac{\bar{n}_{\varkappa+1}}{\bar{n}_\varkappa}\right).$$

$$\cdot(-1)^{\frac{2[(\bar{n}_{\varkappa-1}-1)(\bar{n}_\varkappa+1)-(\varepsilon_{\varkappa-1}-1)(\varepsilon_\varkappa+1)]-(\lambda_{\varkappa-1}-\lambda_{\varkappa+1})(\bar{n}_\varkappa^2-1)}{8}}$$

Aus dieser Relation folgt:

$$279.)\quad \left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{2\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu}\{\bar{n}_\varkappa \bar{n}_{\varkappa-1} - \varepsilon_\varkappa \varepsilon_{\varkappa-1}\} - 2(n-\varepsilon_0) - \sum\limits_{\varkappa=0}^{\varkappa=\nu-1}\{\lambda_{\varkappa-1} - \lambda_{\varkappa+1}\}\{\bar{n}_\varkappa^2 - 1\}}{8}}.$$

Da das Symbol $\left(\frac{n_1}{n}\right)$ nur einen der Werthe $+1$, -1 haben kann, so hat man den Zähler des Exponenten von -1 in dieser Gleichung nur nach dem Modul 16 zu betrachten.

Es sei nun λ_ρ von Null verschieden. Vereinigt man alle Glieder des Exponenten, in denen die Grössen λ_ρ und $\bar{n}_\rho$ vorkommen, so erhält man:

$$2\bar{n}_\rho(\bar{n}_{\rho-1} + \bar{n}_{\rho+1}) - \lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2 - \bar{n}_{\rho-1}^2).$$

Da n_ρ gerade ist, so sind $n_{\rho-1}$ und $n_{\rho+1}$ ungerade, und es besteht daher die Relation

$$\bar{n}_{\rho+1}^2 - \bar{n}_{\rho-1}^2 = 2_\rho^{\lambda+1}\mu_\rho \bar{n}_\rho \bar{n}_{\rho+1} - 2^{2\lambda_\rho}\mu_\rho^2 \bar{n}_\rho^2.$$

Ist nun μ_ρ gerade, so erhält man demnach:

$$2\bar{n}_\rho(\bar{n}_{\rho+1} + \bar{n}_{\rho-1}) - \lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2 - \bar{n}_{\rho-1}^2) \equiv$$
$$\equiv 2_\rho^{\lambda+1}\mu_\rho \bar{n}_\rho(\bar{n}_\rho - \lambda_\rho \bar{n}_{\rho+1}) \pmod{16}.$$

Die rechte Seite dieser Congruenz ist aber mindestens durch 16 theilbar, da für $\lambda_\rho > 1$ der Ausdruck $2^{\lambda_\rho+1}\mu_\rho$ den Factor 16 enthält, während für $\lambda_\rho = 1$ der Ausdruck in der Klammer durch 2 theilbar ist, und daher besteht für ein gerades μ_ρ die Congruenz:

$$280.)\quad 2\bar{n}_\rho(\bar{n}_{\rho+1} + \bar{n}_{\rho-1}) - \lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2 - \bar{n}_{\rho-1}^2) \equiv 0 \pmod{16.}$$

Ist μ_ρ ungerade, so hat man, falls $\lambda_\rho > 1$ ist, die Congruenzen:

$$2_\rho^{\lambda+1}\lambda_\rho\{2_\rho^{\lambda-1}\mu_\rho^2 \bar{n}_\rho^2 - \mu_\rho \bar{n}_\rho \bar{n}_{\rho+1}\} \equiv 0 \pmod{16}$$
$$2_\rho^{\lambda+1}\bar{n}_\rho\{\bar{n}_\rho \mu_\rho - \bar{n}_{\rho+1}\} \equiv 0 \pmod{16}$$

und daher:

$$281.)\quad 2\bar{n}_\rho(\bar{n}_{\rho+1} + \bar{n}_{\rho-1}) - \lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2 - \bar{n}_{\rho-1}^2) \equiv 2n_\rho \bar{n}_{\rho+1} \pmod{16}.$$

Diese Congruenz bleibt aber auch bestehen, wenn μ_ρ ungerade und $\lambda_\rho = 1$ ist. Weil nämlich μ_ρ und $\bar{n}_\rho$ ungerade Zahlen sind, so bestehen die Congruenzen:

$$\bar{n}_\rho^2 \equiv 1 \text{ (mod. 8)}$$
$$\mu_\rho^2 \equiv 1 \text{ (mod. 8)},$$

und demnach ist:

$$\mu^2 \bar{n}_\rho^2 - \mu_\rho \bar{n}_\rho \bar{n}_{\rho+1} + \mu_\rho \bar{n}_\rho^2 - \bar{n}_\rho \bar{n}_{\rho+1} \equiv$$
$$\equiv (\mu_\rho + 1)(1 - \bar{n}_\rho \bar{n}_{\rho+1}) \text{ (mod. 8)}.$$

Die rechte Seite dieser Congruenz ist mindestens durch 4 theilbar, man hat also:

$$\mu_\rho^2 \bar{n}_\rho^2 - \mu_\rho \bar{n}_\rho \bar{n}_{\rho+1} + \mu_\rho \bar{n}_\rho^2 - \bar{n}_\rho \bar{n}_{\rho+1} \equiv 0 \text{ (mod. 4)},$$

so dass also auch in diesem Falle die Congruenz 281.) bestehen bleibt.

Sind die drei aufeinanderfolgenden Zahlen der Reihe $n_{\rho-1}$, n_ρ, $n_{\rho+1}$ ungerade, so ist:

$$2\bar{n}_\rho(\bar{n}_{\rho-1} + \bar{n}_{\rho+1}) = 2\mu_\rho \bar{n}_\rho^2,$$

oder:

$$2\bar{n}_\rho(\bar{n}_{\rho-1} + \bar{n}_{\rho+1}) \equiv 2\mu_\rho \text{ (mod. 16)}.$$

Es sei nun n_ρ die erste gerade Zahl der mit Hilfe des Euklid'schen Algorithmus aus den Zahlen n und n_1 in der oben angegebenen Weise abgeleiteten Zahlenreihe. Man hat alsdann, falls ρ gerade ist:

$$\sum_{x=1}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} = \bar{n}_1(\bar{n}_0 + \bar{n}_2) + \bar{n}_3(\bar{n}_2 + \bar{n}_4) + \dots$$
$$+ \bar{n}_{\rho-3}(\bar{n}_{\rho-4} + \bar{n}_{\rho-2}) + \sum_{x=\rho-1}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1},$$

und daher:

$$\sum_{x=1}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} \equiv \mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \dots + \mu_{\rho-3} + \sum_{x=\rho-1}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} \text{ (mod. 8)},$$

ist hingegen ρ ungerade, so erhält man die Relation:

$$\sum_{x=1}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} = \bar{n}_1(\bar{n}_0+\bar{n}_2)+\bar{n}_3(\bar{n}_2+\bar{n}_4)+\ldots$$
$$+\bar{n}_{\rho-2}(\bar{n}_{\rho-3}+\bar{n}_{\rho-1})+\sum_{x=\rho}^{x=\nu}\bar{n}_x\bar{n}_{x-1},$$

aus welcher die Congruenz:

$$\sum_{x=1}^{x=\nu}\bar{n}_x\bar{n}_{x-1} \equiv \mu_1+\mu_3+\mu_5+\ldots+\mu_{\rho-2}+\sum_{x=\rho}^{x=\nu}\bar{n}_x\bar{n}_{x-1} \pmod{8}$$

folgt.

Man hat daher im ersten Falle für ein gerades μ_ρ die Congruenz:

$$2\sum_{x=1}^{x=\nu}\bar{n}_x\bar{n}_{x-1}-\lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2-\bar{n}_{\rho-1}^2) \equiv 2\mu_1+2\mu_3+2\mu_5+\ldots+$$
$$+2\mu_{\rho-3}+2\bar{n}_{\rho-1}\bar{n}_{\rho-2}+2\sum_{x=\rho+2}^{x=\nu}\bar{n}_x\bar{n}_{x-1} \pmod{16}$$

im zweiten Falle aber:

$$282.)\quad 2\sum_{x=1}^{x=\nu}\bar{n}_x\bar{n}_{x-1}-\lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2-\bar{n}_{\rho-1}^2) \equiv 2\mu_1+2\mu_3+2\mu_5+\ldots+$$
$$+2\mu_{\rho-2}+2\sum_{x=\rho+2}^{x=\nu}\bar{n}_x\bar{n}_{x-1} \pmod{16}.$$

Nun ist aber, wie man sofort sieht:

$$\bar{n}_{\rho-2}\bar{n}_{\rho-1} \equiv \mu_{\rho-1}+\mu_{\rho+1}-\bar{n}_{\rho+1}n_{\rho+2} \pmod{8},$$

und daher kann man die erste von diesen zwei Congruenzen auch in folgender Form schreiben:

$$283.)\quad 2\sum_{x=1}^{x=\nu}\bar{n}_x\bar{n}_{x-1}-\lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2-\bar{n}_{\rho-1}^2) \equiv 2\mu_1+2\mu_3+2\mu_5+\ldots+$$
$$+2\mu_{\rho+1}-2\bar{n}_{\rho+1}n_{\rho+2}+2\sum_{x=\rho+2}^{x=\nu}\bar{n}_x\bar{n}_{x-1} \pmod{16}.$$

Ist μ_ρ ungerade, so erhält man im ersten Falle die Congruenz:

$$2\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu}\bar{n}_\varkappa\bar{n}_{\varkappa-1}-\lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2-\bar{n}_{\rho-1}^2)\equiv 2\mu_1+2\mu_3+2\mu_5+\ldots+$$

$$+\,2\mu_{\rho-1}+2n_\rho\{\bar{n}_{\rho+1}-\bar{n}_{\rho-1}\}+2\sum_{\varkappa=\rho+2}^{\varkappa=\nu}\bar{n}_\varkappa\bar{n}_{\varkappa-1}\ (\text{mod. } 16),$$

im zweiten Falle:

$$284.)\quad 2\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu}\bar{n}_\varkappa\bar{n}_{\varkappa-1}-\lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2-\bar{n}_{\rho-1}^2)\equiv 2\mu_1+2\mu_3+2\mu_5+\ldots+$$

$$+\,2\mu_{\rho-2}+2\mu_{\rho+1}-2\bar{n}_{\rho+1}n_{\rho+2}+2\sum_{\varkappa=\rho+2}^{\varkappa=\nu}\bar{n}_\varkappa\bar{n}_{\varkappa-1}\ (\text{mod. } 16).$$

Nun ist aber:

$$n_\rho(\bar{n}_{\rho+1}-\bar{n}_{\rho-1})=2^{\lambda+1}_{\rho}\,\mu_\rho\bar{n}_\rho(\bar{n}_{\rho+1}-2^{\lambda-1}_{\rho}\,\mu_\rho\bar{n}_\rho)$$

aus welcher Gleichung die Congruenz:

$$n_\rho(\bar{n}_{\rho+1}-\bar{n}_{\rho-1})\equiv 0\ (\text{mod. } 8)$$

folgt, weshalb sich die erste von den eben angeführten Congruenzen in die folgende verwandelt:

$$285.)\quad 2\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu}\bar{n}_\varkappa\bar{n}_{\varkappa-1}-\lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2-\bar{n}_{\rho-1}^2)\equiv 2\mu_1+2\mu_3+2\mu_5+\ldots+$$

$$+\,2\mu_{\rho-1}+2\sum_{\varkappa=\rho+2}^{\varkappa=\nu}\bar{n}_\varkappa\bar{n}_{\varkappa-1}\ (\text{mod. } 16).$$

Die Zahl $n_{\rho+2}$ kann ungerade oder gerade sein. Im ersten Falle lassen sich die Congruenzen 283.) und 284.) in folgender Weise schreiben:

$$286.)\quad 2\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu}\bar{n}_\varkappa\bar{n}_{\varkappa-1}-\lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2-\bar{n}_{\rho-1}^2)\equiv 2\mu_1+2\mu_3+2\mu_5+\ldots+$$

$$+\,2\mu_{\rho+1}+2\sum_{\varkappa=\rho+3}^{\varkappa=\nu}\bar{n}_\varkappa\bar{n}_{\varkappa-1}\ (\text{mod. } 16).$$

$$287.)\quad 2\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu}\bar{n}_\varkappa\bar{n}_{\varkappa-1}-\lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2-\bar{n}_{\rho-1}^2)\equiv 2\mu_1+2\mu_3+2\mu_5+\ldots+$$

$$+\,2\mu_{\rho-2}+2\mu_{\rho+1}+2\sum_{\varkappa=\rho+3}^{\varkappa=\nu}\bar{n}_\varkappa\bar{n}_{\varkappa-1}\ (\text{mod. } 16).$$

Ist nun n_σ der zweite, n_τ der dritte, ... gerade Divisor, so lassen sich die Ausdrücke:

$$2\sum_{x=\rho+2}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} - \lambda_\sigma(\bar{n}_{\sigma+1}^2 - \bar{n}_{\sigma-1}^2);\quad 2\sum_{x=\rho+3}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} - \lambda_\sigma(\bar{n}_{\sigma+1}^2 - \bar{n}_{\sigma-1}^2)$$

$$2\sum_{x=\sigma+2}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} - \lambda_\tau(\bar{n}_{\tau+1}^2 - \bar{n}_{\tau-1}^2);\quad 2\sum_{x=\sigma+3}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} - \lambda_\tau(\bar{n}_{\tau+1}^2 - \bar{n}_{\tau-1}^2)$$

. . . .

eben so behandeln, wie die Grösse:

$$2\sum_{x=1}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} - \lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2 - \bar{n}_{\rho-1}^2),$$

und man erhält daher, falls die Indices ρ, σ, τ,... der geraden Divisoren so beschaffen sind, dass die Differenzen: $\sigma-\rho$, $\tau-\sigma$,... grösser als 2 sind, das folgende Resultat:

Man lasse aus der Reihe der Quotienten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$ jeden ungeraden, dessen zugehöriger Divisor gerade ist, weg und ersetze jeden geraden, dessen zugehöriger Divisor gerade ist, durch Null. Bezeichnet man die Summe der ungeradstelligen Terme der so veränderten Reihe der Quotienten mit M, die Summe der geradstelligen mit M_1, so ist:

$$288.)\quad 2\sum_{x=1}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} - \sum_{x=0}^{x=\nu-1} (\lambda_{x-1} - \lambda_{x+1})(\bar{n}_x^2 - 1) \equiv 2M \pmod{16}.$$

Diese Congruenz gilt aber, wie sofort gezeigt werden soll, auch dann noch, wenn die Indices der geraden Divisoren n_λ die angegebene Bedingung nicht erfüllen.

Ist nämlich nicht nur $n_{\rho+2}$, sondern auch $\mu_{\rho+2}$ gerade, so hat man:

$$\bar{n}_{\rho+1} n_{\rho+2} \equiv -n_{\rho+2} \bar{n}_{\rho+3} \pmod{8},$$

und daher auch:

$$\bar{n}_{\rho+1} n_{\rho+2} \equiv -\mu_{\rho+3} + \bar{n}_{\rho+3} n_{\rho+4} \pmod{8}.$$

Addirt man auf beiden Seiten der Congruenzen 283.) und 284.):

$$-\lambda_{\rho+2}(\bar{n}_{\rho+3}^2 - \bar{n}_{\rho+1}^2),$$

so verwandeln sich dieselben sofort in die folgenden:

$$289.)\quad 2\sum_{x=1}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} - \lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2 - \bar{n}_{\rho-1}^2) - \lambda_{\rho+2}(\bar{n}_{\rho+3}^2 - \bar{n}_{\rho+1}^2) \equiv$$

$$\equiv 2\mu_1 + 2\mu_3 + 2\mu_5 + \ldots + 2\mu_{\rho+3} - 2\bar{n}_{\rho+3}\, n_{\rho+4} +$$

$$+ 2\sum_{x=\rho+4}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} \pmod{16}$$

$$290.)\quad 2\sum_{x=1}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} - \lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2 - \bar{n}_{\rho-1}^2) - \lambda_{\rho+2}(\bar{n}_{\rho+3}^2 - \bar{n}_{\rho+1}^2) \equiv$$

$$\equiv 2\mu_1 + 2\mu_3 + 2\mu_5 + \ldots + 2\mu_{\rho-2} + 2\mu_{\rho+1} + 2\mu_{\rho+3} - 2\bar{n}_{\rho+3}\, n_{\rho+4} +$$

$$+ 2\sum_{x=\rho+4}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} \pmod{16}.$$

Ist $n_{\rho+2}$ gerade und $\mu_{\rho+2}$ ungerade, so erhält man, wenn auf beiden Seiten der Congruenzen 283.) und 284.)

$$-\lambda_{\rho+2}(\bar{n}_{\rho+3}^2 - \bar{n}_{\rho+1}^2)$$

addirt und berücksichtigt wird, dass:

$$n_{\rho+2}(\bar{n}_{\rho+3} - \bar{n}_{\rho+1}) \equiv 0 \pmod{8}$$

ist, die Relationen:

$$291.)\quad 2\sum_{x=1}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} - \lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2 - \bar{n}_{\rho-1}^2) - \lambda_{\rho+2}(\bar{n}_{\rho+3}^2 - \bar{n}_{\rho+1}^2) \equiv$$

$$\equiv 2\mu_1 + 2\mu_3 + 2\mu_5 + \ldots + 2\mu_{\rho+1} + 2\sum_{x=\rho+4}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} \pmod{16}$$

$$292.)\quad 2\sum_{x=1}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} - \lambda_\rho(\bar{n}_{\rho+1}^2 - \bar{n}_{\rho-1}^2) - \lambda_{\rho+2}(\bar{n}_{\rho+3}^2 - \bar{n}_{\rho+1}^2) \equiv$$

$$\equiv 2\mu_1 + 2\mu_3 + 2\mu_5 + \ldots + 2\mu_{\rho-2} + 2\mu_{\rho+1} + 2\sum_{x=\rho+4}^{x=\nu} \bar{n}_x \bar{n}_{x-1} \pmod{16}.$$

Ist $n_{\rho+4}$ ungerade, so gilt demnach, wie man unmittelbar sieht, auch in diesem Falle die oben angegebene Regel, ist aber $n_{\rho+4}$ gerade, so überzeugt man sich durch abermalige Umwandlung der eben abgeleiteten Congruenzen von der allgemeinen Giltigkeit der aufgestellten Regel.

Da die Grössen $\varepsilon_\varkappa$ die Vorzeichen der Divisoren $n_\varkappa$ sind, so ist $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu} \varepsilon_\varkappa \varepsilon_{\varkappa-1}$ gleich der Anzahl der Zeichenfolgen in der Reihe der Divisoren, vermindert um die Anzahl der Zeichenwechsel. Man kann bekanntlich statt der Vorzeichen $\varepsilon_\varkappa$ der Divisoren $n_\varkappa$ auch die Vorzeichen $\delta_\varkappa$ der Quotienten $\mu_\varkappa$ einführen. Aus der Gleichung:

$$\varepsilon_{\varkappa-1}\{n_{\varkappa-1}+n_{\varkappa+1}\} = \varepsilon_{\varkappa-1}\mu_\varkappa n_\varkappa$$

folgt nämlich, weil die linke Seite positiv ist:

$$\varepsilon_\varkappa \varepsilon_{\varkappa-1} = \delta_\varkappa.$$

Es ist also $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu} \varepsilon_\varkappa \varepsilon_{\varkappa-1}$ auch gleich dem Überschusse der Anzahl der positiven Quotienten über die Anzahl der negativen.

Berücksichtigt man nun noch, dass man ε_0 stets gleich $+1$ nehmen kann, da:

$$\left(\frac{r}{n}\right) = \left(\frac{r}{-n}\right)$$

ist, so erhält man schliesslich zur Bestimmung des verallgemeinerten Legendre'schen Symbols folgende Regel:

Man leite aus den beiden theilerfremden Zahlen n und n_1 in der durch das Gleichungssystem 278.) angegebenen Weise die Zahlensysteme $n, n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ und $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$ ab. Aus der Reihe der Quotienten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$ lasse man jeden ungeraden, dessen zugehöriger Divisor gerade ist, weg und ersetze jeden geraden, dessen zugehöriger Divisor gerade ist, durch Null. Die Summe der ungeradstelligen Glieder der veränderten Quotientenreihe möge mit M, die Differenz aus der Anzahl der positiven Glieder der ursprünglichen Quotientenreihe und der Anzahl der negativen Glieder derselben mit N bezeichnet werden. Alsdann ist:

$$\left(\frac{n_1}{n}\right) = +1$$

wenn:

$$M - N - n \equiv 7 \ (\mathrm{mo}$$

ist; ist aber:

$$M - N - n \equiv 3 \pmod{8},$$

so ist:

$$\left(\frac{n_1}{n}\right) = -1$$

Diese Regel ist im Wesentlichen mit der von Herrn E. Schering mitgetheilten identisch.

Man sieht auch sofort, dass, wenn:

$$n \equiv \pm 1 \pmod{8}$$

ist, das Legendre'sche Symbol:

$$\left(\frac{n_1}{n}\right) = +1$$

ist, wenn:

$$M - N \equiv 0, 6 \pmod{8}$$

ist, während

$$\left(\frac{n_1}{n}\right) = -1$$

ist, wenn die Congruenz:

$$M - N \equiv 2, 4 \pmod{8}$$

besteht, dass aber für

$$n \equiv \pm 3 \pmod{8}$$

das Legendre'sche Zeichen:

$$\left(\frac{n_1}{n}\right) = +1$$

ist, wenn:

$$M - N \equiv 2, 4 \pmod{8}$$

ist, und:

$$\left(\frac{n_1}{n}\right) = -1$$

wird, falls:

$$M - N \equiv 0, 6 \pmod{8}$$

ist.

Nach dem quadratischen Reciprocitätsgesetze ist nun, wenn n_1 eine ungerade Zahl ist:

$$\left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{(n-1)(n_1-1)}{4}} \left(\frac{n}{n_1}\right)$$

Multiplicirt man nun die Gleichungen des Systems 278.) der Reihe nach mit $n_1, n_2, n_3, \ldots$, addirt zur ersten die dritte, fünfte, ... und subtrahirt von derselben die zweite, vierte, ..., so erhält man:

$$n n_1 = \mu_1 n_1^2 - \mu_2 n_2^2 + \mu_3 n_3^2 - \mu_4 n_4^2 + \ldots \pm \mu_\nu n_\nu^2 .$$

Ist n_ρ ungerade, so besteht die Congruenz:

$$\mu_\rho n_\rho^2 \equiv \mu_\rho \pmod{8},$$

ist nicht nur n_ρ, sondern auch μ_ρ gerade, so hat man:

$$\mu_\rho n_\rho^2 \equiv 0 \pmod{8};$$

ist endlich n_ρ gerade und μ_ρ ungerade, so ist:

$$\mu_\rho n_\rho^2 \equiv -2 n_\rho n_{\rho+1} \pmod{8}.$$

Es besteht demnach die Congruenz:

$$n n_1 \equiv M - M_1 \pmod{8}.$$

Demnach ist:

$$\left(\frac{n}{n_1}\right) = +1$$

wenn:

$$n_1 + M_1 - N \equiv 0 \pmod{8}$$

ist, und es ist:

$$\left(\frac{n_1}{n}\right) = -1$$

für:

$$n_1 + M_1 - N \equiv 4 \pmod{8}.$$

Unterscheidet man auch hier wieder die Zahlen n_1 nach dem Modul 8, so hat man den Satz:

Ist:

$$n_1 \quad \pm 1 \pmod{8},$$

so ist das Legendre'sche Symbol:

$$\left(\frac{n}{n_1}\right) = +1$$

für:

$$M_1 - N \equiv 1, 7 \pmod{8},$$

während:

$$\left(\frac{n}{n_1}\right) = -1$$

ist, für:

$$M_1 - N \equiv 3, 5 \pmod{8},$$

ist aber:

$$n_1 \equiv \pm 3 \pmod{8},$$

so hat man:

$$\left(\frac{n}{n_1}\right) = +1$$

wenn die Congruenz:

$$M_1 - N \equiv 3, 5 \pmod{8}$$

besteht, während:

$$\left(\frac{n}{n_1}\right) = -1$$

ist, für:

$$M_1 - N \equiv 1, 7 \pmod{8}.$$

XXI. SITZUNG VOM 16. OCTOEBR 1884.

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr übersendet eine Abhandlung von Herrn Dr. Ludwig Kraus, Privatdocent für Mathematik an der böhmischen Universität in Prag: „Über Functionaldeterminanten".

Das c. M. Herr Prof L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Arithmetische Theoreme." II.

Herr Hairabeth. Ab. Ibrailean in Zürich übersendet eine vorläufige Mittheilung: „Einfluss des Druckes auf die Magnetisirung von Eisen- und Stahlstäben."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über Körper mit einem Dichtenmaximum und über einige aus ihrem Verhalten abzuleitende Schlüsse", von Herrn Prof. P. C. Puschl, Stiftscapitular in Seitenstetten.
2. „Über den Gang der Lichtstrahlen durch Glasröhren, die mit Flüssigkeit gefüllt sind, und eine darauf sich gründende Methode, den Brechungsexponenten condensirter Gase zu bestimmen", von Herrn Prof. J. Dechant an der Staatsoberrealschule des II. Bezirkes in Wien.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. A. Ritter v. Oppolzer überreicht seine Resultate bezüglich der „Bahnbestimmung des Planeten (237) Cölestina."

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. Konrad Natterer: „Über die Einwirkung von Zinkäthyl auf Dichlorcrotonaldehyd."

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine vom Orientreisenden Herrn Eduard Glaser ausgeführte geographische Ortsbestimmung von San'â, der Hauptstadt des Vilajets Jemen.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie, Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique: Bulletin. 53e année, 3e série, tome VII. Nrs. 5—8. Bruxelles, 1884; 8°.

Academy, the American of arts and sciences: Proceedings. N. S. Vol. XI. Parts I et II. Boston, 1883—84; 8.

Akademie koninklijke van Wetenschappen: Verhandelingen. Deel. XXXIII. Amsterdam, 1883; 4°.

— — Verhandelingen. XIV. Deel. Amsterdam, 1883; 4°.

— — Jaarboek gevestigt te Amsterdam voor 1882. Amsterdam, 1882; 8°.

— — Processen-verbaal van de gewone Vergaderingen van Mei 1882 tot en Met April 1883. Amsterdam; 8°.

— — Verslagen en Mededeelingen. 2de Reeks 18de Deel. Amsterdam, 1883; 8°.

— — Regenwaarnemingen in Nederlandsch — Indie. V. Jaargang 1883. Batavia, 1884; 8°.

Annales des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents. 4e année, 6e série, 5e—8e Cahiers. Paris, 1884; 8°,

British Museum: Report on the Zoological Collections made in the Indo-pacific ocean during the voyage of H. M. S. Albert 1881—2. London, 1884; 8°.

Bureau international des Poids et Mesures: Travaux et Mémoires Tome III. Paris 1884; gr. 4°.

Central-Anstalt, k. k. für Meteorologie und Erdmagnetismus: Jahrgang 1882. N. F. XIX. Band. Wien, 1884; gr. 4°.

Central-Commission, k. k. statistische: Österreichische Statistik. V. Band, 3. Heft. Die Ergebnisse der Volkszählung vom 31. December 1880. Wien, 1884; gr. 4°. — VI. Band, 2. Heft. Die Ergebnisse des Concursverfahrens in den im Reichsrathe vertretenen Königreichen und Ländern im Jahre 1882. Wien, 1884; gr. 4°. — VII. Band, 4. Heft. Waarendurchfuhr durch das allgemeine österr.-ungar. Zollgebiet im Jahre 1883. Wien, 1884; gr. 4°.

Chemiker-Zeitung: Centralorgan. Jahrgang VIII. Nr. 48—78. Cöthen, 1884; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCIX. Nr. 13. Paris, 1884; 4°.

Ferdinandeum für Tirol und Vorarlberg: Zeitschrift. 3. Folge, 28. Heft. Innsbruck, 1884; 8°.

Genootschap, Bataviaasch van Kunsten en Wetenschappen: Notulen van de Algemeene en Bestuurs-vergaderingen. Deel XXI. 1883. No. 3 en 4. Batavia, 1884; 8°.

— — Tijdschrift voor indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXIX, Aflevering 2 en 3. Batavia 'sHage, 1883; 8°.

Gesellschaft, österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XIX. Band. October-Heft 1884. Wien; 8°.

— naturforschende des Osterlandes zu Altenburg: Catalog der Bibliothek. Altenburg, 1884; 8°.

— — Mittheilungen aus dem Osterlande. N. F. II. Band. Altenburg, 1884; 8°.

Johns Hopkins University: Circulars. Vol. III. Nrs. 31 & 32. Baltimore, 1884; 4°.

— — American chemical Journal. Vol. VI. Nr. 3. July 1884. Baltimore; 8°.

Journal für praktische Chemie. N. F. Band XXIX & XXX. Leipzig, 1884; 8°.

Karpathen-Verein, ungarischer: Jahrbuch. XI. Jahrg., 1884. 2. Heft. Igló, 1884; 8°.

Kiew, Universität: Universitäts-Nachrichten. XXIV. Band, Nr. 6. Kiew, 1884; 8°.

Museo civico di Storia naturale di Genova: Annali. Vol. XVIII, XIX und XX. Genova, 1883—84; 8°.

Nature. Vol. XXX. Nr. 780. London, 1884; 8°.

Schlesinger, Josef: Substantielle Wesenheit des Raumes und der Kraft. Wien, 1885; 8°.

Slavik, Franz: Beweis für die Unrichtigkeit der Theorie der Pendelmessung und Entgegnung über „Die Schwankungen des Meeresspiegels". Wien, 1884; 8°.

Societas pro Fauna et flora fennica: Meddelanden. 9. & 10. Häftet. Helsingfors, 1883; 8°.

Society, the royal geographical: Proceedings and Monthly Record of Geography. Vol. VI. Nr. 10. London, 1884; 8°.

— the Royal of London: Philosophical Transactions. Vol. 174. — Parts II & III. London, 1883—84; 4°.

— — The Council. Nov. 30, 1883. London; 4°.

— — Proceedings. Vol. XXXV. Nr. 227. London, 1883; 8°. — Vol. XXXVI. Nrs. 228—231. London, 1883; 8°.

— the Zoological of London: Proceedings of the scientific meetings for the year 1884. Parts I & II. London, 1884; 8°.

Strassburg, Universität: Akademische Schriften pro 1883 bis 1884. 63 Stücke. 4° u. 8°.

Verein, naturhistorischer der preussischen Rheinlande und Westphalens: Verhandlungen. XL. Jahrgang. IV. Folge: X. Jahrgang. II. Hälfte. Bonn, 1883; 8°. — XLI. Jahrg. V. Folge: I. Jahrgang. 1. Hälfte. Bonn, 1884; 8°.

— naturwissenschaftlicher, für Sachsen und Thüringen: Zeitschrift für Naturwissenschaften. IV. Folge. III. Band, 3. Heft. Halle a. S., 1884; 8°.

— naturwissenschaftlicher zu Bremen. Abhandlungen. VIII. Bd., 2. Heft. Bremen, 1884; 8°. — IX. Band, 1. Heft. Bremen, 1884; 8°.

Bahnbestimmung des Planeten Cölestina (237).

Von dem w. M. Prof. **Th. v. Oppolzer.**

Der Planet (237) Cölestina wurde von Dr. J. Palisa in Wien am 27. Juni 1884 entdeckt, und die ersten Elemente durch den Entdecker selbst in Verbindung mit Dr. S. Oppenheim wie folgt bestimmt:

Epoche 1884. Juni 28·5 mittl. Berliner Zeit.

$$
\begin{aligned}
M &= 329^\circ\ 3'\ 31''6 \\
\pi &= 295\ \ 46\ \ 27\cdot1 \\
\Omega &= 84\ \ 37\ \ 30\cdot7 \\
i &= 9\ \ 39\ \ 10\cdot2 \\
\varphi &= 5\ \ 52\ \ 57\cdot0 \\
\mu &= 753''7738 \\
\log a &= 0\cdot448\ 510.
\end{aligned}
$$

(π, Ω, i: mittl. Ekliptik 1884·0.)

Mit diesen Elementen wurden die folgenden für Berliner Mitternacht geltenden Ephemeriden erhalten:

	Rectascension	Declination	log ρ
1884 Juni 26	16ʰ20ᵐ23ˢ05	−19°35'47"6	0·2137
„ 27	16 19 44·32	−19 38 35·4	0·2152
„ 28	16 19 7·01	−19 41 25·4	0·2167
„ 29	16 18 31·17	−19 44 17·5	0·2182
„ 30	16 17 56·83	−19 47 11·8	0·2199
Juli 10	16 13 40·29	−20 18 19·7	0·2384
„ 11	16 13 23·68	−20 21 39·1	0·2404
„ 12	16 13 8·75	−20 25 0·7	0·2425
Juli 20	16 12 11·15	−20 53 16·1	0·2601
„ 21	16 12 11·70	−20 56 58·0	0·2624
„ 22	16 12 13·97	−21 0 42·2	0·2648
„ 23	16 12 18·00	−21 4 28·5	0·2671
„ 24	16 12 23·77	−21 8 17·1	0·2694.

Ausserdem wurde aus den Elementen gefunden:

1884 Aug. 17·34865 16h 22m 39s·43 —22°46'53"2 0·3275.

Die mir bekannt gewordenen Beobachtungen nebst der Vergleichung mit den vorstehenden Ephemeriden sind:

1884	Ort	Ortszeit	Beob. α	Parall.	Beob. δ	Parall.	B—R. $d\alpha$	B—R. $d\delta$
Juni 27	Wien ..	10h 56m 6s	16h 19m 46s·67	+0s·07	—19°38'30"1	+4"9	+0s·06	—0"3
„ 28	„ ..	10 2 19	16 19 10·57	+0·01	—19 41 15·4	+4·9	—0·08	—2·1
„ 29	Paris ..	10 33 0	16 18 32·39	+0·05	—19 44 18·1	+4·9	+0·09	—2·5
„ 30	Rom ..	10 36 1	16 17 59·17	+0·07	—19 47 8·1	+4·6	+0·22	—3·2
Juli 11	Wien ..	10 22 48	16 13 25·01	+0·09	—20 21 26·7	+4·6	+0·07	—0·2
„ 12	„ ..	10 32 35	16 13 9·72	+0·11	—20 24 54·7	+4·6	—0·03	—5·4
Juli 21	„ ..	10 0 5	16 12 11·51	+0·10	—20 56 43·1	+4·4	+0·05	—3·5
„ 23	„ ..	9 43 12	16 12 17·40	+0·10	—21 4 7·0	+4·3	+0·06	—0·1
Aug. 17	„ ..	8 51 40	16 22 33·81	+0·11	—22 46 4·0	+3·7	—5·51	+52·9

Fasst man die Beobachtungen der angezeigten Gruppirung entsprechend in vier Normalorte zusammen und reducirt auf den mittleren Äquator des tropischen Jahresanfanges 1884, so erhält man unter Hinzufügung der auf denselben Äquator bezogenen Sonnencoordinaten die folgenden Grundlagen für die weitere Bearbeitung:

1884 (Berl. Zt.)	α	δ	X	Y	Z
Juni 28·50000	244°46'12"5	—19°41'30"5	—0·133659	+0·924633	+0·401165
Juli 11·50000	243 20 19·5	—20 21 44·2	—0·346748	+0·876596	+0·380327
„ 22·50000	243 2 52·3	—21 0 45·9	—0·514689	+0·803385	+0·348558
Aug. 17·34865	245 37 47·0	—22 46 2·0	—0·831053	+0·529567	+0·229758.

Es wurden mit Hilfe der Variation der geocentrischen Distanzen des ersten und letzten Ortes jene Elemente gesucht, welche die äusseren Orte vollständig, die mittleren nach der Methode der kleinsten Quadrate möglichst gut darstellen.

In der folgenden Zusammenstellung sind die Resultate der diesbezüglichen Rechnungen übersichtlich zusammengestellt. In der ersten und zweiten Zeile sind die für $\log \rho_1$ und $\log \rho_{IV}$ angenommenen Werthe angegeben, hierauf folgen die auf den mittleren Äquator 1884.0 bezogenen hieraus resultirenden Elemente, in welchen die mittlere Anomalie für 1884 Juni 28·5 gilt, und schliesslich die Darstellung der mittleren Beobachtungen im Sinne Beobachtungs - Rechnung:

	I	II	III
$\log \rho_1$	0·216680	0·226680	0·216680
$\log \rho_{IV}$	0·327482	0·327482	0·337482
M	327°46'26"1	325°22'17"3	30°57'54"4
ω'	276 49 40·9	287 34 45·2	202 54 50·2
☊'	22 15 26·4	22 4 3·6	22 57 3·5
i'	26 4 14·4	26 2 27·9	26 15 56·2
φ	5 43 24·8	10 56 36·8	3 2 8·0
$\log a$	0·446 810	0.482 528	0·429 880
$\Delta\alpha_2$	+25"0	—49"2	—24"6
$\Delta\alpha_3$	+45·0	—12·1	—57·9
$\Delta\delta_2$	—19·0	—58·0	+44·0
$\Delta\delta_3$	—31·1	—83·5	+48·8.

Aus den übrig bleibenden Fehlern in den mittleren Orten erhält man die folgenden Bedingungsgleichungen, in welchen x und y beziehungsweise die in dem Logarithmus der ersten und letzten geocentrischen Distanz erforderliche Änderung in Einheiten der oben angenommenen willkürlichen Variation (0·01) darstellen:

$$\begin{aligned} +23''3 &= +69''3\,x + 46''5\,y \\ +42\cdot0 &= +53\cdot3\,x + 96\cdot0\,y \\ -19\cdot0 &= +39\cdot0\,x - 63\cdot0\,y \\ -31\cdot1 &= +52\cdot4\,x - 79\cdot9\,y. \end{aligned}$$

Löst man nach der Methode der kleinsten Quadrate auf, so findet sich:

$$\log x = 8\cdot8288-10,\quad d\log\rho_1\ +0\cdot000674.\quad \log\rho_1 = 0\cdot217354$$
$$\log y = 9\cdot6017-10,\quad d\log\rho_{IV}\ +0\cdot003996,\quad \log\rho^{IV} = 0\cdot331478$$

und zufolge der obigen Bedingungsgleichungen sollten in der Darstellung der mittleren Orte die Fehler:

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Juli 11·5	0"0	+3"6
„ 22·5	0·0	−2·7

übrig bleiben. Rechnet man nun aus den so erhaltenen geocentrischen Distanzen (ρ_{I} und ρ_{IV}) die Elemente, so finden sich dieselben bezogen auf die Ekliptik:

(237) Cölestina.

Epoche 1884, Juni 28·5.

$$
\left.\begin{array}{rcl}
L & = & 261^\circ\ 25'\ 44"0 \\
M & = & 338\ \ 36\ \ 17\cdot3 \\
\pi & = & 282\ \ 49\ \ 26\cdot7 \\
\Omega & = & 84\ \ 32\ \ 35\cdot0 \\
i & = & 9\ \ 45\ \ 35\cdot3
\end{array}\right\}\ \text{mittl. Äquinoct. 1884·0.}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi & = & 4\ \ 13\ \ 57\cdot6 \\
\mu & = & 773"512 \\
\log a & = & 0\cdot441027
\end{array}
$$

und die Darstellung der vier Orte zufolge directer sechsstelliger Rechnung:

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Juni 28·5	−0"2	+0"4
Juli 11·5	−0·5	+4·1
„ 22·5	−0·6	−2·2
Aug. 17·3	−0·1	0·0.

Die den mittleren Orten entsprechenden Zahlen stimmen innerhalb der Unsicherheit der Rechnung, welche durchaus sechsstellig geführt wurde, mit den oben durch die Interpolation erhaltenen Werthen überein.

Die eben mitgetheilten Elemente erscheinen somit als jene, welche man vorläufig als die besten bezeichnen kann, sind aber, wie dies die vorstehenden Rechnungen erweisen, noch im hohen Grade unsicher. Um weitere Beobachtungen des Planeten zu ermöglichen, folgen weiter unten die für die Aufsuchung nöthigen Ephemeriden.

Die gefundenen Elemente zeigen einigermassen eine Ähnlichkeit mit den für den Planeten (197) Arete berechneten,

welche letztere ebenfalls als noch sehr unsicher bezeichnet werden müssen, da die diesbezüglichen Elemente nur aus den Beobachtungen einer Opposition (1879) abgeleitet sind. Benützt man aber die eben gefundenen Elemente zur Darstellung der im Jahre 1879 erhaltenen Arete-Beobachtungen, so findet man, dass bei gleichen Rectascensionen Arete um etwa einen Grad südlicher stand, als Cölestina; beide Planeten können daher nicht identisch sein.

Die vorhandenen Grössenschätzungen erlauben schliesslich noch die mittlere Oppositionshelligkeit mit angemessener Genauigkeit zu bestimmen; es findet sich:

		geschätzte Grösse	mittlere Opposit.-Grösse
Juni 27	Wien	12·5	12·8
„ 29	„	12·8	13·1
„ 30	Rom	12·8	13·1
Juli 21	Wien	13·5	13·5

im Mittel also wird die Oppositions-Grösse = 13·1.

Die unten folgende für 1885 geltende Oppositionsephemeride, bei deren Berechnung mit Rücksicht auf die Unsicherheit der Elemente von einer Störungsrechnung Umgang genommen wurde, dürfte wohl auf 4—6 Zeitminuten unsicher sein; um die Nachsuchung nach dem Planeten zu erleichtern, mag hervorgehoben werden, dass:

1885 Aug. 29	$\Delta\alpha = +1^m$	entspricht	$\Delta\delta =$	+7'9
Sept. 14	+1	„		+7·7
„ 30	+1	„		+7·4
Oct. 16	+1	„		+7·1
Nov. 1	+1	„		+6·8.

Oppositionsephemeride.

12ʰ Berl. Zeit	α	δ	log ρ	Aberrzt.
1885 Aug. 29	1ʰ17ᵐ24ˢ13	—7° 9'40"0	0·2691	15ᵐ25ˢ
„ 30	17 4·52	15 1·4	2675	22
„ 31	16 43·43	20 27·1	2659	18
Sept. 1	16 20·87	25 56·6	2644	15
„ 2	1 15 56·85	—7 31 29·5	0·2629	15 12
„ 3	15 31·40	37 5·6	2614	9
„ 4	15 4·53	42 44·4	2600	6
„ 5	14 36·27	48 25·6	2587	3

12ʰ Berl. Zeit		α	δ	log ρ	Aberrzt.
Sept.	6	1ʰ 14ᵐ 6·63	— 7°54' 8"9	0·2574	15ᵐ 1ˢ
„	7	13 35·64	— 7 59 53·8	2561	14 58
„	8	13 3·34	— 8 5 40·0	2549	55
„	9	12 29·75	11 26·9	2538	53
„	10	1 11 54·90	— 8 17 14·3	0·2527	14 51
„	11	11 18·83	23 1·7	2516	49
„	12	10 41·58	28 48·6	2507	47
„	13	10 3·17	34 34·6	2497	45
„	14	1 9 23·66	— 8 40 19·4	0·2488	14 43
„	15	8 43·08	46 2·4	2480	41
„	16	8 1·47	51 43·3	2473	40
„	17	7 18·38	— 8 57 21·7	2466	38
„	18	1 6 35·34	— 9 2 57·1	0·2459	14 37
„	19	5 50·90	8 29·2	2454	36
„	20	5 5·62	13 57·4	2449	35
„	21	4 19·54	19 21·3	2444	34
„	22	1 3 32·71	— 9 24 40·7	0·2440	14 33
„	23	2 45·19	29 54·9	2437	33
„	24	1 57·02	35 3·6	2435	32
„	25	1 8·27	40 6·4	2433	32
„	26	1 0 18·96	— 9 45 3·0	0·2432	14 32
„	27	0 59 29·16	49 52·9	2431	32
„	28	58 38·93	54 35·9	2431	32
„	29	57 48·32	— 9 59 11·5	2432	32
„	30	0 56 57·38	—10 3 39·3	0·2434	14 32
Oct.	1	56 6·18	7 59·0	2436	32
„	2	55 14·78	12 10·1	2438	33
„	3	54 23·24	16 12·4	2442	34
„	4	0 53 31·61	—10 20 5·4	0·2446	14 34
„	5	52 39·97	23 48·9	2451	35
„	6	51 48·36	27 22·5	2457	36
„	7	50 56·86	30 46·0	2463	38
„	8	0 50 5·53	—10 33 59·0	0·2470	14 39
„	9	49 14·43	37 1·2	2477	41
„	10	48 23·62	39 52·5	2485	42
„	11	47 33·17	42 32·5	2494	44

12h Berl. Zeit		α	δ	log ρ	Aberrzt.
Oct.	12	0h46m43s14	—10°45' 1"2	0·2503	14m46s
„	13	45 53·59	47 18·3	2524	48
„	14	45 4·58	49 23·6	2513	50
„	15	44 16·15	51 17·1	2535	52
„	16	0 43 28·36	—10 52 58·6	0·2547	14 55
„	17	42 41·26	54 28·0	2560	14 57
„	18	41 54·89	55 45·3	2573	15 0
„	19	41 9·31	56 50·3	2586	3
„	20	0 40 24·55	—10 57 43·0	0·2600	15 6
„	21	39 40·68	58 23·2	2615	9
„	22	38 57·72	58 51·0	2630	12
„	23	38 15·72	59 6·4	2646	16
„	24	0 37 34·71	—10 59 9·5	0·2662	15 19
„	25	36 54·73	59 0·3	2679	23
„	26	36 15·81	58 38·7	2696	26
„	27	35 37·99	58 4·8	2714	30
„	28	0 35 1·31	—10 57 18·6	0·2732	15 34
„	29	34 25·79	56 20·2	2750	38
„	30	33 51·46	55 9·6	2769	42
„	31	33 18·36	53 46·9	2789	46
Nov.	1	0 32 46·51	—10 52 12·0	0·2808	15 50

Zu Folge dieser Ephemeride tritt die Opposition in Länge am 30. Sept., in Rectascension am 7. October ein; die Oppositionsgrösse ist 13·1.

Längen- und Breitenbestimmung von San'â, Hauptstadt des Vilayets Jemen.

Von **Eduard Glaser.**

Mit der Durchforschung des alten Sabäerreiches beschäftigt, galt es mir als Hauptaufgabe, eine correcte auf astronomischen Beobachtungen und auf regelrechter Triangulation beruhende Karte Südarabiens herzustellen, da auf diesem Gebiete bisher nur wenig Exactes geleistet wurde. Den Anfang machte ich mit einer möglichst genauen Bestimmung der geographischen Lage von San'â, nachdem ich in dieser Stadt meine meteorologische und astronomische Ambulanz aufgestellt hatte. Dies schien mir um so nothwendiger und wünschenswerther, als bisher für Vermessungen im Innern Südarabiens kein einziger Fixpunkt bestimmt war, auf welchen man andere mittelst Chronometerübertragungen ausgeführte Messungen hätte reduciren können.

Die Lage von San'â wurde bisher in folgender Weise angegeben:

	Länge			Breite	
Niebuhr fand:	41°	35′		15°	21′
Pringle „	41	44	45″	15	21
Cruttender	42	10	49	15	22

Nach zahlreichen, jedoch vergeblichen Vorausberechnungen von Occultationen gelang es mir endlich am 1. Februar 1883 die Bedeckung von β' Scorpii durch den Mond in beiden Phasen (Ein- und Austritt) zu beobachten. Als Uhr diente mir ein vorzügliches Goldchronometer, dessen Gang, übrigens ausserordentlich regelmässig, Wochen hindurch von mir genau eruirt worden war. Die Zeitbestimmungen wurden mit einem guten Sextanten durch Beobachtung von correspondirenden Sonnenhöhen ausgeführt.

Vom 20. Jänner 1883 bis 31. Jänner hatte das Chronometer einen täglichen Gang von -2^s82, welcher Gang auch für den Tag nach der beobachteten Occultation constatirt wurde; vom 31. Jänner bis 11. April -2^s72, also immerhin nur eine geringfügige Änderung trotz des grossen Zeitraumes. Die Occultation, mit einem Auszugsfernrohr von 6 Ctm. beobachtet, gestaltete sich folgendermassen:

Der Eintritt in den hellen Mondrand fand statt um $14^h 32^m 32^s$ (Uhrzeit meines Goldchronometers), der Austritt aus dem dunklen Mondrande um $15^h 50^m 55^s$. Die Uhrcorrection für den Moment der Emersion betrug $+41^m 16^s0$. Die Emersion, weil selbstverständlich genauer beobachtet, soll nun berechnet werden. Ich gebe die Rechnung mit Rücksicht auf die grosse Wichtigkeit dieser Längenbestimmung, in ihrer ganzen Ausdehnung, um eine eventuelle Controle derselben zu erleichtern.

Unter Zugrundelegung der vermuthlichen Länge von $2^h 49^m 0^s$ östlich von Paris fand ich mit Zuhilfenahme der Connaissance des temps eine Correctur von $-0^h 1^m 32^s3$. Die erste genäherte Länge beträgt daher

$$2^h 47^m 27^s7 = L_1$$

Mit dieser verbesserten Länge wiederholte ich die Rechnung in folgender Weise:

Der Connaissance des temps entnahm ich für den 1. Februar für β' Scorpii:

$$AR_* = 15^h 58^m 38^s97, \qquad D_* = -19° 28' 59"7$$
$$\log n = 9 \cdot 7486, \qquad N = 96° 45'$$
$$T_0 = 14^h, \qquad H_0 = 282° 15' 26"$$

$$p_0 = -0 \cdot 23022 \qquad q_0 = +0 \cdot 35487$$
$$p' = +0 \cdot 55665 \qquad q' = -0 \cdot 06583$$
$$p'' = +0 \cdot 00003 \qquad q'' = -0 \cdot 00002$$

Mit Berücksichtigung der Uhrcorrection fand die Emersion T_e um $16^h 32^m 1^s0$ mittlerer Sanâ'ner Zeit statt. Demnach waren seit der Sanâ'ner mittleren Mittage 16 Sternstunden, 34^m und 43^s96 verflossen.

Sternzeit im mittleren Pariser Mittag am 1. Feber

1. Februar $= 20^h 45^m 22^s73$

Correction für San'â —26ˢ91 wegen östlicher Lage.

Demnach Sternzeit im mittleren San'âner

Mittag	$20^h\ 44^m\ 55^s82$
Emersion	16 34 43·96
Sternzeit des Austrittes	13 19 39·78
AR_*	15 58 38·97
Stundenwinkel h	= 21 21 0·81

Daher der Gang der Rechnung:

$\log(r' \sin\varphi') = 9 \cdot 421043$ $\qquad \log \mathrm{I} = 9 \cdot 395434$

$\log\cos D_* = 9 \cdot 974391$ $\qquad \log \mathrm{II} = 9 \cdot 393239_n$

$\log\cos h = 9 \cdot 885858$ $\qquad \log u = 9 \cdot 790014_n$

$\log\sin D_* = 9 \cdot 523136_n$

$\log r\cos\varphi' = 9 \cdot 984245$ $\qquad v = \mathrm{I} - \mathrm{II} = +0 \cdot 49587$

$\log\sin h = 9 \cdot 805769_n$ $\qquad u = -0 \cdot 61661$

$$\tau_e = T_e - L_1 - T_0 = -0^h\ 15^m\ 26^s7 = -0^h25742$$

$$P = p_0 + p'\ \tau_e + p''\ \tau_e^2 = -0 \cdot 37352 \quad P - u = +0 \cdot 24309$$

$$Q = q_0 + q'\ \tau_e + q''\ \tau_e^2 = +0 \cdot 37182 \quad Q - v = -0 \cdot 12405$$

$\log(P-u) = 9 \cdot 385777$ $\qquad \log m = 9 \cdot 435931$

$\log(Q-v) = 9 \cdot 093597_n$ $\qquad \log(1:k) = 0 \cdot 563910$

$\log tg\, M = 0 \cdot 292180_n$ $\qquad \log\sin(M-N) = 9 \cdot 539940$

$M = 117°\ 2'\ 5''8$ $\qquad \log\cos\psi = 9 \cdot 539781$

$M - N = 20\ 17\ 5 \cdot 8$

$\psi = 69\ 43\ 22 \cdot 1$ $\qquad \log(M-N+\psi) = 5 \cdot 8302_n$

$M - N + \psi = 90\ 0\ 27 \cdot 9$ $\qquad \log\frac{m}{n} = 9 \cdot 6873$

$\log\sec\psi = 0 \cdot 4602$

$\log dL_1 = 5 \cdot 9777_n$

$dL_1 = -0^h000095 = -0^s3$

$$L = L_1 + dL_1 = 2^h\ 47^m\ 27^s4 \text{ östl. von Paris}$$
$$= 41°\ 51'\ 51''0 \quad \text{„ „ „}$$

Eine gleiche Rechnung auch für den Eintritt ausgeführt, gäbe eine Länge $L = 2^h\ 47^m\ 26^s5$; doch ist er, wie schon bemerkt wurde, minder genau; ich bleibe daher bei dem obigen Werthe stehen.

Da mein Observatorium im äussersten Osten der Stadt gelegen war, und die Ausdehnung San'âs von Ost nach West nach

meinen eigenen Messungen circa 2487 Meter = 0·335 geographische Meilen = 5·56 Zeitsecunden = 1′ 23ʺ4 beträgt, so ist demnach als geographische Länge des Centrums der Stadt anzunehmen:

$$2^h\,47^m\,24^s6 = +41°\,51'\,9''$$

Was nun die Breite von San'â anbelangt, so habe ich dieselbe bereits am 17. Jänner 1883 aus Sonnenhöhen bestimmt, welche Methode ich der Beobachtung des Polarsternes bei der Kleinheit meines Instrumentes vorzog. Ich habe diese Beobachtungen späterhin zu wiederholten Malen gemacht und auf diese Weise eine grosse Reihe von Circummeridianhöhen erhalten, aus welchen sich nach gehöriger Reduction eine genaue Breite wird ableiten lassen. Für heute begnüge ich mich mit der Angabe der ersten angenäherten Breite, wie sie aus der Beobachtungsreihe vom 17. Jänner 1883 hervorgegangen. Es ist selbstverständlich, dass sowohl vor als auch nach der Beobachtung die Temperatur und der Barometerstand genau registrirt wurden.

Die so berechnete Breite beträgt:

$$+15°\,23'\,21''3$$

oder für das Centrum der Stadt (die Stadt breitet sich circa 860 Meter von Süd gegen Nord aus)

$$+15°\,23'\,36''.$$

Die beobachteten Sonnenhöhen sollen später in extenso publicirt werden.

Hier sei nur noch erwähnt, dass die Stadt San'â, welche bereits auf dem östlichen Abhange des arabischen Längengebirges Serât liegt, eine Seehöhe von beiläufig 2220 Meter besitzt. Die genaue Höhe, welche übrigens nur um ± 2 M. verschieden sein kann, wird erst nach der Reduction meiner fast einjährigen Beobachtungsreihe des Luftdruckes bestimmt werden können. Der Kamm des Serât liegt circa 450 M. höher als San'â.

Über den sogenannten Seqt der ägyptischen Mathematiker.

(Mit 2 Holzschnitten.)

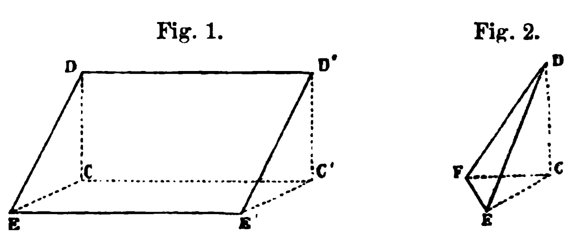
Aus einem Briefe von Prof. **Moritz Cantor** in Heidelberg
an Prof. Emil Weyr.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. October 1884.)

In dem schönen Vortrage: „Über die Geometrie der alten Ägypter“, welchen Sie in der Sitzung vom 29. Mai 1884 hielten, stellten Sie sich bezüglich der Bedeutung der „Seqt“ genannten, bei der Pyramide auftretenden Verhältnisszahl auf die Seite von H. Eug. Révillout und pflichten der von diesem geistreichen Forscher seiner Zeit in der Revue Egyptologique 1881, Nr. II et III, pag. 304—314 angegebenen Meinung bei, es handle sich um den Böschungswinkel der Pyramide, welcher, trigonometrisch gesprochen durch seine Cotangente bestimmt sei, d. h. man habe einen massiven rechten Winkel gehabt mit Schenkeln von je einer Elle Länge, wobei der verticale Schenkel uneingetheilt, der horizontale dagegen in aliquote Theile getheilt war, worauf man den Punkt des horizontalen Schenkels bestimmte, in welchen ein von dem Höhepunkt des Verticalschenkels ausgehender, der Seitenfläche der Pyramide gleichgeneigter Stab eintraf. Herr Aug. Eisenlohr, der Herausgeber des Papyrus, in welchem die betreffenden Rechnungen vorkommen, war in seiner Übersetzung (Leipzig 1877) von der Meinung ausgegangen, der „Seqt“ messe vielmehr meistens den Winkel, welchen die Kante der Pyramide mit der Diagonale ihrer quadratischen Grundfläche bilde, und zwar, trigonometrisch gesprochen, durch seinen Cosinus, während es allerdings in einem Falle um den Böschungswinkel sich handle, der aber durch seine Tangente gegeben werde. Herr Eisenlohr liess sich von der Meinung leiten, die Pyramiden des Papyrus würden vermuthlich den wirklich vorhandenen

ähnlich gewesen sein, also einen Böschungswinkel von ungefähr 52° besessen haben, und diese Neigung kömmt nur dann heraus, wenn Seqt der erwähnte Cosinus ist. In dem letzten Pyramidenbeispiele des Papyrus aber Seqt als eine Tangente aufzufassen, dazu nöthigten neu auftretende Namen der Verhältnisszahlen, von denen jener, der den Zähler des Verhältnissbruches bedeutet, sicherlich „Höhe" heisst. Herr Révillout hilft sich über diese Schwierigkeiten hinaus, indem er die neuen Namen einfach Synonyma der früheren sein und den Verfasser der Urschrift des Papyrus, der ihm ein ungeübter Rechenschüler ist, den groben Fehler begehen lässt, Divisor und Dividendus verwechselt zu haben. Bei erneuter, wesentlich durch das Lesen Ihres Vortrags veranlasster Überlegung bin ich auf einen Einfall gekommen, der, wie mir scheint, der Veröffentlichung nicht unwürdig ist, weil er die Schwierigkeit, dass Seqt in doppelter Bedeutung vorkommt und damit in Verbindung vier Wörter auftreten, löst, ohne mit Herrn Révillout Synonyma und Rechenfehler anzunehmen. Mein Vorschlag ist folgender:

Man weiss, dass die ägyptischen Pyramiden zunächst staffelförmig mit parallelepipedischen, auf einander ruhenden, sich verjüngenden Stockwerken angelegt wurden, und dass dann erst die Ausfüllung der Winkelräume bis zur Herstellung einer glatten Oberfläche erfolgte. Dem Arbeiter machte die Herstellung dieser Ausfüllsteine zuverlässig am meisten Schwierigkeit, und es wäre keineswegs unmöglich, dass der Baumeister, um seinem Arbeiter die Aufgabe zu erleichtern, Modelle hätte anfertigen



lassen. Deren brauchte man aber zwei, von der in Fig. 1 und 2 gezeichneten Gestalt. Das einfachere Modell (Fig. 1) diente zur Ausfüllung der Breitseiten, das andere (Fig. 2), an der Ebene *DCF* mit einem symmetrisch gleichen zusammentreffend, diente die Ecken zu bilden, beide Modelle passten mit der Ebene *DCE*

an einander. Das zweite Modell stellt sich als achter Theil einer der grossen Pyramide ähnlichen Modellpyramide dar; dabei ist *DF* die Kante, *DC* die senkrecht von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Höhe, *CF* die halbe Diagonale der Grundfläche, *EF* und die ihr gleiche $CE[\sphericalangle CEF = 90°, \sphericalangle CFE = 45°$, also auch $\sphericalangle ECF = 45°$ und $EF = CE]$ die halbe Seite der quadratischen Grundfläche. Bei dem ersten Modell kommt es wesentlich auf $\sphericalangle DEC$ an, bei dem zweiten auf eben diesen und auf $\sphericalangle DFC$; folglich genügte auch das zweite Modell allein, um beide Arten von Ausfüllsteinen nach ihm behauen zu können. Nennen wir nun mit Herrn Eisenlohr die vier erwähnten Längen, beziehungsweise ihre Verdoppelung, *DF* = *pir em us*, *DC* = *qai en haru*, 2*CF* = *uχa tebt*, 2*CE* = *senti*, so treten alle vier an einem Raumgebilde auf und müssen naturgemäss selbstständige Namen führen. Seqt aber „die Verhältnisszahl" ist in der einen Ebene $\frac{\frac{1}{2} u\chi a\ tebt}{piremus} = \frac{CF}{DF} = \cos DFC$, in der anderen Ebene $= \frac{qai\ en\ haru}{\frac{1}{2}\ senti} = \frac{CD}{CE} = \operatorname{tng} DFC$. Allerdings würde diese Hypothese die zweite in sich schliessen, dass das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck *CEF* als solches erkannt gewesen wäre.

Die doppelte Brechung des Lichtes in Flüssigkeiten.

Von Dr. **Ernst v. Fleischl,**

k. k. a. ö. Professor der Physiologie an der Wiener Universität.

(Mit 1 Holzschnitt.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. October 1884.)

Den genialen Untersuchungen Fresnel's über die circumpolarisirenden Eigenschaften des Bergkrystalles verdankt die Wissenschaft ein erschöpfendes Verständniss der Vorgänge bei der Drehung der Schwingungsebene eines linear polarisirten Lichtstrahles, welcher durch eine Quarzplatte in der Richtung ihrer optischen Axe geht, und die Kenntniss einer besonderen Art der Doppelbrechung. Während bei einer Doppelbrechung, sensu communi, der einfache Strahl in zwei, linear und senkrecht auf einander polarisirte Strahlen, von ungleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit, zerfällt, wird ein Lichtstrahl, welcher auf eine normal zur Axe geschnittene Quarzplatte in der Richtung der Axe fällt, allerdings auch in zwei, mit verschiedener Geschwindigkeit in der Richtung der Axe sich fortpflanzende Strahlen zerlegt; doch sind die Bahnen, in denen die Äthermoleküle dieser beiden Strahlen schwingen, nicht linear, sondern circular — die Richtung, in der die Kreisbahnen durchschwungen werden, ist in dem einen Strahl entgegengesetzt der Richtung, in welcher die Äthermoleküle des anderen Strahles schwingen. Bei dem Austritte aus der Platte setzen sich die beiden Strahlen wieder zu einem zusammen, welcher linear polarisirt ist, wenn der eintretende Strahl es war. Da aber die Bewegung des Äthers in dem einen Strahle im Quarz mit einer anderen Geschwindigkeit vor sich ging, als die in dem anderen Strahle, so wird eine Phasendifferenz zwischen den beiden Strahlen eintreten, die um so grösser sein wird, je länger der im Quarz zurückgelegte Weg, also je dicker die Quarzplatte ist. Diese Phasendifferenz wird sich für den Fall, dass der eintretende Strahl linear polarisirt war, in dem ausgetretenen Strahle

als Drehung der Polarisationsebene ausdrücken. Durch seine bekannten, sinnreichen Methoden hat Fresnel experimentell nachgewiesen, dass der Quarz in der That auch in der Richtung seiner Axe doppelbrechend ist; und ferner, dass in diesem Falle die beiden Strahlen circular und entgegengesetzt polarisirt sind. Eine Recapitulation der, sich an Fresnel's Entdeckung anschliessenden, berühmten Arbeiten Airy's und vieler Anderer, die sich mit der Untersuchung der Strahlen beschäftigen, welche im Quarz kleine Winkel mit der Axe einschliessen — Arbeiten, die schliesslich zu einer sehr genauen Kenntniss der Gestalt der Lichtwellenoberfläche im Quarz geführt haben — wäre angesichts der hier vorliegenden Aufgabe überflüssig.

Da eine Einwirkung auf die Schwingungsrichtung des Lichtes nicht ausschliesslich an die Anordnung der Materie im Krystall gebunden ist, da vielmehr zahlreichen Lösungen, und zahlreichen, bei gewöhnlicher Temperatur an sich flüssigen Substanzen die Eigenschaft zukommt, die Polarisationsebene zu drehen, so liegt es nahe, sich zu fragen, ob die Änderung der Schwingungsrichtung von Lichtstrahlen, welche „optisch active" Flüssigkeiten durchsetzen, ebenfalls auf einer Phasendifferenz zwischen zwei circular polarisirten Strahlen beruhe, wie bei Krystallen; oder ob die circumpolarisirenden Eigenschaften von Flüssigkeiten auf ganz anderen Vorgängen beruhen — was ja immerhin denkbar wäre, und was so lange nicht als ausgeschlossen betrachtet werden darf, als nicht eine zur Erklärung des Drehungsvermögens hinreichende Doppelbrechung an den optisch activen Flüssigkeiten nachgewiesen ist.

Doppelbrechung ist bis jetzt allerdings nur an Substanzen beobachtet, die in irgend einer Weise eine Axe, eine Orientirung im Raume darbieten, und steht immer zu dieser Orientirung in naher Beziehung; mag sie nun von der Anordnung der Materie in einem Krystall — einem in eminenter Weise im Raume orientirten Gebilde — oder von Compression oder Spannung der festen Materie in einer bestimmten Richtung, durch Druck, einseitige Abkühlung u. dgl. herrühren. Dem entsprechend finden wir auch die Gestalt der Lichtwellenoberfläche in doppelbrechenden Körpern immer an bestimmte Richtungen gebunden; doch kann diess keinen ernstlichen Einwand gegen die

Annahme von doppelbrechenden Flüssigkeiten begründen. Denn erstens sehen wir die Eigenschaft der Drehung der Polarisationsebene selbst, in den Krystallen zwar an bestimmte Orientirungen gebunden, in den optisch activen Flüssigkeiten hingegen nach allen Richtungen des Raumes gleichmässig vorhanden; — und zweitens scheint mir Alles, was zum Verständnisse irgend einer Erscheinung der Doppelbrechung erheischt wird, dargeboten, sobald die Gestalt der betreffenden Wellenoberfläche gegeben ist. Diese ist nun offenbar für unseren Fall einer von jeder Orientirung unabhängigen Doppelbrechung eindeutig gegeben durch die Doppelfläche, welche eine Kugelschale begrenzt, das heisst: durch zwei concentrische Kugeloberflächen.[1]

---

[1] Sowie diese Annahme erwiesen ist, das heisst: sobald gezeigt ist, dass die Drehung der Polarisationsebene in optisch activen Flüssigkeiten auf Doppelbrechung, auf einer (von ungleicher Geschwindigkeit zweier circular polarisirter Strahlen herrührenden) Phasendifferenz beruht, entfällt von selbst die Schwierigkeit, welche man bisher in der Erklärung des Umstandes gefunden hatte, dass das Drehungsvermögen der Flüssigkeiten von der Richtung, in welcher diese von den Lichtstrahlen durchsetzt werden, unabhängig, für alle Richtungen das gleiche ist; und die Annahmen, welche man zur Beseitigung dieser Schwierigkeit gemacht hatte — ich erwähne nur zum Beispiele den bekannten Vergleich der Flüssigkeitsmolekeln mit Schrauben, die alle im gleichen Sinne gewunden sind, und die, ohne Bevorzugung einer bestimmten Richtung, mit ihren Axen nach allen Richtungen des Raumes gekehrt, diesen erfüllen — diese Annahmen werden überflüssig. Die Vorstellung, welche aus dem Nachweise der Doppelbrechung in Flüssigkeiten mit Nothwendigkeit folgt, dass nämlich jede Störung im Gleichgewichte des Lichtäthers innerhalb einer solchen Flüssigkeit sich zwar nach allen Richtungen des Raumes gleichmässig fortpflanzt, in jeder dieser Richtungen aber mit zwei verschiedenen Geschwindigkeiten, hat, so viel ich sehen kann, an sich nicht die mindeste Schwierigkeit; aus ihr folgt aber unmittelbar und mit Nothwendigkeit, dass eine solche Flüssigkeit die Polarisationsebene eines Lichtstrahles um gleich viel drehen muss, in welcher Richtung immer der Strahl die Flüssigkeit durchsetzt.

Nehmen wir für einen Augenblick an, dass linear polarisirtes Licht schon im isotropen und einfach brechenden * Mittel, zum Beispiele in der

* „Isotrop“ und „einfach brechend“ sind, sobald die Doppelbrechung in Flüssigkeiten erwiesen ist, nicht mehr einander deckende Begriffe. Ein Mittel, in welchem die Lichtwellenoberfläche die Gestalt zweier concentrischer Kugeloberflächen hat, und in welchem die Doppelbrechung unabhängig von der Richtung im Raume ist, muss man vi nominis „isotrop“ nennen, trotz dem es nicht „einfach brechend“, sondern doppelbrechend ist.

Natürlich hat man sich diese nicht zu denken wie die Schallwellenoberflächen zweier, an demselben Punkte in der Luft rasch nach einander überspringender, elektrischer Funken, sondern man hat zu berücksichtigen, dass die Dicke der Kugelschale ein constanter aliquoter Theil ihres Radius ist, dass also mit wachsendem Radius auch der Abstand zwischen den beiden Kugelflächen, welche die Wellenoberfläche des Lichtes darstellen, wächst. In Wirklichkeit wird man sich — angesichts des äusserst geringen Betrages der Doppelbrechung, selbst in den am stärksten drehenden bekannten Flüssigkeiten — den Abstand zwischen den beiden concentrischen Kugeloberflächen fast verschwindend vorzustellen haben, im Vergleiche mit dem Halbmesser der Kugelschale. Zu der bekannten Gestalt der Wellenfläche zweiaxiger Krystalle hat diese Wellenfläche keine hier besonders erwähnenswerthe Beziehung; aus der Wellenoberfläche einaxiger Krystalle entsteht sie natürlich durch Gleichsetzung aller drei Axen des ellipsoidischen Theiles derselben.

Nach diesen, sich eigentlich von selbst ergebenden Betrachtungen, konnte es sich überhaupt um nichts Anderes

---

Luft, aus zwei ganz gleichen und entgegengesetzten Hälften circularpolarisirten Lichtes besteht — eine Annahme, der nichts im Wege liegt — und stellen wir uns vor, dass ein Strahl solchen Lichtes in eine optisch active Flüssigkeit eindringt. Die beiden Hälften pflanzen sich — unabhängig von der Richtung, in welcher der Strahl durch die Flüssigkeit geht — in ihr, nicht mehr wie ausserhalb mit der gleichen, sondern, je nach der Natur der Flüssigkeit, die eine oder die andere Hälfte mit einer etwas grösseren Geschwindigkeit fort, als die andere Hälfte. Sobald das Licht wieder aus der Flüssigkeit ausgetreten ist, und wieder in Luft oder in Glas fortschreitet, geschieht diess wieder für beide Hälften mit gleicher Geschwindigkeit: die Polarisationsebene des Lichtes ist aber gedreht worden, und zwar um einen Betrag, der nur von der Verzögerung abhängt, welche die eine Hälfte gegen die andere in der Flüssigkeit erlitten hat. Diese Verzögerung, und mit ihr die Drehung der Polarisationsebene ist aber von der Richtung des Strahles in der Flüssigkeit ganz unabhängig. Ich finde weder in dieser Vorstellung, noch in der ihr zu Grunde liegenden Annahme einer zwiefachen Geschwindigkeit der Fortpflanzung von Gleichgewichtsstörungen in dem Lichtäther, eine Schwierigkeit.

Es versteht sich von selbst, dass diese Auseinandersetzung keine Anwendung findet auf jene temporäre optische Activität, welche vom Aufenthalte flüssiger (oder fester) Körper im magnetischen oder elektrischen Felde herrührt.

handeln, als um die Wahl einer Methode, welche die Doppelbrechung circumpolarisirender Flüssigkeiten sinnfällig machen musste, falls eine solche wirklich vorhanden war.

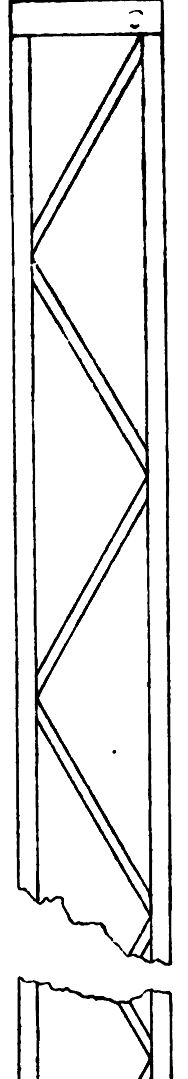
Es ist nicht schwer, den Grad von Doppelbrechung zu berechnen, der einem gegebenen Drehungsvermögen entspricht. Die Rechnung [1] ergab mir nun, dass die Doppelbrechung, welche dem Drehungsvermögen, selbst der am stärksten drehenden Flüssigkeiten entspricht, so gering ist, dass die Hoffnung, sie durch irgend eine der bekannten Methoden direct nachzuweisen, von vornherein aufgegeben werden muss; speciell von einer Nachahmung der von Fresnel für den directen Nachweis der Doppelbrechung längs der Axe im Quarz gewählten Methode (Fresnel'sches Quarzprisma) war bei Flüssigkeiten durchaus nichts zu erwarten.

Ich construirte also den sofort zu beschreibenden Apparat, und übertrug seine Ausführung der Firma C. A. Steinheil's Söhne in München. Aus drei langen schmalen Glasstreifen wurde eine, an beiden Enden und oben offene Rinne von nahezu quadratischem Querschnitte hergestellt. Dieselbe wurde an den beiden Enden durch planparallele Glasplatten verschlossen, und das Innere der Rinne wurde durch vertical auf deren Boden gestellte, planparallele Glasplatten von gleicher Höhe mit den Wänden der Rinne selbst, und im Zickzack zwischen diesen hin- und herziehend, in eine Reihe von Hohlräumen prismatischer Gestalt abgetheilt.

Die Zwischenwände hatten eine Neigung von 30° gegen die Axe der Rinne, und es waren ihrer 21 vorhanden, so dass, wenn man die beiden senkrecht gegen die Axe der Rinne gestellten Endplatten dazurechnet, durch 23 planparallele Glasplatten die Flanken von 22 Hohlprismen gebildet wurden, von denen 20 einen brechenden Winkel von je 120°, und 2 einen brechenden Winkel von je 60° hatten. Zehn 120-gradige und ein 60-gradiges Prisma waren mit ihren brechenden Kanten nach der einen Seite, zehn 120-gradige und ein 60-gradiges Prisma nach der entgegen-

[1] Da diese, sowie die übrigen in dieser Arbeit vorkommenden Rechnungen, auf der Anwendung bekannter optischer Formeln, oder doch nur solcher Transformationen derselben beruhen, die ohne Schwierigkeit abzuleiten sind, so habe ich ihre Wiedergabe hier für überflüssig gehalten.

gesetzten Seite gewendet. Die Gesammtsumme der brechenden Winkel dieses Systemes von Hohlprismen betrug 2520° oder: sieben ganze Kreisperipherien.



Die genauen Ausmaasse meines Apparates sind:

Ganze Länge	543	Mm.
„ Breite	20	„
„ Höhe	19	„
Länge im Lichten	534	„
Breite „ „	15	„
Höhe „	15·6	„
Dicke der Zwischenplatten, jede	1·5	„
Länge „ „ „	30	„
Länge der Prismenbasen im Lichten, jede	48	„
Länge der Prismenseiten im Lichten, jede	28	„

Winkel der beiden Endzellen: 30°, **60°**, 90°
Winkel der 20 Binnenzellen: 30°, **120°**, 30°

Brechungsindex des Glases, aus welchem die planparallelen Platten bestehen,

für die Linie D : 1·512
„ „ „ F : 1·518

Beistehende Figur, welche den Apparat (mit Fortlassung seines mittleren Theiles) von oben gesehen, in natürlichen Dimensionen darstellt, wird wohl keinen Zweifel über die Art seiner Zusammensetzung bestehen lassen.

Um dem Leser eine Vorstellung von der Vorzüglichkeit der optischen Arbeit an diesem Apparate zu geben, will ich anführen, dass man, selbst wenn die Prismen mit Luft erfüllt waren, trotz der 46 Brechungen, von denen 42 unter so grossen Winkeln erfolgten, mit dem Fernrohre längs der Axe durch den ganzen Apparat blickend, die feinsten Miren (zarteste mit Diamant auf Glas gezogene Linien) deutlich, und vollkommen unverzerrt wahrnahm. Da der Erfolg meiner ganzen Unter-

suchung von der Correctheit der Ausführung dieses Apparates abhing, fühle ich mich verpflichtet, Herrn Dr. Steinheil für die, alle meine Erwartungen weit übertreffende Correctheit, mit welcher er diese schwierige Combination planparalleler Gläser ausführte, hier meine grösste Anerkennung und meinen besten Dank auszusprechen. Auch für die Bestimmung der Brechungsexponenten des zu den planparallelen Platten verwendeten Glases, welche ich oben in der Zusammenstellung der Constanten des Apparates angeführt habe, bin ich Herrn Dr. Steinheil, der für die Bestimmung eigens kleine Prismen aus diesem Glase zu schleifen die Güte hatte, zu Dank verpflichtet.

Der Apparat sollte nun derart angewendet werden, dass sämmtliche Hohlprismen, deren brechende Kanten nach einer Seite gewendet waren, mit einer in bestimmtem Sinne optisch activen (sagen wir: rechtsdrehenden) Flüssigkeit gefüllt wurden, während die nach der anderen Seite gewendeten, zwischen ersteren alternirend liegenden Prismen, mit einer linksdrehenden Flüssigkeit gefüllt wurden. War noch der Bedingung genügt, dass die beiden Flüssigkeiten denselben Brechungsindex haben, so durfte man nach der üblichen Anschauungsweise erwarten, da sämmtliche Brechungen im ganzen Systeme einander genau aufhoben, ein auf der einen Seite durch die eine Endplatte in der Richtung der Axe der Rinne in den Apparat eintretendes Lichtbündel durch die andere Endplatte, in Allem und Jedem unverändert, wieder austreten zu sehen. Beruhte jedoch die optische Activität der angewandten Flüssigkeiten auf einer, der axialen Doppelbrechung des Quarzes analogen Doppelbrechung, dann war leicht einzusehen, dass, während die einfachen Brechungen einander in den alternirend gestellten Prismen aufhoben, der Betrag der Doppelbrechung von Prisma zu Prisma sich summirte.

Um diesen letzteren Umstand ganz anschaulich zu machen, genügt folgende Überlegung. Das Licht tritt im Apparate immer aus Glas in Flüssigkeit und aus Flüssigkeit in Glas. Der Brechungsindex sämmtlicher, zur Verwendung kommender Flüssigkeiten ist kleiner, als der des angewandten Glases. Beim Übertritt aus Glas in Flüssigkeit findet also eine Brechung vom Lothe statt. Hat das Licht, der Annahme entsprechend, zwei Geschwindigkeiten in der Flüssigkeit, so wird der rascher fort-

schreitende Theil des Lichtes weiter vom Lothe weggebrochen, als der andere. Vermöge der Schwingungsrichtung in diesem schnelleren, und demnach stärker gebrochenen Strahl sei die in Betracht genommene Flüssigkeit eine rechts drehende. Die beiden Strahlen werden divergent durch die Flüssigkeit im Hohlprisma gehen, und beim Austritte aus ihr in das Glas, wird, wie bei jeder normalen Brechung in Prismen, diese Divergenz vermehrt werden. Nun kommen die beiden, einstweilen im Glase wieder mit gleicher Geschwindigkeit fortschreitenden, aber entgegengesetzt circular polarisirten Strahlen an das nächste Flüssigkeitsprisma, das mit seiner Kante nach der entgegengesetzten Seite sieht, als das erste. Damit in einem solchen Prisma die bestehende Divergenz der Strahlen nicht vermindert, sondern vergrössert werde, wäre natürlich nothwendig, dass der Strahl, welcher beim Eintritte in die Flüssigkeit im ersten Prisma stärker vom Lothe abgelenkt wurde, jetzt schwächer abgelenkt würde, als der andere Strahl. Diess ist aber in der That der Fall, wenn das entgegengesetzte Drehungsvermögen der zweiten (linksdrehenden) Flüssigkeit auf der grösseren Geschwindigkeit des in jenem Sinne circular polarisirten Strahles beruht, der in der ersten Flüssigkeit der langsamere war, auf welcher Voraussetzung ja unsere ganze Betrachtung beruht.

Man kann also in Kürze sagen: bei der Anordnung in unserem Apparate findet desshalb, einerseits eine Aufhebung der einfachen, anderseits eine Summation der doppelten Brechungen statt, weil auf der einen Seite Flüssigkeiten von gleichem Brechungsindex in Paaren gleich stark aber entgegengesetzt brechender Hohlprismen sich befinden; auf der anderen Seite jedoch, bezüglich der Doppelbrechung, mit jedem Wechsel in der Richtung der brechenden Kante der Prismen auch ein Austausch zwischen den beiden Strahlen in der Fähigkeit einhergeht, sich schneller oder langsamer fortzupflanzen, das heisst: stärker oder schwächer gebrochen zu werden.

Unter diesen Umständen, und mit Zuhilfenahme der Vergrösserungen eines, besonders für merklich parallel der Axe einfallende Strahlen sehr vollkommenen (eigentlich für astronomische Zwecke bestimmten) Fernrohres von A. Prazmowski in Paris, durfte ich erwarten, durch den mit optisch activen Flüssigkeiten

gefüllten Apparat feine Miren doppelt zu sehen. Über die gewählte Anzahl von Prismen, oder über die gewählte Grösse ihrer brechenden Winkel, welche die vorläufige Rechnung als eben hinreichend zur Sichtbarmachung der Doppelbilder[1] ergeben hatte, wollte ich bei der Construction des Apparates aus Gründen, die hauptsächlich von der Natur der zu verwendenden Flüssigkeiten herstammten, und deren Erwägung sich nachträglich als durchaus nicht überflüssig erwies, nicht hinausgehen.

Die zunächst zur Entscheidung zu bringende Frage war die, die Wahl der beiden Flüssigkeiten, mit denen der Versuch angestellt werden sollte, betreffende. Die ausführliche Breite der nun folgenden Darstellung bitte ich zu entschuldigen — sie entspringt aus der Absicht, bei einer etwaigen Wiederholung der Versuche, dem Experimentator überflüssige Mühe zu ersparen.

Die Idee, concentrirte Lösungen der beiden Weinsäuren zu verwenden, erwies sich bei genauerem Zusehen sofort als unzweckmässig. Ganz abgesehen von der Schwierigkeit, die sich der Gewinnung einer genügenden Menge von Linksweinsäure gegenüberstellte, sprach gegen die Verwendung dieser Substanzen das an und für sich relativ sehr geringe Drehungsvermögen der Weinsäuren.

Viel bessere Hoffnung gewährten die Lösungen von rechtsdrehendem und linksdrehendem Zucker, mit welchen Lösungen denn auch der erste Versuch unternommen wurde. Herr Professor Dr. Ernst Ludwig hatte die grosse Güte, mir für diesen Versuch eine beträchtliche Quantität einer von ihm selbst dargestellten, absolut klaren, sehr concentrirten Lösung von Levulose in Wasser zur Verfügung zu stellen. Diese Lösung war dickflüssig, von tiefgelber Farbe, und hatte einen Brechungsindex von 1·4807 für Licht von der Wellenlänge der *D*-Linie. Als Gegenflüssigkeit sollte eine Lösung von gewöhnlichem, rechtsdrehendem Zucker verwendet werden. Begreiflicherweise wollte ich eine Verdünnung der linksdrehenden Lösung möglichst vermeiden,

---

[1] Dieser Berechnung habe ich die Annahme zu Grunde gelegt, dass zwei helle Punkte auf dunklem Grunde bequem und deutlich getrennt erscheinen, wenn der von ihnen eingeschlossene Gesichtswinkel nicht weniger als 90 Secunden misst — überhaupt erkennbar ist natürlich das Doppelbild als solches auch bei wesentlich kleinerem Gesichtswinkel.

denn erstens wurde durch eine solche der Betrag der Doppelbrechung vermindert, und zweitens wurde der Brechungsindex herabgesetzt; während doch in der Annäherung dieses Werthes an den entsprechenden des Glases (1·512) ein Vortheil lag, von dem ich nur ungern etwas, und jedenfalls nicht mehr, als nothwendig war, verlieren wollte. Da es aber nicht gelang, eine Lösung des rechtsdrehenden Zuckers von höherem Brechungsindex als 1·473 herzustellen, so musste ich mich entschliessen, der linksdrehenden Lösung so viel Wasser zuzusetzen, bis sie ebenfalls einen Brechungsindex $n_D = 1{\cdot}473$ hatte.

Nun haben Zuckerlösungen bekanntlich eine sehr grosse Neigung zur Bildung von Schlieren, und diese Neigung ist um so grösser, je concentrirter die Lösungen sind. Das blosse Stehen an freier Luft genügt, um bei sehr concentrirten Lösungen Unterschiede in der Concentration zwischen den oberflächlichen und den tiefen Schichten der Flüssigkeit herbeizuführen, die sich dann bei jeder Bewegung der Flüssigkeit als Striemen und Schlieren in ihr ausdrücken. Als ich die beiden Zuckerlösungen vom Brechungsindex 1·473 in den Apparat eingefüllt hatte, und zunächst durch denselben gegen einen leuchtenden Punkt mit freiem Auge hinblickte, zeigte es sich, dass wegen der vielfachen Schlieren in der Flüssigkeit kein auch nur annähernd brauchbares Bild des leuchtenden Punktes zu Stande kam.

Ich musste die Lösungen so stark mit Wasser verdünnen, bis sie nur mehr einen Brechungsindex $n_D = 1{\cdot}380$ hatten, um die Schlieren los zu werden.

In dieser Concentration hatte die rechtsdrehende Lösung ein Drehungsvermögen[1] von $[\rho]_A = +18°$ für rothes Licht und

[1] Das Drehungsvermögen der Flüssigkeiten bestimmte ich durchwegs mit dem Mitscherlich'schen Apparate. Die Werthe für den „rothen Strahl" finden sich in dieser Arbeit aus dem Grunde immer angegeben, weil, wegen der Färbung einiger der zu untersuchenden Flüssigkeiten, die Beobachtung mit Natriumlicht oder mit der couleur de passage an ihnen undurchführbar war. Die Ablesung bei rothem Lichte geschah durch Vorkleben eines Stückes intensiv gefärbten rothen Überfangglases (Kupferoxydulglas) vor das der Lichtquelle zugewandte Ende des Apparates. Der Index „*A*" rechts an der Klammer bedeutet, dass die betreffende Bestimmung des Rotationsvermögens mit rothem Lichte gemacht wurde, der Index „*ts*" bedeutet, dass die Bestimmung mit weissem Lichte mittelst Einstellung auf die teinte sensible gemacht wurde.

von $[\rho]_{l_s} = + 22°$ für die teinte sensible. Die beiden entsprechenden Werthe für die linksdrehende Lösung waren:

$$[\rho]_{A} = - 7° \text{ und } [\rho]_{l_s} = - 8{\cdot}5°.$$

Das Dispersionsvermögen dieser beiden Lösungen war merklich dasselbe, woraus der Vortheil erwuchs, dass weisses Licht zu dem Versuche verwendet werden konnte.

Die Versuchsanordnung war folgende: Vor der als Lichtquelle dienenden Gasflamme stand ein undurchsichtiger Schirm, in dessen Mitte sich ein von einer feinsten Öffnung durchbohrtes Stanniolblättchen befand. Das von diesem kommende Licht fiel auf die eine Endplatte des Prismenapparates, welcher natürlich sorgfältig horizontal gestellt war, und in dessen Hohlräume alternirend die beiden Lösungen eingefüllt waren. Etwa fünf Meter vor dem Prismenapparate war das erwähnte Fernrohr aufgestellt, welches für diesen Versuch mit einem astronomischen Oculare versehen war, das 65fache Vergrösserung gab, und welches auf das Loch im Stanniol eingestellt war. Blickte man durch das Fernrohr, so sah man nicht einen hellen Punkt, sondern deren zwei nebeneinander. Der Anblick war ganz der eines gut aufgelösten Doppelsternes.

Da die später zu besprechende Prüfung mittelst einer $\frac{\lambda}{4}$ Platte und eines Nicol'schen Prismas zwar gelang, und ein befriedigendes Resultat gab; mit dem starken Fernrohrocular, welches diese Flüssigkeiten bedingten, aber äusserst mühsam, und an der Grenze der Ausführbarkeit war, so suchte ich nach Flüssigkeiten mit stärkerem Drehungsvermögen, und folglich stärkerer Doppelbrechung, die erlaubte, das schwächere, nur 15malige Vergrösserung gebende, astronomische Ocular meines Fernrohres zu verwenden. Zwischen dieses Ocular und das Auge konnte der für die erwähnte Prüfung nöthige Apparat eingeschaltet werden, ohne dass dadurch die Beobachtung so erschwert wurde, wie diess bei dem starken Oculare der Fall war.

Ich verwendete bei dem nächsten Versuche als rechtsdrehende Flüssigkeit Orangenöl, eine ganz klare, leichtbewegliche, blassgelbliche, sehr stark und angenehm duftende Flüssig-

keit, das aus Pomeranzenschalen gewonnene aromatische Öl, (nicht das aus den Pomeranzenblüthen gewonnene, auch unter dem Namen „Neroli“ bekannte).

Nach einer in Wüllner's Lehrbuch citirten Angabe[1] kommt diesem Öl ein sehr hohes Drehungsvermögen zu. Meine Messungen am Orangenöl ergaben:

$$[\rho]_{a} = + 98{\cdot}3°; [\rho]_{A} = + 74{\cdot}1°.$$

Der Brechungsindex des von mir verwendeten Orangenöles war $n_D = 1{\cdot}4713$. Abgesehen von den anderen Gründen, die gegen eine Herabsetzung desselben durch Verdünnung mit inactiven Flüssigkeiten sprachen, musste ich, wie die Rechnung lehrte, eine solche jedenfalls vermeiden, wenn die durch meinen Apparat gegebene Divergenz der beiden, verschieden gebrochenen Strahlen schon bei 15-facher Vergrösserung mit Sicherheit zur Erzeugung zweier, deutlich als getrennt zu erkennender Bilder führen sollte. Und selbst hiefür war es sehr wünschenswerth, als Gegenflüssigkeit eine möglichst stark linksdrehende Substanz anzuwenden. Das linksdrehende Terpentinöl, für dessen Verwendung ich mich entschied, hatte aber nur ein Brechungsvermögen $n_D = 1{\cdot}4678$. Dieses musste erhöht werden auf den Betrag von 1·4713; denn frühere Versuche hatten mich darüber belehrt, dass bei einem Unterschiede von drei und ein halb Einheiten der dritten Decimalstelle zwischen den Brechungsindices der beiden, in die Prismen meines Apparates zu füllenden Flüssigkeiten, keine Rede davon gewesen wäre, dass das durch die eine Endplatte senkrecht eintretende Licht überhaupt noch durch die andere Endplatte austräte; ja die Ablenkung war selbst bei völliger Übereinstimmung der dritten Decimale, in dem früher mitgetheilten Versuche mit den Zuckerlösungen, so störend, dass ich daraus die Nothwendigkeit entnahm, auch noch die vierte Decimalstelle des Brechungsindex zu berücksichtigen. Zur Erhöhung des Brechungsindex des Terpentinöles benützte ich ein Ricinusöl vom Brechungsindex $n_D = 1{\cdot}4780$, und stellte aus diesen beiden Flüssigkeiten eine ganz klare, fast farblose Mi-

[1] Gernez, Annales de l'école norm. T. I. Paris 1864.

schung vom Brechungsindex $n_D = 1·4713$ her, also von demjenigen des Orangenöles. Allerdings war das Ricinusöl rechtsdrehend, $[\rho]_{r_a} = +9°$, und es wurde durch seine Beimischung zum Terpentinöl das Linksdrehungsvermögen der Mischung herabgesetzt auf: $[\rho]_{r_a} = -25·5°$, eine Zahl, die mit der durch die Rechnung[1] erhaltenen vollkommen übereinstimmte.

---

[2] Dieser Rechnung lagen zu Grunde: Die von Wiedemann für das Terpentinöl gefundenen Zahlen, die von mir für das Ricinusöl gefundene Zahl, das Mischungsverhältniss der beiden Flüssigkeiten (1:0·52239), und die Voraussetzung, dass die beiden specifischen Drehungsvermögen sich in der Mischung nicht ändern. — Das Mischungsverhältniss war selbst wieder unter der Voraussetzung berechnet, dass die optische Dichte der Mischung genau proportional sei den Mengen und optischen Dichten der Bestandtheile, welche Voraussetzung sich für diesen Fall vollkommen bestätigt fand.

Die sämmtlichen in dieser Abhandlung vorkommenden Bestimmungen von Brechungsindices sind mit einem, aus der Zeiss'schen Werkstätte hervorgegangenen „grossen" Abbe'schen Refractometer gemacht. Je länger ich mit diesem vortrefflichen Instrumente arbeitete, desto mehr lernte ich den Umstand bedauern, dass an demselben Klemmvorrichtung und Mikrometerschraube zur feinen Einstellung, ferner ein Nonius und eine Ableselupe fehlen. Über das Vertrauen, welches mit diesem Instrumente ausgeführte Messungen verdienen, möchte ich mir folgende Bemerkungen erlauben. Meine eigenen Messungen an Flüssigkeiten mit grossem Lichtbrechungsvermögen (über 1·4) stimmten unter einander (wenn sie an demselben Objecte gemacht wurden) so genau überein, dass ich als Fehlergrenze zwei Einheiten der vierten Decimale bezeichnen möchte. Nun war mein College Professor Sigmund Exner zufälligerweise gleichzeitig mit mir (jedoch zu einem, mit dieser Untersuchung nicht im mindesten zusammenhängenden Zwecke) darauf angewiesen, mit demselben Instrumente zahlreiche Messungen stark lichtbrechender Flüssigkeiten zu machen. Die Genauigkeit, mit welcher die Messungen meines Freundes unter einander übereinstimmten, war ebenso gross, wie die, welche ich oben für mich angegeben habe. So oft wir aber beide den Brechungsindex an demselben Objecte massen, zeigte sich ein constanter Unterschied von 2 bis 3 Einheiten der vierten Decimale, immer in demselben Sinne, zwischen unseren Resultaten. Dieser Unterschied rührt — wie wir uns direct überzeugten — davon her, dass jeder von uns auf eine andere Intensität innerhalb der Schattengrenze einstellte. Wer aber Recht hatte, weiss ich nicht. Wie soll man sich überhaupt darüber belehren, auf was man einzustellen hat? Das Auskunftsmittel, destillirtes Wasser von bekannter Temperatur zwischen die Glaskeile zu bringen, den dieser Temperatur entsprechenden Brechungsindex genau einzustellen, und dann durch das Instrument zu sehen, hat keinen Werth, denn bei Flüssigkeiten von so kleinem Brechungsindex liegt ohnehin keine Schwierigkeit

Die beiden Flüssigkeiten konnten nun in den Apparat nicht ohne Weiteres eingefüllt werden, da die Glastheile, aus denen er ausschliesslich besteht, mit einem Schellackkitt aneinander befestigt waren, der zwar wasserdicht war, aber den neuen Flüssigkeiten sicher nicht Stand gehalten hätte. Ich sah mich also zu der sehr lästigen Aufgabe genöthigt, den Apparat ganz frisch zu kitten. Hiezu bediente ich mich einer Chrom-Gelatine, die dann belichtet wurde, und die sich recht zweckentsprechend erwies.

Der Versuch selbst war ganz so angeordnet, wie der früher beschriebene mit den Zuckerlösungen. Die neuen Flüssigkeiten hatten zwar an und für sich keine Schlieren, dagegen in ziemlich hohem Grade die Tendenz, an Glaswänden emporzuklettern, so dass die Hohlprismen nicht ganz angefüllt werden durften, wenn nicht zu bald Berührung und Mischung der beiden Öle, und in Folge hievon Schlierenbildung eintreten sollte.

Ferner war das Dispersionsvermögen der beiden Flüssigkeiten ein so verschiedenes, dass bei Besichtigung eines weiss leuchtenden Punktes, durch den gefüllten Apparat, mit freiem Auge, ein linienförmiges, sehr breites Spectrum erschien. Es wurde desshalb als Lichtquelle hinter dem Schirme eine sehr hell leuchtende Natriumflamme angebracht.

Selbst bei der geringen Vergrösserung meines schwächeren Oculares sah man aber bei diesem Versuche die beiden Bilder weiter von einander getrennt, als bei der starken Vergrösserung mit den Zuckerlösungen; auch waren wegen der vollkommenen

---

vor. Diese beginnt erst, wenn man es mit Flüssigkeiten zu thun hat, deren Brechungsvermögen sich dem des Glases im Apparate nähert. Ich weiss keinen anderen Ausweg, als: an einer stark brechenden Flüssigkeit auf andere Weise (mit dem Spectrometer) den Brechungsindex für Licht von der Wellenlänge der *D*-Linie genau zu messen, diese Flüssigkeit dann zwischen die Glaskeile des Refractometers zu bringen, den vorher ermittelten Brechungsindex am Apparate einzustellen, und dann genau zu studieren und sich gut zu merken, welcher Theil der Schattengrenze eingestellt ist. Bei Beobachtung dieses Verfahrens, und unter der Voraussetzung, dass die oben erwähnten Hilfsmittel zur feineren Einstellung und Ablesung angebracht wären, müsste das besprochene treffliche Instrument sich für Messungen von noch grösserer Genauigkeit schicken, als dasselbe nach seiner Einrichtung dermalen zu prätendiren scheint.

Klarheit der Flüssigkeiten die Bilder absolut scharf. Die oben, bei der Schilderung des Versuches mit den Zuckerlösungen, nur flüchtig erwähnte Probe bestand in Folgendem.

Wenn die optisch activen Flüssigkeiten wirklich doppelbrechend sind, und wenn die beiden Bilder, welche ich mittelst meines Apparates beobachtete, wirklich von dieser Doppelbrechung herrühren, so müssen sie aus circular polarisirtem Lichte bestehen, und die Richtung der Polarisation muss in dem einen Bilde entgegengesetzt der Richtung der Polarisation in dem zweiten Bilde sein. Nun ist bekanntlich circular polarisirtes Licht, welches eintritt in ein Glimmerplättchen, das gerade so dick ist, dass der eine der beiden Strahlen, in die das Licht in ihm zerfällt, gegen den anderen um eine Viertelwellenlänge verzögert wird, nach dem Austritte aus dem Glimmer linear polarisirt; und zwar ist, wenn man sich das Glimmerplättchen in einer bestimmten Orientirung festliegend denkt, die Polarisationsebene des austretenden Strahles parallel oder senkrecht zu einer bestimmten Richtung, je nachdem der Lichtstrahl vor dem Eintritte in den Glimmer rechts oder links circular polarisirt war. Waren also die Lichtstrahlen, welche die beiden von mir beobachteten Bilder erzeugten, in dem einen Bilde rechts, in dem anderen links circular polarisirt, so mussten sie, nachdem sie durch ein $\frac{\lambda}{4}$ Glimmerplättchen gegangen waren, in beiden Bildern linear polarisirt sein, in dem einen Bilde in einer bestimmten Ebene, in dem anderen Bilde in der darauf senkrechten Ebene. Betrachtete ich nun die ganze Erscheinung durch ein Nicol'sches Prisma, welches ja linear polarisirtes Licht, das in einer bestimmten Ebene schwingt, nicht durchlässt, so musste bei einer gewissen Stellung des Nicol'schen Prismas das eine Bild verschwinden; und bei einer um 90° gegen die erste gedrehten Stellung des Nicol'schen Prismas musste das andere Bild verschwinden. Dieses Verhalten mussten die beiden Bilder beobachten lassen, wenn ich mit Bestimmtheit jede andere Provenienz des Doppelbildes ausschliessen wollte. Es war aber um so nothwendiger, diese Erscheinung zu beobachten, je mehr Gelegenheit durch die zahllosen Reflexionen in meinem Apparate für das Zustandekommen eines Nebenbildes geboten war.

Ich habe schon oben bemerkt, dass es mir an dem, durch die Zuckerlösungen hervorgebrachten Doppelbilde gelungen ist, zu beobachten, wie, nachdem die aus dem Fernrohre austretenden Strahlen durch eine $\frac{\lambda}{4}$ Platte gegangen waren, bei Betrachtung des Phänomenes durch ein Nicol'sches Prisma, von den beiden Bildern nur eines übrig blieb, bei zwei bestimmten, aufeinander senkrechten Orientirungen des Nicol'schen Prismas. Da jedoch bei dieser Beobachtung das Auge wegen der Anbringung der $\frac{\lambda}{4}$ Platte und des Nicol'schen Prismas zwischen ihm und dem Oculare, ziemlich weit von letzterem sich zu entfernen gezwungen ist, so war die ganze Beobachtung mit dem stärkeren der beiden Oculare, über die ich verfügte, äusserst schwierig; immerhin aber hatte sie einen mich vollständig beruhigenden Grad von Deutlichkeit.

Da ich aber die Versuche auch Anderen zeigen wollte, so trachtete ich danach, eine etwas weniger mühsame und unbequeme Anordnung herzustellen. Die beträchtlich stärkere Doppelbrechung in den zuletzt angewandten Flüssigkeiten gestattete, wie schon gesagt wurde, die Benützung des schwächeren Oculares, und dieses wieder erlaubte dem Auge des Beobachters, sich in die gebotene Entfernung zu begeben, ohne dass die Auffindung und Festhaltung des Bildes dadurch in so erheblichem Maasse schwieriger und anstrengender wurde, wie bei dem starken Oculare. Bei dem Versuche mit Orangenöl, und der Mischung von Ricinus- und Terpentinöl gelang es denn sowohl mir, als auch Anderen verhältnissmässig leicht, das Verschwinden des einen der beiden Bilder bei einer gewissen Stellung, und des anderen Bildes bei der darauf senkrechten Stellung des Nicol'schen Prismas zu beobachten, als zwischen dieses und das Fernrohrocular eine $\frac{\lambda}{4}$ Platte gestellt war.

Auf Grund der geschilderten Versuche halte ich mich für berechtigt, folgende Sätze auszusprechen:

Es gibt doppelbrechende Flüssigkeiten. —

Die beiden Strahlen, in die ein — ordinärer oder linear polarisirter — Lichtstrahl in diesen Flüssigkeiten zerfällt, sind circular und einander entgegengesetzt polarisirt. —

Aus der ungleichen Geschwindigkeit dieser beiden Strahlen in der Flüssigkeit folgt eine, dem Wege in der Flüssigkeit proportionale Phasendifferenz, welche die ganze und einzige Ursache der Circumpolarisation dieser Flüssigkeiten ist. —

Die doppelbrechenden flüssigen Körper haben keine optische Axe; — sondern die Wellenoberfläche des Lichtes in diesen Flüssigkeiten besteht aus zwei concentrischen Kugelflächen.

Über eine Methode zur Darstellung sauerstoffhältiger Verbindungen.

I. Einwirkung von Benzoylhyperoxyd auf Amylen,

von E. Lippmann.

(Mittheilung aus dem chemischen Institute im Convictgebäude.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. October 1884.)

Vor einigen Jahren wurde bereits diese Reaction in einer Notiz[1]) in gedrängter Kürze mitgetheilt. Mangel an Material, sowie verschiedene andere Gründe hatten mich an der Verfolgung dieses Themas gehindert, bis ich dasselbe im Laufe des Wintersemesters 1883 wieder aufnehmen konnte, welche Versuche in einem der kais. Akademie der Wissenschaften im December desselben Jahres überreichten versiegelten Schreiben beschrieben wurden.

Brodie, der Entdecker der Säure-Hyperoxyde, hat bekanntlich in einer klassischen Abhandlung[2] das analoge Verhalten dieser Körperclasse im Vergleich mit den Halogenen zu Jodkalium, gelben Blutlaugensalz, Manganoxydulsalzen hervorgehoben; betrachtet man diese Hyperoxyde als substituirtes Wasserstoffhyperoxyd, so findet das oben erwähnte Oxydationsvermögen sowie die mehr oder minder grosse Explodirbarkeit dieser Verbindungen eine natürliche Erklärung.

$$\begin{array}{ccc} H-O & \quad & C_7H_5O-O \\ | & & | \\ H-O & & C_7H_5O-O \end{array}$$

Wasserstoffhyperoxyd vereinigt sich in der Kälte mit ungesättigten Verbindungen; so bildet es mit Blausäure Oxamid, mit Amylen das entsprechende Glycol.[3] Andererseits hat Leeds[4]

---

[1] Sitzungsber. der kais. Akad. 1870, B. 62.

[2] Ann. Chem. u. Pharm. 108.

[3] Carius, Ann. d. Chem. und Pharm. 126. S. 195.

[4] Ber. d. Chem. Ges. 14, S. 1382.

neuerdings gezeigt, dass es durch Einführung der Hydroxylgruppe substituirend einwirken kann.

$$C_6H_6 + H_2O_2 = H_2O + C_6H_6O.$$

Unter Umständen werden Verbindungen durch den activen Sauerstoff des Hyperoxyds oxydirt, so Anthracen zu dem entsprechenden Chinon; Diphenylamin, Dimethylanilin wurden in Lack ähnliche Verbindungen umgesetzt. Verhielt sich nun eine Säurehyperoxyd dem Wasserstoffhyperoxyd analog, so war beim Amylen, wenn die Reaktion in der Kälte verlief, die Bildung eines Additionsproductes der Benzoesäureäther eines Amylen oder Diamylenglycols zu erwarten. Andererseits konnten in der Wärme Substitutionsprodukte des Amylens oder Diamylens erhalten werden, deren Struktur vollkommene Analogie mit den Halogenderivaten dieser beiden Kohlenwasserstoffe zeigen würde:

$$C_5H_{10} + \begin{matrix} C_7H_5O \\ C_5H_5O \end{matrix}\Big\rangle O_2 = C_7H_6O_2 + \begin{matrix} C_5H_9 \\ C_7H_5O \end{matrix}\Big\rangle O$$

$$C_{10}H_{20} + \begin{matrix} C_7H_5O \\ C_7H_0O \end{matrix}\Big\rangle O_2 = C_7H_6O_2 + \begin{matrix} C_{10}H_{19} \\ C_7H_5O \end{matrix}\Big\rangle O (1).$$

Würde die Einwirkung nach Gleichung (1) erfolgen, so müssten sich $50^0/_0$ des angewandten Hyperoxyds an Benzoesäure bilden müssen. Die sich bei nachfolgenden Versuchen gebildete Benzoesäure wurde durch Titration mit $^1/_{10}$ Ammon bestimmt. Ihre Menge betrug bei verschiedenen Versuchen nur $23-23{\cdot}6^0/_0$ so, dass sich wahrscheinlich das Superoxyd an 2 Moleküle Amylen anlagert.

Darstellung von Benzoylhyperoxyd.

Brodie verdanken wir eine Methode zur Darstellung von reinem Baryumhyperoxydhydrat, entstanden durch Auflösen von käuflichen Hyperoxyd in verdünnter HCl, welche Lösung, partiell mit Barytwasser gefällt, der entstandene Niederschlag (Thonerde, Eisen) durch ein Leinwandfilter von der alkalischen Lösung getrennt und das Filtrat mit dem gleichen Alkali ausgefällt wird. Man erhält auf diese Weise $BaO_2 + 6H_2O$, welches als Ausgangspunkt für die Darstellung organischer Säurehyperoxyde zu betrachten ist. Arbeitet man jedoch in grösserem Massstabe, so scheitert diese Darstellung an dem Umstande, dass sich solche alkalisch reagirende, langsam filtrirende Lösungen von H_2O_2, selbst wenn sie mit Eis gekühlt werden, ziemlich rasch unter

Sauerstoff-Abgabe zersetzen, so dass man eilig zu operiren genöthigt ist, falls man nicht beträchtliche Einbusse an Hyperoxyd erleiden will. Aus diesem Grunde verzichtete ich auf die Darstellung der reinen Verbindung und benützte das käufliche Präparat, das ich anfangs von Trommsdorf später von Kahlbaum bezog.

Wenn das Baryumsuperoxyd unter Abkühlung in sehr verdünnter Salzsäure gelöst und diese Lösung mit genügender Menge Jodkalium versetzt worden war, wurde der Gehalt an Hyperoxyd durch Titriren der bei vorsichtigen Erhitzen frei gewordenen Jodmenge mit $^1/_{10}$ unterschwefligsauren Natrium bestimmt. Derselbe schwankt bei verschiedenen Präparaten zwischen 53 bis 70%. War derselbe über 55% gestiegen, so wurde das Pulver, nachdem die Erfahrung gezeigt hatte, dass die Einwirkung am besten mit einem Präparate gelingt, welches sämmtliches Hyperoxyd als Baryumhyperoxydhydrat enthält, bei vorsichtigen Wasserzusatz zu einem Brei verrieben, derselbe längere Zeit stehen gelassen, bis er eine steinharte Consistenz annahm, dann gepulvert und zwischen Papier vollkommen getrocknet. Hierauf wurde der Sauerstoff in diesem Präparate neuerdings volumetrisch gemessen.

24 Grm. so bereiteten Hyperoxydhydrates wurden unter beständigen Rühren in 20 Grm. Chlorbenzoyl, welches frei von $POCl_3$ den richtigen Siedepunkt zeigte, eingetragen und der Brei zwei Stunden stehen gelassen. Die Masse, welche noch nach etwas Benzoylchlorid roch, wurde mit viel Wasser verrührt, um das gebildete Baryumchlorid zu lösen, dann wurde die Benzoesäure mittelst einer Sodalösung entfernt, mit kalten Wasser bis zum Verschwinden der alkalischen Reaction gewaschen, die zurückbleibende weisse bröcklige Masse auf Thonplatten vollkommen getrocknet, schliesslich dieser Rückstand dreimal mit viel kochenden Äther extrahirt, bis das Ungelöste beim Erhitzen am Platinblech ruhig abbrannte. Man gewinnt 9—11 Grm. reines Benzoylhyperoxyd, das ist 53—65% der theoretischen Ausbeute. Selbst wenn man mit der dreifachen Menge Superoxydhydrats, also 72 Grm. arbeitet, so sinkt die Ausbeute nie unter 53%. Dass das so erhaltene Hyperoxyd als chemisch rein zu betrachten ist, beweisen die zwei folgenden Titrationen seines activen Sauer-

stoffs. Gewogene Mengen Hyperoxyd wurden mit einer sehr verdünnten Jodkaliumlösung in ein Rohr eingeschlossen, am Wasserbade einige Stunden erhitzt und das ausgeschiedene Jod mit unterschwefligsauren Natrium gemessen.

I. 0·5742 Grm. erforderten 47·4 C. C. $^1/_{10}$ normal unterschwefligsaures Natrium.

II. 0·5174 Grm. erforderten 43·0 C. C. $^1/_{10}$ normal unterschwefligsaures Natrium.

	Gefunden I.	Gefunden II.	Berechnet für $C_{14}H_{10}O_4$
act. O.	6.59	6·61	6·63.

Einwirkung des Hyperoxyds auf Amylen.

Dieses Superoxyd wirkt nun bei gewöhnlichem Drucke weder in der Kälte noch beim Siedepunkt des Amylens[1] auf das letztere ein. Als man den Druck auf 2—3 Athmosphären erhöhte, blieben beide Verbindungen grösstentheils unverändert zurück.

Verschieden hingegen verläuft die Reaktion im zugeschmolzenen Rohre bei 100° C. Dann löst sich bei einem Drucke von ungefähr 10 Atmosphären das Hyperoxyd im Amylen, vorausgesetzt, dass von letzteren ein Überschuss vorhanden. Das Ende der Einwirkung wird erkannt, wenn bei längerem Stehen der Röhren keine Krystallausscheidung des Hyperoxyds erfolgt. Zunächst wurden 5 Grm. Hyperoxyd mit einem grossen Überschuss von Kohlenwasserstoff, das ist der gleichen Menge einige Stunden auf 100° C. erwärmt. Hierbei explodirten viele Röhren, wesshalb die Beschickung auf 3 Grm. Hyperoxyd und 3 Grm. Pentylen herabgesetzt wurde, hierbei findet nun keinerlei Explosion statt. Auf diese Weise konnten über $^1/_2$ Kilo Hyperoxyd mit dem gleichen Gewicht Amylen verarbeitet werden, natürlich in einer entsprechend grossen Anzahl von Röhren. Schliesslich bestand der Röhreninhalt aus einem, hauptsächlich durch Benzoesäure und wenig Anhydrid, verunreinigten Öl.

Die Gesammtmenge der Benzoesäure wurde, wie bereits oben erwähnt, durch Titration in der Wärme mittelst $^1/_{10}$ norm. Ammon

---

[1] Das zu diesen Versuchen verwendete Pentylen zeigte einen Siedepunkt von 35—40° C. und war ein Gemenge isomerer Olefine.

ermittelt, nachdem man sich vorher mit einer Probe sehr reiner Benzoesäure von der Zuverlässigkeit dieser Methode überzeugt hatte.

Dass sich hierbei Benzoesäure Anhydrid nur in untergeordneter Menge bildet, zeigt folgender Versuch. Es wurde das Öl mittelst der Saugpumpe von den Krystallen abgesogen und diese letzteren zweimal aus Ligroin umkrystallisirt. Dieselben schmolzen bei 118° C., aus Wasser umkrystallisirt bei 120 bis 121° C.

Beim Aufblasen der Röhren war nur sehr geringer Druck vorhanden. Die in einem Gasometer aufgefangenen Gase bestanden aus Amylendampf, etwas Amylwasserstoff und Spuren CO_2. Der gesammelte Röhreninhalt wurde zur Wiedergewinnung des Amylens am Wasserbade destillirt, der Rückstand zur Entsäuerung mit Sodalösung digerirt. Für 5 Grm. Hyperoxyd erhielt man 7 Grm. reines Öl, welches leichter als Wasser, einen angenehmen aromatischen Geruch zeigte, bei 10° C. nicht erstarrte und selbst im Vacuum nicht ohne Zersetzung destillirt werden konnte. Seine Analysen ergaben:

	I.	II.
C.	76·0	76·3
H.	8·0	7·6.

Eine zweite Darstellung, welche genau wie oben durchgeführt wurde, ergab.

C.	74·0
H.	8·4.

Hieraus sowie aus anderen Gründen musste man an der einheitlichen Natur dieses Products zweifeln und war bald zu der Annahme berechtigt, dass hier ein Gemenge von Benzoesäure-Äther vorliege, deren relative Zusammensetzung nicht constant bleibe. Das Verhalten dieses Öls gegen Ätzkali sollte diese Ansicht bestätigen. Wendet man festes geschmolzenes Kalihydrat an, so wird die Masse beim Erhitzen durch ausgeschiedenes Benzoat sofort fest. Dasselbe wurde in viel H_2O gelöst und das Öl mit Äther aufgenommen.

Die wässerige alkalische Lösung wurde, nachdem sie vorher zur Entfernung des Äthers erhitzt war, angesäuert; die hiebei sich

massenhaft ausscheidende Säure zeigte nach dem Umkrystallisiren den Schmelzpunkt der Benzoesäure 120—121° C. und besass ausserdem alle ihre Eigenschaften.

Der Äther hinterliess einen stark braunen Rückstand. Um nun einer etwaigen Zersetzung durch festes Kalihydrat vorzubeugen, wurde die Verseifung im grossen Massstabe durch alkoholisches Ätzkali bewerkstelligt und zwar wurde diese durch dreimalige succesive Behandlung mit jedesmal unzureichenden Mengen Alkali beendigt. Der so erhaltene Brei wurde zur Entfernung des Alkohols längere Zeit am Wasserbade erhitzt, das Kaliumbenzoat in heissem Wasser gelöst und das sich ausgeschiedene hellgelbe Öl derselben Behandlung unterworfen. Das schliesslich erhaltene Product war leichter denn Wasser, besass einen ebenfalls eigenthümlichen, von dem des Rautenöls verschiedenen Geruch, reducirte nicht ammoniakalische Silberlösung, verbindet sich nicht mit Natriumbisulfit und reagirt vollkommen neutral.

Bei der Destillation steigt das Thermometer continuirlich auf 200° C. Zwischen 200—223° C. ging so ziemlich mehr als die Hälfte des gesammten Productes über, während der Rückstand bis 300° C. siedet, welcher, da seine Menge unzureichend war, noch nicht in den Bereich der Untersuchung gezogen wurde. Die zwischen 23° C. siedende farblose Flüssigkeit wurde zehnmal fraktionirt und hieraus eine bei 198—203° C.[1] (uncor.) constant siedende Fraktion isolirt. Ihre nun folgenden Analysen ergaben die Zusammensetzung des Diamylenoxyds.

I. 0·1336 Grm. gaben mit CuO. im Luftstrom verbrannt 0·3765 Grm. CO_2 und 0·1533 Grm. H_2O.

II. 0·2028 Grm. gaben 0·5719 Grm. CO_2 und 0·2313 Grm. H_2O.

III. 0·1512 Grm. gaben 0·425 Grm. CO_2 und 0·1735 Grm. H_2O.

	Gefunden			Berechnet für
	I.	II.	III.	$C_{10}H_{20}O$
C	76·82	76·9	76.65	76·92
H	12·78	12·7	12·75	12·82

Die Richtigkeit der hieraus berechneten Molekularformel wird durch die nach der Verdrängungsmethode von V. Meyer vorgenommenen Dampfdichte-Bestimmungen gestützt:

[1] Thermometer von Zinke.

I. Dichte bei 237° C. (Chinolin).

S = 0·0899 Grm.
V = 14·6 CC.
t = 16° C.
t' = 23° C.
Brdc = 746 Mm.
T = 13·5.

II. Dichte bei 310° C. (Diphenylamin).

S = 0·0895 Grm.
V = 14·8 CC.
t = 16° C.
t' = 23° C.
Brdc = 746 Mm.
T = 13·5.

III. Dichte bei 310° C. (Diphenylamin).

S = 0·089 Grm.
V = 14 CC.
t = 16° C.
t' = 23° C.
Brdc = 746 Mm.
T = 13·5.

	Gefunden			Berechnet für
	I.	II.	III.	$C_{10}H_{20}O$
D	5·23	5·21	5.47.	5·40.

Es findet also selbst bei 107° C. über dem Siedepunkt dieser Verbindung keine Dissociation oder Zersetzung des Moleküls statt.

Das von A. Bauer[1] aus dem Diacetat des Diamylenglykols zuerst dargestellte Diamylenoxyd destillirte zwischen 170 bis 180°C. und reducirte ammoniakalische Silberlösung. Schneider[2] erhielt durch Oxydation des Diamylens mit Kaliumbichromat und Schwefelsäure ein Isomeres des Diamylenoxyds. Siedepunkt 180 bis 190° C., welches ammoniakalische Silberlösung leicht reducirt und weiter oxydirt eine eigenthümliche Säure $C_7H_{14}O_2$ Amethensäure liefern soll.

[1] Jahresber. 1862, S. 450.

[2] Ann. d. Chem. u. Pharm. 157.

Endlich erhielt Eltekoff[1] bei der Behandlung von Diamylenbromid mit Bleioxyd und H_2O ein Diamylenoxyd, Siedepunkt 192—194° C., dessen übrige Eigenschaften er nicht beschreibt.

Ob die hier beschriebene Verbindung mit der zuletzt erwähnten, von Eltekoff entdeckten, identisch ist, diese Frage, sowie jene nach der Struktur dieses Diamylenoxyds, werden sich nach vollendeten Studium der Oxydation beantworten lassen.

Dass diese Methode auch zur Darstellung anderer sauerstoffhältiger Derivate brauchbar erscheint, ist wahrscheinlich. Es sollen solche des Chinolin und Pyridinbasen zunächst in Betracht gezogen werden. Schliesslich spreche ich Herrn F. Fleissner, für die Unterstützung, welche er mir bei vorstehender Untersuchung leistete, meinen besten Dank aus.

[1] Jahresber. 1878.

Über die Einwirkung von Zinkäthyl auf $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd.

Von Dr. **Konrad Natterer.**

(Aus dem k. k. Universitäts-Laboratorium des Prof. Ad. Lieben.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. October 1884.)

Indem ich den (durch Condensation von Monochloraldehyd erhaltenen) $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd mit Zinkäthyl zusammenbrachte, erwartete ich, in Erwägung des Verhaltens anderer gechlorter Aldehyde, die Bildung des entsprechenden Alkohols, den ich dann zu weiteren Versuchen (Synthese des Erythrits) verwenden wollte.

Nach den Untersuchungen Garzarolli's[1] reagiren nämlich gewöhnliches Chloral und Butylchloral derart mit Zinkäthyl, dass Äthylen entweicht und zinkorganische Verbindungen entstehen, welche beim Behandeln mit Wasser primäre Alkohole liefern; die letzteren erscheinen demnach als durch einfache Reduction der Aldehydgruppe (durch H_2) entstanden.

Es ist dies eine interessante Abweichung von der Wagner'schen Reaction von Zinkäthyl auf Aldehyde (Acetaldehyd[2], Valeraldehyd, Önanthol, Benzaldehyd, Acroleïn[3] und Furfurol[4]), bei welcher kein Gas entweicht und bei welcher das „Zwischenproduct", mit Wasser zersetzt, einen um C_2 reicheren, secundären Alkohol liefert.

Das sonderbare Verhalten der Chlorale ist wohl bedingt durch die Gegenwart und eigenthümliche Lagerung der Chloratome.[5]

---

[1] Liebig's Annalen 210, 63 (1881) und 213, 369.

[2] Liebig's Annalen 181, 261.

[3] Ber. d. chem. Ges. XVII (Referate). 314.

[4] Ber. d. chem. Ges. XVII. 1967.

[5] Nach einem im Kleinen ausgeführten Versuch scheint das, mit dem Butylchloral isomere ClH-Additionsproduct des $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyds

Die Einwirkung von Zinkäthyl auf $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd kann auf drei verschiedene Arten erfolgen, vorausgesetzt, dass, wie bei den Chloralen, die Chloratome intact bleiben.

Als ungesättigter Aldehyd könnte sich $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd gegen Zinkäthyl so verhalten wie das Akroleïn (**Wagner**); nämlich:

$$\text{I.}\quad \begin{matrix} CH_2Cl \\ \cdot \\ CH \\ \cdot\cdot \\ CCl \\ \cdot \\ CHO \end{matrix} + Zn\begin{matrix} C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix} = \begin{matrix} CH_2Cl \\ \cdot \\ CH \\ \cdot\cdot \\ CCl \\ \cdot \\ CH.OZn.C_2H_5 \\ \cdot \\ C_2H_5 \end{matrix}$$

Oder es könnte im Sinne der Beobachtungen **Garzarolli's** die Reaction verlaufen nach folgender Gleichung:

$$\text{II.}\quad \begin{matrix} CH_2Cl \\ \cdot \\ CH \\ \cdot\cdot \\ CCl \\ \cdot \\ CHO \end{matrix} + Zn\begin{matrix} C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix} = \begin{matrix} CH_2Cl \\ \cdot \\ CH \\ \cdot\cdot \\ CCl \\ \cdot \\ CH_2.O\ Zn.C_2H_5 \end{matrix} + C_2H_4$$

---

mit Zinkäthyl (in ätherischer Lösung) anders zu reagiren: es entweicht fast kein Gas, im Reactionsproduct ist kein sogenanntes „Zwischenproduct", wohl aber viel Chlorzink enthalten; als Hauptproduct ist ein dickes, zähes, nahezu geruchloses Öl entstanden.

Auch das einigermassen an die Chlorale erinnernde Bromadditionsproduct des $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyds verhält sich eigenthümlich. Als 7·5 Grm. (1 Mol.) davon und 5 Grm. (1½ Mol.) Zinkäthyl, beide in ätherischer Lösung zusammengebracht wurden, entwickelte sich nur sehr wenig Gas (kein Äthylen); Reactionsproduct in verdünnte H_2SO_4 gegossen: hierbei reichliche Entwickelung von brennbarem Gas (wohl Äthan), Bildung von $ZnSO_4$, Auftreten zweier Schichten; von der wässerigen Schicht wurde ein bestimmter Theil mit $AgNO_3$ versetzt, das gefällte Halogensilber gewogen und dann quantitativ in AgCl übergeführt; so fand man, dass bei der Zinkäthylreaction im Ganzen 1·68 Grm. Brom und 0·59 Grm. Chlor herausgegangen sind. Die ätherische Schicht gab beim Abdestilliren des Äthers 4·5 Grm. eines gewürzhaft riechenden Öles, das Brom addirte, bei der Destillation (im Vacuum) aber keinen constanten Siedepunkt zeigte.

Drittens ist es möglich, dass die Reaction zwischen $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd und Zinkäthyl zuerst nach der Gleichung II verläuft, dass sich aber das dabei entstehende Äthylen an den anderen ungesättigten Körper anlagert, so dass es zur Bildung einer gesättigten Verbindung kommt, die als ein Derivat des Tetramethylen aufzufassen ist; nämlich:

$$\text{III.}\quad \begin{array}{c} CH_2Cl \\ \cdot \\ CH \\ \cdot\cdot \\ CCl \\ \cdot \\ CHO \end{array} + Zn\begin{array}{l} \diagup C_2H_5 \\ \diagdown C_2H_5 \end{array} = \begin{array}{l} CH_2Cl \\ \cdot \\ CH{-}CH_2 \\ |\qquad | \\ CCl{-}CH_2 \\ \cdot \\ CH_2.OZn.C_2H_5. \end{array}$$

Darauf, dass Äthylen im Entstehungszustand leichter Additionen eingeht als sonst, deutet vielleicht ein von Berthelot[1] angestellter Versuch hin, bei welchem Äthylen und Chlorwasserstoff lange Zeit auf 100° erhitzt wurden, ohne dass sie sich verbunden hätten, während man doch bei der bekannten Darstellung von Äthylchlorid aus Alkohol, $ZnCl_2$ und ClH durch Mancherlei zur Annahme genöthigt ist, dass das $ZnCl_2$ dem Alkohol Wasser entzieht und dass das dabei entstehende Äthylen sich mit ClH zu Äthylchlorid verbindet.

Die oben formulirte Anlagerung von Äthylen an zwei (doppelt gebundene) Kohlenstoffatome wäre wahrscheinlich analog einigen Polymerisationen von ungesättigten Kohlenwasserstoffen und Halogenkohlenwasserstoffen (auch der Bildung von Acenaphten aus Naphtalin und Äthylen bei Weissgluth).[2]

Wenn für die Reaction von $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd mit Zinkäthyl wirklich der zuletzt als möglich angeführte Verlauf bewiesen werden konnte, so war von der Untersuchung des Reactionsproductes ein Beitrag zur Kenntniss des Tetramethylenringes zu erwarten.

---

1 Ann. Chem. Parm. 104, 184.

2 Berthelot, Zeitschrift für Chemie 1867, 714. Beilstein s Handbuch der org. Chem. 1239.

Verlauf der Reaction.

Den oben aufgestellten Gleichungen entsprechend, liess ich $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd und Zinkäthyl[1] in molecularem Verhältniss auf einander einwirken. Da die beiden Substanzen ungemein lebhaft mit einander reagiren, war es nothwendig, das Zinkäthyl durch Äther zu verdünnen. Auch empfiehlt es sich, immer nur mässige Quantitäten der beiden Körper zu verwenden.

Bei einem Versuch wurden 25 Grm. Zinkäthyl (gleich bei der Darstellung in einem Kolben aufgefangen) mit dem gleichen Volum Äther versetzt; dann wurde der Kolben mit einem dreifach durchbohrten Kork verschlossen; die eine Bohrung hatte einen Scheidetrichter aufgenommen, dessen Rohr bis in die Flüssigkeit des Kolbens reichte, durch die zweite Bohrung ging ein fein ausgezogenes Glasrohr, zum Einleiten von Kohlendioxyd bestimmt, durch die dritte das Abzugsrohr. Die durch das letztere entweichenden Gase mussten zuerst ein U-Rohr passiren, das im ersten Schenkel Chlorcalcium und im anderen mit Kalilauge getränkte Bimssteinstücke enthielt, und gelangten dann in einen mit Brom gefüllten Liebig'schen Kugelapparat, worin das Äthylen absorbirt wurde.

Durch den Scheidetrichter wurden in 2 Stunden 28·5 Grm. $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd unter häufigem Umschütteln zufliessen gelassen, wobei Erwärmung eintrat, die durch zeitweises Kühlen so weit gemässigt wurde, dass der Äther nie ins Kochen kam; in der Kolbenflüssigkeit war eine schwache Gasentwickelung bemerkbar. Als nach zwei weiteren Stunden im Kolben kein Zinkäthyl mehr vorhanden war, was man daran erkannte, dass beim Hineinblasen von Luft keine Nebelbildung eintrat, wurde einige Minuten ein rascher CO_2-Strom durchstreichen gelassen, um das ganze entstandene Äthylen im Brom des Kugelapparates zur Absorption zu bringen. Der Kohleninhalt bestand, wie sich unten zeigen wird, im Wesentlichen aus einer zinkorganischen Verbindung eines Alkohols, einem sogenannten „Zwischenproduct".

---

[1] Das Zinkäthyl stellte ich nach der Gladstone-Tribe'schen Methode (Zink-Kupfer mit Jodäthyl) dar; ich erhielt darnach circa 90% der theoretischen Ausbeute.

Der hauptsächlich aus Brom bestehende Inhalt des Kugelapparates wurde mit Wasser und Kalilauge zusammengebracht; ungelöst blieben nur 2·5 Grm. Äthylenbromid, das sich am Geruch, Siedepunkt (circa 130°), sowie daran erkennen liess, dass es beim Abkühlen krystallinisch erstarrte. Würde die angewandte Menge Zinkäthyl aus je einem Molekül ein Molekül Äthylen abgegeben haben, wie es die Gleichung II verlangt, so hätten 38 Grm. Äthylenbromid gefunden werden müssen.

Der Kolbeninhalt stellte eine dicke, schwach gelbgefärbte Flüssigkeit dar, die beim Daraufblasen (wegen Verdunstung des Äthers) an der Oberfläche scheinbar krystallinisch erstarrte. Als einige Tropfen davon mit Wasser zusammengebracht wurden, schlug sich massenhaft Zinkhydroxyd nieder und es entwickelte sich ein brennbares Gas (Äthan). Zur Zerlegung dieses Zwischenproductes wurde verdünnte Schwefelsäure verwendet; doch durfte man immer nur wenig des Zwischenproductes unter raschem Umschütteln in die verdünnte H_2SO_4 eintragen, da, wie ich mich ein anderes Mal überzeugte, beim Eintragen einer grösseren Menge die Reaction so energisch wird, dass Verkohlung eintritt.

Nachdem der ganze Kolbeninhalt, und zwar kurz nach dem Durchstreichenlassen des CO_2, mit verdünnter Schwefelsäure zusammengebracht war, wurde noch mehr Äther zugegeben, durchgeschüttelt und die ätherische Schicht abgehoben. Die letztere wurde noch einige Male mit wenig Wasser gewaschen, um etwas Zinkchlorid daraus zu entfernen. Die wässerige Schicht, mit den Waschwässern der ätherischen vereinigt, enthielt fast nichts Organisches.

Um die Menge des bei der Einwirkung von Zinkäthyl auf $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd aus dem letzteren herausgegangenen Chlors zu erfahren, wurde ein bestimmter Theil der wässerigen Schicht, mit viel Wasser verdünnt und durch Silbernitrat das Chlor herausgefällt. So ergab sich, dass im Ganzen nur 0·24 Grm. Chlor herausgegangen waren. Der Umstand übrigens, dass bei einem anderen Versuch, bei dem Zinkäthyl und $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd in gleicher Weise wie oben zusammengebracht wurden, das Reactionsproduct aber vor der Zerlegung durch verdünnte Schwefelsäure 24 Stunden stehen blieb, viel mehr Chlorzink entstand, beweist, dass diese Herausnahme von

Chlor von Seite des Zinks eine secundäre Reaction ist, die im Molekül des „Zwischenproductes“ vor sich geht.

Die ätherische Schicht wurde durch Erwärmen vom Äther befreit; das rückständige Öl wurde behufs Trocknung im Vacuum auf circa 60° erhitzt, wobei gleichzeitig ein CO_2-Strom hindurchstrich. Das so erhaltene, schwach gewürzhaft riechende, dickliche Öl wog 33 Grm., also um 4·5 Grm. mehr als das Gewicht des angewandten $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd betrug. Diese bedeutende Gewichtszunahme, sowie das nur spurenweise Auftreten von Äthylen schliessen die Möglichkeit aus, dass die Einwirkung von Zinkäthyl auf $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd nach Gleichung II verläuft.

Da beim Versuch dieses Öl bei gewöhnlichem Druck zu destilliren geringe Zersetzung stattfand, wurde die Destillation im Vacuum (d. h. bei 20 Mm. Druck) vorgenommen. Unterhalb 105° ging Nichts über; von 105—115° destillirten nur einige Gramm; die Hauptmenge ging über von 115—119 (hievon das Meiste bei 116—118); von 119° an stieg das Thermometer sehr rasch bis 140°, wobei nur Wenig überdestillirte; bei 140° blieb ein geringer Rückstand (circa 3 Grm. einer dicken, etwas gebräunten Flüssigkeit). Aus diesen Siedepunktsverhältnissen ersieht man einerseits, dass im Wesentlichen nur eine Substanz vorliegt, anderseits aber, dass die Verunreinigungen [1] bei Temperaturen übergehen müssen, die dem Kochpunkt der Hauptsubstanz nahe liegen. Lange fortgesetztes Fractioniren (im Vacuum) hätte also zu keiner vollständigen Trennung geführt und wäre mit Verlust an der kostbaren Substanz verbunden gewesen. Ich begnügte mich daher die Hauptfraction noch einmal zu destilliren, wobei sie beinahe ebenso überging wie das erste Mal. Zu erwähnen ist noch, dass bei wiederholten Dar-

[1] Über die Mengen der Verunreinigungen sagt schon der eben beschriebene Reactionsverlauf etwas aus; denn ihr Auftreten hängt jedenfalls mit der geringfügigen Äthylenentwickelung und mit der Herausnahme von Chlor zusammen. — Die Fraction 105—115° gab beim Schütteln mit Natriumdisulfitlösung Nichts ab, enthielt also keinen Aldehyd; sie entfärbte etwas Brom, schloss also ein Wenig eines ungesättigten Körpers in sich ein. Möglicherweise stack darin der gesuchte Alkohol des $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyds; seine Menge wäre aber zu gering für eine weitere Verwendung.

stellungen die Siedetemperatur der Hauptfraction sich ziemlich gleich blieb. Diese Hauptfraction bildet den Gegenstand der folgenden Untersuchungen.

Die Elementaranalysen gaben folgende Resultate:

I. 0·336 Grm. der Hauptfraction, mittelst Kupferoxyds bei vorgelegtem Silber verbrannt, gaben 0·5085 Grm. CO_2 und 0·1745 Grm. H_2O.

II. 0·3153 Grm. derselben Substanz gaben 0·4792 Grm. CO_2 und 0·1625 Grm. H_2O.

III. 0·3323 Grm. gaben nach dem Glühen mit Kalk 0·5692 Grm. AgCl.

IV. 0·1808 Grm. von einer anderen Darstellung (bei der das „Zwischenproduct" 24 Stunden gestanden war) gaben 0·2795 Grm. CO_2 und 0·092 Grm. H_2O.

V. 0·240 Grm. lieferten 0·3992 Grm. AgCl.

VI. 0·3026 Grm. lieferten 0·5032 Grm. AgCl.

In 100 Theilen:

	Gefunden						Berechnet für $C_6H_{10}Cl_2O$
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
Kohlenstoff .	41·28	41·45	—	42·15	—	—	42·60
Wasserstoff .	5·78	5·72	—	5·64	—	—	5·92
Chlor	—	—	42·37	—	41·16	41·14	42·01
Sauerstoff ..	—	—	—	—	—	—	9·47
							100·00.

Die Übereinstimmung zwischen den gefundenen Werthen und den für die Formel $C_6H_{10}Cl_2O$ erforderlichen ist nicht sehr scharf. Doch ist zu bemerken, dass sich aus den Analysenresultaten direct keine rationelle Formel berechnen lässt; dies beweist, dass die Substanz nicht ganz einheitlich ist. Das letztere war nach den oben dargelegten Siedepunktsverhältnissen zu erwarten; auf eine absolute Reindarstellung der fraglichen Substanz musste eben verzichtet werden.

Die analysirte Substanz, vom Siedepunkt 115°—119° bei 20 Mm. Druck, stellte eine wasserhelle, ziemlich dickliche Flüssigkeit von schwachem, eigenthümlichem Geruch dar; in Wasser

war sie fast unlöslich; beim Abkühlen mit Eis und Chlorcalcium wurde sie sehr dick, ohne auch nur Spuren von Krystallisation zu zeigen.

Was die chemischen Eigenschaften anbelangt, so ist die Alkoholnatur für die vorliegende Verbindung $C_6H_{10}Cl_2O$ schon dadurch erkenntlich gemacht, dass sie hervorgegangen ist durch Zersetzung einer zinkorganischen Verbindung (mittelst H_2SO_4) von der Art, wie sie so häufig bei Synthesen von Alkoholen mittelst Zinkäthyl erhalten werden. Ausser Zweifel gestellt wurde der alkoholische Charakter durch die weiter unten beschriebene Darstellung des Acetats und des Chlorids.

Wie von einem Alkohol zu erwarten, verbindet sich der Körper nicht mit Natriumdisulfit; auch gibt er mit Fuchsin-Schwefligsäure keine Rothfärbung.

Weder Brom noch Chlorwasserstoff addirt der analysirte Körper; er ist also gesättigt. Da sowohl nach Gleichung I, als auch nach Gleichung II (siehe Einleitung) ungesättigte Alkohole entstehen müssten, so kann die Reaction von Zinkäthyl auf $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd nicht nach diesen Gleichungen verlaufen sein.

Mit der Gleichung III hingegen stehen nicht nur die bei der Einwirkung von Zinkäthyl auf $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd beobachteten Erscheinungen im Einklang, sondern auch die Eigenschaften des dabei als Endproduct entstehenden Alkohols $C_6H_{10}Cl_2O$ stimmen überein mit der aus dieser Gleichung sich ergebenden Structurformel:

```
CH2Cl
|
CH  —CH2
|     |
CCl—CH2
|
CH2.OH.
```

Acetat des Alkohols $C_6H_{10}Cl_2O$.

Zur Bereitung des Acetats hat sich die Anwendung von Essigsäureanhydrid als vortheilhafter erwiesen, als die von Acetylchlorid, weil der bei letzterer auftretende Chlorwasserstoff einen kleinen Theil des Alkohols in Chlorid verwandelt.

10 Grm. des Alkohols wurden mit 10 Grm. Essigsäureanhydrid (etwas mehr als 1½ Moleküle) gemischt und im Rohr zehn Stunden auf 110°—120° erhitzt, wonach die schwach gelbgefärbte Flüssigkeit mit viel Wasser versetzt wurde. Das dadurch abgeschiedene Öl wurde wiederholt gewaschen (zuerst mit Wasser, dann mit sehr verdünnter Lösung von $NaHCO_3$, zuletzt wieder mit Wasser) und mit Chlorcalcium getrocknet.

Das getrocknete Öl wog 11·5 Grm.; vom Acetat $C_6H_9Cl_2O.C_2H_3O$ waren 12·5 Grm. zu erwarten.

Bei der Destillation im Vacuum (bei 20 Mm.) ging von diesem Öl das Allermeiste bei 122°—123° über, was gesondert aufgefangen wurde. Nur Wenig destillirte knapp ober- und unterhalb dieser Temperatur; im Rückstand blieb fast nichts.

I. 0·416 Grm. des Destillates (122—123°) gaben 0·6812 Grm. CO_2 und 0·205 Grm. H_2O.

II. 0·4719 Grm. lieferten 0·652 Grm. AgCl.

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für $C_6H_9Cl_2O.C_2H_3O$
	I.	II.	
Kohlenstoff	44·66	—	45·49
Wasserstoff	5·48	—	5·69
Chlor	—	34·18	33·65
Sauerstoff	—	—	15·17
			100·00.

Es stimmt also auch die Analyse annähernd auf die Formel des Acetats.

Dieses Acetat ist eine ziemlich leicht bewegliche, wasserhelle Flüssigkeit von angenehmem Fruchtgeruch.

Verhalten des Acetats (respective des Alkohols) zu kochendem Barytwasser.

Das Acetat $C_6H_9Cl_2O.C_2H_3O$ wurde mit kochendem Barytwasser behandelt, um einerseits durch Bestimmung der Menge der abgespaltenen Essigsäure eine weitere Bestätigung für die Formel des Acetats zu erhalten, anderseits aber um zu erfahren, in wie weit der Alkohol $C_6H_{10}Cl_2O$ vom Barytwasser angegriffen wird.

I. Versuch. 1·2115 Grm. des analysirten Acetats wurden mit einer wässerigen Lösung von circa 10 Grm. krystallisirtem Ätzbaryt im Silberkolben am Rückflusskühler sieben Stunden gekocht. Hierauf wurde mit dem gleichen Volum Wasser verdünnt und zur Hälfte abdestillirt.

Ins Destillat gingen bloss anfangs einige Öltröpfchen von penetrantem Geruch, doch reducirte auch das zuletzt Übergegangene kochende ammoniakalische Silberlösung.

Der Rückstand wurde durch Einleiten von CO_2 und Aufkochen vom Barythydrat befreit; das Filtrat vom $BaCO_3$ war gelb gefärbt und besass, besonders in der Wärme einen caramelartigen Geruch. In diesem Filtrat wurden nun Chlor und Baryum durch successives Fällen mit $AgNO_3$ und mit H_2SO_4 bestimmt:

Gewogen wurden 1·5282 Grm. AgCl, enthaltend 0·378 Grm. Chlor[1]

und 2·2552 Grm. $BaSO_4$, enthaltend 1·326 Grm. Baryum.

Wenn man von diesem Gesammtbaryum die zum Chlor (als $BaCl_2$) gehörige Menge abzieht, so bleiben 0·5966 Grm. Baryum, die nach der Behandlung des Acetats mit Barytwasser organisch gebunden waren.

Nach der angenommenen Formel des Acetats konnte bei diesem Versuche nur so viel Essigsäure entstehen, dass von ihr 0·393 Grm. Baryum gebunden werden. Da das gefundene Mehr an organisch gebundenem Baryum durch eine andere organische Säure bedingt sein konnte, war es nothwendig durch einen neuen Versuch die Menge der Essigsäure direct zu bestimmen.

II. Versuch. 0·7482 Grm. Acetat wurden wie beim ersten Versuch mit heissem Barytwasser behandelt. Dann wurde wieder durch Kohlensäure das überschüssige Barythydrat entfernt und die Lösung unter öfterem Zusatz von frischem Wasser nahezu zur Trockene eingedampft, um den schwer flüchtigen, Silberlösung reducirenden Körper zu entfernen. Zum Abdampfungsrückstand wurde heisses Wasser gegeben, von einigen harzigen Flocken abfiltrirt; das geruchlose, neutrale Filtrat (circa 300 CC.) wurde

---

[1] Die angewandten 1·2115 Grm. Acetat enthielten (34·18%) 0·414 Grm. Chlor.

mit H_2SO_4 in geringem Überschuss versetzt, vom $BaSO_4$[1] abfiltrirt und dann aus einer Retorte im Ölbade langsam bis auf circa 6 CC. eindestillirt. Auf diese Weise war die Essigsäure von eventuell vorhandenen nicht flüchtigen, organischen Säuren getrennt.

Das Destillat (voraussichtlich die ganze Essigsäure und einen Theil des ClH enthaltend) wurde mit überschüssigem Silberoxyd behandelt (schon beim Schütteln bei gewöhnlicher Temperatur verschwand die saure Reaction; um das AgCl zum Absitzen zu bringen, wurde eine halbe Stunde auf 100° erwärmt, wobei keine Silberreduction eintrat); dann filtrirt:

Der unlösliche Theil (zumeist Ag_2O) wurde mit HNO_3 ausgezogen; das ungelöst bleibende Chlorsilber wog 0·1017 Grm. (enthielt also 0·0252 Grm. Chlor).

Aus dem Filtrat wurde das organische Silbersalz in drei Fractionen abgeschieden, — die beiden ersten Fractionen krystallisirten von Heiss auf Kalt, die III. bildete den Eindunstungsrückstand der letzten Mutterlauge:

Fraction I, 0·223 Grm. wiegend (nach dem Trocknen über H_2SO_4 im Vacuum); 0·1807 Grm. davon lieferten beim Glühen 0·1157 Grm. Ag, d. h. 64·03% Silber.

Fraction II, 0·237 Grm. wiegend; 0·1997 Grm. davon gaben 0·1272 Grm. Ag, d. h. 63·69% Silber.

Fraction III, 0·162 Grm. wiegend; 0·1495 Grm. davon gaben 0·0918 Grm. Ag, d. h. 61·40% Silber.

Essigsaures Silber verlangt 64·67% Silber.

Das untersuchte Silbersalz war also (nicht ganz reines) essigsaures Silber. Im Ganzen waren 0·622 Grm. davon vorhanden gewesen; nach der angewandten Menge Acetat waren 0·5922 Grm. essigsaures Silber zu erwarten.

Das Acetat $C_6H_9Cl_2O . C_2H_3O$ hat demnach beim Kochen mit Barytwasser die zu erwartende Menge Essigsäure abgegeben.

Der circa 6 CC. fassende Rückstand von der Destillation der sauren Lösung wurde mit Wasser verdünnt (wobei einige harzige Flocken ungelöst blieben) und mit überschüssigem

---

[1] Dieses $BaSO_4$ wog 1·398 Grm., enthielt also 0·822 Grm. Baryum (gebunden gewesen an Chlor und an die gesammte organische Säure). Damit stimmt das beim I. Versuch gefundene Gesammtbaryum überein; es waren, um gerechnet auf das diesmal angewandte Acetat, 0·819 Grm. Baryum gewesen.

Barytwasser versetzt; dann wurde CO_2 durchgeleitet, aufgekocht, filtrirt, und im Filtrat Chlor und Baryum bestimmt.

Gewogen wurden:

0·8465 Grm. AgCl, enthaltend 0·2094 Grm. Chlor[1] (entsprechend 0·404 Grm. Ba)

und 0·835 Grm. $BaSO_4$, enthaltend 0·491 Grm. Baryum, wovon also 0·087 Grm. organisch gebunden waren.

Die Einwirkung von Barytwasser auf das Acetat $C_6H_9Cl_2O.C_2H_3O$ hat sich also keineswegs beschränkt auf die Zerlegung des letzteren in essigsaures Baryum und in den ursprünglichen Alkohol. Dieser Alkohol $C_6H_{10}Cl_2O$ hat vielmehr eine durchgreifende Veränderung erlitten, bei der beide Chloratome (fast das ganze Chlor) herausgenommen wurden und bei der neben anderen Producten eine organische, kaum flüchtige Säure entstand, und zwar so viel, dass die Menge des von ihr gebundenen Baryums beiläufig in folgendem Verhältniss zum Gewicht des Alkohols stand:

$$\frac{Ba}{2} : 2C_6H_{10}Cl_2O.$$

Es scheint fast, dass unter dem Einfluss des Ätzbaryts aus dem Alkohol $C_6H_{10}Cl_2O$ irgendwie ein aldehydartiger Körper entstanden ist, welcher dann „Verharzung" erlitten hat.

Verhalten des Acetats zu essigsaurem Silber.

Das Acetat $C_6H_9Cl_2O.C_2H_3O$ wurde hauptsächlich desshalb mit essigsaurem Silber behandelt, um zu erfahren, ob dabei beide Chloratome reagiren oder aber nur eines von beiden. (Im ersteren Fall müsste das Acetat eines Glycerins entstehen, im letzteren das eines Glycols).

4·5 Grm. Acetat wurden mit 11 Grm. Silberacetat (statt 7·1 Grm., für beide Chloratome) und circa 20 Grm. Eisessig im Rohr zehn Stunden auf 110—120° erhitzt, wobei das Rohr öfters geschüttelt wurde. Hierauf wurde die schwach gebräunte

---

[1] Zu diesem Chlor noch das im Destillat bestimmte hinzugeordnet, sind aus der verwendeten Acetatmenge 0·2346 Grm. Chlor, statt den darin enthaltenen 0·2557 Grm. herausgegangen.

Flüssigkeit vom Niederschlag abgegossen, der letztere einige Mal mit Äther nachgewaschen.

In diesem Niederschlag (AgCl und sehr viel unverändertes $AgC_2H_3O_2$) wurde das Chlorsilber bestimmt; es wurden gefunden 3·16 Grm. AgCl, enthaltend 0·7816 Grm. Chlor. Die angewandten 4·5 Grm. Acetat hatten enthalten 1·538 Grm. (34·18%) Chlor; die Hälfte davon ist 0·769. Es geht also beim Erhitzen des Acetats mit $AgC_2H_3O_2$ und Eisessig gerade die Hälfte des Chlors (nur das eine der beiden Chloratome) heraus.

Die ätherische Lösung wurde durch Erhitzen bis 130° vom Äther und der Hauptmenge der Essigsäure befreit; das rückständige Öl wurde mit Wasser, dann mit verdünnter Lösung von $NaHCO_3$, zuletzt wieder mit Wasser gewaschen und mit $CaCl_2$ getrocknet. Das so erhaltene, roth gefärbte Öl wog circa 4 Grm.

0·431 Grm. davon gaben 0·299 Grm. AgCl, enthielten also 17·14% Cl.

Der hier zu erwartende Körper $C_6H_9Cl.(C_2H_3O_2)_2$ verlangt 15·14% Cl, welchem Werthe sich der gefundene immerhin nähert.

Das in Rede stehende, dickliche Öl besass einen schwachen, faden Geruch, war schwerer als Wasser und destillirte im Vacuum (bei 20 Mm.) bei circa 140°; das Destillat war wasserhell und addirte kein Brom.

Reduction des Alkohols $C_6H_{10}Cl_2O$ (mittelst Eisen und Essigsäure).

20 Grm. des Alkohols wurden in 300 Grm. 60percentiger Essigsäure gelöst und 60 Grm. Eisenfeile dazugebracht. Nach drei Tagen hatte sich ein grauer Brei gebildet, der keinen Wasserstoff mehr entwickelte; es wurde Wasser zugegeben und dann ein Drittel abdestillirt. Das Destillat (in den ersten Antheilen ein leichtes Öl enthaltend) wurde mit frischem Eisessig und Eisen versetzt und damit wieder drei Tage unter häufigem Umschütteln stehen gelassen. Hierauf wurde Wasser zugegeben und durch eine Reihe von partiellen Destillationen ein leichtes Öl (circa 10 Grm.) herausdestillirt.

Um eventuell vorhandene Ester zu verseifen, wurde dieses Öl fünf Stunden mit Barytwasser gekocht.[1]

Darauf wurde zur Hälfte destillirt und aus dem Destillat durch fortgesetztes theilweises Destilliren, zuletzt unter Zusatz von Pottasche, das Öl wiederum abgeschieden; es wog nach dem Trocknen mit K_2CO_3 fast ebenso viel wie vor der Behandlung mit Barytwasser.

Dieses Öl wurde nun einige Mal mit Dephlegmator fractionirt destillirt. Zuletzt waren folgende Fractionen vorhanden:

Fraction 79°—84° circa 0·4 Grm. Leichtbewegliche Flüssigkeit von kohlenwasserstoffartigem Geruch; brannte mit schwach leuchtender Flamme; war nahezu chlorfrei; addirte ein wenig Brom; 0·1887 Grm. lieferten bei der Verbrennung 0·3352 Grm. CO_2 und 0·2092 Grm. H_2O; die Substanz enthielt also 48·4% C, 12·3% H und gegen 39·3% Sauerstoff. Wahrscheinlich war diese Fraction unreiner Äthylalkohol (dem Geruch nach enthielt sie etwas von einem Kohlenwasserstoff, auch war sie jedenfalls noch feucht).

Von 84—120° ging fast nichts über.

Fraction 120°—135°, circa 0·6 Grm. Leichtbewegliche Flüssigkeit von alkoholischem Geruch;

0·1506 Grm. davon gaben 0·3522 Grm. CO_2 und 0·154 Grm. H_2O; 0·0528 Grm. gaben 0·0039 Grm. AgCl; diese Fraction enthielt also 63·8% C, 11·3% H, 1·8% Cl und 23·1% O;

eine bei niedriger Temperatur durchgeführte, quantitative Bromaddition ergab Folgendes: 0·32 Grm. addirten 0·35 Grm. Brom. Da das dieser Brommenge entsprechende Molekulargewicht 146 viel zu gross ist, kann nur ein Theil der Fraction ungesättigt sein.

Ich glaube, dass diese Fraction (abgesehen von den mitgerissenen Spuren der folgenden Hauptfraction) ein solches Gemenge von Butyl- und Crotonylalkohol aufweist, wie man es bei der Reduction von Crotonaldehyd und seinen Substitutionsproducten erhält.[2]

---

[1] Dabei bildeten sich (von etwas, der Reduction entgangenem Alkohol) einige harzige Flocken und ein wenig Chlorbaryum (0·054 Grm. Cl. enthaltend).

[2] Die auffallende Bildung von „kohlenstoff-ärmeren" Verbindungen bei der Reduction von $C_6H_{10}Cl_2O$ rührt vielleicht daher, dass sich unter

Von 135—165° ging nur Wenig über.

Hauptfraction 165°—168°; — oberhalb 168° Siedendes war nicht vorhanden; bei der ersten Destillation war bei 170° ein geringer harziger Rückstand geblieben.

I. 0·3175 Grm. der Hauptfraction lieferten 0·6223 Grm. CO_2 und 0·237 Grm. H_2O.

II. 0·2647 Grm. gaben 0·275 Grm. AgCl.

In 100 Theilen:

	Gefunden I.	Gefunden II.	Berechnet für $C_6H_{11}OCl$
Kohlenstoff	53·45	—	53·53
Wasserstoff	8·28	—	8·18
Chlor	—	25·69	26·39
Sauerstoff	—	—	11·90
			100·00.

Aus dieser Elementaranalyse ergibt sich, dass sich die reducirende Wirkung von Eisen und Essigsäure darauf beschränkt hat, ein Chloratom im Molekül des Alkohols $C_6H_{10}Cl_2O$ durch ein Wasserstoffatom zu ersetzen.

Der so entstandene Alkohol

$$C_6H_{10}Cl.OH$$

ist eine ziemlich leicht bewegliche, wasserhelle Flüssigkeit von eigenthümlichem, etwas alkoholischem Geruch; dieselbe siedet, wie schon erwähnt, unter Atmosphärendruck bei 165—168°, ist schwerer als Wasser, löst sich erst in viel Wasser und wird beim Abkühlen mit Eis und Kochsalz sehr dicklich.

Brom addirt dieser Alkohol ebenso wenig, wie der ursprüngliche Alkohol $C_6H_{10}Cl_2O$, trotzdem dass beide der Zusammensetzung nach in die Reihe der ungesättigten aliphatischen Alkohole gehören.

---

dem Einfluss von Eisen und Essigsäure das (bei der Zinkäthylreaction angelagerte) Äthylen wieder abspaltet. In diesem Falle könnte einerseits das nascirende Äthylen sich mit Wasser zu Äthylalkohol verbinden und anderseits der Chlorcrotonylalkohol zu Butyl- und Crotonylalkohol reducirt werden.

Kochendes Barytwasser wirkt auf den Alkohol $C_6H_{11}ClO$ nicht ein (siehe oben).

In Wasser gelöst, erleidet er durch Natriumamalgam keine Veränderung.

In der Wärme wirkt Brom substituirend ein. 0·4 Grm. $C_6H_{11}ClO$ wurden unter Erwärmung, zuletzt bis 100°, mit Brom versetzt, wobei sich massenhaft Bromwasserstoff entwickelte; nach Zusatz von 0·6 Grm. Brom blieb die Bromfarbe erhalten. Die verbrauchte Brommenge entspricht beiläufig der Substitution eines Wasserstoffatoms durch Brom.

Chlorid des Alkohols $C_6H_{10}Cl_2O$.

Circa 15 Grm. des (bei der Einwirkung von Zinkäthyl auf $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd als Endproduct entstandenen) Alkohols $C_6H_{10}Cl_2O$ wurden mit Phosphorpentachlorid versetzt, wobei anfangs mit Eiswasser gekühlt wurde; Chlorwasserstoff ging massenhaft weg; schon bei gewöhnlicher Temperatur verlief die Reaction fast bis zu Ende; zuletzt wurde mit einem Überschuss von PCl_5 eine halbe Stunde auf 100° erhitzt. Beim Erkalten krystallisirte überschüssiges PCl_5 heraus; das Ganze wurde in Wasser gegossen und das dabei abgeschiedene Öl (wegen PCl_3O) zuerst mit Wasser, dann eine halbe Stunde mit einer Lösung von $NaHCO_3$ geschüttelt (bis sich kein CO_2 mehr entwickelte), hierauf mit Wasser gewaschen und mit $CaCl_2$ getrocknet.

Bei der im Vacuum (20 Mm.) vorgenommenen Destillation destillirte beinahe Alles bei 100°.

I. 0·4326 Grm. des bei 100° Übergegangenen gaben 0·5986 Grm. CO_2 und 0·184 Grm. H_2O.

II. 0·2967 Grm. gaben 0·6872 Grm. AgCl.

In 100 Theilen:

	Gefunden I.	Gefunden II.	Berechnet für $C_6H_9Cl_3$
Kohlenstoff	37·75	—	38·4
Wasserstoff	4·72	—	4·8
Chlor	—	57·29	56·8
			100·0.

Dieses Chlorid

$$C_6H_9Cl_3$$

ist eine leicht bewegliche, wasserhelle Flüssigkeit von dem, den Halogenkohlenwasserstoffen gewöhnlich eigenen Geruch; dieselbe brannte mit grüngesäumter Flamme, jedoch nur, wenn der Dampf erhitzt wurde; sie destillirte bei 20 Mm. Druck bei circa 100°; bei der Destillation bei gewöhnlichem Druck fand theilweise Zersetzung statt.

Wiewohl ein Substitutionsproduct eines Kohlenwasserstoffs C_nH_{2n} addirte dieses Chlorid kein Brom.

Einwirkung von Barytwasser auf das Chlorid. 0·7572 Grm. Chlorid wurden mit Wasser und circa 10 Grm. Ätzbaryt im Silberkolben am Rückflusskühler zehn Stunden gekocht; dann wurde zum Theil destillirt:

Das Destillat besass einen lauchartigen Geruch und enthielt einige schwere Öltröpfchen, die kein Brom addirten.

Der Destillationsrückstand wurde durch CO_2 vom Ätzbaryt befreit, und dann auf den Gehalt an Chlor und Ba untersucht. Gewogen wurden:

1·233 Grm. AgCl, enthaltend 0·305 Grm. Chlor, — der Chlorgehalt des angewandten Chlorids hatte 0·434 Grm. betragen —

und 1·1775 Grm. $BaSO_4$, enthaltend 0·692 Grm. Baryum, — den 0·305 Grm. Cl entsprechen (als $BaCl_2$) 0·589 Grm. Baryum, es bleiben also noch 0·103 Grm. Baryum, die von einer organischen Säure gebunden waren.

Das Chlorid $C_6H_9Cl_3$ gibt also beim Kochen mit Barytwasser nur zwei Chloratome ab; ausser der Salzsäure entsteht aber dabei noch eine organische Säure, und zwar steht die Menge des herausgegangenen Chlors zur Menge des organischen gebundenen Baryums beiläufig im Verhältniss $2Cl_2 : \frac{Ba}{2}$.

Verhalten des Chlorids zu alkoholischem Kali. Circa 4 Grm. Chlorid wurden mit viel Ätzkali und verdünntem Alkohol im Rohr acht Stunden auf 110—120° erhitzt; — beim Öffnen des Rohres zeigte sich kein Druck. Dann wurde Wasser zugegeben, mit Schwefelsäure angesäuert und zur Hälfte destillirt. Im Rückstand blieb viel von einem weichen, in Alkohol und Äther

löslichen, mit Wasserdampf etwas flüchtigen Harz. Das Destillat besass einen lauchartigen Geruch, reagirte sauer und enthielt nur wenige Öltropfen.

Natriumäthylat scheint auf das Chlorid ähnlich wie weingeistiges Kali zu wirken.

Einwirkung von Natrium auf das Chlorid. Bei gewöhnlicher Temperatur wirkt Natrium träge ein; sobald jedoch beim Erwärmen das Natrium zu schmelzen beginnt, findet sehr energische Reaction statt: Abscheidung von NaCl, die Flüssigkeit kommt ins Kochen und verschwindet nach und nach vollständig, keine Gasentwicklung. Das nur wenig gefärbte, blätterige Product wurde in Alkohol gebracht, worin sich beim Zerstossen der Krusten das überschüssige Natrium löste, dann wurde Wasser zugegeben, wobei die entstandene organische Substanz ungelöst blieb. Dieselbe bildete hornartige Krusten, die in den gewöhnlichen Lösungsmitteln unlöslich waren (polymere Kohlenwasserstoffe). Wie eine Chlorbestimmung in der wässerigen Salzlösung lehrte, war bei der Einwirkung von Natrium auf das (gewogene) Chlorid aus dem letzteren das ganze Chlor herausgegangen.

Diverses über den Alkohol $C_6H_{10}Cl_2O$.

Bromsubstitution. Während der Alkohol $C_6H_{10}Cl_2O$ Brom nicht addirt, wirkt auf ihn das Brom leicht substituirend ein. Bei gewöhnlicher Temperatur löst sich Brom im Alkohol ohne Veränderung auf (Farbe und Geruch bleiben erhalten); beim Erhitzen verschwindet das Brom und Bromwasserstoff tritt auf.

3 Grm. $C_6H_{10}Cl_2O$ wurden unter Erwärmung, zuletzt bis circa 60°, so lange mit Brom versetzt, bis kein Brom mehr verbraucht wurde, was nach Zusatz von circa 3 Grm. Brom der Fall war. Nun wurde, um den massenhaft entstandenen BrH zu entfernen, in Wasser gegossen, das Öl mit einigen Tropfen Natriumdisulfitlösung entfärbt und mit Wasser gewaschen; hiernach wog das (noch feuchte) Öl 4·7 Grm.; das Monobromsubstitutionsproduct $C_6H_9Cl_2BrO$ verlangt 4·4 Grm. Das Öl war übrigens, wie eine Vacuum-Destillation ergab, nicht einheitlich; wie es scheint, war neben dem, bei circa 160—170° bei 20 Mm. siedenden Alkohol $C_6H_8Cl_2Br.OH$ sein leichter flüchtiges (durch den BrH entstandenes) Bromid zugegen.

Oxydationsversuche. Diese, sowie die folgenden Versuche führten zu keinem klaren Resultate.

Circa 1 Grm. $C_6H_{10}Cl_2O$ wurden in drei Volumen rauchender Salpetersäure gelöst; nach einigen Minuten trat Erwärmung und Entwickelung rother Dämpfe ein, worauf das Gefäss in kaltes Wasser gestellt wurde. Nach 48 Stunden (CO_2 und Oxalsäure waren reichlich entstanden) wurde bis 120° abdestillirt. Das Destillat enthielt circa 0·3 Grm. Chlorpikrin. Der Rückstand (circa 0·3 Grm.) erstarrte beim Erkalten nur theilweise, er enthielt Oxalsäure und (nach dem Geruch) Monochloressigsäure; mit Wasser zusammengebracht, blieben circa 0·15 Grm. eines schweren Öles ungelöst, das sich in Kalilauge nicht löste, Stickstoff enthielt (nach der Na-Probe) und einen an Salpetersäureäther erinnernden Geruch besass. Die Salpetersäure scheint also das Molekül $C_6H_{10}Cl_2O$ ganz zerstört zu haben.

Chromsäure-Gemisch wirkt bei gewöhnlicher Temperatur auf den Alkohol $C_6H_{10}Cl_2O$ kaum ein; beim Erhitzen findet energische Reaction statt: viel CO_2 geht weg, das Chlor des Alkohols geht heraus, sehr viel Chromsäure wird verbraucht; es entsteht ein wenig Essigsäure (?) und ein nicht flüchtiger, halbflüssiger, harziger Körper.

Kalte, schwefelsaure Chamäleonlösung wird vom Alkohol $C_6H_{10}Cl_2O$ langsam entfärbt; der letztere verliert dabei Chlor.

Der Alkohol $C_6H_{10}Cl_2O$ reducirt kochende, mit etwas Ammoniak versetzte Silberlösung kaum merklich (nur in dem Grade als er von heissem Wasser verändert wird); wenn man aber noch etwas Kalilauge zugibt, so tritt starke Silberreduction unter Spiegelbildung ein, wobei gleichzeitig AgCl entsteht.

Verhalten zu Jodwasserstoff. Circa 6 Grm. $C_6H_{10}Cl_2O$ wurden mit 60 Grm. rauchender Jodwasserstoffsäure in einem Glasrohr zusammengebracht, wobei sofort Jodfärbung eintrat, und fünf Tage bei Zimmertemperatur unter häufigem Umschütteln stehen gelassen. Hiernach war der Röhreninhalt gleichmässig schwarz, am Boden der Röhre bemerkte man jedoch eine dickere, circa 4 CC. einnehmende Flüssigkeit. Durch Zusatz von Kalilauge wurde die Jodfärbung entfernt. Die wässerige Schicht, mit einem Theil des schwarzen Öles, wurde destillirt, wobei ein wenig Jodoform ins Destillat ging. Als das schwarze, dicke Öl (circa

4 Grm.) im Vacuum erhitzt wurde, destillirte (unterhalb 100°) nur wenig (circa 0·2 Grm.) eines fast farblosen Öles von äusserst stechendem Geruch, das Meiste blieb jedoch im Rückstand als pechartige Masse.

Auch als der Alkohol $C_6H_{10}Cl_2O$ mit rauchender Jodwasserstoffsäure (nach fünftägigem Stehen) auf circa 170° erhitzt wurde, traten fast nur schwarze, pechartige Massen auf; nur in ganz geringer Menge war ein flüssiger flüchtiger Kohlenwasserstoff entstanden.

Der Alkohol $C_6H_{10}Cl_2O$ gibt nicht die Jodoformreaction.

Verhalten zu Basen. Ein halbes Gramm $C_6H_{10}Cl_2O$ wurde mit kochendem Wasser und Bleioxyd eine halbe Stunde behandelt, wonach der „Alkohol" verschwunden war; dann zum Theil destillirt: das klare, fast geruchlose Destillat gab mit Fuchsin-Schwefligsäure keine Rothfärbung; dem, viel $PbCl_2$ enthaltenden Rückstand konnte durch Äther eine dicke, schwach gelbgefärbte, harzige Flüssigkeit von bitterem Geschmack entzogen werden.

Ebenso „verharzt" der Alkohol $C_6H_{10}Cl_2O$ beim Schütteln mit kalter Pottaschelösung, mit Kali- oder Natronlauge oder mit Barytwasser. Beim Schütteln mit kalter Natronlauge habe ich mich überzeugt, dass das ganze Chlor des „Alkohol" herausgeht.

Darnach ist es höchst wahrscheinlich, dass unter dem Einfluss von Basen, wie ja auch das oben beschriebene Verhalten des Acetats zu kochendem Barytwasser darauf hinweist, aus dem Alkohol $C_6H_{10}Cl_2O$ beide Chloratome herausgenommen werden.

Hauptergebnisse.

Die mitgetheilte Untersuchung hat gelehrt, dass die Einwirkung von Zinkäthyl auf $\alpha\gamma$-Dichlorcrotonaldehyd verläuft nach der Gleichung:

$$\begin{array}{l} HC_2Cl \\ \dot{C}H \\ \ddot{C}Cl \\ \dot{C}HO \end{array} + Zn\begin{array}{l} \diagup CH_2.CH_2H \\ \diagdown C_2H_5 \end{array} = \begin{array}{l} CH_2Cl \\ \dot{C}H - CH_2 \\ | \qquad | \\ CCl - CH_2 \\ \dot{C}H_2.OZn.C_2H_5. \end{array}$$

Das so entstandene „Zwischenproduct“ zerfällt dann beim Eintragen in verdünnte Schwefelsäure in $ZnSO_4$, C_2H_6 und in den Alkohol

$$\begin{array}{l} CH_2Cl \\ \dot{C}H - CH_2 \\ | \quad\quad | \\ CCl - CH_2 \\ \dot{C}H_2 . OH. \end{array}$$

Durch den Umstand, dass dieser Alkohol ein Derivat des „Tetramethylen“ ist, sind so manche Eigenthümlichkeiten seines chemischen Verhaltens bedingt.

Der procentischen Zusammensetzung nach ist der Körper ein Chlorsubstitutionsproduct eines Alkohols von der allgemeinen Formel $C_nH_{2n}O$; dabei ist er jedoch gesättigt. Ähnliches gilt von seinen Derivaten.

Nach obiger Constitutionsformel sind die beiden Chloratome des Alkohols $C_6H_{10}Cl_2O$ verschieden gestellt; das eine befindet sich im Tetramethylenring, das andere in einer Seitenkette. Ein solcher Unterschied in der Stellung von Halogenatomen ist bei Benzolderivaten von massgebendem Einfluss auf die Reactionsfähigkeit der Halogene. Gerade so ist es auch hier. Das eine Chloratom (jedenfalls das der Seitengruppe) reagirt sehr leicht; das andere geht nur ausnahmsweise Reactionen ein.

Essigsaures Silber nimmt aus dem Acetat $C_6H_9Cl_2 . O . C_2H_3O$ nur ein Chloratom heraus.

Bei der Reduction des Alkohols $C_6H_{10}Cl_2O$ mittelst Eisen und Essigsäure geht ebenfalls nur ein Chloratom heraus; der (als Hauptproduct) entstandene Alkohol $C_6H_{11}ClO$ wird durch Barytwasser und durch Natriumamalgam nicht verändert und besitzt die Formel:

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ \dot{C}H - CH_2 \\ | \quad\quad | \\ CCl - CH_2 \\ \dot{C}H_2 . OH. \end{array}$$

Wird das Chlorid

$$\begin{array}{l} CH_2Cl \\ \cdot \\ CH - CH_2 \\ | \quad\;\; | \\ CCl - CH_2 \\ \cdot \\ CH_2Cl. \end{array}$$

mit Barytwasser gekocht, so gehen von den drei Chloratomen nur zwei heraus.

Während in allen diesen Fällen das eine Chloratom nicht in Reaction tritt, erfolgt vollständige Herausnahme des Chlors, sowie totale „Verharzung" beim Behandeln des Alkohols $C_6H_{10}Cl_2O$ mit Alkalien und ähnlich wirkenden Mitteln. Dieses aldehydartige Verhalten des Alkohols $C_6H_{10}Cl_2O$ rührt vielleicht daher, dass unter Umständen das Chloratom der Seitenkette Platz wechselt mit einem Wasserstoffatom der Alkoholgruppe, worauf sofort energische Reaction (Oxydation) eintritt.

Bei directer Oxydation zerfällt der Alkohol $C_6H_{10}Cl_2O$. Dies ist vielleicht zu vergleichen mit der beim Oxydiren eintretenden Zerstörung einiger Benzolderivate (o—Chlortoluol und andere Ortho-Derivate, Wasserstoff-Additionsproducte).

XXII. SITZUNG VOM 23. OCTOBER 1884.

Das geologische Comité des Ministeriums der Reichsdomänen in St. Petersburg spricht den Dank aus für die demselben von der Classe bewilligten Schriften geologischen Inhaltes.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. A. Winckler überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Ermittelung von Grenzen für die Werthe bestimmter Integrale.“.

Herr Prof. Dr. Franz Toula an der technischen Hochschule in Wien erstattet Bericht über seine, im Auftrage der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften und mit Subvention von Seite des hohen k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht, im Spätsommer des Jahres 1884 ausgeführten Reisen im centralen Balkan und in den angrenzenden Gebieten und überreicht eine Abhandlung: „Übersicht über die Reiserouten und die wichtigsten Resultate der Reise.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg: Mémoires, VII Série, tome XXXI. Nrs. 10—16. St. Pétersbourg, 1883; gr. 4°. — Tome XXXII. Nrs. 1—3. St. Pétersbourg, 1884; gr. 4°.

— — Mélanges physiques et chimiques. Tome XI, livraisons 1—6. St. Pétersbourg, 1879—83; 8°.

— — Zapiski. Tome XLVII, Nr. II und Tome XLVIII, Nr. I. St. Pétersbourg, 1884; 8°.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinische deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XX. Nr. 17—18.Halle a. S. September 1884; 4°.

— der Wissenschaften, königl. Preussische: Abhandlungen. Berlin, 1884; 4°.

Akademie der Wissenschaften, königl. Preussische: Sitzungsberichte. Nr. I—XXXIX. Berlin, 1884; 4°.

— — C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke. Supplementband von E. Lottner. Berlin, 1884; 4°.

Archivio per le scienze mediche. Vol. VIII. Fascicoli 1° & 2°. Torino, 1884; 8°.

Association, the American pharmaceutical: Proceedings at the 31st annual meeting. Philadelphia, 1884; 8°.

Central-Observatorium, physikalisches: Annalen. Jahrgang 1882, Theil II. St. Petersburg, 1883; gr. 4°.

Cincinnati Observatory: Publications. Observations of Comets. Nr. 7. 1880—82. Cincinnati. 1883; 8°.

Comité géologique: Mémoires. Vol. I, Nr. 2. Allgemeine geologische Karte von Russland, Blatt 56. St. Pétersbourg, 1884; Folio.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCIX. II° semestre. Nr. 14. Paris, 1884; 4°.

Gesellschaft, astronomische: Vierteljahrsschrift. XIX. Jahrgang. 2. Heft. Leipzig, 1884; 8°.

— fürstlich Jablonowski'sche zu Leipzig: Preisschriften. XXIV. R. Pöhlmann. Die Übervölkerung der antiken Grossstädte im Zusammenhange mit der Gesammtentwicklung städtischer Civilisation dargestellt. Leipzig, 1884; 8°.

— physikalisch-chemische: Berichte. Tome XVI. Nr. 6. St. Petersburg, 1884; 8°.

Institute, the Anthropological of Great Britain and Ireland: The Journal. Vol. XIV. Nr. 1. London, 1884; 8°.

Instituto geográfico y estadístico: Memorias. Tomo IV. Madrid, 1883; 4°.

Journal, the American of Science. Vol. XXVIII. Nrs. 164—166. New Haven, 1884; 8°.

— of nervous and mental disease. N. S. Vol. IX. Nr. 3. July 1884. New York, London, Paris; 8°.

Listy cukrovarnické: Ročník II. Číslo 4—10. Ročník III. Číslo I. W Praze, 1884; 8°.

Magnetical Observatory at Singapore: Meteorological Observations in the years 1834—1845. Madras, 1850; fol.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann. XXX. Band, 1884. X. Gotha; 4°.

Museum Francisco-Carolinum: XLII. Bericht nebst der XXXVI. Lieferung der Beiträge zur Landeskunde von Österreich ob der Enns. Linz, 1884; 8°.

Nature. Vol. XXX, Nr. 781, London, 1884; 8°.

Osservatorio, Reale di Brera in Milano: Publicazioni Nr. XXIV. Milano, 1883; 4°.

Société, Impériale des Naturalistes de Moscou: Nouveaux Mémoires. Tome XV, livraison 1. Moscou, 1884; 4°.

— — Bulletin. Année 1883 Nr. 4. Moscou, 1884; 8°.

Society, the American philosophical: Proceedings. Vol. XXI, Nr. 114. Philadelphia, 1884; 8°.

— of Chemical Industry: The Journal. Vol. III. Nos. 7—9 and Bye Laws. Manchester, 1884; 8°.

— the Manchester literary and philosophical: Memoires. 3. series, Vol. VII & IX. London, 1882—83; 8°.

— — Proceedings. Vols XX—XXII. Manchester 1881—83; 8°.

— the royal microscopical: Journal. Ser. II. Vol. IV. parts 4 & 5. London and Edinburgh, 1884; 8°.

Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg: Jahreshefte. XL. Jahrgang. Stuttgart, 1884; 8°.

Zeitschrift für physiologische Chemie. VIII. Band, 6. Heft. Strassburg 1884; 8°.

Zoologische Station zu Neapel: Mittheilungen, V. Band, 2. Heft. Leipzig, 1884; 8°.

Zürich, Universität: Akademische Schriften pro 1883—84; 30 Stücke. 4° & 8°.

Ermittelung von Grenzen für die Werthe bestimmter Integrale.

Von dem w. M. A. Winckler.

Bezeichnen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei von $x=0$ bis $x=1$ positiv bleibende Functionen, so ist, wenn beide beständig wachsen oder beständig abnehmen:

$$\int_0^1 \varphi(x)\,\psi(x)\,dx > \int_0^1 \varphi(x)\,dx \,.\, \int_0^1 \psi(x)\,dx \qquad \ldots(1)$$

und wenn eine der Functionen beständig wächst, die andere dagegen beständig abnimmt:

$$\int_0^1 \varphi(x)\,\psi(x)\,dx < \int_0^1 \varphi(x)\,dx \,.\, \int_0^1 \psi(x)\,dx \qquad \ldots(2)$$

Der einzige mir bekannte Beweis dieses von Tchebychew aufgestellten interessanten Satzes rührt von Picard her,[1] und beruht auf Sätzen aus der Theorie der parallelen Kräfte.

Das Nachstehende enthält zwei, blos auf allgemeine Regeln der Integralrechnung sich stützende Arten, die Ungleichheiten (1) und (2) herzuleiten und liefert zugleich den Ausdruck, welcher der rechten Seite derselben beizufügen ist, damit (1) und (2) in Gleichungen übergehen.

---

[1] Den Beweis sowie den Satz selbst lernte ich aus dem Cours professé à la faculté des sciences par M. Hermite, (1881—82), second tirage, Paris 1883, kennen.

1.

Bezeichnen $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$ und $v_0, v_1, \ldots v_{n-1}$ beliebige Grössen, so findet, wie man sich leicht überzeugt, die folgende identische Gleichung statt:

$$\begin{aligned} n \cdot [u_0 v_0 + u_1 v_1 + \ldots + u_{n-1} v_{n-1}] \\ = [u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}][v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}] \\ + (u_0 - u_1)(v_0 - v_1) + (u_0 - u_2)(v_0 - v_2) + \ldots + (u_0 - u_{n-1})(v_0 - v_{n-1}) \\ + (u_1 - u_2)(v_1 - v_2) + \ldots + (u_1 - u_{n-1})(v_1 - v_{n-1}) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (u_{n-2} - u_{n-1})(v_{n-2} - v_{n-1}) \end{aligned}$$

welche auch in der Form:

$$n \cdot \sum_{r=0}^{r=n-1} u_r v_r = \sum_{r=0}^{r=n-1} u_r \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} v_s + \sum_{r=1}^{r=n-1} \sum_{s=0}^{s=r-1} (u_s - u_r)(v_s - v_r) \quad \ldots(3$$

geschrieben werden kann.

Dies vorausgesetzt, sei:

$$u_r = h\varphi(a + rh), \qquad v_s = h\psi(a + sh),$$

wobei r und s ganze Zahlen bezeichnen und

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad nh = b - a$$

ist. Lässt man n ohne Ende wachsen, also h Null werden, so geht die linke Seite der Gleichung (3) in:

$$(b-a)\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$$

und das erste Glied auf der rechten Seite in:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \cdot \int_a^b \psi(x)\,dx$$

über. Das zweite Glied rechter Hand in (3) lässt sich zunächst durch

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \sum_{s=0}^{s=r-1} [\varphi(a+sh)-\varphi(a+rh)][\psi(a+sh)-\psi(a+rh)]\,h^2$$

ausdrücken und geht, wenn man

$$a+rh = x, \qquad a+sh = y$$

setzt, über in:

$$\int_a^b dx \int_a^x [\varphi(y)-\varphi(x)][\psi(y)-\psi(x)]\,dy.$$

Aus (3) entsteht daher die folgende Gleichung:

$$(b-a)\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx \,.\int_a^b \psi(x)\,dx + \int_a^b dx \int_a^x [\varphi(y)-\varphi(x)][\psi(y)-\psi(x)]\,dy \quad \ldots(4)$$

Wird nun, der Allgemeinheit unbeschadet, $b > a$ vorausgesetzt und angenommen, es seien $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ von $t = a$ bis $t = b$ beständig wachsende oder beständig abnehmende Functionen, so bleibt das Product $[\varphi(y)-\varphi(x)]\,[\psi(y)-\psi(x)]$, folglich auch das Doppelintegral rechter Hand stets positiv und hat man:

$$(b-a)\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx > \int_a^b \varphi(x)\,dx . \int_a^b \psi(x)\,dx \quad \ldots(5)$$

Das Doppelintegral ist dagegen negativ, wenn eine der Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ beständig wächst und die andere abnimmt, während t die Werthe von a bis b durchläuft; in diesem Falle ist daher:

$$(b-a)\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx < \int_a^b \varphi(x)\,dx . \int_a^b \psi(x)\,dx \quad \ldots(6)$$

Für $a = 0$, $b = 1$ folgen aus (5) und (6) unmittelbar die Relationen (1) und (2).

3.

Leichter als auf dem hier eingeschlagenen Wege gelangt man zu diesem Resultat mittelst einer allgemeinen Gleichung, welche ich bei einer frühern Gelegenheit [1] entwickelt habe. Sie ist

$$\int_a^b dx \int_a^b f(x, y)\, dy = \int_a^b dx \int_a^x [f(x, y) + f(y, x)]\, dy,$$

woraus sich, wenn $f(x, y)$ eine symmetrische Function ist, die folgende

$$\int_a^b dx \int_a^b f(x, y)\, dy = 2\int_a^b dx \int_a^x f(x, y)\, dy \qquad \ldots (7)$$

ergibt.

Setzt man auf der rechten Seite der letztern den Ausdruck

$$[\varphi(y) - \psi(x)][\psi(y) - \psi(x)]$$

auf der linken dagegen dessen Entwicklung

$$\varphi(x)\psi(x) + \varphi(y)\psi(y) - [\varphi(x)\psi(y) + \varphi(y)\psi(x)]$$

für $f(x, y)$ und bemerkt, dass dann:

$$\int_v^b dx \int_a^b f(x, y)\, dy = 2(b-a)\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\, dx - 2\int_a^b \varphi(x)\, dx . \int_a^b \psi(x)\, dx$$

sich ergibt, so folgt aus (7) die Gleichung

$$(b-a)\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\, dx - \int_a^b \varphi(x)\, dx . \int_a^b \psi(x)\, dx$$

$$= \int_a^b dx \int_a^x [\varphi(y) - \varphi(x)][\psi(y) - \psi(x)]\, dy,$$

welche wieder die Gleichung (4) ist.

[1] S. den Aufsatz: „Über einige zur Theorie der bestimmten Integrale gehörige Formeln und Methoden.“ Sitzb. Bd. LX. (1869) Art. 5.

Auf diesem viel kürzern Wege findet man daher ebenfalls die Relationen (5) und (6), resp. (1) und (2).

Diesen lässt sich indessen noch eine andere hinzufügen. Legt man der Gleichung (7) die symmetrische Function

$$f(x, y) = [\varphi(x) - \psi(y)][\varphi(y) - \psi(x)]$$

zu Grunde und setzt dieselbe auf der linken Seite von (7) in der entwickelten Form:

$$\varphi(x)\varphi(y) + \psi(x)\psi(y) - [\varphi(x)\psi(x) + \varphi(y)\psi(y)]$$

ein, so ergibt sich zunächst der Ausdruck

$$\int_a^b dx \int_a^b [\varphi(x)\varphi(y) + \psi(x)\psi(y)]\, dy$$
$$-\int_a^b dx \int_a^b [\varphi(x)\psi(x) + \varphi(y)\psi(y)]\, dy,$$

welcher kürzer wie folgt:

$$\left(\int_a^b \varphi(x)\, dx\right)^2 + \left(\int_a^b \psi(x)\, dx\right)^2 - 2(b-a)\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\, dx$$

geschrieben werden kann.

Aus (7) erhält man daher die Gleichung:

$$(b-a)\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\int_a^b \varphi(x)\, dx\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\int_a^b \psi(x)\, dx\right)^2$$
$$-\int_a^b dx \int_a^x [\varphi(x) - \psi(y)][\varphi(y) - \psi(x)]\, dy.$$

Vorausgesetzt nun, es seien die Werthe, welche die eine der Functionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ innerhalb des Intervalls von $t = a$ bis $t = b$ annimmt, insgesammt grösser, oder insgesammt kleiner als die sämmtlichen Werthe der andern jener Functionen innerhalb desselben Intervalles von t, gleichgiltig welchen sonstigen Verlauf die beiden Functionen dabei nehmen: dann behält der Ausdruck

$$[\varphi(x) - \psi(y)][\varphi(y) - \psi(x)]$$

und, da $b > a$, auch das Doppelintegral das positive Zeichen Unter den gemachten Voraussetzungen findet daher die Relation:

$$(b-a)\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx < \frac{1}{2}\left(\int_a^b \varphi(x)\,dx\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\int_a^b \psi(x)\,dx\right)^2$$

statt.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass die Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ einander gleich gesetzt, den Voraussetzungen nicht entsprechen können, ohne sich auf Constanten zu reduciren, wofür dann allerdings jene Relation in eine identische Gleichung übergeht.

Methode der directen Rechnung einer wahren Monddistanz aus einer beobachteten.

Von F. Zehden,
Capitän der Donau-Dampfschiffahrtsgesellschaft.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. October 1884.)

Sind in den beiden durch die zugehörigen Verticale und die wahre und scheinbare Distanz des Mondes von einem anderen Gestirne gebildeten sphärischen Dreiecken z' und Z' die beobachteten, jedoch um die Depression des Horizontes, den Halbmesser und die Differenz der geographischen und geozentrischen Breite, hingegen z und Z die auch um Refraction und Parallaxe corrigirten wahren Zenithdistanzen, und D' die scheinbare, D die behufs Vornahme einer geographischen Längenbestimmung zu ermittelnde wahre Distanz des Mondes von dem Gestirne, so ist, wenn B den Winkel zwischen den beiden Verticalen bedeutet,

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin S \sin(S-D')}{\sin z' \sin Z'}},$$

wobei S für die halbe Summe der drei Seiten gesetzt ist. Nachdem aber für z' und Z' auch die Annahmen $(90°-h')$ und $(90°-H')$ gelten, für welchen Fall h' und H' die scheinbaren, mithin gerechneten, oder beobachteten und auf die Zeit der Distanzmessung reduzirten Höhen sind, kann S auch folgend ausgedrückt werden:

$$S = \frac{180°-h'-H'+D'}{2}. \qquad 1)$$

Es ist mithin möglich $\cos\frac{B}{2}$ auch ohne vorherige Ermittlung der Zenithdistanzen zu bestimmen, sobald man hiefür, unter Voraussetzung der Gleichung 1) die Formel

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin S \sin(S-D')}{\cos h' \cos H'}} \qquad 2)$$

benützt.

Nimmt man nach dieser einleitenden Rechnung einen Hilfswinkel β an, der durch

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos\frac{B}{2}\sqrt{\cos h \cos H}}{\sin\frac{h+H}{2}} \qquad 3)$$

bestimmt ist, in welchem Ausdrucke h und H die wahren Höhen der beiden Gestirne darstellen, so folgert für die wahre Monddistanz

$$\cos\frac{D}{2} = \frac{\cos\frac{B}{2}\sqrt{\cos h \cos H}}{\sin\beta}. \qquad 4)$$

Das folgende Beispiel demonstrire den Gang dieser Rechnung:

15. Juli 1879. Indexfehler des Instrumentes = 0. Beiläufige Länge $1^h\ 27^m$ westlich von Greenwich, Breite 48° 18·5′ N. Augeshöhe des Beobachters über dem Meereshorizonte 4 Met. Schätzungsweise bestimmte Winkel des Distanzkreises mit den Verticalen für die Sonne 100°, für den Mond 60°.

Bei schon auf die Zeit der Distanzmessung reduzirten Höhen ist die Beobachtung:

$\underline{\odot}$	62°	1′	34″
☾ — ⊙	44	5	29
$\underline{☾}$	39	10	2.

Daher:

$h' = 39°$	22′	13″		$h = 40°$	3′	20″
$H' = 62$	24	36		$H = 62$	24	9

$D = 44°\ 36'\ 2''.$

Es erscheint mithin für die Gleichung 1)

$h' =$	39°	22′	13″
$H' =$	62	24	36
$h' + H' =$	101°	46′	49″

$$180^\circ - (h' + H') = 78^\circ\ 13'\ 11''$$
$$D' = 44\ \ 36\ \ 2$$
$$2S = 122^\circ\ 49'\ 13''$$
$$S = 61^\circ\ 24'\ 36''.$$

Für die Gleichung 2)

$$(S - D') = 16^\circ\ 48'\ 34''$$

$$\log\cos h' = 9\cdot888215$$
$$\log\cos H' = 9\cdot665714$$
$$\log\cos h'\cos H_1 = 9\cdot553929$$

$$\log\sin S = 9\cdot943530$$
$$\log\sin(S - D') = 9\cdot461170$$
$$9\cdot404700$$
$$\log\cos h'\cos H' = 9\cdot553929$$
$$9\cdot850771$$
$$\log\cos\frac{B}{2} = 9\cdot925385.$$

Für die Gleichung 3)

$$h = 40^\circ\ 3'\ 20''$$
$$H = 62\ \ 24\ \ 9$$
$$h + H = 102^\circ\ 27'\ 29''$$
$$\frac{h+H}{2} = 51\ \ 13\ \ 44$$

$$\log\cos h = 9\cdot883901$$
$$\log\cos H = 9\cdot665822$$
$$\log h\cos H = 9\cdot549720$$

$$\log\sqrt{\cos h\cos H} = 9\cdot774861$$
$$\log\cos\frac{B}{2}\sqrt{\cos h\cos H} = 9\cdot700246$$
$$\log\sin\frac{h+H}{2} = 9\cdot891902$$
$$\log\mathrm{tg} = 9\cdot808334$$
$$\beta = 32^\circ\ 44'\ 54''.$$

Für die Gleichung 4) aus 3)

$$\log\cos\frac{B}{2}\sqrt{\cos h\cos H} = 9\cdot700246$$

$$\log\sin\beta = 9\cdot733162$$

$$\log\cos\frac{D}{2} = 9\cdot967084$$

$$\frac{D}{2} = 22^\circ\ \ 1'\,34''$$

$$D = 44^\circ\ \ 3'\ \ 8''.$$

Aus D rechnet man sodann auf die bekannte Weise, nachdem vorher mittelst der beobachteten Sonnenhöhe (H) der Stundenwinkel der Sonne, also die wahre, und hierauf durch Anwendung der Zeitgleichung die mittlere Ortszeit der Beobachtung festgestellt sind, die Längendifferenz gegen Greenwich.

Diese Art der directen Bestimmung einer wahren Monddistanz aus einer beobachteten scheint zuerst des Vortheiles theilhaft zu sein, dass die Gleichungen 2), 3) und 4) in ihrer aufeinanderfolgenden Anwendung eine klare Vorstellung des Ganges der Rechnung ermöglichen, da die Gleichung 2) aus der scheinbaren Distanz und den scheinbaren Höhen den Winkel der beiden Verticale, 3) den Hilfswinkel und 4) durch Benützung der Resultate von 2) und 3), nämlich B und β und der wahren Höhen die wahre Distanz D ergibt. Ferners ist durch die directe Einführung der Höhen, anstatt der Zenithdistanzen, in die nöthigen Formeln eine Vereinfachung erzielt, welche besonders dann erwünscht erscheint, wenn Erstere nicht gerechnet, sondern mit der Distanz beobachtet wurden, und keine Tafeln der natürlichen Functionen vorliegen, um von der Kraft'schen Methode einen bequemen Gebrauch machen zu können. Endlich scheint aus mehrfachen Gründen die Ableitung der Gleichungen 2), 3) und 4) eine glücklich combinirte zu sein, indem dieselbe auch der Mechanik der Rechnung wichtige Vortheile bietet. So ist es nicht nöthig aus Gleichung 2) die Winkelgrösse von B wirklich festzustellen, da man bereits mit $\log\cos\frac{B}{2}$ in die Gleichung 3) gehen kann, wie auch nach der Ermittlung des Hilfswinkels β

$\log \cos \frac{B}{2} \sqrt{\cos h \cos H}$ gleich zur Rechnung von D Anwendung findet. Ausserdem zeigen die erwähnten drei Gleichungen, dass die die Distanz argumentirenden Elemente, nämlich der Winkel der beiden Verticale und die Höhen, in der Cosinusfunction bestimmend eingeführt sind, daher diese Methode dann sehr genaue Resultate liefert, wenn die Höhen der Gestirne gross sind und die halbe Differenz der Azimuthe voraussichtlich nahe an oder über 90° liegt, weil sodann die zur Anwendung gelangenden Logarithmen sehr empfindlich sind. Diesen letzteren Bedingungen Genüge zu leisten, eignen sich daher vorzüglich Distanzen des Mondes von Circumpolarsternen, und zwar in den Wintermonaten zur Zeit des Vollmondes, wo die Declination unseres Satelliten die grösste ist. Selbstverständlich muss hiebei die Zeit des Beobachtungsortes zu den Stundenwinkeln der beiden Gestirne in einer Relation stehen, durch welche die Differenz der Azimuthe nahe an 180° erscheint, so dass, wie früher erwähnt, $\frac{B}{2}$ nahe 90° beträgt, was man schon vor der Beobachtung schätzungsweise ermitteln kann.

Über den Gang der Lichtstrahlen durch Glasröhren, die mit Flüssigkeit gefüllt sind, und eine darauf sich gründende Methode, den Brechungsexponenten condensirter Gase zu bestimmen.

Von **J. Dechant,**
k. k. Professor an der Staatsoberrealschule im II. Bezirke in Wien.

(Mit 2 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. October 1884.)

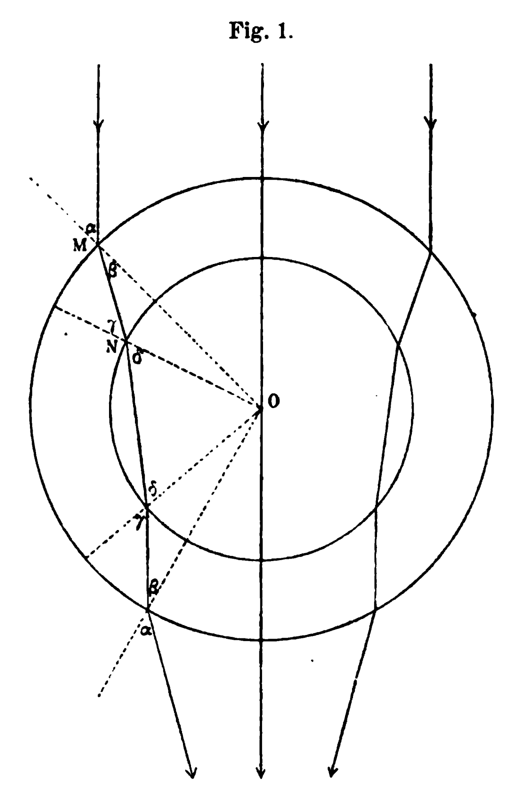
Blickt man durch ein ziemlich dickwandiges, mit Wasser gefülltes Glasröhrchen gegen eine Lichtlinie, welche parallel zur Axe des Röhrchens ist, so beobachtet man, dass die seitliche Ausbreitung des Lichtes beiderseits mit wohlausgebildeten Spectren abschliesst, in denen Roth am wenigsten abgelenkt erscheint. Noch übersichtlicher wird dies, wenn man durch eine Spalte paralleles Sonnenlicht auf das Röhrchen fallen lässt und dahinter einen Schirm aufstellt. Diese Spectra deuten darauf hin, dass gewisse Lichtstrahlen beim Durchgang durch das Röhrchen ein Maximum der Ablenkung erleiden.

Der Gang eines Lichtstrahles, der durch die Flüssigkeit hindurchdringt, ist nämlich folgendermassen characterisirt: Es sei in Fig. 1 durch die beiden concentrischen Kreise $OM = R$ und $ON = r$ ein Durchschnitt durch ein Glasröhrchen dargestellt. Der Lichtstrahl, der in M unter dem Winkel α auffällt, wird im Glase unter dem Winkel β gebrochen; er trifft dann die innere Röhrenwand in N unter dem Winkel γ und erleidet beim Übertritt in die Flüssigkeit abermals eine Brechung unter dem Winkel δ. Der weitere Weg des Strahles ist mit dem beschriebenen symmetrisch. Die halbe Ablenkung ist daher:

$$\frac{d}{2} = (\alpha - \beta) + (\gamma - \delta). \qquad 1)$$

Die Differenz $(\gamma - \delta)$ ist natürlich bei einer Brechung vom Lothe negativ.

Fig. 1.



Die Winkel α, β, γ, δ hängen durch folgende Gleichungen zusammen:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n,$$ dem Brechungsexponenten des Glases;

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{r}{R}$$ aus dem Dreiecke MNO;

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{n'}{n},$$ wo n' den Brechungsexponenten der in der Röhre befindlichen Flüssigkeit bezüglich Luft bedeutet.

Die Maximumsbedingung aber lautet:

$$1 - \frac{d\beta}{d\alpha} + \frac{d\gamma}{d\alpha} - \frac{d\delta}{d\alpha} = 0.$$

Bestimmt man die Werthe dieser Differential-Quotienten aus den Gleichungen:

$$\sin\alpha = n\sin\beta = n\frac{r}{R}\sin\gamma = n'\frac{r}{R}\sin\delta \qquad 2)$$

so erhält man:

$$1 - \frac{\cos\alpha}{n\cos\beta} + \frac{\cos\alpha}{n\frac{r}{R}\cos\gamma} - \frac{\cos\alpha}{n'\frac{r}{R}\cos\delta} = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{n\cos\beta} + \frac{1}{n\frac{r}{R}\cos\gamma} - \frac{1}{n'\frac{r}{R}\cos\delta} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\sin\alpha$ und setzt wieder

$$\frac{\sin\alpha}{n} = \sin\beta, \quad \frac{\sin\alpha}{n\frac{r}{R}} = \sin\gamma, \quad \frac{\sin\alpha}{n'\frac{r}{R}} = \sin\delta,$$

so ergibt sich die einfachere Form:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\delta = 0. \qquad 3)$$

Eine analoge Gestalt wird die Maximumsbedingung jederzeit annehmen, so oft es sich um den Weg eines Lichtstrahles in concentrischen kugelförmigen Medien handelt, da das Verhältniss der Sinus je zweier Winkel constant ist. Man braucht also nur in dem Ausdruck für die Deviation statt der einzelnen Winkel ihre Tangenten zu nehmen und deren algebraische Summe gleich Null zu setzen. So ist z. B. für den Hauptregenbogen, wo

$$90 - \frac{d}{2} = 2\beta - \alpha = \beta + \beta - \alpha$$

ist, die Maximumsbedingung $2\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha = 0$.

Durch Auflösung der vier Gleichungen 2) und 3) würde sich jener Winkel α ergeben, unter welchem die Strahlen auffallen müssten, um die grösste Ablenkung zu erfahren, und zugleich würde man daraus die Bedingungen ersehen können, wann diese Spectra überhaupt zu Stande kommen. Allein die Rechnung führt auf eine Gleichung von zu hohem Grade. Man kann aber schon durch einfache Discussion der Maximumsgleichung:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\delta$$

folgende zwei Bedingungen für das Zustandekommen einer maximalen Ablenkung oder das Entstehen eines Spectrums ableiten:

1. Weil tg α stets grösser als tg β ist, so muss tg γ kleiner als tg δ sein; die zweite Brechung muss also vom Lothe erfolgen, oder der Brechungsexponent der Flüssigkeit muss kleiner sein als der des Glases ($n' < n$).

2. Da auch tg γ immer grösser als tg β ist, so muss tg α kleiner als tg δ sein, mithin nach Gleichung 2)

$$n' \frac{r}{R} < 1 \quad \text{oder} \quad \frac{R}{r} > n';$$

das Verhältniss der Radien der Röhre muss grösser sein als der Brechungsexponent der Flüssigkeit.

Man kann sich von der Nothwendigkeit dieser zwei Bedingungen auch leicht experimentell durch passende Wahl der Röhrendurchmesser und des Brechungsexponenten der Flüssigkeit überzeugen. Da die Strahlen nach dem Austritte aus der Röhre convergiren, so wird daraus auch klar, dass das rechte Spectrum verschwindet, wenn man die linke Hälfte der Röhre bedeckt, und umgekehrt. Es mag hier auch noch erwähnt werden, dass sich auf der Innenseite der Spectra zahlreiche Interferenzstreifen mehr oder weniger regelmässig ausgebildet zeigen, namentlich wenn man homogenes Licht verwendet. Dieselben sind offenbar analog den secundären Bögen auf der Innenseite des Regenbogens und werden erzeugt durch Interferenz zweier Lichtbündel, welche unter verschiedenen Winkeln auffallen, aber dieselbe Deviation erleiden.

Wenn man die Grösse der maximalen Ablenkung d, den Brechungsexponenten der Glassorte des Röhrchens n und das Verhältniss der Radien der Röhre $\frac{R}{r}$ bestimmt, so enthalten die fünf Gleichungen 1) 2) und 3) fünf Unbekannte α, β, γ, δ und n', und die Elimination der vier ersten würde n' als Function von d, n und $\frac{R}{r}$ ergeben, wenn die Auflösung der Gleichungen möglich wäre. Allein man kann indirect auf folgendem Wege zum Ziele

gelangen: Man rechne sich für eine bestimmte Glasröhre, also für ein bestimmtes n und $\frac{R}{r}$ für verschiedene, beliebig gewählte Winkel α die dazugehörigen Werthe von β, γ, δ, d und n', was nach den Gleichungen:

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}; \quad \sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{n}\cdot\frac{R}{r}; \quad \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta;$$

$$\frac{d}{2} = (\alpha - \beta) - (\delta - \gamma); \quad n' = \frac{\sin\alpha \,.\, \frac{R}{r}}{\sin\delta}$$

möglich ist. Wenn man die einander entsprechenden Werthe von d und n' in eine Tabelle einträgt oder als Abscissen und Ordinaten darstellt, so kann man dann für irgend ein beobachtetes d durch Interpoliren oder aus der erhaltenen Curve den dazu gehörigen Werth von n' entnehmen.

Dieser weitläufige und mühsame Weg kommt allerdings für eigentliche Flüssigkeiten nicht in Betracht, allein für condensirte Gase glaubte ich doch einen Versuch machen zu sollen, denselben zu betreten, da sich die Gase am bequemsten in Glasröhren verflüssigen lassen, und da andere Methoden zur Bestimmung ihrer Brechungsexponenten nicht immer anwendbar sind und überhaupt noch wenig angewendet wurden.

Ausser den allgemeinen Angaben Faraday's über das Brechungsvermögen der condensirten Gase,[1] sowie der Bestimmung des Brechungsexponenten des Cyans und der Flüssigkeitseinschlüsse in Mineralien durch Brewster mit Hilfe der totalen Reflexion [2] ist insbesondere aus neuerer Zeit ein Versuch Bleckrode's[3] zu erwähnen, der die condensirten Gase in planparallele, zusammengekittete Gefässe einschloss und mit dem Mikroskop nach der Methode des Duc de Chaulnes die Brechungsexponenten von Cyan, Kohlensäure und Ammoniak bestimmte, während bei anderen Substanzen die Lösung des Kittes das Gelingen der Versuche verhinderte.

---

[1] Beer, Einleitung in die höhere Optik, 1853, Tab. VI. S. 417.
[2] Pogg. Ann. Bd. 7, S. 469.
[3] Wied. Ann. Bd. 8, S. 400.

Die Bestimmung der drei zur Berechnung des Brechungsexponenten nach der angegebenen Methode nothwendigen Grössen n, d und $\frac{R}{r}$ wurde auf folgendem Wege ausgeführt:

1. Der Brechungsexponent der Glassorte des Röhrchens wurde nach der Minimumsmethode erhalten, nachdem an ein Röhrenstückchen zwei geneigte Ebenen angeschliffen worden waren. Diese Arbeit brauchte nur einmal ausgeführt zu werden, da bei allen folgenden Versuchen Stücke derselben längeren Glasröhre verwendet wurden. Es ergab sich für Natriumlicht $n = 1\cdot5139$.

2. Die Bestimmung der Deviation kann man in der Weise vornehmen, dass man das mit Flüssigkeit gefüllte Röhrchen vertical in der Mitte des Tischchens eines Spectrometers aufstellt und links und rechts die Stellungen des Fernrohrs abliest, welche den beiden Spectren entsprechen. Die Differenz beider Ablesungen gibt die doppelte Deviation. Dabei fällt einem sofort auf, dass bei einer Drehung des Glasröhrchens die Ablenkung sich merklich, oft um einige Grade ändert. Es rührt dies offenbar daher, dass die Röhren nicht concentrisch sind, mithin das Verhältniss der Radien an verschiedenen Stellen verschieden ist. Durch Beobachtung der Ablenkung in sechs verschiedenen Stellungen gelangt man aber bereits zu einer mittleren Ablenkung, die von der durch mehrere, etwa zwölf Stellungen gewonnenen nicht mehr wesentlich abweicht. Hiebei wurde folgendermassen operirt: Zuerst wurde das Fernrohr auf die Spalte und die Nonien der mit dem Tischchen fest verbundenen Scheibe auf einen bestimmten Theilstrich des Theilkreises, etwa auf Null eingestellt. Nachdem hierauf die Ablenkungen der Spectren links und rechts beobachtet waren, kehrte man mit dem Fernrohr zur Anfangsstellung zurück und drehte dann den inneren Kreis um 60° weiter. Auf diese Weise konnte man behufs Controlversuche und namentlich, um den Einfluss der Temperatur besser bemessen zu können, stets an den nämlichen Stellen der Glasröhre Beobachtungen anstellen.

3. Die so erhaltene mittlere Ablenkung entspricht dem mittleren Verhältnisse der Radien der Röhre, das bestimmt werden kann, indem man jenes Stück der Glasröhre, durch welches bei der Beobachtung das Licht hindurchging, heraus-

schnitt, an beiden Enden eben schliff und seinen Auftrieb (a') in einer Flüssigkeit (Wasser) bestimmte.

$$a' = (R^2 - r^2)\pi l s$$

l bedeutet die Länge der Röhre und s das specifische Gewicht der Flüssigkeit. Hierauf wurden die Enden mit Siegellack verklebt und wieder geebnet. Der nunmehrige Auftrieb ist

$$a = R^2 \pi l s$$

Daraus ist

$$a - a' = r^2 \pi l s \text{ und } \frac{R}{r} = \sqrt{\frac{a}{a - a'}}$$

Indem ich nun zunächst den Brechungsexponenten des Wassers nach dieser Methode bestimmte, überzeugte ich mich, dass dieselbe Resultate zu liefern im Stande ist, die um weniger als 0·001 fehlerhaft sind. Hierauf ging ich an die Bestimmung der Brechungsexponenten einiger Gase, die sich leicht ohne Compressionsapparat in Glasröhren verdichten lassen. Die hiebei verwendeten Röhren hatten einen äusseren Durchmesser von etwas mehr als 6 mm und einen inneren von beiläufig 4 mm.

I. Schweflige Säure. — Dieselbe wurde durch Erwärmen von Kupferspähnen und Schwefelsäure dargestellt. Nachdem das Gas durch Hindurchleiten durch zwei Schwefelsäureflaschen getrocknet worden war, wurde es durch eine fein ausgezogene, rechtwinklig gebogene Glasröhre auf den Boden eines unten zugeschmolzenen Röhrenstückes geleitet, das in einer Kältemischung steckte. Sobald die Röhre 2 cm hoch mit Flüssigkeit gefüllt war, wurde sie am andern Ende vor dem Gebläse zugeschmolzen.

Es zeigte sich bei den Beobachtungen, dass die Temperatur von sehr wesentlichem Einflusse ist, indem eine geringe Steigerung derselben eine namhafte Verminderung der Deviation hervorruft. Es wurden daher durch Bedecken der Röhre mit einem Papierschirme alle unnöthigen Strahlungen hintangehalten und nach jeder Beobachtung ein daneben stehendes Thermometer abgelesen. Wenn auch der Stand des letzteren nahezu unverändert blieb, so zeigte sich doch in der Regel bei der Rückkehr zur

Anfangsstellung eine kleine Verminderung der Ablenkung, indem die Bestrahlung durch die als Lichtquelle dienende Natriumflamme oder Kerzenflamme während der Beobachtung eine kleine Temperaturerhöhung hervorrief. Die folgenden Angaben mögen daher einer um ein Weniges höheren Temperatur entsprechen.

Für schweflige Säure wurden nun bei Natriumlicht vier Beobachtungsreihen zu verschiedenen Tageszeiten und an verschiedenen Tagen gemacht, um einigermassen den Einfluss der Temperatur kennen zu lernen:

$t =$	$2d =$
19·6° C.	35° 44′ 20″
21·45	35 16 35
23·0	34 53 35
25·57	34 15 0

Daraus ergibt sich für eine Temperatursteigerung von 1° C. eine Abnahme der doppelten mittleren Deviation von 15′. Reducirt man darnach diese vier Beobachtungen auf 20° C., so erhält man im Mittel für $d = 17° 49' 13''$. Die Bestimmung des Verhältnisses der Radien ergab: $\frac{R}{r} = 1 \cdot 552$.

Aus diesem Werthe und dem oben für den Brechungsexponenten der Glasröhre gefundenen wurden die zu verschiedenen Einfallswinkeln gehörigen Deviationen und Brechungsexponenten gerechnet, die hier einmal angeführt werden mögen, um darnach die Empfindlichkeit der Methode beurtheilen zu können.

α	d	n'
$\alpha = 48°$	$d = 16° 42' 12''$	$n' = 1 \cdot 3334$
$\alpha = 49$	$d = 17\ 45\ 56$	$n' = 1 \cdot 3404$
$\alpha = 50$	$d = 18\ 52\ 26$	$n' = 1 \cdot 3475$

Das Anwachsen erfolgt innerhalb dieser Grenzen ziemlich gleichförmig, so dass man hieraus für

$$d = 17° 49' 13'' \qquad n' = \mathbf{1 \cdot 340_7}$$

als Brechungsexponent der schwefligen Säure bei 20° C. für Natriumlicht ableiten kann.

Faraday macht die allgemeine Angabe: Schweflige Säure bricht das Licht wie Wasser. Aus dem Obigen ergibt sich auch,

dass einer Temperatursteigerung von 1° C. in der Nähe von 20° eine Abnahme der Deviation um 0·00080 entspricht.

II. Cyan. — Dieses Gas wurde nach Faraday's Methode aus Quecksilbercyanid dargestellt, das im längeren Schenkel einer gebogenen Glasröhre erwärmt wurde, während der kürzere abgekühlt wurde. Die erhaltene Menge von Flüssigkeit war nur gering. Überdies wurde der durch das Zuschmelzen unregelmässig gewordene Theil der Röhre mit Papier verklebt, so dass die zur Beobachtung verwendete Flüssigkeit eine Höhe von kaum 4 mm hatte, und mithin das Spectrum bei Anwendung einer Natriumflamme zu lichtschwach war. Es wurde daher in diesem Falle Kerzenlicht verwendet und beim Messen der Deviation auf die gelbe Partie des Spectrums eingestellt.

Aus zwei Beobachtungsreihen

$$t = 19\cdot81^\circ \qquad 2d = 30^\circ\, 44'\, 30''$$
$$t = 21\cdot48 \qquad 2d = 30\;\; 20\;\; 42$$

wurde für 20° C. eine Deviation $d = 15^\circ\, 20'\, 51''$ erhalten, woraus sich für $\frac{R}{r} = 1\cdot533$ als Brechungsexponent des flüssigen Cyans für Gelb $n' = \mathbf{1\cdot318_7}$ ergab. Einer Temperatursteigerung um 1° C. entspricht beiläufig eine Abnahme des Brechungsexponenten um 0·00085. Reducirt man darnach die Angabe Bleckrode's, der bei 13° C. 1·320 erhält, auf 20°, so ergibt sich 1·314. Brewster gibt ohne nähere Bestimmung 1·316 an.

III. Schwefelwasserstoff. — Derselbe wurde in flüssiger Form dadurch erhalten, dass Wasserstoffpersulfid in einer geraden zugeschmolzenen Röhre der Zersetzung überlassen wurde. Der Temperatureinfluss war hier ein noch auffälligerer als bei den früheren Substanzen.

Es wurde erhalten für

$$t = 19\cdot23^\circ \qquad 2d = 51^\circ\, 50'\;\; 0''$$
$$t = 20\cdot16 \qquad 2d = 51\;\; 26\;\; 10$$
$$t = 25\cdot05 \qquad 2d = 49\;\;\; 6\;\;\; 5.$$

Im Mittel ergibt sich hieraus eine Abnahme der doppelten Deviation um 26·9′ bei einem Grad Temperaturzunahme.

Bei 20° C. kann daher als mittlere Deviation 25° 43′ 37″ angenommen werden, woraus sich für $\frac{R}{r} = 1\cdot5148$ der Brechungsexponent des flüssigen Schwefelwasserstoffes für Natriumlicht zu **$1\cdot374_2$** berechnet. Derselbe ändert sich für 1° C. um circa 0·00114. Nach Faraday bricht Schwefelwasserstoff das Licht etwas stärker als Wasser.

IV. Chlor. — Dieses Gas wurde nach einem von Niemann[1] angegebenen Verfahren condensirt, indem in einer geraden, circa 12 cm langen Röhre kleine Stückchen Braunstein und rauchende Salzsäure eingeschlossen wurden. Nach einiger Zeit zeigte sich obenauf eine 2 mm hohe Schichte einer gelben Flüssigkeit. Bei den Messungen wurde hier wieder der grösseren Lichtstärke wegen Kerzenlicht verwendet; auch war die andere Flüssigkeit mit Papier verdeckt, um nicht durch das Spectrum derselben gestört zu werden.

Die Beobachtungen ergaben:

t	$2d$
18·72°	45° 55′
19·91	45 32
20·68	45 15
21·22	45 4

und im Mittel für 20° C. $d = 22° 44' 36''$. Die Rechnung liefert für $\frac{R}{r} = 1\cdot606$ $n' =$ **$1\cdot385_2$** als Brechungsexponenten des flüssigen Chlors für gelbe Strahlen. Derselbe nimmt bei 1° Erwärmung um 0·00098 ab. Dieses Resultat stimmt nicht mit Faraday's Bemerkung, dass diese Substanz das Licht weniger als Wasser breche.

Zur Controle wurde noch mit jedem der hier verwendeten Röhrenstücke der Brechungsexponent des Wassers bestimmt, wodurch Werthe erhalten wurden, die zwischen 1·333 und 1·334 lagen.

Diese Methode ist nach den anfangs abgeleiteten Bedingungen nur verwendbar, wenn der Brechungsexponent der Flüssigkeit kleiner ist als der des Glases. Allein man kann auch den

[1] Liebig's Handwörterb. d. Chemie. II. Bd.. II. Abth. S. 1079, 1859.

Brechungsexponenten von Flüssigkeiten, welche in Röhren eingeschlossen sind, falls er grösser als der des Glases ist, bestimmen, indem man jene Spectra benützt, die nach Art des Hauptregenbogens zu Stande kommen. Es gibt deren zwei:

1. Jenes Spectrum, das durch Lichtstrahlen erzeugt wird, welche nach dem Durchgang durch die Flüssigkeit an der Grenze von Flüssigkeit und Glas reflectirt werden. Ihre halbe Deviation ist

$$\frac{d_1}{2} = (\alpha - \beta) + (\gamma - \delta) + (90 - \delta),$$

wo α, β, γ, δ dieselben Winkel wie in Fig. 1 bedeuten, und die Maximumsbedingung lautet nach der oben gemachten Bemerkung:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - 2\operatorname{tg}\delta = 0.$$

2. Jenes Spectrum, das durch Strahlen zu Stande kommt, die an der Grenze von Glas und Luft reflektirt werden und mithin eine Ablenkung erfahren:

$$\frac{d_2}{2} = (\alpha - \beta) + 2(\gamma - \delta) + (90 - \beta).$$

Für diese lautet die Bedingung zum Entstehen des Spectrums:

$$\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}\beta + 2\operatorname{tg}\gamma - 2\operatorname{tg}\delta = 0.$$

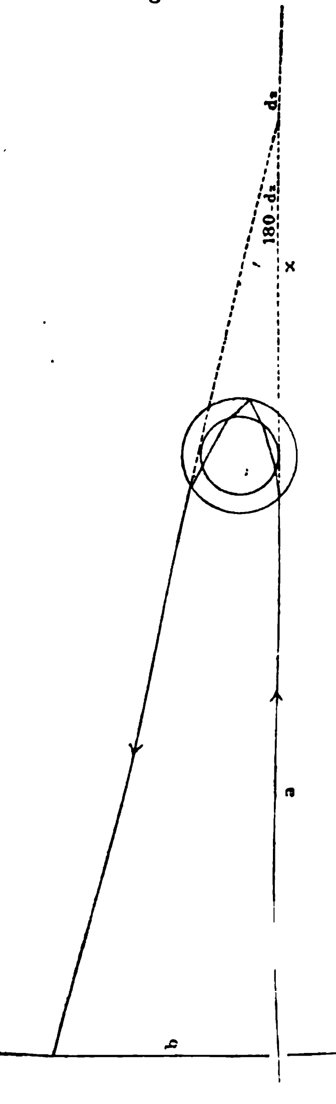
Die Berechnung des Brechungsexponenten bleibt sonst dieselbe wie früher; aber leider wird sich in vielen Fällen die Deviation mittelst des Spectrometers nicht beobachten lassen, indem das Fernrohr dem Collimator nicht hinreichend genähert werden kann. Auch die geringe Lichtstärke des Spectrums bildet bei grossem α oft ein Hinderniss.

Annäherungsweise bestimmte ich für Wasserstoffpersulfid die Deviation des zweiten Spectrums in folgender Weise: Ich liess durch eine Spalte (Fig. 2), die in der Mitte einer Millimetertheilung angebracht war, directes Sonnenlicht auf die vertical gestellte Röhre fallen und mass ausser der Distanz der Spalte von der Röhre (a) die Entfernung der mittleren gelben Strahlen des Spectrums von der Spalte (b) nach beiden Seiten und wieder bei vier um 90° verschiedenen Stellungen des Röhrchens.

Heisst nun die Entfernung des Schnittpunktes der einfallenden und reflectirten Strahlen von dem Röhrchen x, so ist

$$\operatorname{tg}(180-d_2) = \frac{b}{a+x}.$$

Fig. 2.



Führt man dieselben Messungen in einer anderen Distanz a' aus, so ist auch

$$\operatorname{tg}(180-d_2) = \frac{b'}{a'+x}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man x und mithin auch d_2 bestimmen. Für den aus den Beobachtungen abgeleiteten Werth $d_2 = 163° 19'$ und für

$\frac{R}{r} = 1 \cdot 527$ ergab sich $n' = 1 \cdot 546$

als Brechungsexponent des Wasserstoffpersulfids für die gelben Strahlen.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden **drei** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

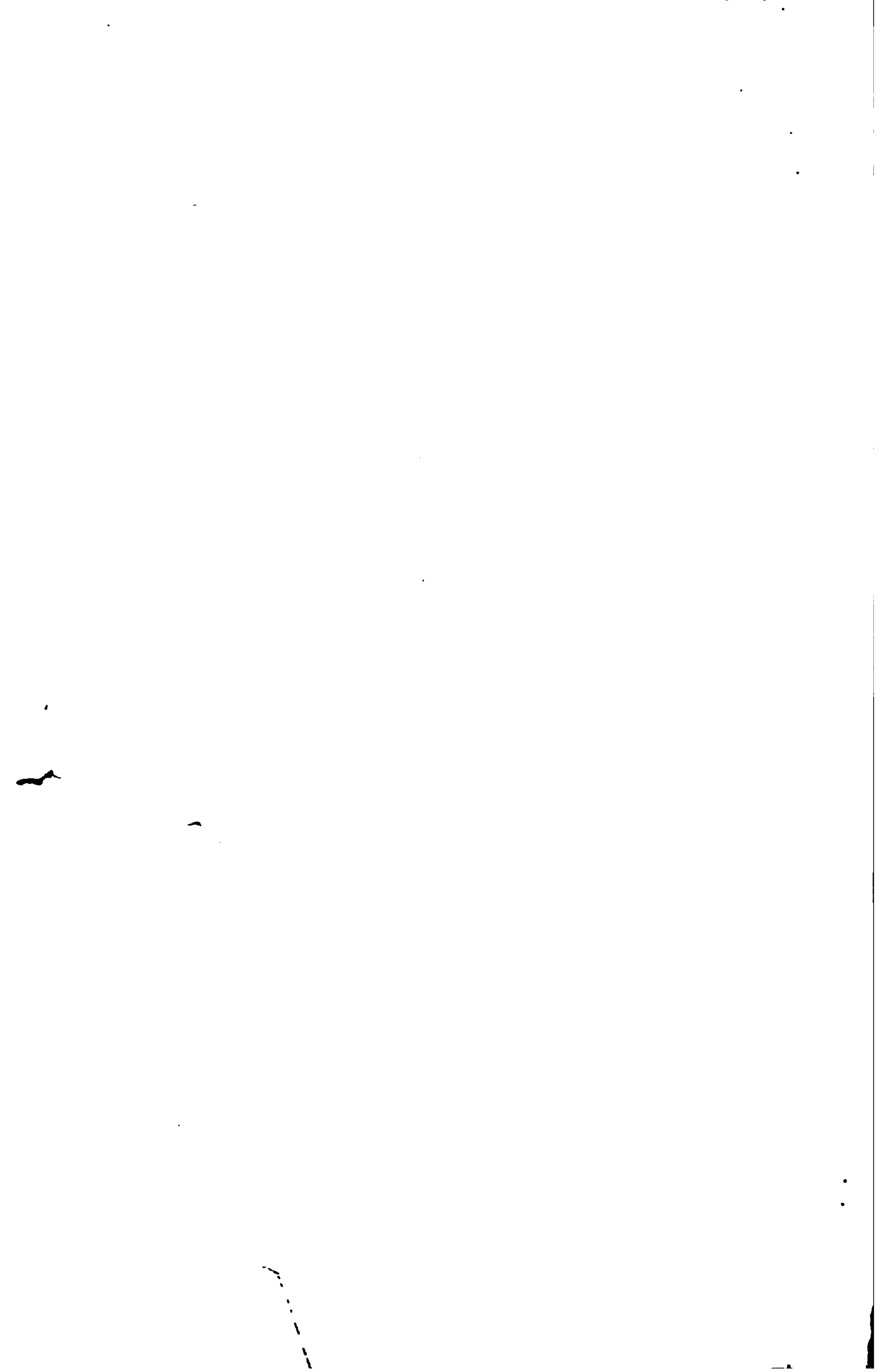
III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften" herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XC. BAND. IV. HEFT.

Jahrgang 1884. — November.

(Mit 7 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1885.

INHALT

des 4. Heftes November 1884 des XC. Bandes, II. Abtheilung der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 75 kr. = 3 RMK. 50 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER

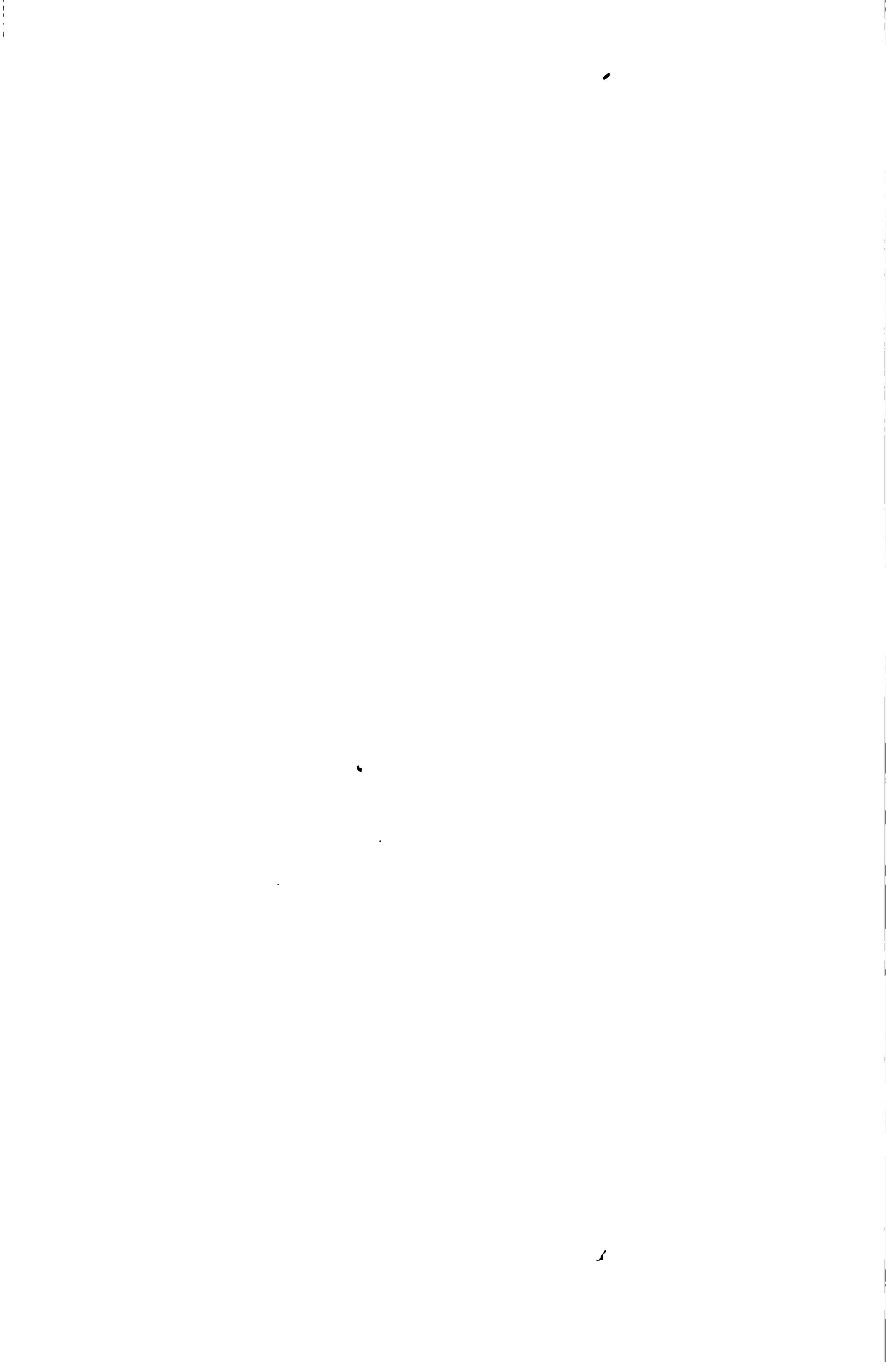
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XC. Band. IV. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.



XXIII. SITZUNG VOM 6. NOVEMBER 1884.

Die Direction des Astrophysikalischen Institutes zu Herény (Ungarn) dankt für die dieser Anstalt bewilligte Betheilung mit periodischen Schriften.

Herr Hofrath M. A. Ritter v. Becker in Wien übermittelt im Auftrage Seiner kaiserlichen Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Leopold die Specialkarte des Hernsteiner Gebietes und die Karte des erzherzoglichen Wildparkes auf der hohen Wand, sowie den zweiten Band des mit Unterstützung Seiner kaiserlichen Hoheit herausgegebenen Werkes: „Hernstein in Niederösterreich."

Das w. M. Herr Hofrath Dr. Franz Ritter v. Hauer übermittelt einen Separatabdruck von seiner in den Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt publicirten Schrift: „Zur Erinnerung an Ferdinand v. Hochstetter."

Das Comité international permanent ornithologique richtet an die kaiserliche Akademie eine Zuschrift, laut welcher der erste internationale Ornithologen-Congress zu Wion die Creirung eines internationalen permanenten ornithologischen Comités beschlossen hat, zu dessen Aufgaben auch die Errichtung eines, die ganze bewohnte Erde umspannenden Netzes von ornithologischen Beobachtungs-Stationen gehört.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Dr. C. Freih. v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Über die fossile Flora der Höttinger Breccie."

Das c. M. Herr Professor L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: „Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über Resorcinfarbstoffe", von den Herren Regierungsrath Dr. P. Weselsky und Dr. R. Benedikt, Privatdocent an der technischen Hochschule in Wien.
2. „Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten", von Herrn Emanuel Czuber, Realschulprofessor und Privatdocent an der deutschen technischen Hochschule in Prag.

3. „Ein reducirtes Organ bei *Campanula persicifolia* und einigen anderen *Campanula*-Arten", von Herrn Dr. Emil Heinricher, Privatdocent an der Universität in Graz.

Ferner legt der Secretär eine Abhandlung des Herrn Karl Koelbel, Assistenten am k. k. zoologischen Hofcabinet, unter dem Titel: „Carcinologisches" vor.

Der Secretär legt eingelangte versiegelte Schreiben zur Wahrung der Priorität vor:

1. Von Herrn Prof. Gustav Henschel in Wien mit der Aufschrift: „Neue Methode der Bekämpfung der Reblaus."
2. Von Herrn Dr. F. Schulze-Berge in Berlin mit dem Motto: „Πάντα ῥεῖ".

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Ritter v. Langer überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. E. Finger, Privatdocent an der Universität in Wien: „Beitrag zur Anatomie des männlichen Genitale".

Das w. M. Herr Director J. Hann überreicht eine Abhandlung: Die „Temperatur-Verhältnisse der österreichischen Alpenländer," I. Theil.

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine von ihm selbst in Gemeinschaft mit Herrn Dr. J. Schreder ausgeführte Arbeit: „Über die aus Hydrochinon in der Natronschmelze entstehenden Körper".

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Über Oxyphosphinsäuren", von Herrn Dr. Wilhelm Fossek.

Das w. M. Herr Prof. Th. Ritter v. Oppolzer überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Über die Länge des Siriusjahres und der Sothisperiode."

Herr Prof. Dr. Ernst v. Fleischl hält einen Vortrag: „Über die Deformation der Lichtwellenfläche im magnetischen Felde."

Herr Prof. Dr. Joh. N. Woldřich in Wien überreicht eine Abhandlung betitelt: „Diluviale Arvicolen aus Stramberger Höhlen in Mähren."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 48e année, 2e série, tome XIII. Nrs. 40—43. Paris, 1884; 8°.

Akademie der Wissenschaften, königlich bayerische: Almanach für das Jahr 1884. München; 8°.

— — Sitzungsberichte. 1884. Heft I. München, 1884; 8°.

— — Abhandlungen. XV. Band, I. Abtheilung. München, 1884; 4°.

Akademie der Wissenschaften, königlich bayerische: Über neue Exemplare von jurassischen Medusen von Ludwig v. Ammon. München, 1883; 4°. — Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion von Carl Max v. Bauernfeind. München, 1883; 4°. — Über zündende Blitze im Königreiche Bayern während des Zeitraumes 1833 bis 1882, von Wilhelm v. Bezold. München, 1884; 4°. — Franz v. Kobell. Eine Denkschrift von K. Haushofer. München, 1884; 4°.

— — Gedächtnissrede auf Theodor L. W. v. Bischoff am 28. März 1884 von Carl Kupffer. München, 1884; 4°. — Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels auf der Sternwarte zu Bogenhausen von Carl v. Orff. München, 1883; 4°.

Apotheker-Verein, allgemeiner österreichischer: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XXII. Jahrgang. Nr. 29—31. Wien, 1884; 8°.

Archiv der Mathematik und Physik: 2. Reihe. I. Theil, 3. Heft. Leipzig, 1884; 8°.

Central-Station, königl. meteorologische: Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreiche Bayern. Jahrg. V, 1883. Heft 4 *b*. München; 4°. — Jahrgang VI. 1884. Heft 1 und 2. München; 4°. — Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern während des Mai bis September 1884. München; Folio.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VIII, Nr. 79 bis 85. Cöthen, 1884; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. 2ᵉ semestre. Tome XCIX. Nrs. 15 & 16. Paris, 1884; 4°.

Dorpat, Universität: Akademische Schriften pro 1883—84. 42 Stücke. 4° & 8°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. V. Jahrgang, 1884. August- und September-Heft. Berlin; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVII. Jahrgang. Nr. 14. Berlin, 1884; 8°.

— k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXVII, Nr. 7 und 8. Wien, 1884; 8°.

— österreichische, zur Förderung der chemischen Industrie: Berichte. VI. Jahrgang. Nr. II u. III. Prag, 1884; 4°.

— physikalisch-ökonomische zu Königsberg i. P.: Schriften. XXIV. Jahrgang 1883. I. u. II. Abtheilung. Königsberg. 1884; 4°.

Gewerbe-Verein, niederösterr.: Wochenschrift. XLV. Jahrgang. Nr. 41—44. Wien, 1884; 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österreichischer: Wochenschrift. IX. Jahrgang. Nr. 41—44. Wien, 1884; 4⁰.

— — Zeitschrift. XXXVI. Jahrgang. III. — V. Heft. Wien, 1884; Folio.

Institut, k. k. militär-geographisches: Mittheilungen. IV. Band, 1884. Wien, 1884; 8⁰.

Institute, the North of England of mining and mechanical Engineers: Transactions. Vol. XXXIII, part V. Newcastle-upon-Tyne, 1884; 8⁰.

Institution, the royal of Great-Britain: Proceedings. Vol. X, part II. Nr. 76. London, 1883; 8⁰.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 28ᵉ année, 3ᵉ série, tome XIV. 515ᵉ livraison. Novembre 1884. Paris; 4⁰.

Nature. Vol. XXX. Nrs. 782 & 783. London, 1884; 8⁰.

New York, Academy of Sciences: Transactions. Vol. II. Nrs. 1—8. New York, 1882—83; 8⁰.

— — Annals. Vol. II. Nrs. 10—13. New York 1882—83; 8⁰.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 11, 13 und 14. Wien, 1884; 8⁰.

Repertorium der Physik. XX. Band, 10. Heft. München und Leipzig, 1884; 8⁰.

Società degli Spettroscopisti Italiani: Memorie. Vol. XIII. Disp. 5ª—8ª. Roma, 1884; Folio.

Société géologique de Belgique: Catalogue des ouvrages de Géologie, de Minéralogie et de Paléontologie ainsi que des Cartes géologiques. Liège, 1884; 8⁰.

Society the American geographical: Bulletin. Nr. 6. New York, 1883; 8⁰. — Nr. 2. New York, 1884; 8⁰.

Ufficio centrale di Meteorologia italiana: Annali. Ser. II. Vol. IV. Parte Iª—IIIª. 1882. Roma, 1884; Folio.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXIV. Jahrgang. Nr. 41 bis 44. Wien, 1884; 4⁰.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. VI. Jahrgang. Nr. 1. Wien, 1884; 8⁰.

Zanon, Giannantonio: Analisi delle Ipotesi fisiche. Venezia, 1885; 8⁰.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. IV. Jahrgang 1884. 10. Heft: October. Berlin, 1884; 4⁰.

Über die Länge des Siriusjahres und der Sothisperiode.

Von Prof. Dr. **Theodor v. Oppolzer,**
wirklichem Mitgliede der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

(Mit 2 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. November 1884.)

Als Definition des Beginnes einer Sothisperiode wird das Zusammenfallen des heliakischen Aufganges des Sirius mit dem 1. Thoth des ägyptischen beweglichen Sonnenjahres angenommen. Die für diese Angabe massgebende Stelle aus: „Censorini, de die natali" lautet (Edt. F. Hultsch, pag. 38, Zeile 22 ff., caput 18):

Ad Aegyptiorum vero annum magnum luna non pertinet, quem Graece *κυνικόν*, Latine canicularem vocamus, propterea quod initium illius sumitur, cum primo die eius mensis, quem vocant Aegyptii *θωυθοί*, caniculae sidus exoritur.

Ferner wird von demselben Schriftsteller in dem oben genannten Werke berichtet, dass im Jahre 139 n. Chr. (Antonino Pio II., Bruttio Praesente coss.) der Beginn einer Sothisperiode in Ägypten gefeiert wurde; die betreffende Stelle lautet (Edt. F Hultsch, pag. 46, Zeile 13 ff., cap. 21): Sed horum (sct. annorum aegyptiacorum) initia semper a primo die mensis eius sumuntur cui apud Aegyptios nomen est Thouth, quique hoc anno (sct. 238 p. Chr.) fuit ante diem VII Kal. Jul., cum abhinc annos centum imperatore Antonino[1] Pio II Bruttio Praesente Romae consulibus idem dies fuerit ante diem XII Kal. Aug., quo tempore solet canicula in Aegypto facere exortum.

Zu dieser Stelle habe ich zu bemerken, dass ich „ante diem XII Kal. Aug." geschrieben habe, während die Edit. Hultsch einer Correctur Scaliger's und der späteren Chronologen folgend, ante diem XIII ansetzt. Die beiden Codices des Censorin, der Vaticanische und der Darmstädter, weisen nämlich die von mir resti-

[1] Editio Hultsch hat Antonio.

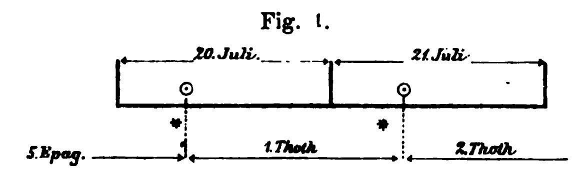
tuirte Lesart auf und es scheint mir, dass diese übereinstimmenden Angaben der beiden Codices sich aufrecht erhalten lassen, worüber die folgenden Zeilen berichten.

Über die Lage des beweglichen ägyptischen Sonnenjahres gegen unsere Zeitrechnung ist man durch den ptolemäischen Almagest, der die Himmelserscheinungen nach der ägyptischen Kalenderrechnung fixirt, — welche Himmelserscheinungen, besonders die Mondfinsternisse, durch Rechnung reconstruirt werden können — auf das Genaueste unterrichtet: Der auf das Jahr +139 fallende erste Thoth ist zweifellos der Tag 1772028 der julianischen Periode. Einschaltend will ich hier hervorheben, dass die für die folgenden Rechnungen nothwendigen Angaben in ägyptischen Jahren mit Hilfe der trefflichen Hilfstafeln für Chronologie, welche R. Schram im XLV. Bande unserer Denkschriften veröffentlicht hat, erhalten wurden. Es fragt sich nun vorerst, in welche Tageszeit die Ägypter den Beginn des Tages gesetzt haben? Ideler (Math. und techn. Chronologie I pag. 100 ff.) sucht es aus einigen Stellen des Almagest wahrscheinlich zu machen, dass hiefür der Sonnenaufgang zu gelten habe, wiewohl das Zeugniss des Plinius (Anfang um Mitternacht) und des Isidor (Anfang mit Sonnenuntergang) dagegen spricht. Ideler's auf ganz andere Gründe gestützte Annahme lässt aber die Angabe des Censorin: ante diem XII Kal. Aug., einigermassen gerechtfertigt erscheinen. Der Tag 1772028 der julianischen Periode, welcher als erster Thoth des ersten Jahres der dritten Sothisperiode oben bezeichnet wurde, führt allerdings — auf den julianischen Kalender umgerechnet — auf das Datum: +139 Juli 20, welche Angabe dem Tage ante diem XIII Kal. Aug. entspricht, so dass die Angabe des Censorin — auf das ägyptische bewegliche Sonnenjahr umgerechnet — auf den zweiten Thoth fallen würde; dieser beginnt aber, wenn man Ideler's Annahme über den ägyptischen Tagesanfang gelten lässt, am 21. Juli Morgens mit dem Sonnenaufgange, es wird daher ein am 21. Juli nach römischer Zählweise (Beginn des Tages um Mitternacht) beobachteter heliakischer Aufgang des Sirius, naturgemäss vor Aufgang der Sonne sich ereignend, auf den vorhergehenden ägyptischen Tag, also auf das Ende des ersten Thoth fallen. Bei streng folgerichtiger Deutung der Angaben des Censorin in Verbindung

mit Ideler's Annahme, dass die Ägypter den Anfang des Tages mit dem Sonnenaufgange zusammenfallen liessen, ist somit die Lesart der beiden obenerwähnten Codices (ante diem XII Kal. Aug.) völlig zulässig und kein zwingender Grund vorhanden, nach dem Beispiele Scaliger's und der späteren Chronologen davon abzugehen.

Mit diesen Auseinandersetzungen steht die von Censorin angeführte Parallelstellung der Tage: +238, 25 Juni = erster Thoth durchaus nicht im Widerspruch, denn in der That entsprechen etwa $^3/_4$ Theile des 1. Thoth dem 25. Juni des Jahres +238, wie auch im Jahre +139 derselbe Antheil des 2. Thoth dem 21. Juli

Fig. 1.



zukommt. Um diese Auseinandersetzungen besser zu veranschaulichen, seien die obwaltenden Verhältnisse durch eine Zeichnung dargestellt. Die horizontale, stark ausgezogene Linie stelle den Zeitraum von zwei Tagen vor; die nach oben gezogenen Verticallinien mögen der Mitternacht entsprechen und bezeichnen somit die Datumgrenzen nach der römischen Zählweise, das links stehende Intervall stellt also den 20., das rechtsstehende den 21. Juli des Jahres +139 nach der römischen Zeitrechnung vor. Die mit ⊙ bezeichneten Stellen sollen die Zeitpunkte des Sonnenaufgangs markiren, die innerhalb des in Betracht kommenden Zeitabschnittes sich ereignenden zwei Sonnenaufgänge sind durch punktirte, vertical nach abwärts gezogene Linien dargestellt. Diese Linien bilden — wenn man der Annahme Ideler's folgt — die Tagesgrenzen der ägyptischen Datirung: Zwischen diese beiden Sonnenaufgänge fällt daher der erste Thoth, rechts kommt der zweite Thoth, links der letzte Zusatztag zu liegen. Die Zeitpunkte der Aufgänge des Sirius in der Morgendämmerung sind durch Sternchen hervorgehoben, wobei aber die Abstände von dem Sonnenaufgange, besonders für den zweiten, absichtlich grösser gemacht wurden, als dies der gewählten Zeitscala entspricht, um den Umstand deutlicher hervortreten zu lassen, dass am

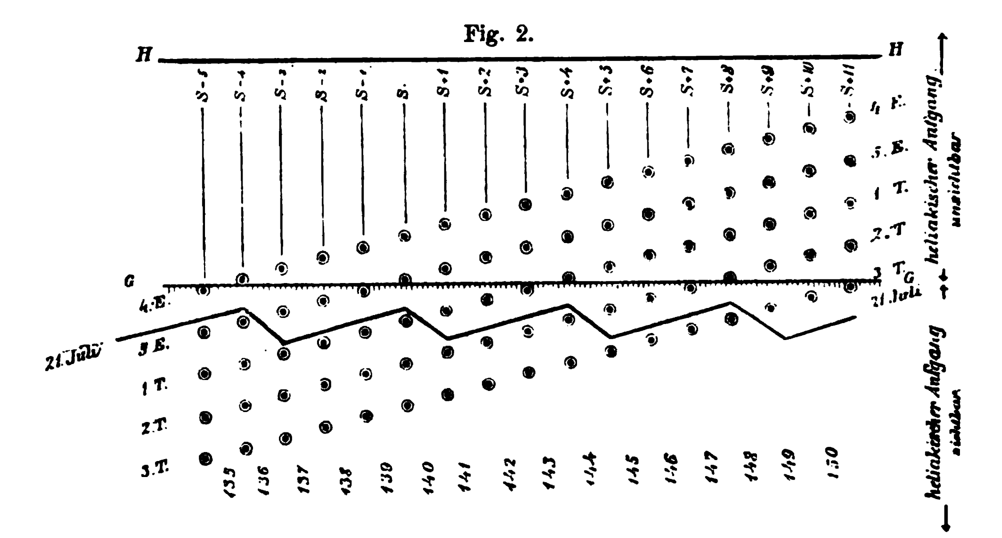
fünften Zusatztag der in der Morgendämmerung stattfindende Siriusaufgang dem Sonnenaufgange zu nahe lag, um noch beobachtet werden zu können, während dies am folgenden Tage schon möglich war. Die Zeichnung lehrt somit, dass in der That der von Censorin angegebene Beginn der Sothisperiode mit dem 1. Thoth auf den 21. Juli fällt, wenn auch dem überwiegenden Antheil nach der 21. Juli dem 2. Thoth entspricht.

Man könnte dieser Erklärung entgegenhalten, dass nach den hier gemachten Voraussetzungen erst am Schlusse des 1. Thoth die Überzeugung gewonnen werden konnte, die Sothisperiode habe begonnen, dass also erst 24 Stunden nach deren Anfang ihr Eintritt von Seite der Priestercollegien proclamirt werden konnte: doch auch diese Schwierigkeit lässt sich durch die folgenden Betrachtungen beheben.

Es wird sich vorerst empfehlen, die hier obwaltenden Verhältnisse durch eine schematische Zeichnung (Fig. 2) anschaulich zu machen, um so mehr, als dieses Schema mehrfache Anknüpfungspunkte zur Aufklärung mancher anderer mit obigem Gegenstande zusammenhängenden Fragen abgeben wird.

Die Linie *HH* stelle den Horizont dar, die Zeichen ⊙ mögen durch ihre Stellung symbolisch den Stand der Sonne unter dem Horizonte im Momente, als der eben aufgehende Sirius

Fig. 2.



sich im Horizonte befindet, andeuten; je tiefer das Symbol ⊙ in der nebenstehenden Zeichnung gesetzt ist, um so tiefer stehe die Sonne unter dem Horizont. Damit man aber den heliakischen Aufgang des Sirius in der Morgendämmerung wahrnehmen könne, muss die Sonne um einen gewissen Betrag unter dem Horizonte stehen; — in der Zeichnung stelle die nach abwärts schraffirte Linie *GG* die hiefür erforderliche Stellung der Sonne dar — befindet sich zur Zeit des thatsächlichen Aufganges des Sirius das Sonnensymbol ⊙ oberhalb dieser Linie, so deutet dies an, dass der Aufgang des Sirius in der Morgendämmerung mit unbewaffnetem Auge nicht wahrgenommen werden kann; ist aber in einem gegebenen Falle das Symbol ⊙ unter die Linie *GG* gestellt, — diese soll in der Folge als Grenzlinie bezeichnet werden — so ist Sirius bei seinem Aufgange in der Morgendämmerung wahrnehmbar. Die Lage der Grenzlinie ist nicht mit völliger Präcision anzugeben und wird von den jeweiligen meteorologischen und geographischen Verhältnissen, wie von der Sehschärfe und Aufmerksamkeit des Beobachters abhängen. Bei schärferer Sehkraft und erhöhter Aufmerksamkeit wird man ceteris paribus die Linie *GG* höher zu stellen haben. Der Abstand der Linie *GG* von *HH* stellt somit den Sehungsbogen dar.

Nimmt man mit einigem Grunde an, dass die ägyptischen Priestercollegien dieser Erscheinung eine besondere Aufmerksamkeit schenkten, und etwa mittelst diopterartiger Instrumente das Auge durch Fixirung der Sehlinie unterstützten, so wird man wohl behaupten dürfen, dass für ihre Beobachtungen die Linie *GG* wesentlich höher gestellt werden müsse als für die mittleren Beobachtungsresultate des Volkes.

Die Sonnensymbole in Reihen geordnet, die von links unten nach rechts oben aufsteigen, versinnlichen die Stellung der Sonne beim Aufgang des Sirius für aufeinander folgende ägyptische bewegliche Sonnenjahre; die in einer schiefen Reihe stehenden Symbole entsprechen der Stellung der Sonne an demselben Jahrestage. So entspricht die oberste, beiderseits mit 4*E* bezeichnete Linie der Stellung der Sonne am Schlusse des vierten Zusatztages, die nächst untere jener am Schlusse des fünften Epagomenentages, die dritte mittlere dem Schlusse des ersten Thoth u. s. f. Das erste links stehende Zeichen in einer solchen

Reihe entspricht dem ägyptischen Jahr $S—5$, das nächste demselben Datum des nächstfolgenden Jahres $S—4$ u. s. f. Für die Verticallinien gilt das ägyptische Jahr, für die schief von links nach rechts aufsteigenden Linien der Jahrestag als Argument, durch die Verbindung je einer verticalen mit einer schiefen erhält man aus dem obigen Schema sofort die Stellung der Sonne beim wirklichen Aufgang des Sirius; so z. B. wird im Jahre $S+2$ am Schluss des fünften Epagomenentages der heliakische Aufgang des Sirius nicht beobachtbar sein, weil die Sonne zu dieser Zeit schon über der Grenzlinie steht, wohl aber am 1. Thoth, an welchem die Sonne unter der Grenzlinie sich befindet.

Wie man leicht bemerkt, steigt die Sonne mit dem fortlaufenden Jahre in Bezug auf die Grenzlinie um einen gewissen Betrag an, die Grösse desselben ist für den Parallel 30° etwa 13 Bogenminuten; weiter sieht man auch, dass in einem gegebenen Jahre der heliakische Aufgang des Sirius um so leichter zu beobachten ist, je mehr der Jahrestag vorrückt; so wird z. B. im Jahre $S—3$ derselbe am vierten Zusatztage noch nicht, am fünften mit einiger Schwierigkeit, am ersten Thot aber sehr leicht u. s. f. wahrgenommen werden. Aus dieser Bemerkung nun leuchtet unmittelbar ein, der Beginn der Sothisperiode sei eigentlich dadurch definirt, dass man den Sirius, der noch im Vorjahre am fünften Zusatztage heliakisch aufging, in dem vorliegenden Jahre am fünften Zusatztage zur Zeit der Morgendämmerung nicht mehr wahrnehmen konnte. Tritt dieser Fall ein, so ist der nächste Tag, welcher der Voraussetzung nach der erste Thoth sein wird, der Beginn der Sothisperiode und wird der Sirius an diesem Tage verhältnissmässig leicht wahrnehmbar sein.

Der Siriusaufgang wird in den folgenden drei Jahren auf dem ersten Thoth bleiben, aber immer schwieriger zu sehen sein, im vierten Jahre sich gänzlich der Beobachtung entziehen: Der heliakische Aufgang ist auf den 2. Thoth gerückt. Wendet man also dieser Art der Beobachtung eine besondere Aufmerksamkeit zu, so kann man ganz wohl annehmen, dass man z. B. am fünften Epagomenentage den Sirius, wenn auch mit Mühe wahrnimmt, während ein minder aufmerksamer Beobachter denselben bereits übersieht. Der letztere Beobachter wird nun am folgenden Tage den Beginn der Sothisperiode proclamiren, indess der andere

schärfer zusehende diesen Beginn mindestens um ein Jahr später ansetzt. Es wird also bei einer derartigen Beobachtungsweise ein gewisser Zweifel niemals ausgeschlossen bleiben und dieser Umstand in Verbindung mit der später durch Rechnung nachzuweisenden Abhängigkeit des heliakischen Aufgangs von der geographischen Breite macht es wahrscheinlich, dass man sich bei der Fixirung des Beginnes der Sothisperiode, wenn überhaupt dieser Periode von den alten Ägyptern eine Wichtigkeit beigemessen wurde, auf den Ausspruch eines bestimmten Priestercollegiums verlassen habe.

Bei einigermassen genauer und gewissenhafter Beobachtung des heliakischen Siriusaufganges kann das regelmässige Vorrücken desselben um einen Tag des ägyptischen Kalenders in vier Jahren der Aufmerksamkeit der Priester nicht entgangen sein, sie konnten ohne irgend einen theoretischen Apparat bald mit Sicherheit schliessen, dass, wenn im Jahre *S*—4 der Sirius am vierten Epagomenentage nicht mehr sichtbar war, nachdem die Beobachtung noch im Vorjahre gelungen war, 4 Jahre später der Beginn der Sothisperiode eintreten werde; das oben erwähnte Bedenken muss somit völlig verschwinden, die Priester konnten auf eine Reihe von Jahren den Beginn der Sothisperiode mit Sicherheit bestimmen und daher die für die grossen Feste nothwendigen Vorbereitungen rechtzeitig treffen.

Wie aus der Betrachtung des obigen Schemas sofort erhellt, ist die Anordnung desselben so getroffen, dass die Lage der Verticallinien *S* mit dem Beginn einer Sothisperiode zusammenfällt; denn im Jahre *S* — 1 konnte der heliakische Aufgang des Sirius, wenn auch nur bei gehöriger Aufmerksamkeit, am fünften Epagomenentage wahrgenommen werden. Soll *S* den Beginn der dritten Sothisperiode darstellen, welche im Jahre + 139 stattgefunden hat, so hätten die unten angeschriebenen Zahlen die Berechtigung als julianische Jahre zu gelten, und die im Zickzack ausgezogene Linie stellt mit Rücksicht darauf, dass die gewählte Lage der Sonnensymbole für den Schluss der ägyptischen Jahrestage bei Sonnenaufgang geltend angenommen wurden, die Lage der Tagesanfänge des 21. Juli (Beginn um Mitternacht) nach römischer Rechnung dar. Die Zickzacklinien erklären sich durch die Einfügung des Schalttages in den Jahren 136, 140, 144, 148, u. s. f. —

Drei Jahre läuft der julianische Kalender parallel mit dem beweglichen ägyptischen Sonnenjahre, im vierten Jahre springt wegen des Schalttages der julianische Kalender um einen Tag vor, so dass z. B. der 21. Juli im Jahre S mit dem 1. Thoth (wenn man mit Ideler den ägyptischen Tagesanfang mit dem Sonnenaufgang annimmt), im Jahre $S+1$ und den folgenden zwei Jahren mit dem 2. Thoth zusammenfällt. Das Schema zeigt nun klar, dass in der That der heliakische Aufgang des Sirius nahezu an einen und denselben julianischen Jahrestag gebunden erscheint; nach der vorliegenden Zeichnung würde im Schaltjahre und den folgenden zwei Jahren der Siriusaufgang auf den 20. Juli, im dritten, also in dem einem Schaltjahre vorangehenden Jahre auf den 21. Juli fallen. Würde man sich die Linie GG aber etwa so weit herabgerückt denken, dass sie gerade die oberen Spitzen der Zickzacklinien berührt, so würde der heliakische Aufgang des Sirius stets auf den 21. Juli fallen. In der That würde eine solche Herabrückung nach den oben gemachten Bemerkungen über die Beobachtungsart gerechtfertigt erscheinen, wenn man sich etwa auf Beobachtungen beziehen wollte, welche das Volk im Allgemeinen anstellt. Censorin hat daher völlig Recht, wenn er das Wort „solet" gebraucht, nur möchte ich dieses so deuten, dass der Autor damit sagen wollte, der 21. Juli sei jener Tag, an welchem in der überwiegenden Anzahl der Fälle der heliakische Aufgang des Sirius wahrgenommen werde. (Vgl. pag. 583 und 584.)

Das hier aufgenommene Schema wird aber keineswegs für längere Zeiträume Giltigkeit haben. Es könnte dies nur der Fall sein, wenn das Siriusjahr mit dem julianischen völlig übereinstimmte; diese Voraussetzung trifft aber nicht mit Strenge zu, es verschieben sich mit der Zeit gewissermassen die Linien HH und GG gemeinsam gegen die Tageslinien. Die Verschiebung beträgt zur Zeit $+139$ etwa in einem Jahrhundert 6 Bogenminuten und zwar in dem Sinne, dass der heliakische Aufgang des Sirius sich mit der Zeit gegen den julianischen Kalender verspätet, es werden daher die auf den 20. Juli fallenden heliakischen Aufgänge langsam auf den 21. Juli vorrücken. In der That hat eine merkliche Verschiebung zwischen $+139$ und der Zeit Censorin's ($+238$) in diesem Sinne platzgegriffen. Ausserdem werden noch andere Umstände, z. B. dass Censorin's Nachricht aus Alexan-

drien stammen dürfte, massgebend sein, worüber erst unten Näheres wird beigebracht werden. Um nun über diesen Gegenstand, soweit dies dem Astronomen möglich ist, hinlängliche Klarheit zu gewinnen, habe ich die folgenden ziemlich umfassenden Rechnungen über die Dauer des Siriusjahres durchgeführt und mich hiebei bemüht, die Zahlenangaben so genau als dies bei der gegenwärtigen Kenntniss der Bewegungen der Himmelskörper möglich ist, herzustellen. Überhaupt hat diese Untersuchung als eine rein astronomische zu gelten, welche dem Historiker nur die Materialien darbietet, soweit diese durch den Astronomen beschafft werden können; sie fällt somit in das Gebiet der astronomischen Chronologie. Als vorbereitende Rechnungen schien es vorerst nöthig, die für so ferne Epochen geltenden Siriusorte mit thunlichster Schärfe zu bestimmen. Der Siriusort für das mittlere Äquinoctium 1875.0 ist nach Herz' und Strobl's Reduction des Auwers'schen Fundamentalkatalogs (Denkschriften der k. Akademie Bd. XLVI) anzunehmen:

$$\alpha = 99°54'37''3, \quad \delta = -16°32'46''8,$$

und die jährliche Eigenbewegung nach derselben Quelle:

$$\Delta\alpha = -0''5416, \quad \Delta\delta = -1''2004.$$

Für die Berechnung der Präcession habe ich jene Coëfficienten gewählt, die von mir um eine Potenz der Zeit weiter als dies gewöhnlich geschah, in meinem „Lehrbuch der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten" (I. Band, 2. Auflage) entwickelt sind; auf dieses Werk werde ich mich in der Folge mehrfach beziehen. Zunächst wurden die für die tropischen Jahresanfänge der Jahre —1600, —1200, —800, —400, 0, +400, +800 geltenden Constanten m, n und p mit Hilfe der auf pag. 217 meines Lehrbuches angeführten Formeln berechnet und zur Ermittlung der Ausgangsgrössen l', ε_0', $\Delta\varepsilon$ und a mit Rücksicht darauf, dass als Ausgangsepoche zufolge der obigen Sternposition das Jahr 1875 zu gelten hat [Lehrbuch 15, pag. 202], die folgenden numerischen Coëfficienten benützt:

$$l' = 50''37049\,(t_, - 1875) - 0''0001\,0892\,(t_, - 1875)^2 - 0''0000\,0000\,174\,(t_, - 1875)^3$$

$$a = 0{\cdot}14194\,(t_, - 1875) - 0{\cdot}0002\,4190\,(t_, - 1875)^2 - 0{\cdot}0000\,0000\,212\,(t_, - 1875)^3$$

$$\varepsilon'_0 = 23°27'19''93, \quad \Delta\varepsilon = +0''0000\,0690\,(t_, - 1875)^2 - 0''0000\,0000\,786\,(t_, - 1875)^3.$$

Es ergeben sich hieraus die folgenden Werthe für die Übertragungscoëfficienten:

t,	−1600	−1200	−800	−400	0	+400	+800
m	−44°24′13″2	−39°15′47″4	−34° 8′16″9	−29° 1′29″6	−23°55′18″3	−18°49′15″3	−13°43′22″5
n	−19 2 2·7	−16 54 56·8	−14 46 11·2	−12 35 59·7	−10 24 36·4	− 8 12 15·6	− 5 59 11·9
	−22 20 52·2	−19 44 36·5	−17 9 7·7	−14 34 18·0	−11 59 59·7	− 9 26 5·4	− 6 52 27·6.

Zur Berechnung der Eigenbewegung wurde die Formel [Lehrbuch 45) pag. 218] benützt und erhalten:

	−1600	−1200	−800	−400	0	+400	+800
I. Glied	+31′22″06	+27′45″42	+24′ 8″78	+20′32″14	+16′55″50	+13′18″86	+ 9′42″22
II. Glied	− 11·31	− 8·85	− 6·70	− 4·85	− 3·29	− 2·04	− 1·08
Δα	+31′10″7	+27′36″6	+24′ 2″1	+20′27″3	+16′52″2	+13′16″8	+ 9′41″1
I. Glied ..	+1°9′31″39	+1°1′31″23	+53′31″07	+45′30″91	+37′30″75	+29′30″59	+21′30″43
II. Glied ..	+ 2·34	+ 1·84	+ 1·39	+ 1·00	+ 0·68	+ 0·42	+ 0·22
	+1°9′33″7	+1°1′33″1	+53′32″5	+45′31″9	+37′31″4	+29′31″0	+21′30″6.

Nach Lehrbuch 46) pag. 219 erhielt man nun die unten folgenden auf das mittlere Äquinoctium des tropischen Jahresanfangs für das beigesetzte Jahr bezogenen Positionen für Sirius, neben welche ich die zugehörige mittlere Schiefe der Ekliptik ε stelle, zu deren Berechnung [vgl. Lehrbuch 15) pag 202] der Ausdruck:

$$\varepsilon = 23°27'31''83 - 0''47593\,(t,-1850) - 0''0000\,0143\,(t,-1850)^2 + 0''0000\,0000\,204\,(t,-1850)^3$$

gedient hat, also:

	α	δ	ε
−1600	61°47′31″2	−18°24′25″0	23°53′13″0
−1200	66 7 58·0	−17 33 27·3	23 50 32·2
− 800	70 29 29·2	−16 52 1·5	23 47 45·0
− 400	74 51 58·8	−16 20 22·8	23 44 52·2
0	79 15 17·5	−15 58 43·1	23 41 54·5
+ 400	83 39 14·1	−15 47 11·0	23 38 52·7
+ 800	88 3 36·5	−15 45 51·3	23 35 47·6.

Diese mittleren Orte bedürfen aber kleiner Correctionen; von jenen für Nutation und Aberration wurde abgesehen, da nur die mittleren Verhältnisse in Betracht gezogen werden sollen, und nur auf den Umstand Rücksicht genommen wird, dass die obigen Orte für den Anfang des tropischen Jahres gelten, welches nach Bessel's Definition beginnt, wenn die mittlere Länge der Sonne 280° erreicht, während für den vorliegenden Zweck die Orte auf die Zeiten der heliakischen Aufgänge des Sirius sich zu beziehen haben.

Indem diese vorgreifend genähert bestimmt wurden, ergaben sich die folgenden Werthe für die Zeit der heliakischen Aufgänge des Sirius:

	α	δ	ε
—1600	61°47′51″0	—18°24′20″8	23°53′12″8
—1200	66 8 18·3	—17 33 23·7	23 50 32·0
— 800	70 29 49·9	—16 51 58·6	23 47 44·8
— 400	74 52 20·0	—16 20 20·7	23 44 52·0
0	79 15 39·1	—15 58 41·7	23 41 54·3
+ 400	83 39 36·0	—15 47 10·5	23 38 52·5
+ 800	88 3 58·9	—15 45 51·7	23 35 47·4.

Hiezu mag bemerkt werden, dass in Folge verschiedener Annahmen, die weiter unten über einige das Problem beeinflussende Grössen gemacht werden, wohl in den extremsten Fällen eine Verschiebung der so berechneten heliakischen Aufgänge gegen jene, welche den vorstehenden Zahlen zu Grunde gelegt wurden, um wenige Tage eintreten kann, dass aber auf diese Unterschiede hier desshalb nicht Rücksicht genommen wurde, weil die dadurch bewirkten Änderungen in den obigen Zahlen höchstens Bruchtheile der Bogensecunde erreichen können. Bei der numerischen Ausführung werden also stets die Zahlen der obigen Tabelle in Rechnung gezogen.

Zu den vorbereitenden Rechnungen gehört auch die Construction der Sonnenephemeriden, zu deren Berechnung Le Verrier's Sonnentafeln (mit Ausschluss der periodischen Mond- und Planetenstörungen) benützt wurden.

Auf die mit dem Quadrate der Zeit vorschreitenden Glieder in L und Π wurde gehörig Rücksicht genommen und, um die Zahlen möglichst gleichförmig vorschreiten zu lassen, die Mittelpunktsgleichung für jede der obigen Epochen direct berechnet und zur Reduction der mittleren Länge auf die scheinbare benützt; es erweisen sich nämlich Le Verrier's Hilfstafeln zur Berechnung der Mittelpunktsgleichung für so ferne Epochen, wie dieselben hier in Betracht kommen, als zu wenig genau.

Es fand sich, mit ζ die mittlere Anomalie bezeichnend, so:

Mittelpunktsgleichung.

t,				
—1600	+7455″20 sin ζ	+85″44 sin 2ζ	+1″33 sin 3ζ	+0″02 sin 4ζ
—1200	+7399·82 sin ζ	+83·94 sin 2ζ	+1·30 sin 3ζ	+0·02 sin 4ζ

$t_{,}$				
— 800	+7342″64 sin ζ	+82″44 sin 2ζ	+1″27 sin 3ζ	+0″02 sin 4ζ
— 400	+7283·65 sin ζ	+80·94 sin 2ζ	+1·23 sin 3ζ	+0·02 sin 4ζ
0	+7222·86 sin ζ	+79·44 sin 2ζ	+1·20 sin 3ζ	+0·02 sin 4ζ
+ 400	+7160·27 sin ζ	+77·94 sin 2ζ	+1·17 sin 3ζ	+0·02 sin 4ζ
+ 800	+7095·86 sin ζ	+76·44 sin 2ζ	+1·14 sin 3ζ	+0·02 sin 4ζ.

Die so gefundenen scheinbaren Sonnenlängen sind innerhalb des Zeitraumes Juli 13 — Juli 21 von $^1/_4$ zu $^1/_4$ Tag in die folgende Zusammenstellung aufgenommen worden. Es wurde desshalb ein so kleines Intervall gewählt, damit eine lineare Interpolation für die Zwischenzeiten als zulässig erscheine. Die angesetzten Zeiten sind, Le Verrier's Tafeln entsprechend, als Pariser Zeiten zu nehmen:

Sonnenephemeriden.

	—1600	—1200	—800	—400	0	+400	+800
Juli 13·00	95°29′20″6	98°34′37″8	101°40′51″0	104°47′58″1	107°55′57″3	111° 4′46″3	114°14′23″0
25	95 43 49·2	98 49 5·0	101 55 16·0	105 2 22·8	108 10 20·9	111 19 8·9	114 28 44·5
50	95 58 18·0	99 3 32·3	102 9 42·9	105 16 47·5	108 24 44·5	111 33 31·5	114 43 6·6
75	96 12 46·9	99 17 59·7	102 24 8·9	105 31 12·4	108 39 8·3	111 47 54·3	114 57 28·5
„ 14·00	96 27 15·9	99 32 27·3	102 38 35·1	105 45 37·3	108 53 32·1	112 2 17·1	115 11 50·5
25	96 41 45·0	99 46 54·9	102 53 1·4	106 0 2·4	109 7 56·0	112 16 40·0	115 26 12·5
50	96 56 14·2	100 1 22·6	103 7 27·8	106 14 27·5	109 22 20·0	112 31 3·0	115 40 34·6
75	97 10 43·5	100 15 50·4	103 21 54·3	106 28 52.7	109 36 44·1	112 45 26·1	115 54 56·8
„ 15·00	97 25 12·9	100 30 18·4	103 36 20·8	106 43 18·0	109 51 8·2	112 59 49·2	116 9 19·0
25	97 39 42 4	100 44 46·4	103 50 47·5	106 57 43·4	110 5 32·5	113 14 12·4	116 23 41·3
50	97 54 12·1	100 59 14·6	104 5 14·2	107 12 8·9	110 19 56·8	113 28 35·7	116 38 3·7
75	98 8 41·8	101 13 42·8	104 19 41·1	107 26 34·5	110 34 21·2	113 42 59·1	116 52 26·1
„ 16·00	98 23 11·7	101 28 11·2	104 34 8·0	107 41 0·2	110 48 45·7	113 57 22·5	117 6 48·6
25	98 37 41·6	101 42 39·6	104 48 35·1	107 55 26·0	111 3 10·3	114 11 46·0	117 21 11·2
50	98 52 11·7	101 57 8·2	105 3 2·2	108 9 51·8	111 17 34·9	114 26 9·6	117 35 33·9
75	99 6 41·9	102 11 36·9	105 17 29·5	108 24 17·8	111 31 59·7	114 40 33·3	117 49 56·6
„ 17·00	99 21 12·2	102 26 5·7	105 31 56·8	108 38 43·8	111 46 24·5	114 54 57·1	118 4 19·4
25	99 35 42·7	102 40 34·6	105 46 24·2	108 53 10·0	112 0 49·5	115 9 21·0	118 18 42·3
50	99 50 13·2	102 55 3·6	106 0 51·8	109 7 36·2	112 15 14·5	115 23 44·9	118 33 5·2
75	100 4 43·9	103 9 32·7	106 15 19·5	109 22 2·5	112 29 39·6	115 38 8·9	118 47 28·2
„ 18·00	100 19 14·6	103 24 1·9	106 29 47·3	109 36 28·9	112 44 4·8	115 52 33·0	119 1 51·3
25	100 33 45·4	103 38 31·2	106 44 15·1	109 50 55·4	112 58 30·1	116 6 57·2	119 16 14·5
50	100 48 16·4	103 53 0·6	106 58 43·1	110 5 22·0	113 12 55·4	116 21 21·4	119 30 37·7
75	101 2 47·5	104 7 30·1	107 13 11·1	110 19 48·7	113 27 20·9	116 35 45·7	119 45 1·1
„ 19·00	101 17 18·7	104 21 59·8	107 27 39·3	110 34 15·5	113 41 46·4	116 50 10·1	119 59 24·5
25	101 31 50·0	104 36 29·5	107 42 7·6	110 48 42·4	113 56 12·1	117 4 34·6	120 13 48·0
50	101 46 21·5	104 50 59·4	107 56 36·0	111 3 9·4	114 10 37·8	117 18 59·2	120 28 11·5
75	102 0 53·1	105 5 29·4	108 11 4·5	111 17 36·5	114 25 3·7	117 33 23·9	120 42 35·2

	−1600	−1200	−800	−400	0	+400	+800
Juli 20·00	102°15′24″8	105°19′59″5	108°25′33″1	111°32′ 3″7	114°39′29″6	117°47′48″6	120°56′58″9
25	102 29 56·7	105 34 29·7	108 40 1·8	111 46 31·0	114 53 55·6	118 2 13·5	121 11 22·7
50	102 44 28·6	105 49 0·0	108 54 30·6	112 0 58·4	115 8 21·7	118 16 38·4	121 25 46·6
75	102 59 0·7	106 3 30·4	109 8 59·5	112 15 25·9	115 22 47·9	118 31 3·4	121 40 10·6
„ 21·00	103 13 32·8	106 18 1·0	109 23 28·5	112 29 53·5	115 37 14·2	118 45 28·5	121 54 34·7.

Hiermit sind die für die weiteren Rechnungen erforderlichen Grundlagen hergestellt. Es könnte scheinen, als ob die hier angeführten Zahlen eine übertriebene Genauigkeit repräsentiren, da für so entfernte, wie die hier in Betracht kommenden Epochen, die Coordinaten wohl schon auf Bogenminuten unsicher, die angesetzten Zehntheile der Bogensecunde also völlig illusorisch seien. Obwohl sich die Richtigkeit dieser Bemerkung nicht läugnen lässt, so schien mir die gewählte Genauigkeitsgrenze doch völlig entsprechend, weil einerseits eine die unumgänglich nöthige Genauigkeit überschreitende Durchführung einer Rechnung nicht als Nachtheil betrachtet werden kann, anderseits mir daran lag, die Glieder höherer Ordnung in der Länge des Siriusjahres entsprechend genau zu bestimmen, dies aber nur dann gelingt, wenn man die Genauigkeit der Rechnung erhöht, da die ersten, zweiten und höheren Differentialquotienten von der erwähnten Unsicherheit in den absoluten Coordinaten in weit geringerem Masse abhängen. Ehe ich an die Mittheilung der weiter erhaltenen Zahlen gehe, will ich kurz jene einfachen theoretischen Grundlagen darlegen, auf denen die folgenden Rechnungen beruhen.

Zunächst wird es nothwendig sein, den Stundenwinkel t, in welchem Sirius sich beim Aufgang befindet, zu berechnen. Bezeichnet man mit h seine Höhe, die für den thatsächlichen Aufgang $= 0$ zu setzen ist, mit φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, mit α und δ Rectascension und Declination des Sirius, so hat man:

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}, \qquad 1)$$

wobei, der Natur der Aufgabe entsprechend, für die hier in Betracht kommenden nur positiven Polhöhen t im vierten Quadranten anzunehmen sein wird. Bei dem vorliegenden Problem setzt man gewöhnlich $\sin h = 0$ und erhält einfach:

$$\cos t = -\mathrm{tg}\,\varphi\ \mathrm{tg}\,\delta.$$

Doch habe ich stets die erstere Formel in Anwendung gezogen, weil ich die Annahme sin $h = 0$ für bedenklich halte, indem es eben — seltene Ausnahmen abgerechnet — in Folge der bedeutenden Exstinction des Lichts in der Nähe des Horizonts im Allgemeinen nicht möglich ist, den Sirius in der Höhe 0 wahrzunehmen; dieser Beobachtung werden zumeist auch terrestrische Hindernisse entgegentreten. Ich habe es desshalb für angemessen erachtet, $h = 1^\circ$ zu setzen und diese Höhe als massgebend für die Sichtbarkeit des Sirius anzunehmen. Übrigens mag gleich hier erwähnt werden, dass eine etwas veränderte Annahme über den Bogen h die gewonnenen Resultate in keiner merklichen Weise abändert. So wird z. B. die unten für $h = 3^\circ$ durchgeführte Rechnung fast mit den aus $h = 1^\circ$ abgeleiteten Zahlen identische Werthe finden lassen; eine wesentliche Unsicherheit kann also der Bestimmung des Siriusjahres aus dem Umstande, dass man über die Höhe, in welcher das Gestirn bei seinem heliakischen Aufgange von den ägyptischen Priestern beobachtet wurde, im Zweifel ist, nicht entstehen.

Bezeichnet man mit θ die zum Stundenwinkel t gehörige Sternzeit, so findet sich dieselbe bekanntlich bestimmt durch:

$$\theta = \alpha + t. \qquad 2)$$

Aus Umständen, auf welche ich später aufmerksam machen werde, ist auch die genäherte Bestimmung des Azimuthes b, in welchem der Sirius bei seinem heliakischen Aufgange gesehen wird, wünschenswerth; man erhält dasselbe mit genügender Genauigkeit durch:

$$\sin b = \frac{\cos\delta \sin t}{\cos h}, \qquad 3)$$

wobei b unter den gegebenen Verhältnissen wieder im vierten Quadranten zu nehmen sein wird.

Bezeichnet man mit A und D die Rectascension und Declination der Sonne zur Zeit des heliakischen Aufganges des Sirius, mit T ihren Stundenwinkel und berechnet T nach:

$$T = \theta - A,$$

in welcher Formel θ der Gleichung 2) gemäss anzunehmen ist,

so erhält man für die Sonnenhöhe H:

$$\sin H = \sin\varphi \sin D + \cos\varphi \cos D \cos T$$
$$= \sin\varphi \sin D + \cos\varphi \cos D \cos A \cos\theta + \cos\varphi \cos D \sin A \sin\theta.$$

Da man die stets unter einer Secunde betragende Sonnenbreite ausser Acht lassen kann, so erhält man für die Bestimmung der zugehörigen scheinbaren Sonnenlänge $\odot$, wenn mit ε die Schiefe der Ekliptik bezeichnet wird, die Ausdrücke:

$$\cos A \cos D = \cos\odot$$
$$\sin A \cos D = \sin\odot \cos\varepsilon$$
$$\sin D = \sin\odot \sin\varepsilon,$$

welche nach Substitution in die obige Gleichung und nach Einführung der Hilfsgrössen n und N durch die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} n \sin N &= \cos\varphi \cos\theta \\ n \cos N &= \sin\varphi \sin\varepsilon + \cos\varphi \cos\varepsilon \sin\theta, \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

die Gleichung:

$$n \sin (N + \odot) = \sin H \qquad 5)$$

ergeben, mittelst welcher sich, da in einem bestimmten Falle n und N völlig bekannte Grössen sind, sobald H gegeben ist, die Sonnenlänge $\odot$ berechnen lässt und umgekehrt. Hiezu ist nur zu erwähnen, dass in dem vorliegenden Falle, da in der Gleichung 4) n positiv vorausgesetzt wird, $\sin (N + \odot)$ im dritten Quadranten genommen werden muss. Die Aufstellung der Gleichung 5) für die Lösung des Problems der heliakischen und akronychischen Aufgänge und der heliakischen und kosmischen Untergänge hat meines Wissens zuerst G. Hofmann (Programm des k. k. Gymnasiums in Triest 1879: Über die bei den griechischen und römischen Schriftstellern erwähnten Auf- und Untergänge der Sterne) geliefert.

Es wird später auch das Bedürfniss hervortreten, das Azimuth B der Sonne für die erhaltene Sternzeit θ zu kennen; man hat hiefür

$$\left.\begin{aligned} \sin B &= \frac{\cos D \sin T}{\cos H} = \frac{\cos D \sin(\theta - A)}{\cos H} \\ &= \frac{\sin\theta \cos\odot - \cos\theta \sin\odot \cos\varepsilon}{\cos H}, \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

wobei B — dem hier in Betracht kommenden Falle entsprechend — im dritten Quadranten angenommen werden muss.

Mittelst der Gleichung 5) ist die Bestimmung der Sonnenlänge ⊙ aus H gegeben; man bedarf also nur der Kenntniss des letzteren Bogens, um das Problem zu lösen. Die Bestimmung von n und N hängt aber, wie man sieht, ganz wesentlich von der Polhöhe ab, wesshalb in einem gegebenen Falle, ausser dem oben erwähnten mit hinreichender Näherung bekannten Werthe von h, bestimmte Annahmen über φ und H gemacht werden müssen, um die Sonnenlänge und aus dieser das Datum des heliakischen Siriusaufganges zu berechnen. Was zuerst die Annahmen über die Grösse φ betrifft, so dürfte die plausibelste wohl jene sein, dass man zuerst $\varphi = 30°$ setzt, welcher Breitenkreis nahe am alten Priestersitze zu Memphis vorbeigeht; hierauf führt man die Rechnung mit der Annahme $\varphi = 25°$ durch, welcher Breitenkreis etwas mehr als einen halben Grad südlich von Theben liegt; aus den beiden erhaltenen Resultaten wird es mittelst eines Interpolationsverfahrens möglich sein, die für die verschiedenen Theile Ägyptens geltenden Verhältnisse rechnungsmässig nachzuweisen. Hier wird auch die Bemerkung erlaubt sein, dass selbst beträchtliche Unterschiede in der geographischen Länge des Beobachtungsortes die Resultate nicht wesentlich beeinflussen; die folgenden Rechnungen sind alle für den Meridian 29° Ost von Paris durchgeführt worden. Zunächst also sollen die Werthe $h = 1°$, $\varphi = 30°$ der Rechnung als Grundlage dienen und es fragt sich noch, welche Annahme man über H zu machen hat. Der sogenannte Sehungsbogen, welcher den Stand der Sonne unter dem Horizonte angibt, wenn Sirius im Horizonte stehend heliakisch aufgeht, wird von Ptolemäus für die Sterne erster Grösse mit 11° angenommen, für die kosmischen Untergänge mit 7°, an welche Angaben man sich mit Vortheil halten kann, da dieselben gewiss den hierüber von den ägyptischen Priestercollegien angestellten Beobachtungen nahe kommen. Wie man daraus sieht, ist die Grösse H je nach der Stellung der Gestirne gegen die Sonne verschieden und es dürfte, indem bei den hier in Betracht kommenden Fällen nur geringe Höhen in Rechnung gezogen werden, vortheilhaft sein, der nothwendig negativen Grösse H die Form:

$$H = H_m - 2^\circ \cos(b - B)$$

zu ertheilen, oder es ist, wenn man die Höhe eines Sternes erster Grösse vertical über der Sonne bei seinem heliakischen Aufgange mit H° bezeichnet:

$$H = H^\circ + 4^\circ \sin {}^1/_2(b - B)^2. \qquad 7)$$

Durch die Wahl dieser Form für die Grösse H hat man den Vortheil, dass mit derselben der Hauptsache nach die durch den mit der Zeit ziemlich verschiedenen Stand des Sirius gegen die Sonne bedingte Abänderung in den Dämmerungserscheinungen in Rechnung gezogen ist. Nun wird es mit Benützung der Formel 5) keine Schwierigkeit bieten, jenen Werth von H° zu bestimmen, der im Jahre +139 beim Beginn der Sothisperiode statt hatte, da für diesen Moment — abgesehen von der bestehenden Unsicherheit in der Auslegung der Censorin'schen Angabe XII ante Kal. Aug. — leicht die Sonnenlänge berechnet werden kann. Man erhält für den Mittag von Memphis die folgende Sonnenephemeride:

0^h mittl. Zt. Memphis	☉	Sternzeit	ε	α	δ
139 Juli 19	113°59′2	115°23′1			
„ 20	114 56·9	116 22·2	23°40′9	80°47′3	−15°53′5.
„ 21	115 54·6	117 21·4			

Zunächst gibt die Anwendung der Formeln 1), 2), 3) unter den Annahmen $h = 1^\circ$, $\varphi = 30^\circ$:

$$t = -79^\circ 19'2 \qquad \theta = +1^\circ 28'1 \qquad b = -70^\circ 57'5,$$

und die von 4):

$$N = 75^\circ 40'2, \quad \log n = 9\cdot 95112.$$

Nimmt man nun an, dass der heliakische Aufgang am 21. Juli beobachtet wurde, was nach den obigen Auseinandersetzungen das Wahrscheinliche ist, so findet sich durch Interpolation für diesen Tag die Sonnenlänge:

$$\odot = 115^\circ 36'1,$$

und durch die Formeln 5), 6) und 7):

$$H = -10^\circ 3'5, \quad B = -121^\circ 48'8, \quad H^\circ = -10^\circ 48',$$

womit die Materialien beschafft sind, um die Relation zwischen dem Siriusjahr und dem julianischen Jahr strenge zu ermitteln. Wollte man dagegen, was mir weniger wahrscheinlich ist, den 20. Juli als den entscheidenden Tag ansehen, so würde man auf dieselbe Weise erhalten:

$$\odot = 114°38'5,\ H = -9°12'4,\ B = -121°22'3,\ H° = -9°56'.$$

Mit Hilfe derselben Formeln erhält man nun mit Benützung der oben (pag. 167) gegebenen Zahlen unter den Annahmen:

$$h = 1°,\ \varphi = 30°,\ H° = -10°48'$$

durch ein indirectes Verfahren:

	−1600	−1200	−800	−400	0	+400	+800
t	− 77°40'49"9	− 78°14'26"2	− 78°41'27"8	− 79° 1'56"1	− 79°15'51"8	− 79°32'14"8	− 79°24' 5"3
b	− 67 59 33	− 68 59 42	− 69 48 32	− 70 25 46	− 70 51 14	− 71 4 44	− 71 6 17
θ	− 15 52 58·9	− 12 6 7·9	− 8 11 37·9	− 4 9 36·1	− 0 0 12·7	+ 4 16 21·2	+ 8 39 53·6
N	90 58 46·4	87 33 47·2	84 5 7·2	80 32 40·2	76 56 19·7	73 15 57·1	69 31 22·5
log n	9·920690	9·928163	9·935394	9·942326	9·948914	9·955116	9·960893
B	−124°31'45"	−124° 5'57"	−123°33'19"	−122°53'40"	−122° 6'56"	−121°13' 5"	−120°12' 6"
H	− 9 54 10·1	− 9 56 39·0	− 9 58 57·8	− 10 1 6·6	− 10 3 5·5	− 10 4 54·7	− 10 6 34·4
$\odot$	100 56 2·0	104 11 35·9	107 31 9·3	110 54 53·5	114 22 59·0	117 55 37·7	121 33 2·6
Juli	18·6336	18·8207	19·0605	19·3570	19·7140	20·1355	20·6262.

Die Zahlen der letzten Zeile wurden dadurch erhalten, dass man die zu den gefundenen Sonnenlängen gehörende Zeit aus den obigen Ephemeriden (p. 568 und 569) durch lineare Interpolation bestimmte.

Bezeichnet man mit τ die seit dem Jahre —400 verflossene Zeit in Einheiten von 400 julianischen Jahren, so lassen sich die vorstehenden Daten darstellen durch die Formel:

$$\text{Juli } 19.3569 + 0{\cdot}3259\tau + 0{\cdot}3032\tau^2 + 0{\cdot}000687\tau^3,$$

welche in den obigen sieben Daten beziehungsweise die Fehler +1, —2, —1, +1, +2, 0, +1 in Einheiten der vierten Decimale des Tages übrig lässt, also in vorzüglicher Weise sich den Angaben anschliesst.

Legt man den Ausgangspunkt der Zeitzählung auf das Jahr +139, und bezeichnet mit t irgend ein julianisches Jahr (negativ im Sinne der Astronomen gezählt), so hat man für diese Übertragung, wenn die obige Form:

$$\alpha_0 + \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2 + \alpha_3\tau^3$$

in: $\beta_0 + \beta_1 (t-139) + \beta_2(t-139)^2 + \beta_3(t-139)^3$

verwandelt werden soll:

$$\beta_0 = \alpha_0 + \frac{539}{400}\alpha_1 + \left(\frac{539}{400}\right)^2 \alpha_2 + \left(\frac{539}{400}\right)^3 \alpha_3$$

$$\beta_1 = \frac{1}{400}\alpha_1 + \frac{2\times 539}{400^2}\alpha_2 + \frac{3\times 539^2}{400^3}\alpha_3$$

$$\beta_2 = \frac{1}{400^2}\alpha_2 + \frac{3\times 539}{400^3}\alpha_3$$

$$\beta_3 = \frac{1}{400^3}\alpha_3.$$

Man erhält so, wenn mit $\left(\frac{t}{4}\right)_r$ der immer positiv zu nehmende Rest der Division der Jahreszahl durch 4 bezeichnet wird,[1] das julianische Datum des heliakischen Aufganges des Sirius =

$$\left.\begin{aligned} &= \text{Juli } 19{\cdot}8529 + \left(\frac{t}{4}\right)_r + \\ &\quad +0{\cdot}001\,0284\,(t-139) + \\ &\quad +0{\cdot}000\,000\,2069\,(t-139)^2 + \\ &\quad +0{\cdot}000\,000\,000\,0107\,(t-139)^3, \end{aligned}\right\} A \left\{\begin{aligned} h &= 1^\circ \\ \varphi &= 30^\circ \\ H^\circ &= -10^\circ 48' \end{aligned}\right.$$

und die Länge des Siriusjahres in Tagen:

$$\begin{aligned} &= 365{\cdot}251\,0284 + 0{\cdot}000\,000\,4137\,(t-139) + \\ &\qquad + 0{\cdot}000\,000\,000\,0322\,(t-139)^2. \end{aligned}$$

Demnach ist das Siriusjahr zur Zeit des Beginns der dritten Sothisperiode um etwa den tausendsten Theil eines Tages länger als das julianische Jahr, welcher Unterschied mit der Zeit anwächst, während die Zeit, im negativen Sinne genommen, einen

---

[1] Es ist also z. B. für das Jahr +238: $\left(\frac{t}{4}\right)_r = \left(\frac{238}{4}\right)_r = 2$

" " " +124 " $= \left(\frac{124}{4}\right)_r = 0$

" " " − 37 " $= \left(\frac{-37}{4}\right)_r = -1 + 4 = 3$,

indem man 4 addirt, um den etwa negativen Rest positiv zu machen.

nähern Anschluss bedingt, so dass im Jahre $-3230 = 3231$ vor Christi Geburt das Siriusjahr gleich dem julianischen war. Somit erscheint die Annahme der Alten, das Siriusjahr sei völlig gleich dem julianischen, sehr gerechtfertigt und, da man die Fixsterne für unbeweglich hielt und die Präcessionserscheinung vernachlässigte, auch ihre Voraussetzung hinreichend begründet, dass in der That sich ein Umlauf der Sonne in $365^1/_4$ Tagen vollziehe; man wird daher behaupten dürfen, dass das nahe Zusammenfallen des Siriusjahres mit dem julianischen für die julianische Kalendereinrichtung als Grundstein gedient habe.

Die Formel $A\left\{\begin{array}{l} h = 1^\circ \\ \varphi = 30^\circ \\ H^\circ = -10^\circ 48' \end{array}\right.$, die durch ihren Index auf die gemachten grundlegenden Annahmen hinweist, wird nun ohne Schwierigkeit jene Jahre finden lassen, in welchen mit derselben Berechtigung wie im Jahre $+139$ der Beginn einer Sothisperiode gefeiert werden konnte. Indessen soll sofort eine allgemeinere Lösung der Aufgabe vorgenommen werden, nämlich zu der Angabe des Jahrestages für den heliakischen Aufgang des Sirius das zugehörige julianische Jahr zu finden, und zwar soll das erste Jahr dieser Erscheinung ermittelt werden, da den gemachten Auseinandersetzungen gemäss die diesem Jahre folgenden drei am selben Jahrestage des ägyptischen beweglichen Sonnenjahres den heliakischen Siriusaufgang aufweisen. Die Regel wird hiebei nur soweit zur Entwicklung kommen, dass über die nullte Sothisperiode, welche schon weit vor die historische Zeit fällt, nicht zurückgegangen wird. Man findet einen ägyptischen Jahrestag y, wenn man die vorgelegte Angabe des betreffenden Monatstages zu den folgenden, dem Monate entsprechenden Zahlen addirt:

Thoth	0	Tybi	120	Pachon	240
Phaophi	30	Mechir	150	Payni	270
Athyr	60	Phamenot	180	Epiphi	300
Chojak	90	Pharmuthi	210	Mesori	330
				Epagomenai	360.

So wird man z. B. für den ersten Thoth die Zahl 1, für den 12. Mechir die Zahl 162, für den 3. Zusatztag die Zahl 363 erhalten.

Bezeichne ferner $\varkappa$ die für das Ereigniss laufende Sothisperiode, so bilde man zunächst die Zahl:

$$Z = y + 365\varkappa - 1096; \tag{8}$$

dann ist x, der Abstand des betreffenden julianischen Jahres vom Beginn der dritten Sothisperiode (+139·556), in Einheiten des julianischen Jahres bestimmt durch:

$$Z = (0\cdot 25 + \beta_1)\,x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3.$$

Diese Gleichung würde leicht auf indirecte Weise gelöst werden können, indem man sich für x einen Näherungswerth x_1 durch:

$$x_1 = \frac{Z}{0\cdot 25 + \beta_1}$$

verschafft und dann mittelst:

$$x_2 = \frac{Z - \beta_2 x_1{}^2 - \beta_3 x_1{}^3}{0\cdot 25 + \beta_1}$$

den verbesserten Werth von x erhält, welcher schliesslich den innerhalb der hier in Betracht kommenden Grenzen genauen Werth:

$$x = \frac{Z - \beta_2 x_2{}^2 - \beta_3 x_2{}^3}{0\cdot 25 + \beta_1}$$

liefern würde. Es wird sich aber empfehlen, die obige Reihe umzukehren; diese Umkehrung ergibt, wenn für $0\cdot 25 + \beta_1$ der Kürze halber γ geschrieben wird:

$$x = \frac{1}{\gamma} Z - \frac{\beta_2}{\gamma^3} Z^2 + \left(\frac{2\beta_2}{\gamma^5} - \frac{\beta_3}{\gamma^4}\right) Z^3$$

oder numerisch:

$$x = 3\cdot 9836\, Z - 0\cdot 000\,01308\, Z^2 - 0\cdot 000\,000\,00261\, Z^3. \tag{9}$$

Setzt man in der Formel 8) für $y = 1$ und für $\varkappa$ der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, so erhält man, da y dem ersten Thoth entsprechend gewählt ist, durch Verwendung der Formel 9) jene Abstände in Jahren, in welchen mit gleicher Berechtigung wie im Jahre +139 der Beginn der 0ten, 1ten, 2ten, 3ten, 4ten und 5ten Sothisperiode gefeiert werden konnte. Bei dieser Rechnung wird man im Allgemeinen, wie es in der Natur der Sache liegt,

für x keine volle Anzahl von Jahren erhalten und desshalb die Bruchtheile entsprechend abzukürzen haben, was übrigens in den zu den heliakischen Aufgängen des Sirius gehörigen Sonnenhöhen höchstens einen Fehler von sieben Bogenminuten zur Folge haben kann. Die folgende Zusammenstellung gibt in der ersten Columne die Nummer der Sothisperiode, daneben den zugehörigen Werth von x, der nach entsprechender Abkürzung der Bruchtheile zu 139 hinzugelegt, das julianische Jahr des Beginnes der Sothisperiode im astronomischen Sinne liefert, worauf noch, um Irrthümer zu vermeiden, das Jahr der Historiker hinzugesetzt ist; interlinear geben die letzten beiden Columnen das Intervall in julianischen und ägyptischen Jahren.

$\varkappa$	x	jul. Jahr.	hist. Zählung.	Intervall in jul. Jahr.	Intervall in ägypt. Jahr.
0	—4374·3	—4235	4236 v. Chr.		
				1460	1461
1	—2914·0	—2775	2776 „		
				1458	1459
2	—1455·6	—1317	1318 „		
				1456	1457
3	0·0	+ 139	139 n. Chr.		
				1452	1453
4	+1452·1	+1591	1591 „		
				1448	1449.
5	+2900·1	+3039	3039 „		

Die letzten beiden Columnen lehren überdies, dass nur die 0te Sothisperiode, welche bereits ausserhalb der historischen Zeit liegt, den bisherigen Annahmen über die Dauer einer solchen Periode (1460 jul. = 1461 ägypt.) völlig entspricht, denn die folgenden Perioden sind wesentlich kürzer und diese Abweichung steigt mit der Zeit an.

Nach Untersuchungen der Ägyptologen ist es wahrscheinlich, dass bei den alten Ägyptern die Sothisperiode als solche niemals als Ära in Verwendung war und nur das Zusammenfallen des ersten heliakischen Aufganges des Sirius mit dem 1. Thoth zur Veranstaltung grosser Feierlichkeiten Veranlassung gegeben hat. Die obigen Zahlen können daher für die Historiker in dem Falle von Nutzen sein, wenn irgend eine Nachricht vorhanden wäre, die das Zusammenfallen des heliakischen Siriusaufganges mit dem 1. Thoth zu anderen Ereignissen der Zeit nach in Zusammenhang brächte, und ich meine, dass man sich dann an die obigen Zahlen halten kann, weil eine solche Feier rücksichtlich der für die nächsten Jahre geführten oben bemerkten Vorausrechnung denn doch nur als das Resultat einer directen Beobachtung zu

betrachten ist. Übrigens wird man hiebei nicht zu vergessen haben, dass die solchen Beobachtungen anhaftende Unsicherheit wohl mindestens einen Spielraum von zwei Jahren um die so bestimmten Epochen als zulässig erscheinen lässt.

Schliesslich gehört hieher noch die Bemerkung, dass jede Angabe des heliakischen Siriusaufganges in Verbindung mit dem Jahrestage des beweglichen ägyptischen Jahres mittelst der Formeln 8) und 9) eine treffliche, auf wenige Jahre sichere Bestimmung der zugehörigen Epoche erlauben wird.

Ich habe mich bei den unter den Annahmen $h = 1°$, $\varphi = 30°$ und $H = -10° 48'$ gewonnenen Resultaten desshalb länger aufgehalten, weil mir dieselben die grösste Wahrscheinlichkeit für sich in Anspruch zu nehmen scheinen und kann mich demnach bei der Betrachtung der übrigen Combinationen kürzer fassen.

Zunächst soll die Combination:

$$h = 1°,\ \varphi = 30°,\ H = -9° 56'$$

vorgenommen werden, die sich ergeben würde, wenn man den 1. Thoth des Jahres +139 auf den 20. Juli rückt, ein Fall, der eintreten würde, wenn die von mir früher gegebene Erklärung nicht richtig wäre und welche in der That hinfällig werden müsste, wenn z. B. die Ägypter den Tag mit Mitternacht beginnen liessen, wie dies Plinius behauptet. Die oben (pag. 574) angegebenen Werthe von t, b, θ, N und log n erfahren, da sie nur von h und φ abhängig sind, keine Änderung, die übrigen Werthe sind:

	—1600	—1200	—800	—400	0	+400	+800
B	—123°56'46"	—123°32'55"	—123° 2'13"	—122°24'30"	—121°39'42"	—120°47'42"	—119°48'32"
H	— 9 3 11·0	— 9 5 35·6	— 9 7 50·1	— 9 9 54·9	— 9 11 49·9	— 9 13 35·4	— 9 15 11·6
$\odot$	99 54 27·3	103 11 1·3	106 31 31·8	109 56 10·2	113 25 6·2	116 58 31·8	120 36 39·6
Juli	17·5730	17·7755	18·0301	18·3408	18·7111	19·1451	19·6471
Fehler	+2	—1	—1	+1	+1	—1	—1

Den Werthen der Columne „Juli" genügt ähnlich wie oben (pag. 574) der Ausdruck:

$$\text{Juli } 18{\cdot}3407 + 0{\cdot}3397\tau + 0{\cdot}02992\tau^2 + 0{\cdot}000671\tau^3,$$

welcher in den Ausgangszahlen die in der letzten Zeile in Einheiten der vierten Decimale angesetzten Fehler übrig lässt, oder es ergibt sich, wenn man in gleicher Weise wie oben (pag. 575)

auf die Epoche +139 übergeht, für das julianische Datum des heliakischen Siriusaufganges:

$$\left.\begin{aligned}&\text{Juli } 18\cdot 8544+\left(\frac{t}{4}\right)_r+\\&+0\cdot 001\,0600\,(t-139)\\&+0\cdot 000\,000\,2040\,(t-139)^2\\&+0\cdot 000\,000\,000\,0105\,(t-139)^3.\end{aligned}\right\} A\begin{cases}h=1^\circ\\ \varphi=30^\circ\\ H=-9^\circ 56'\end{cases}$$

Eine Vergleichung dieser Zahlen mit jenen der Formel $A\begin{cases}h=1^\circ\\ \varphi=30^\circ\\ H^\circ=10^\circ 48'\end{cases}$ auf p. 575 zeigt eine so nahe Übereinstimmung, dass der Schluss erlaubt ist, eine Verschiebung des Anfanges der dritten Sothisperiode um einen Tag sei fast irrelevant; in der That stimmen die aus dieser Formel resultirenden Epochen für die verschiedenen Anfänge der Sothisperioden beinahe völlig und liegen ganz innerhalb der Unsicherheit der Beobachtungen, denn es findet sich (vgl. die Resultate von pag. 578):

x	jul. Jahr.	hist. Zählg.
0	—4235	4236 v. Chr.
1	—2774	2775 „
2	—1316	1317 „
3	+ 139	139 n. Chr.
4	+1591	1591 „
5	+3039	3039 „

Ebenfalls sehr minimale Unterschiede liefert eine veränderte Annahme über h. Setzt man nämlich für h die Grösse 3° fest, so finden sich für den 21. Juli 139 und für $\varphi = 30°$ die Zahlen (vgl. pag. 573 und 574):

$$t=-76^\circ 52'0 \quad \theta=+\;3^\circ 55'3 \quad b=-69^\circ 42'4$$

$$N=73^\circ 33'1 \quad \log n=9\cdot 95465$$

$$H=-\;8^\circ 14'3 \quad B=-120^\circ 24'7 \quad H^\circ=-\;8^\circ 58'$$

und man erhält daraus (vgl. pag. 574):

	−1600	−1200	−800	−400	0	+400	+800
t	− 75°10′41″5	− 75°45′22″0	− 76°18′18″0	− 76°34′17″4	− 76°48′37″0	− 76°56′12″7	− 76°57′ 4″6
b	− 66 42 44	− 67 43 31	− 68 32 49	− 69 10 25	− 69 36 5	− 69 49 45	− 69 51 17
θ	− 13 22 50·5	− 9 37 3·7	− 5 43 23·1	− 1 41 57·4	+ 2 27 2·1	+ 6 43 23·3	11 6 54·3
N	88 41 36·1	85 19 43·5	81 53 41·1	78 28 23·9	74 48 46·9	71 9 42·6	67 26 2·0
log n	9·925689	9·932829	9.939720	9·946318	9·952573	9·958443	9·963899
B	−123° 4′ 9″	−122°39′ 3″	−122° 6′58″	−121°28′ 7″	−120°42′ 9″	−119 49 7	−118°48′55″
H	− 8 4 29·0	− 8 6 57·4	− 8 9 15·8	− 8 11 23·5	− 8 13 21·2	− 8 15 9·1	− 8 16 47·4
⊙	100 54 4·8	104 9 23·0	107 29 2·4	110 53 11·0	114 21 58·0	117 55 33·9	121 34 9·7
Juli	18·6000	18·7825	19·0239	19·3274	19·6964	20·1345	20·6456
Fehler	+1	−2	0	+1	+1	0	+1

Formel: $19\cdot3273+0\cdot3356\tau+0\cdot03282\tau^2+0\cdot000\,592\tau^3$.

Auch hier unterscheiden sich also die erhaltenen numerischen Werthe so wenig von den aus der ersten Combination (vgl. p. 574) folgenden, dass durch die Änderungen, welche die um 2° veränderte Annahme über h bedingt, die oben erhaltenen Epochenbestimmungen über den Beginn der Sothisperioden nicht wesentlich alterirt werden.

Etwas bedeutendere, aber immerhin gegen die obwaltenden Unsicherheiten kaum in Betracht kommende Unterschiede ergeben sich, wenn man auf die von mir zuerst in Rechnung gebrachten veränderten Dämmerungsverhältnisse nicht Rücksicht nimmt, also den Bogen H, um welchen die Sonne zur Zeit des heliakischen Siriusaufganges (den letzteren in einer positiven Höhe von 1° beobachtet) unter dem Horizonte steht, constant annimmt und denselben so wählt, wie ihn der Beginn der dritten Sothisperiode ergibt, nämlich $H = -10°3'30''$ (vgl. p. 573). Man erhält dann die Zahlenwerthe von t bis log n bei der unverändert bleibenden Polhöhe $\varphi = 30°$ wie oben pag. 574 und die übrigen Werthe:

	−1600	−1200	−800	−400	0	+400	+800
⊙	101° 7′18″7	104°19′43″7	107°36′26″8	110°57′38″1	114°23′26″7	117°54′ 8″5	121°29′40″2
Juli	18·8278	18·9609	19·1518	19·4045	19·7219	20·1084	20·5676
Fehler	+2	0	−2	+1	−1	−1	0

Formel: Juli $19\cdot4044+0\cdot2844\tau+0\cdot03258\tau^2+0\cdot000621\tau^3$,

daraus den heliakischen Aufgang des Sirius:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Juli } 19\cdot8483+\left(\dfrac{t}{4}\right)_r \\ +0\cdot000\,9390(t-139) \\ +0\cdot000\,000\,2193(t-139)^2 \\ +0\cdot000\,000\,000\,0097(t-139)^3 \end{array}\right\} A \left\{\begin{array}{l} h = 1° \\ \varphi = 30° \\ H° = \text{constant.} \end{array}\right.$$

und hiemit die Epochen der Sothisperiodenanfänge:

x	jul. Jahr.	hist. Zählg.
0	−4238	4239 v. Chr.
1	−2776	2777 „
2	−1317	1318 „
3	+ 139	139 n. Chr.
4	+1592	1592 „
5	+3040	3040 „ .

Die Unterschiede dieser gegen die auf pag. 578 angeführten Zahlen sind, falls man die historisch bedeutungslose nullte Sothisperiode ausser Acht lässt, wieder ganz irrelevant und werden sich mit der den Beobachtungen anhaftenden Unsicherheit völlig vermischen.

Bisher sind alle Rechnungen nur für die Polhöhe $\varphi = 30°$ durchgeführt worden und die erhaltenen Resultate sind, bei den sonstigen die einzelnen Grössen des Problems betreffenden Veränderungen, als nahezu identisch zu betrachten gewesen. Die Sachlage wird aber total anders, wenn man die Polhöhe variirt. Es wird innerhalb der in Ägypten stattfindenden Breitenunterschiede der heliakische Aufgang des Sirius um sieben und mehr Tage geändert, Differenzen, welche sich der Beobachtung nicht entziehen konnten. Demnach ist es auch unmöglich anzunehmen, dass die Kalendereinrichtung in ganz Ägypten für die verschiedenen Orte durch directe Beobachtungen der heliakischen Aufgänge hätte regulirt werden können; man ist im Gegentheil zu der Annahme gezwungen, dass e i n Ort hiebei als massgebend angesehen wurde, und man dürfte dabei nicht fehl gehen, hiefür Memphis zu wählen, welches in der That dem dreissigsten Parallel entspricht, für welchen Parallel die vorangehenden Rechnungen durchgeführt sind.

Es sollen nun die Rechnungen für einen abgeänderten Werth der Polhöhe durchgeführt werden; die Rechnung unter den Annahmen:

$$h = 1°, \ \varphi = 25°, \ H° = -10°48'$$

hat die folgenden Zahlen ergeben:

	—1600	—1200	—800	—400	0	+400	+800
t	— 79°53′39″0	— 80°20′38″9	— 80°42′22″3	— 80°58′49″9	— 81°10′ 2″1	— 81°15′58″6	— 81°16′39″3
b	— 69 6 35	— 70 3 40	— 70 50 0	— 71 25 21	— 71 49 31	— 72 2 23	— 72 3 51
θ	— 18 5 48·0	— 14 12 20·6	— 10 12 32·4	— 6 6 29·9	— 1 54 23·0	+ 2 23 37·4	+ 6 47 19·6
N	95 43 8·0	92 7 30·3	88 29 17·8	84 48 20·9	81 4 29·6	77 17 32·8	73 27 17·9
log *n*	9·937410	9·944088	9·950496	9·956590	9·962326	9·967668	9·972584
B	—122°14′44″	—121°58′12″	—121°34′45″	—121° 4′ 9″	—120°26′22″	—119°41′25″	—118°49′17″
H	— 9 59 59·4	— 10 2 1·8	— 10 3 55·9	— 10 5 42·0	— 10 7 20·1	— 10 8 50·3	— 10 10 12·7
⊙	95 51 3·8	99 18 17·2	102 48 27·5	106 21 48·2	109 58 32·5	113 38 54·4	117 23 8·6
Juli	13·3751	13·7550	14·1710	14·6273	15·1285	15·6791	16·2840
Fehler	0	—3	—1	0	0	0	+1

Formel: Juli $14\cdot6273+0\cdot4779\tau+0\cdot02247\tau^2+0\cdot000767\tau^3$.

Bildet man die Unterschiede der Datumangaben der heliakischen Siriusaufgänge gegen jene, welche aus der wahrscheinlichsten Combination (pag. 574) resultiren, und macht durch die Multiplication mit 4, welche Operation eine hinreichende Annäherung bietet, den Übergang auf die Unterschiede im Beginne der Sothisperioden, so findet sich folgendes Ergebniss:

$$[-3\cdot8+0{\cdot}000\,305(t+400)-0{\cdot}000\,000\,039(t+400)^2]\,(\varphi-30^\circ)$$

Das Resultat dieser Formel, in welcher φ in Graden und deren Bruchtheilen zu nehmen ist, stellt die Verschiebung des Beginns der Sothisperiode gegen jene im Parallel von 30° in Einheiten des Jahres dar. Südliche Orte werden demnach den Sirius im Allgemeinen früher, nördliche später aufgehen sehen, und um 200 nach Chr. beträgt diese Änderung für je einen Breitegrad beiläufig 0·9 Tage. Diese Bemerkung aber ist von Wichtigkeit zum Commentar der Stelle aus Censorin. Wir haben oben gesehen (pag. 564), dass der Sirius zur Zeit als Censorin schrieb, in der überwiegenden Zahl der Fälle am 20. Juli aufzugehen pflegte; aber die aus der Figur 2 ersichtliche nothwendige Verschiebung der Linie *GG* gegen die Tage würde, da das Siriusjahr, wie früher erwähnt, zu jener Zeit um 0·001 länger ist als das julianische, eine Verschiebung von nur etwa 6 Bogenminuten bewirken, also um eine zu geringe Grösse, als dass das Datum des heliakischen Aufganges dadurch auf den 21. Juli gebracht werden könnte, wie dies Censorin verlangt. Nun zeigt aber die Stelle, dass dieser Schriftsteller die Nachricht über den Aufgang am 21. Juli aus

ägyptischer Quelle hat, und er dürfte, da damals die alexandrinische Schule in hoher Blüthe stand, welche in der That den Siriusaufgang auf den 27. Epiphi des alexandrinischen Jahres = 21. Juli julianisch fixirte, seine Nachricht Alexandriner Beobachtern zu verdanken haben. Für Alexandrien aber findet in der That der heliakische Aufgang um nahezu einen Tag später statt, da dieser Ort um etwas mehr als einen Grad ($\varphi = 31°9'$) nördlicher als der Parallel von 30° gelegen ist. Durch diese Bemerkung erscheint mir die letzte Schwierigkeit, welche in der Deutung der Stelle bei Censorin auftritt, in völlig einfacher Weise behoben.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Sothisperiode vom rein astronomischen Standpunkte; es sollte daher gar nicht untersucht werden, ob die von Censorin gegebene Definition der Sothisperiode eine richtige sei oder nicht; denn es ist immerhin möglich, dass die Annahme einer Periode von 1460 julianischen oder 1461 ägyptischen Jahren eine cyklische Grundlage hatte, da in der That die Rückkehr des an die Jahreszeit gebundenen heliakischen Siriusaufganges auf nahe denselben Jahrestag des ägyptischen Jahres mit nahezu gleichzeitiger Wiederholung der Mondphasen (18058 synodische Umläufe des Mondes sind der Zeit nach nur um etwa 1·4 Tage kürzer als 1460 julianische oder 1461 ägyptische Jahre) eine um so auffallendere Erscheinung war, als dieselbe auch mit dem Anschwellen des Nils zusammenfiel. Nimmt man aber, wie es in dieser Abhandlung geschehen ist, die Censorin'sche Definition der Sothisperiode als richtig an und betrachtet daher den Beginn einer solchen Periode als ein directes Beobachtungsresultat, so hat man unter den oben als den wahrscheinlichsten bezeichneten Annahmen in die Jahre —4235, —2775, —1317, +139 beziehungsweise die Anfänge der 0ten, 1ten, 2ten und 3ten Sothisperiode zu legen.

Die Temperaturverhältnisse der österreichischen Alpenländer.

I. Theil.

Von J. Hann,
wirkliches Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

Im XIV. Bande der Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus (Neue Folge, 6. Band, Jahrgang 1869) hat Jelinek 20jährige Temperaturmittel (bezogen auf die Periode 1848—67) von 91 Stationen des damals noch ungetheilten österreichischen Beobachtungsnetzes veröffentlicht. Der Übergang zur 100theiligen Temperaturscala im Jahre 1871 gab Veranlassung im Jahrbuche pro 1871 (N. F. 8. Band) von 73 Stationen (diejenigen der Länder der ungarischen Krone blieben ausgeschlossen) diese Mittel auf Celsiusgrade reducirt abermals zu veröffentlichen.

Selbst von den Fachmännern werden wohl nur wenige von dieser Publication Kenntniss genommen haben, da die Zusammenstellung der Mittelwerthe mitten unter den Tabellen der Resultate der meteorologischen Beobachtungen in den oben genannten Jahrgängen versteckt ist; hat es doch uns selbst mehrfach Mühe und Zeitverlust gekostet, sie im Bedarfsfalle aufzufinden.

Ausser dieser Zusammenstellung sind bis zur Stunde keine authentischen normalen Monat- und Jahresmittel der Temperatur aus dem österreichischen Beobachtungsnetze veröffentlicht worden.[1]

---

[1] Die von einem provisorischen Hilfsarbeiter der k. k. Centralanstalt, der von Jelinek mit der Berechnung der Mittelwerthe beschäftigt wurde, in zwei Brochüren veröffentlichten Temperaturtabellen von Österreich-Ungarn tragen, soweit sie nicht Plagiat sind, ihre Unzuverlässigkeit für jeden Fachmann deutlich zur Schau, daher sie keine weitere Erwähnung verdienen.

Seit dem Jahre 1867 aber sind zahlreiche neue Stationen längere oder kürzere Jahresreihen hindurch thätig gewesen, während anderseits viele Stationen erst kurz vor 1867 ihre Thätigkeit begonnen hatten, so dass damals noch gar keine oder nur unsichere Mittelwerthe für dieselben abgeleitet werden konnten. Mit dem Abschlusse des Jahres 1877 hat ferner das österreichische Beobachtungsnetz schon das 30. Jahr seines Bestandes zurückgelegt. In diesen Umständen schien mir eine dringende Aufforderung zu liegen, nun an die Veröffentlichung neuer, mit aller Sorgfalt und Kritik und nach strengen wissenschaftlichen Methoden abgeleiteter Temperaturmittel sämmtlicher österreichischen Stationen (ausserhalb Ungarn) zu schreiten.

Leider war es mir aber nicht möglich, diese umfangreiche Arbeit in so umfassender Weise mit besonderen Hilfskräften in Angriff zu nehmen, wie dies mit Hilfe einer Staatsunterstützung auf so ausgezeichnete Weise in einem grossen Nachbarstaate kürzlich geleistet worden ist.[1] Ich war grösstentheils auf meine eigene Arbeitskraft angewiesen, wobei mir auch nur die von den dringenden täglichen Berufspflichten freien Stunden zur Verfügung standen; ein Theil der Hilfsrechnungen (grösstentheils Revision der Mittelwerthe, wovon später die Rede sein wird und Ableitung der Temperaturabweichungen) wurde von zwei Hilfsarbeitern der k. k. Centralanstalt (den Herren Binder und Reichart) in den amtsfreien Stunden durchgeführt. Die derart beschränkten Mittel nöthigten das Ziel der Arbeit enger zu umgrenzen, ohne zugleich den wissenschaftlichen Werth der Resultate zu beeinträchtigen; sie nöthigten auch, die Arbeit in Partien zu theilen und gestatteten nicht, das ganze Materiale auf einmal in Angriff zu nehmen.

Ich entschloss mich, mit der Bearbeitung der Temperaturmittel der Alpenländer den Anfang zu machen, weil dies als der schwierigere, allerdings zugleich aber auch als der interessantere Theil der ganzen Arbeit angesehen werden musste. Die Schwierigkeit liegt hier in der Reduction der vielen aus kurzen Beobachtungsreihen abgeleiteten Temperaturmittel auf Mittelwerthe ein

---

[1] Wild, Die Temperaturverhältnisse des russischen Reiches. S. Petersburg 1881.

und derselben längeren Periode, um sie derart in gewissem Sinne auf Normalmittel zurückzuführen. Wegen der grossen Höhenunterschiede der Stationen in den Alpenländern begegnet jedoch die übliche Methode der Reduction auf Normalmittel in den Alpenländern besonderen Schwierigkeiten, welche eine Prüfung der Methode selbst auf die Grenzen ihrer Genauigkeit und ihrer Anwendbarkeit überhaupt nöthig machten; eine Prüfung, wie sie bisher noch nicht stattgefunden hat. Insoferne ergab sich die Bearbeitung der Temperaturverhältnisse der Alpenländer in erster Linie geradezu als unabweisliche Forderung, weil nur mit den dabei gewonnenen Erfahrungen und Resultaten auch mit Vortheil an die Bearbeitung der Temperaturbeobachtungen in den Mittelgebirgen der anderen Kronländer Österreichs gegangen werden kann.

Das Ländergebiet, dessen Temperaturverhältnisse Gegenstand der vorliegenden Abhandlung sind, umfasst das ganze österreichische Alpengebiet und hat im Norden und Osten die Donau, im Süden und Westen das adriatische Meer und die Grenzen Österreichs selbst zur Abgrenzung. Im Süden aber wie auch im Westen sind noch einige Stationen der Nachbarländer in die Bearbeitung mit einbezogen worden, soweit dies für die Zwecke der Arbeit nothwendig war, oder, wie im Falle der Lombardie und Venetiens, das Beobachtungsmateriale einiger Stationen nur im Besitze der k. k. Centralanstalt ist, also geradezu eine Aufforderung dazu vorlag, dasselbe bei dieser Gelegenheit zu verwerthen.

Als Normalperiode, auf welche alle Mittelwerthe zurückzuführen versucht wird, wurde die 30jährige Periode 1851 bis 1880 inclusive gewählt. Wenngleich das österreichische Beobachtungsnetz schon im Jahre 1848 gegründet worden ist, so befanden sich doch in den ersteren Jahren noch so wenige Stationen in Thätigkeit, dass die Zahl der Normalstationen, d. i. jener Stationen, welche den ganzen als Normalperiode gewählten Zeitraum hindurch in Thätigkeit waren, sehr eingeschränkt worden wäre, wenn ich den Beginn derselben mit der Gründung des Netzes, d. i. mit dem Jahre 1848 hätte zusammenfallen lassen. Noch eine andere Erwägung sprach dafür, diesen Beginn erst mit 1851 anzusetzen, d. i. der Beschluss des Meteorologen-Congresses zu Wien (Sitzung

vom 10. September 1873) als „Perioden für die Berechnung der Normalwerthe Intervalle von fünf Jahren (Lustra) zu wählen, und das nächste Lustrum mit dem 1. Jänner 1876 zu beginnen“. Die von mir gewählte Normalperiode 1851/80 umfasst in diesem Sinne gerade sechs Lustra, und es wird leicht sein, die Mittelwerthe der nächsten Lustra an diese 30jährige Periode anzuschliessen.

Dass die Mittelwerthe der meteorologischen Elemente auf gleiche Perioden zurückgeführt werden müssen, wenn man eine strenge Vergleichbarkeit derselben erlangen will, wird gegenwärtig wohl von allen Meteorologen anerkannt, so dass es überflüssig wäre, auf eine Begründung dieses Vorganges hier einzugehen.

Je dichter ein Beobachtungsnetz wird und je näher dadurch die meteorologischen Stationen einander rücken, desto dringender macht sich diese Anforderung an die Mittelwerthe geltend, und desto auffallender machen sich etwaige Verstösse gegen diese Forderung selbst dem Laien bemerklich. Wir erinnern hier nur an die Discussion über die Temperatur von München und Augsburg, die an einer anderen Stelle sich entsponnen hat.[1] Die Grenzen der Genauigkeit in der Bestimmung der Mittelwerthe werden von selbst immer schärfer gezogen, je dichter ein Beobachtungsnetz wird, weil die zwischen den Temperaturmitteln benachbarter Stationen noch bestehenden Differenzen sich dann häufig nur mehr auf Zehntelgrade belaufen. Wie vortheilhaft es ist, solche „Parallelstationen“ — oder wie man sie anders nennen will — zu besitzen, das wird sich in dem späteren Theile dieser Abhandlung sehr deutlich herausstellen.

Publicationen, wie das grosse Werk der Smithsonian Institution über die Temperatur der Vereinigten Staaten von Nordamerika, in dessen Tabellen die Temperaturmittel aus den verschiedensten Perioden [nach deren Dauer wie nach den Zeitepochen, denen sie angehören] bunt durcheinander aufgeführt werden, einjährige Reihen neben 50jährigen u. s. w. stehen, und dem Fachmanne auch jede Möglichkeit benommen ist, sich hinterdrein die Mittelwerthe selbst auf gleiche Perioden zu reduciren,

---

[1] Zeitschrift für Meteorologie 1882, pg. 478 u. 1883 pg. 150.

müssen als ganz unwissenschaftlich und geradezu irreführend bezeichnet werden. Leider besitzen wir von den Vereinigten Staaten, ältere Publicationen ausgenommen, wo man noch wissenschaftlicher verfuhr, und die einzelnen Stundenmittel veröffentlichte, nur wenige Temperaturmittel, welche den wissenschaftlichen, ja auch den praktischen Anforderungen vollkommen entsprechen.

Die Nöthigung, nur Temperaturmittel, die aus gleichen Perioden abgeleitet, oder auf solche reducirt sind, bei Temperaturvergleichungen innerhalb beschränkterer Länderstrecken zu benützen, entspringt, wie bekannt, aus der Veränderlichkeit der Mittelwerthe in Folge der unregelmässigen Wärmeschwankungen. Sie ist um so gebieterischer, je grösser diese Schwankungen in gewissen klimatischen Gebieten sind, also besonders in den continentalen Ländern unter mittleren und höheren Breiten; sie schwächt sich ab gegen den Äquatorgürtel, wo die Veränderlichkeit sehr gering ist. Es scheint, dass man zuerst in Deutschland die Nothwendigkeit einer Zurückführung der Temperaturmittel auf gleiche Perioden gefühlt hat, und es ist in erster Linie Dove, dem das Verdienst gebührt, durch seine eingehenden Untersuchungen über die gleichzeitige Vertheilung der Temperaturanomalien über die Erdoberfläche und durch seine Sammlungen der Monatmittel der Wärme der einzelnen Jahrgänge, die sich über die ganze Erde erstreckte, einerseits die Schwankungen der Mittelwerthe auf ein einfaches Maass zurückgeführt und anderseits gleichzeitig auch die Mittel angegeben zu haben, wie man trotz dieser Schwankungen bis auf Zehntelgrade vergleichbare Mittelwerthe abzuleiten im Stande ist.

Indem Dove constatiren konnte, dass grössere Abweichungen vom normalen Gange der Temperatur nicht local auftreten, sondern über grössere Strecken der Erdoberfläche sich gleichzeitig im gleichen Sinne und nahe gleichem Ausmaasse vertheilt zeigen, war damit der Nachweis geführt, dass trotz grosser Schwankungen der Mittelwerthe von einem Jahr zum andern, doch die Unterschiede der Temperaturmittel benachbarter Orte für gleiche Zeitperioden nahezu constant bleiben. Daraus ergibt sich, dass einerseits Mittelwerthe aus gleichen Perioden direct mit einander vergleichbar sind, wenn die Entfernung der

verglichenen Stationen keine zu grosse ist, anderseits aus den Temperaturdifferenzen zweier benachbarter Orte aus kürzeren Beobachtungsreihen auf die normale Temperaturdifferenz derselben überhaupt geschlossen werden kann. Man braucht also diese Differenz nur an das Normalmittel der Vergleichsstation anzubringen, um auch das Normalmittel (Mittel aus einer langen Beobachtungsreihe) der Station mit kürzerer Beobachtungsreihe zu erhalten. Diese Methode ist seither vielfach mit Erfolg zur Ableitung vergleichbarer Mittelwerthe der Temperatur angewendet worden, und wo man sie verschmäht hat, sind auch die Resultate der Berechnung der Mittelwerthe von untergeordnetem Werthe und nur mit Vorsicht zu benutzen.

Es muss hier aber auch das Verdienst eines anderen deutschen Meteorologen um die Herstellung vergleichbarer Mittelwerthe der meteorologischen Elemente besonders hervorgehoben werden, weil dasselbe fast ganz in Vergessenheit gerathen zu sein scheint.

Lamont in München ist, unabhängig von Dove und auf entgegengesetztem Wege, zum gleichen Resultate und zur Angabe des gleichen Mittels zur Ableitung bis auf die Zehntelgrade vergleichbarer Mittelwerthe der Temperatur gelangt.

In dem „Jahrbuche der k. Sternwarte bei München“ für 1841 hebt Lamont hervor, wie schwierig es sei, absolute Mittelwerthe in der Meteorologie zu erreichen, indem, wie er sagt, „kaum ein halbes Jahrhundert genügt, um diese Mittelwerthe bis auf Zehntelgrade sicher zu machen“. Schon im Jahre 1838 sah er sich desshalb veranlasst, Versuche anzustellen, ob nicht meteorologische Beobachtungen mit grösserem Erfolge auf andere Weise eingerichtet und verwendet werden könnten, und zwar zunächst durch Ableitung des Verhältnisses zwischen den atmosphärischen Zuständen verschiedener Orte, so zwar, dass mehrere Orte auf einen Hauptpunkt bezogen wurden. Ein solches Verhältniss sollte durch Einrichtung gleichzeitiger correspondirender Beobachtungen erhalten werden. Er zeigt dann beispielsweise, dass die Temperaturdifferenzen zwischen Eichstädt und München aus correspondirenden Beobachtungen schon fast constante Werthe liefern, wenn man nur je 100 Beobachtungen in einen Mittelwerth zusammenfasst.

Lamont geht also von einer Thatsache aus, die jedem unmittelbar in die Augen fällt, der die Unterschiede correspondirender Mittelwerthe aus meteorologischen Beobachtungen benachbarter Orte aufmerksam verfolgt, d. i. die grosse Beständigkeit oder Unveränderlichkeit dieser Differenzen, trotz der bedeutenden gleichzeitigen Schwankungen der absoluten Werthe der Mittel selbst. Er schlug daher sogar vor, nicht Mittelwerthe, „sondern die Unterschiede zwischen verschiedenen Orten, oder vielmehr die Abweichungen einzelner Orte von einer bestimmten Centralstation als meteorologische Constanten anzunehmen", da aber dieser Vorschlag keinen Anklang fand, so hielt er zur Befreiung der klimatischen Constanten von den zufälligen Schwankungen folgendes Verfahren am zweckmässigsten.

Er berechnet für die Station Hohenpeissenberg, von welcher schon damals eine lange mit unveränderten Instrumenten fortgeführte Beobachtungsreihe vorlag, die Abweichungen der Jahresmittel der Temperatur und des Luftdruckes für die Periode 1841 bis 1850 inclusive und bemerkt, dass man die so erhaltene Tabelle für alle Orte in Mitteldeutschland anwenden könne. Indem er dies beispielsweise für Dillingen ausführt, zeigt er, dass die so reducirten Mittel von den sogenannten zufälligen Schwankungen fast völlig befreit werden und Constante darstellen (Jahresbericht der k. Sternwarte bei München für 1852, pag. 66). Im Jahresberichte für 1858 sagt Lamont weiter: „Wahre Mittelwerthe des Luftdruckes und der Temperatur kennt man wohl noch für keinen Punkt der Erde, da kaum Jahrhunderte ausreichen, die vorkommenden Zufälligkeiten vollständig zu eliminiren (s. Annalen der Sternwarte, III. Band S. CLXVIII) und kürzere Beobachtungsreihen Mittelwerthe geben können, welche weit von dem wahren Mittel abweichen. Dagegen habe ich vor mehr als zwei Decennien gezeigt (Astron. Jahrbuch 1841, p. 92), dass die Differenzen zweier Orte, vorausgesetzt, dass die Entfernung nicht zu gross ist, in wenigen Jahren sehr genau bestimmt werden können, und die Ansicht ausgesprochen, dass das Ziel der Beobachtung zunächst dahin gehen müsse, diese Differenzen zu bestimmen.[1] Sind aber die Differenzen constant, so werden auch

[1] Das von Lamont eingeführte System der Beobachtungen der kön. Landgerichtsärzte basirte auf solchen correspondirenden Beobachtungen,

die Abweichungen einzelner Jahrgänge vom wahren Mittel wenigstens für ein Land gleich sein. Hierauf gründet sich das Verfahren, welches ich im Jahresberichte für 1852, S. 67 angegeben habe, um aus einzelnen Jahrgängen die wahren Mittel abzuleiten". Es folgt dann eine Tabelle dieser Reductionsgrössen für die Jahre 1825 bis 1856, gegründet auf die Münchener Beobachtungen. (Man sehe auch die Abhandlung: „Über die Temperaturverhältnisse in Bayern. Astron. Kalender für das Königreich Bayern auf das Jahr 1851". München 1849, pag. 187.)

Es entspricht ganz der verschiedenen Geistesrichtung der beiden hervorragenden Meteorologen Lamont und Dove, dass bei Ableitung reducirter Mittelwerthe der erstere, als nüchterner Naturforscher, seine Methode auf die nächstliegende constatirte Thatsache der Constanz der Differenzen stützte, während der mehr speculativ angelegte Geist Dove's erst auf dem Umweg einer allgemeinen Untersuchung über die nicht periodischen Änderungen der Temperaturvertheilung auf der Erdoberfläche, welche den ausgesprochenen Zweck hatte „die Gesammtheit der Witterungserscheinungen unserer Breiten auf den Kampf zweier Luftströme zurückzuführen", auf das gleiche Resultat geführt wurde. Die einfachen ebenso kurzen als klaren, allerdings auf spärlichem Beobachtungsmateriale basirten Darlegungen Lamont's sind auch fast in Vergessenheit gerathen, so dass die übliche Methode der Zurückführung der Resultate kurzer Beobachtungsreihen auf längere, mit Hilfe einer benachbarten Normalstation jetzt allgemein nur Dove zugeschrieben wird. Und doch ist Lamont's Entwickelung der Methode die strengere, von Voraussetzungen freiere, und gestattet auch, wie später gezeigt werden wird, die bequemste und allseitigste Prüfung auf den Grad ihrer Genauigkeit.

Nach dieser kleinen Abschweifung auf das Gebiet der geschichtlichen Entwickelung der Reductionsmethode meteorologischer Mittelwerthe, eine Abschweifung, die jedoch mit einem Theile dieser Arbeit in enger Beziehung steht, kehre ich zum

---

wobei Lamont so weit ging, nicht einmal fixe Beobachtungstermine vorzuschreiben, sondern jede Einzelbeobachtung auf die stündlichen Beobachtungen in München zu beziehen.

eigentlichen Gegenstande derselben zurück. Meine Arbeit zerfällt naturgemäss in zwei Haupttheile. Der erste Theil hat die Erörterung der Methoden zum Gegenstande, nach welchen die rohen Mittelwerthe der beobachteten Temperaturen möglichst strenge direct vergleichbar gemacht worden sind; er bildet die Einleitung nicht bloss zu der vorliegenden Arbeit über die Temperaturverhältnisse der österreichischen Alpenländer, sondern auch zu den später folgenden Untersuchungen über die mittlere Wärmevertheilung in den anderen Theilen von Österreich. Der zweite Theil wird dann die reducirten Monat- und Jahresmittel der Temperatur aller meteorologischen Stationen in den Alpenländern, welche seit 1848 thätig waren, enthalten, sowie eine eingehende Discussion derselben.

Die Reduction der rohen Mittelwerthe auf direct vergleichbare Mittel erfordert hauptsächlich zwei Operationen: Erstlich die Reduction auf sogenannte wahre oder 24stündige Mittel, um den Einfluss der täglichen Periode zu entfernen, der sich in verschiedenem Maasse geltend macht, sei es in Folge der Verschiedenheit der Beobachtungstermine an den verschiedenen Stationen, sei es in Folge der Verschiedenheit des täglichen Ganges selbst, auch bei übereinstimmenden Beobachtungszeiten. Zweitens die Elimination der unperiodischen Veränderungen, welche bei allen Mittelwerthen, die sich nicht auf die gleiche Periode von Jahrgängen beziehen, die directe Vergleichbarkeit derselben in hohem Grade stört.

Was die Reduction der rohen Temperaturmittel auf wahre Mittel anbelangt, so ist mir diese Aufgabe ziemlich leicht geworden einerseits dadurch, dass bei unseren Stationen fast durchgängig als Beobachtungstermine 6^h, 2^h, 10^h oder 7^h, 2^h, 9^h [letztere berechnet nach $\frac{1}{4}(7^h, 2^h, 9^h, 9^h)$] in Übung sind, die an sich nur geringe Correctionen erfordern, anderseits dadurch, dass relativ zur Längen- und Breitenerstreckung des behandelten Territoriums die Zahl der Stationen, von denen der tägliche Temperaturgang annähernd bekannt ist, eine ziemlich beträchtliche ist, so dass die Fehler der angewendeten Correctionen auf wahre Mittel, die in Folge der localen Verschiedenheiten des täglichen Ganges noch übrig bleiben dürften, mit Rücksicht auf die Kleinheit der Reductionsgrössen selbst, gewiss sehr geringfügig sein werden

und gegenüber anderen Fehlerquellen, welche auf die Vergleichbarkeit der Temperaturmittel störend einwirken, ganz in den Hintergrund treten. Darum brauche ich auch hier gar nicht länger bei der Besprechung dieser Reduction zu verweilen; es wird genügen, im zweiten speciellen Theil die Beobachtungstermine und Normalstationen für die einzelnen Stationen zu erwähnen, da der tägliche Gang der Temperatur an den ersteren, sowie die daraus sich ergebenden Correctionen für gewisse Termincombinationen schon an anderen Orten zur Publication gelangt sind. Die allgemeinen Verhältnisse des täglichen Ganges der Temperatur und die daraus sich ergebenden Regeln für die Reduction der rohen Temperaturmittel auf wahre Mittel sind erst kürzlich in umfassender Weise von Herrn Wild in dessen grossem Werke über die Temperaturverhältnisse des Russischen Reiches behandelt worden, und er hat diese seine Untersuchung auf ganz Europa ausgedehnt.

Aus diesen Gründen kann ich mich hier darauf beschränken, nur die Zurückführung der Resultate ungleichzeitiger und kurzer Beobachtungsreihen auf dieselbe längere Normalperiode eingehender zu behandeln. Diese Untersuchung ist aber im vorliegenden Falle von besonderer Wichtigkeit, weil bisher noch niemals versucht worden ist, die Temperaturmittel von Stationen so verschiedener Höhenlagen, wie sie unsere Alpenstationen darbieten, die zugleich von so verschieden langen Beobachtungsreihen und aus so verschiedenen Jahresreihen herstammen, auf die gleiche Normalperiode zu beziehen. Wo dies mit einigen wenigen Stationen geschehen ist, wie in der oben erwähnten Publication Jelinek's, ist doch zugleich keinerlei Garantie dafür geboten worden, ob in der That die gewöhnliche Reductionsmethode für diese Fälle noch ausreicht, oder ob nicht die häufigen „Temperaturumkehrungen" im Winterhalbjahr, die man erst in neuerer Zeit besser würdigen gelernt hat, die Anwendung der erwähnten Reduction gänzlich oder doch theilweise illusorisch machen. Die Frage, in welchem Verhältniss die Unsicherheit der Elimination der unregelmässigen Wärmeschwankungen mit der Zunahme des Höhenunterschiedes der Vergleichsstationen wächst, ist bisher gänzlich unbeantwortet geblieben. Aber auch der Grad der Genauigkeit der Reduction auf eine Normalstation überhaupt,

bei verschiedenen Entfernungen der verglichenen Stationen und geringeren Höhenunterschieden, ist bisher nicht allgemein untersucht worden. Dies zu leisten, wird im Nachfolgenden versucht werden.

Es soll desshalb zunächst der Grad der Unsicherheit der Monat- und Jahresmittel der Temperatur im Alpengebiete in Folge der unregelmässigen Wärmeschwankungen durch Berechnung der „mittleren Abweichungen“ festgestellt werden. Hieran reiht sich die Berechnung der „mittleren Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen“ von Stationen in verschiedener Entfernung von einander und von verschiedenen Höhenunterschieden. Dies gestattet dann die strenge Prüfung des Grades der Genauigkeit der durch Differenzen correspondirender Jahrgänge abgeleiteten Temperaturmittel und lässt die Frage entscheiden, bis zu welchen Entfernungen und bis zu welchen Höhenunterschieden die gewöhnliche Reductionsmethode auf eine Normalperiode noch mit Erfolg Anwendung finden kann. Diese Methode findet offenbar dort die Grenze ihrer Brauchbarkeit, wo die Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen ebenso gross geworden ist, wie die Veränderlichkeit der Monat- und Jahresmittel selbst. Für Orte, welche so weit von einander entfernt sind, oder zwischen welchen ein so grosser Höhenunterschied besteht, dass dieser Fall eintritt, ist die Reduction der Resultate einer kürzeren Beobachtungsreihe auf eine längere Normalperiode nicht mehr zulässig. Bei Vergleichungen der Temperaturmittel solcher Orte muss man dann stets berücksichtigen, dass die Unsicherheit der Unterschiede in den Wärmeverhältnissen ebenso gross ist, wie die wahrscheinlichen Fehler der Mittelwerthe, die sich aus den mittleren Abweichungen der Mittel selbst berechnen lassen. Es können dann nur vieljährige Mittel mit einander verglichen werden, wo eine grössere Genauigkeit erforderlich ist. Ein solcher Fall, wo die Temperaturmittel sehr entlegener Orte mit einander bis zu einem ziemlichen Grade der Genauigkeit vergleichbar sein sollten, tritt z. B. ein bei der Construction von Isothermenkarten grosser Erdtheile oder einer ganzen Hemisphäre, wenigstens für die mittleren und höheren Breiten. Selbst wenn man Mittel aus correspondirenden, aber wenigen Jahrgängen hiezu verwenden kann, erhält man noch keineswegs eine Darstellung der normalen mittleren Verhältnisse,

wie man leicht annehmen könnte. Einen grossen Vorzug aber haben solche Darstellungen, die auf Mittelwerthen aus der gleichen Zeitperiode basirt sind, jedenfalls voraus vor solchen, wo Resultate aus gleichfalls kurzen Beobachtungsreihen, die aber aus verschiedenen Zeiten stammen, zur Verwendung gekommen sind. Dieselben bestehen darin, dass sie reellen Verhältnissen entsprechen, und demgemäss auch gestatten, mit Sicherheit gewisse Folgerungen für den betreffenden Zeitraum aus ihnen zu ziehen, während man im anderen Falle bei deren Interpretation gegen Missverständnisse nicht gesichert ist.

Der Darstellung des Grades der Sicherheit der aus Temperaturdifferenzen abgeleiteten „Normalmittel" will ich dann noch die Abweichungen der einzelnen Monat- und Jahresmittel der Temperatur in der Periode 1851—1880 anreihen, u. zw. von jenen Stationen, von welchen mindestens die Hälfte der Periode hindurch Temperaturaufzeichnungen vorliegen, und welche ihrer Lage nach geeignet sind, ein Bild der gleichzeitigen Wärmevertheilung über das Alpengebiet innerhalb der bezeichneten Periode zu gewähren. Diese Zusammenstellung nebst der sie begleitenden kurzen Discussion soll den Schluss des vorliegenden ersten Theiles meiner Abhandlung bilden.

I. Die mittleren und absoluten Schwankungen der Monat- und Jahresmittel der Temperatur im österreichischen Alpengebiet und die daraus entspringenden wahrscheinlichen Fehler der Mittelwerthe.

In der Abhandlung „Über die nichtperiodischen Änderungen der Temperaturvertheilung auf der Oberfläche der Erde in dem Zeitraume von 1789—1838" (Abhandlungen der kön. preuss. Akademie der Wissenschaften, Berlin 1840) hat Dove zuerst ein Maass aufgestellt für die Schwankungen der Monatmittel der Temperatur (S. 652—654), indem er das Mittel der Abweichungen der einzelnen Jahrgänge vom Gesammtmittel ohne Rücksicht auf die Vorzeichen bildete. Diese Mittel nannte er später kurzweg die „mittlere Veränderlichkeit der Temperatur"; die Differenz der Monatmittel der extremsten Jahrgänge — also die grössten überhaupt vorgekommenen Unterschiede in den Mitteln desselben Monats — nannte er später die „absolute Veränderlichkeit". Eine

auf ein viel umfangreicheres Beobachtungsmateriale (83 Stationen über die ganze Erde vertheilt) gegründete Revision dieser Untersuchung lieferte Dove in der umfassenden Arbeit „Über die mittlere und absolute Veränderlichkeit der Temperatur der Atmosphäre", Abhandlungen der kön. Akademie der Wissenschaften in Berlin, 1866 (Berlin 1867). Hellmann hat später aus den 25jährigen gleichzeitigen Beobachtungen (1848—1872) von 29 Stationen des preussischen Beobachtungsnetzes „die mittlere und absolute Veränderlichkeit" der Temperatur in Norddeutschland berechnet (Zeitschrift des preussischen statistischen Bureaus 1874, IV. Band). Ihm gebührt das Verdienst zuerst eine von Fechner aufgestellte Formel zur Ableitung des wahrscheinlichen Fehlers der Mittel aus der „mittleren Abweichung" in Anwendung gebracht, und damit deren grossen Werth für die Meteorologie gezeigt zu haben. Die Berechnung der mittleren Abweichungen gewann dadurch eine noch grössere Wichtigkeit. Wild hat dann in seinem umfangreichen Werke über „die Temperaturverhältnisse des Russischen Reiches" sowohl die mittleren Abweichungen als auch die wahrscheinlichen Fehler (nach Fechner's Formel) für eine grosse Zahl von Stationen dieses Weltreiches berechnet (Seite 251—271) und zwar nicht allein für die Monatmittel (wie Dove und Hellmann), sondern auch für die Jahresmittel.

Ich folge hier diesem Vorgange und will nun zunächst für die Alpenländer die mittleren und absoluten Abweichungen der Monat- und Jahresmittel der Temperatur mittheilen. In der nachfolgenden Tabelle I sind diese Grössen für 32 Stationen aus dem gesammten Alpengebiete enthalten. Alle diese Werthe sind neu berechnet auf Grund sorgfältig revidirter Monat- und Jahresmittel, worüber in dem specielleren Theile, wo ohnehin alle einzelnen Stationen vorgenommen werden müssen, das Nöthige gesagt werden wird. Hier bemerke ich nur, dass, wo als Zahl der Jahre 30 angegeben ist, sich diese Jahre ausschliesslich auf die Normalperiode 1851—1880 beziehen, die kürzeren Reihen sind nur zum Theil innerhalb dieses Zeitraumes eingeschlossen. Ausnahmen davon machen: Altstätten und Sils-Maria 1864/83; Alessandria 1858/82; Schafberg 1871/84; S. Martin in Passeyer 1862/83; Marienberg 1857/83; Sulden 1865/83; Lesina 1858/83.

Für die Revision der Mittel von Altstätten, Sils-Maria und Basel bin ich den Herren Dir. Billwiller in Zürich und Dr. Riggenbach in Basel zu besonderem Danke verpflichtet.

Tabelle I enthält die mittleren Werthe der Abweichungen der Monat- und Jahresmittel, sowie die Mittel für die Jahreszeiten, die sich aus ersteren ergeben. Unter Winter, Frühling etc. steht demnach nicht die mittlere Abweichung des Winter- und Frühlingsmittels etc., sondern die mittlere Abweichung für einen durchschnittlichen Wintermonat, Frühlingsmonat etc. Tabelle II und III enthalten von jenen Stationen, für welche für die ganze Periode 1851/80 Monat- und Jahresmittel der Temperatur aufgestellt werden konnten, die grössten positiven und negativen Abweichungen dieser Mittel. Diese Abweichungen sind demnach, aus gleichzeitigen Beobachtungen abgeleitet, auch strenge mit einander vergleichbar. In Tabelle IV sind die sich aus II und III ergebenden absoluten Schwankungen zusammengestellt, also das, was Dove die „absolute Veränderlichkeit" nannte. In Tabelle V sind die Werthe der einzelnen Stationen aus Tabelle I nach Stationsgruppen zusammengefasst, um eine Übersicht zu erlangen und die Discussion zu erleichtern, nebenan stehen dann die nach Fechner's Formel aus der mittleren Veränderlichkeit abgeleiteten wahrscheinlichen Fehler für die Stationsgruppen. Tabelle VI gibt in ähnlicher Weise eine Übersicht über die absoluten Schwankungen innerhalb 30 Jahren für drei grössere Gebiete der Alpen.

Die Gruppen sind auf folgende Weise gebildet:

Tabelle V. Nordfuss der Alpen: Genf, Basel, Altstätten, Isny, München, Kremsmünster, Linz, Wien.

Hochalpen (Gipfel und Pässe): Schafberg, Obir, St. Bernhard.

Südöstliche Alpenthäler: Graz, Laibach, Rudolfswerth, Saifnitz, Sachsenburg, Klagenfurt.

Südtirol: Bozen, St. Martin, Marienberg, Sulden.

Südfuss der Alpen: Triest, Venedig, Mailand, Alessandria.

Tabelle VI. Nordfuss der Alpen: Basel, München, Innsbruck, Kremsmünster, Wien.

Südöstliche Alpenthäler: Graz, Laibach, Saifnitz, Klagenfurt.

Südfuss der Alpen: Bozen, Mailand, Triest, Venedig.

Übergehend zur Discussion der in diesen Tabellen enthaltenen Zahlenwerthe wollen wir mit den Tabellen V und VI beginnen, welche hiezu in erster Linie geeignet sind.

Die drei Gruppen: Nordseite der Alpen, hochalpine Stationen und südöstliche Alpenthäler zeigen in Bezug auf die „Veränderlichkeit der Mittel" eine ziemliche Übereinstimmung, davon unterscheiden sich Südtirol und die oberitalienische Ebene durch eine viel geringere Veränderlichkeit der Mittel. Vergleichen wir die von uns gefundenen Werthe mit einigen anderen für Europa schon früher abgeleiteten.

	Winter	Sommer	Mittel
Westsibirien und Ural (n. Wild)	3·02	1·26	2·02
Nordrussland („ „)	3·43	1·61	2·33
Mittelrussland („ „)	3·09	1·43	2·05
Norddeutschland (Hellmann)	2·02	0·93	1·28
Nord- und Ostalpen (Hann)	2·28	1·06	1·56
Süd-Alpen („)	1·56	1·02	1·25
Dalmatinische Inseln („)	1·30	0·81	1·17
Italien (Dove)	1·35	1·00	1·19
England („)	1·41	0·95	1·24.

Die Stationen auf der Nord- und Ostseite der Alpen haben demnach eine etwas grössere Veränderlichkeit der Mittel als Norddeutschland. Dies entspricht der continentaleren Lage; man sieht ja aus den Zahlen der ersten Colonnen der kleinen Tabelle wie gegen das Innere des Festlandes die mittleren Abweichungen wachsen. Die Stationen in Südtirol und auf der oberitalienischen Ebene nahe der Südseite der Alpen haben eine viel kleinere Veränderlichkeit und stimmen schon fast mit den italienischen Stationen überein. Bemerkenswerth ist aber die relativ beträchtliche Grösse der Abweichungen im Sommer gegenüber dem Seeklima von England und Norddeutschland.

Die Stationen auf grossen Höhen der Alpen scheinen im Winter durchschnittlich eine etwas kleinere Veränderlichkeit der Mitteltemperaturen zu haben, als die Stationen in den Thälern der Nord- und Ostalpen; in den übrigen Jahreszeiten aber, namentlich im Herbst und Sommer, ist dieselbe beträchtlich grösser. Die Veränderlichkeit der Jahresmittel ist dagegen kleiner, was hauptsächlich durch die geringere Veränderlichkeit der Wintermonate bedingt sein wird.

I. **Mittlere Abweichungen der Monat-**

Ort	Basel	Alt-stätten	Isny[1]	München	Krems-münster	Alt Aussee	Schaf-berg
Jahre	30	20	30	30	30	30	13
December	**2·75**	**3·06**	**2·36**	**2·65**	**2·55**	**2·25**	**2·41**
Jänner	2·13	2·37	2·21	2·12	1·74*	1·74	1·57*
Februar	1·93	2·16	2·13	2·31	**2·19**	1·70	1·82
März	1·35	1·74	1·56	1·64	1·57	1·50*	**2·18**
April	1·07*	0·95*	1·24*	1·24*	1·40*	1·56	1·06*
Mai	**1·65**	**2·18**	**2·03**	**1·77**	**1·86**	**2·07**	**1·91**
Juni	1·09	1·09	1·13	0·90*	0·87*	1·10	1·27
Juli	1·23	1·22	1·26	**1·32**	**1·31**	**1·56**	1·38
August	1·23	1·26	**1·38**	1·14	1·16	1·35	1·41
September	0·93*	1·23	1·19*	1·09	1·04*	1·35*	1·41
October	1·07	1·48	1·31	1·22	1·32	1·77	**2·12**
November	1·62	1·47	1·85	1·80	1·72	1·70	1·72
Jahr	0·65	0·59	0·83	0·70	0·70	0·75	0·64
Winter	2·27	2·53	2·25	2·36	2·16	1·90	1·93
Frühling	1·36	1·62	1·61	1·55	1·61	1·71	1·72
Sommer	1·18	1·19	1·26	1·12	1·11	1·34	1·35
Herbst	1·21	1·39	1·45	1·37	1·36	1·61	1·75
Mittel	1·50	1·68	1·64	1·60	1·56	1·64	1·69

[1] Die Temperaturmittel der Station Isny konnten nicht genügend
nach Dove, Plieninger und Schoder und die Bildung von Differen-
homogen ist, sondern in mehrere nicht streng vergleichbare Reihen zer-
geringen Einfluss zu haben; von den weiteren Zusammenstellungen

und Jahresmittel der Temperatur.

Linz 25	Wien 30	Buda-pest 30	Graz 30	Lai-bach 30	Ru-dolfs-werth 26	Agram 25	Saif-nitz 30	Sach-sen-burg 25
2·48	**2·88**	**2·38**	**2·17**	**2·65**	**2·49**	**2·31**	**2·51**	**2·46**
1·83*	1·63*	1·64*	1·61*	2·62	2·47	2·26	2·31	2·31
2·25	**2·42**	**2·09**	**2·10**	2·31	2·42	**2·68**	1·93	2·30
1·74	1·68	1·76	1·57	1·70	1·83	1·81	1·54	1·58
1·45*	1·51*	1·61	1·35*	1·26*	1·23*	1·28*	1·36*	1·16*
2·12	**1·81**	1·59	**1·66**	**1·48**	**1·66**	**1·96**	**1·78**	**1·51**
1·01*	0·99*	1·16	0·94*	0·91*	0·95*	1·22	0·83*	0·76*
1·58	1·16	1·17	1·09	0·97	0·79*	1·06	1·00	1·10
1·44	**1·21**	1·02*	1·04	**1·12**	0·90	1·18	0·90	0·97
1·26*	1·05*	1·24	1·11	0·91*	0·92	1·09	1·05	0·90*
1·54	1·45	1·70	1·51	1·58	1·64	1·60	1·62	1·50
1·74	1·55	1·44	1·47	1·70	1·55	1·67	1·69	1·33
0·73	0·68	0·58	0·65	0·64	0·67	0·75	C·69	0·65
2·17	2·14	2·04	1·96	2·53	2·46	2·42	2·25	2·36
1·77	1·65	1·65	1·53	1·48	1·57	1·68	1·54	1·42
1·34	1·12	1·12	1·02	1·00	0·88	1·15	0·91	0·94
1·51	1·35	1·46	1·36	1·40	1·37	1·45	1·45	1·24
1·70	1·57	1·57	1·47	1·60	1·57	1·68	1·54	1·49

controlirt werden. Die Zusammenstellung der 30jährigen Mittel 1851—80 zen gegen Nachbarstationen zeigte deutlich, dass die Reihe durchaus nicht fällt. Auf die Werthe der mittleren Abweichungen scheint dies aber nur wurde diese Station aber aus diesem Grunde ausgeschlossen.

Ort	Tröpolach	Klagenfurt	Obir	Innsbruck	Bozen	S. Martin Passeyer	Marienberg
Jahre	30	30	20	30	30	22	27
December	**3·12**	**2·93**	2·04	2·45	**1·49**	**1·36**	1·72
Jänner	2·80	2·38	2·22	**2·46**	1·23	**1·36**	1·33
Februar	2·36	2·39	**2·34**	2·24	1·38	1·28	**1·81**
März	1·64	1·71	1·65	1·88	1·25	1·26	1·66
April	1·54*	1·28*	1·58*	1·26*	1·01*	0·90*	1·04*
Mai	**1·75**	**1·65**	**1·76**	**1·61**	**1·59**	**1·48**	**1·46**
Juni	0·94	0·92	0·99*	0·96*	0·93*	0·79*	1·00
Juli	1·36	0·90*	1·45	**1·41**	**1·31**	**1·00**	**1·27**
August	1·06	1·08	**1·67**	1·09	1·17	0·69*	1·19
September	1·35	1·14	1·46*	1·04*	0·98*	0·88	1·02*
October	1·67	1·61	1·95	1·62	1·11	1·11	1·15
November	1·80	1·77	1·72	1·67	1·22	0·91	1·18
Jahr	0·84	0·64	0·58	0·67	0·52	0·37	0·50
Winter	2·76	2·57	2·20	2·38	1·37	1·33	1·62
Frühling	1·64	1·55	1·66	1·58	1·28	1·21	1·39
Sommer	1·12	0·97	1·37	1·15	1·14	0·83	1·15
Herbst	1·61	1·51	1·71	1·44	1·10	0·97	1·12
Mittel	1·78	1·65	1·73	1·64	1·22	1·09	1·32

Sulden	Lesina	Triest	Venedig	Mailand	Alessandria	Genf	S. Bernhard	Sils-Maria
19	26	30	30	30	25	30	30	20
1·90	1·35	1·70	**1·81**	1·65	1·65	**2·22**	**2·32**	**2·07**
1·40	1·35	**1·71**	1·44	1·54	**1·95**	1·73	1·25	1·56
1·48	1·20	1·40	1·26	**1·71**	1·82	1·44	1·94	1·68
1·78	**1·47**	1·28	1·31	1·34	1·23	1·20	1·63	1·48
0·96*	0·83	1·14*	1·06*	1·06*	0·92*	1·04*	1·20*	0·92*
1·49	**1·41**	**1·58**	**1·60**	**1·47**	**1·24**	**1·57**	**1·62**	**1·62**
1·01	0·89	1·12	1·07	1·06	0·82*	1·01*	1·04*	0·88*
0·97*	0·65	1·00*	1·01	1·06	0·84	**1·28**	**1·29**	**1·06**
1·05	0·90	1·10	1·08	1·03*	**0·92**	1·10	1·26	0·87
1·03	0·89	1·05*	0·91*	1·11	0·85*	1·07	1·23	0·94
1·12	**1·24**	**1·42**	1·39	1·09	1·27	0·92*	1·02*	1·20
1·63	1·20	1·28	1·32	1·25	1·16	1·34	1·71	1·23
0·40	0·49	0·58	0·56	0·57	0·48	0·57	0·57	0·48
1·59	1·30	1·60	1·50	1·63	1·81	1·80	1·84	1·77
1·39	1·24	1·33	1·32	1·29	1·13	1·27	1·48	1·34
1·01	0·81	1·07	1·05	1·05	0·86	1·13	1·20	0·94
1·26	1·11	1·25	1·21	1·15	1·09	1·11	1·32	1·12
1·31	1·12	1·31	1·27	1·28	1·22	1·33	1·46	1·29

II. Grösste positive Temperaturabweichungen der Monat- und Jahresmittel 1851/80.

	Genf	St. Bern-hard	Basel	Mün-chen	Inns-bruck	Alt Aus-see	Krems-mün-ster	Wien	Graz	Lai-bach	Saif-nitz	Tröpo-lach	Kla-gen-furt	Bozen	Mai-land	Vene-dig	Triest
Dec.	6·4	4·2	6·8	5·9	6·1	4·5	5·4	4·5	4·5	7·4	6·0	6·7	5·4	3·6	3·6	5·1	4·0
Jänn.	3·4	3·1	3·7	4·0	5·2	3·7	3·8	4·4	4·6	5·1	4·1	5·9	4·9	3·6	3·6	3·2	3·3
Feb.	4·0	4·2	4·4	6·1	5·9	4·9	5·7	5·0	5·3	5·0	5·0	5·4	6·0	3·5	3·0	2·5	3·0
März	2·8	4·6	3·4	3·9	4·8	4·6	3·3	3·7	3·7	3·8	4·0	4·8	3·6	3·4	3·3	3·9	3·1
April	3·6	3·4	3·8	2·5	2·4	5·9	2·7	2·8	2·7	2·7	3·1	3·6	2·8	3·5	2·4	2·5	1·9
Mai. .	4·9	4·9	4·9	5·4	4·7	5·1	5·0	4·0	4·7	4·8	4·9	5·0	4·5	3·7	3·6	4·0	4·6
Juni	2·5	3·2	3·9	2·5	3·9	3·0	2·3	2·3	2·2	2·1	2·1	2·6	1·8	3·1	3·1	2·0	2·7
Juli	3·3	2·7	3·8	3·1	3·0	4·0	3·4	3·5	3·4	2·4	2·6	2·9	2·7	3·0	2·3	2·7	2·5
Aug.	2·5	3·3	3·4	1·9	2·1	2·9	2·3	2·2	2·9	2·5	2·1	2·4	3·4	3·2	2·8	2·8	2·7
Sept.	2·5	3·4	2·4	2·6	2·3	3·3	2·8	2·4	2·2	2·5	2·5	3·3	2·1	2·7	2·8	2·0	2·3
Oct.	2·0	2·9	2·2	2·4	3·9	2·8	2·6	2·8	2·8	3·2	2·9	2·7	3·3	2·9	2·4	2·4	3·0
Nov.	3·0	3·8	4·6	5·5	5·9	5·6	4·7	3·6	4·4	5·5	4·8	4·8	4·7	3·9	2·5	3·4	3·8
Jahr	1·1	1·2	1·2	1·7	2·3	1·6	1·8	1·7	1·4	1·4	1·5	1·7	1·5	1·0	1·2	1·6	1·6

III. Grösste negative Temperaturabweichungen der Monat- und Jahresmittel, Periode 1851/80.

	Genf	St. Bernhard	Basel	München	Innsbruck	Alt Aussee	Kremsmünster	Wien	Graz	Laibach	Saifnitz	Tröpolach	Klagenfurt	Bozen	Mailand	Venedig	Triest
Dec.	6·7	3·8	9·8	8·5	7·9	4·7	8·2	6·7	·6·0	10·3	7·3	9·8	9·6	5·3	5·2	6·7	4·4
Jänn.	4·2	4·0	4·9	5·4	5·4	3·8	4·2	5·5	6·0	7·1	5·8	7·1	6·7	3·4	4·4	4·3	4·4
Feb.	3·2	5·9	3·6	5·1	5·3	4·7	4·9	7·4	6·0	7·1	5·5	5·6	5·3	3·4	5·5	5·0	4·5
März	4·1	5·3	4·3	4·1	4·2	4·0	4·0	4·1	3·8	4·3	3·5	3·9	3·7	3·3	3·7	2·9	3·3
April	2·4	3·4	2·1	3·1	3·8	3·6	3·0	3·6	3·4	3·2	3·0	4·2	2·8	2·8	2·6	2·3	2·3
Mai	3·3	3·3	3·4	3·1	3·3	4·5	3·8	3·5	3·3	3·7	4·0	4·2	3·9	3·2	3·5	3·5	4·2
Juni	2 8	3·1	3·2	2·8	2·6	2·8	2·8	3·2	2·1	3·1	2·9	2·9	2·8	2·8	2·7	3·8	3·7
Juli	2·8	3·5	2·9	3·1	3·8	3·4	3·4	2·8	2·4	2·4	3·1	3·1	2·3	2·8	3·2	1·9	2·6
Aug.	2·1	2·8	2·4	2·3	2·3	2·6	2·3	2·7	2·0	2·0	2·0	2·7	2·0	2·6	2·3	3·0	2·4
Sept.	3·7	3·6	3·0	2·8	2·6	4·3	3·1	2·7	3·1	2·8	3·3	3·0	3·6	4·0	3·8	3·6	2·9
Oct.	2·2	2·4	2·4	2·9	2·5	3·6	2·5	2·8	3·1	3·8	3·8	4·0	3·9	2·3	3·0	2·8	3·3
Nov.	4·1	6·8	3·4	4·4	3·6	3·9	4·7	4·0	3·9	4·1	4·5	5·1	4·5	2·8	3·0	3·1	2·6
Jahr	1·6	1·8	1·6	1·7	1·5	1·2	1·4	1·6	1·5	1·5	1·4	1·4	1·3	1·3	1·2	1·2	1·1

IV. Absolute Schwankung der Monat- und Jahresmittel der Temperatur 1851–80.

	Genf	St. Bern-hard	Basel	Mün-chen	Inns-bruck	Alt Aus-see	Krems-mün-ster	Wien	Graz	Lai-bach	Saif-nitz	Tröpo-lach	Kla-gen-furt	Bozen	Mai-land	Vene-dig	Triest
Dec.	13·1	8·0	16·6	14·4	14·1	9·2	13·6	11·2	10·5	17·7	13·3	16·5	15·0	8·9	8·8	11·8	8·4
Jänn.	7·6	7·1	8·6	9·4	10·6	7·5	8·0	9·9	10·6	12·2	9·9	13·0	11·6	7·0	8·0	7·5	7·7
Feb.	7·2	10·1	8·0	11·2	11·2	9·6	10·6	12·4	11·3	12·1	10·5	11·0	11·3	6·9	8·5	7·5	7·5
März	6·9	9·9	7·7	8·0	9·0	8·6	7·3	7·8	7·5	8·1	7·5	8·7	7·3	6·7	7·0	6·8	6·4
April	6·0	6·8	5·9	5·6	6·2	9·5	5·7	6·4	6·1	5·9	6·1	7·8	5·6	6·3	5·0	4·8	4·2
Mai..	8·2	8·2	8·3	8·5	8·0	9·6	8·8	7·5	8·0	8·0	8·9	9·2	8·4	6·9	7·1	7·5	8·8
Juni	5·3	6·3	7·1	5·3	6·5	5·8	5·1	5·5	4·3	5·2	5·0	5·5	4·6	5·9	5·8	5·8	6·4
Juli	6·1	6·2	6·7	6·2	6·8	7·4	6·8	6·3	5·8	4·8	5·7	6·0	5·0	5·8	5·5	4·6	5·1
Aug.	4·6	6·1	5·8	4·2	4·4	5·5	4·6	4·9	4·9	4·5	4·2	5·1	5·4	5·8	5·1	5·8	5·1
Sept.	6·2	7·0	5·4	5·4	4·9	7·6	5·9	5·1	5·3	5·3	5·8	6·3	5·7	6·7	6·6	5·6	5·2
Oct.	4·2	5·3	4·6	5·3	6·4	6·4	5·1	5·6	5·9	7·0	6·7	6·7	7·2	5·2	5·4	5·2	6·3
Nov.	7·1	10·6	8·0	9·9	9·5	9·5	9·4	7·6	8·3	9·6	9·3	9·9	9·2	6·7	5·5	6·5	6·4
Jahr	2·7	3·0	2·8	3·4	3·8	2·8	3·2	3·3	2·9	2·9	2·9	3·1	2·8	2·3	2·4	2·8	2·7

V.

	A. Mittlere Abweichungen der Monat- und Jahresmittel der Temperatur					*B.* Wahrscheinlicher Fehler eines 30jährigen Mittels				
	Nordfuss der Alpen	Hochalpen Gipfel, Pässe	Südöstliche Alpenthäler	Südtirol	Südfuss Oberitalien. Ebene	Nordfuss der Alpen	Hochalpen	Südöstliche Thäler	Südtirol	Südfuss der Alpen
December...	**2·55**	**2·22**	**2·53**	**1·62**	**1·70**	0·40	0·35	0·39	0·25	0·26
Jänner......	1·97	1·68	2·28	1·33	1·66	0·31	0·26	0·35	0·21	0·26
Februar.....	**2·10**	**2·08**	2·24	1·49	1·55	0·33	0·32	0·35	0·23	0·24
März	1·55	1·82	1·65	1·47	1·29	0·24	0·28	0·26	0·23	0·20
April.......	1·24*	1·28*	1·27*	0·98*	1·04*	0·19	0·20	0·20	0·15	0·16
Mai	**1·87**	**1·76**	**1·61**	**1·50**	**1·47**	0·29	0·27	0·25	0·23	0·23
Juni........	1·01*	1·10*	0·88*	0·93*	1·02	0·16	0·17	0·14	0·14	0·16
Juli	1·29	1·37	0·97	1·14	0·98*	0·20	0·21	0·15	0·18	0·15
August	1·24	1·45	1·00	1·03	1·03	0·19	0·23	0·16	0·16	0·16
September ..	1·11*	1·37*	1·01	0·98*	0·98*	0·17	0·21	0·16	0·15	0·15
October.....	1·29	1·70	1·58	1·12	1·29	0·20	0·26	0·25	0·17	0·20
November...	1·64	1·72	1·59	1·23	1·25	0·25	0·27	0·25	0·19	0·19
Jahr........	0·68	0·60	0·66	0·45	0·55	0·11	0·09	0·10	0·07	0·09
Winter......	2·21	1·98	2·35	1·48	1·64	0·35	0·31	0·36	0·23	0·25
Frühling	1·55	1·62	1·51	1·32	1·27	0·24	0·25	0·24	0·20	0·20
Sommer.....	1·18	1·31	0·95	1·03	1·01	0·18	0·20	0·15	0·16	0·16
Herbst......	1·35	1·60	1·39	1·11	1·17	0·21	0·25	0·22	0·17	0·18
Mittel.......	1·57	1·63	1·55	1·23	1·27	0·24	0·25	0·24	0·19	0·20

VI. Absolute Schwankungen der Monat- und Jahresmittel innerhalb 30 Jahren.

	Grösste positive Abweichungen			Grösste negative Abweichungen			Absolute Schwankung		
	Nordfuss der Alpen	Südöstliche Alpenthäler	Südfuss der Alpen	Nordfuss der Alpen	Südöstliche Alpenthäler	Südfuss der Alpen	Nordfuss der Alpen	Südöstliche Alpenthäler	Südfuss der Alpen
December	5·7	5·8	4·1	8·2	8·3	5·4	14·0	14·1	9·5
Jänner	4·2	4·7	3·4	5·1	6·4	4·1	9·3	11·1	7·5
Februar	5·4	5·3	3·0	5·3	6·0	4·6	10·7	11·3	7·6
März	3·8	3·8	3·4	4·1	3·8	3·3	8·0	7·6	6·7
April	2·8	2·8	2·6	3·1	3·1	2·5	6·0	5·9	5·1
Mai	4·8	4·6	4·0	3·4	3·7	3·6	8·2	8·3	7·6
Juni	3·0	2·1	2·7	2·9	2·7	3·3	5·9	4·8	6·0
Juli	3·4	2·8	2·6	3·2	2·6	2·6	6·6	5·3	5·3
August	2·4	2·7	2·9	2·4	2·0	2·6	4·8	4·8	5·5
September	2·5	2·3	2·5	2·8	3·2	3·6	5·3	5·5	6·0
October	2·8	3·0	2·7	2·6	3·7	2·9	5·4	6·7	5·5
November	4·9	4·9	3·4	4·0	4·2	2·9	8·9	9·1	6·3
Jahr	1·74	1·45	1·35	1·54	1·42	1·20	3·3	2·9	2·6
Winter	5·1	5·3	3·5	6·2	6·9	4·7	11·3	12·2	8·2
Frühling	3·8	3·7	3·3	3·5	3·5	3·1	7·4	7·3	6·5
Sommer	2·9	2·5	2·7	2·8	2·4	2·8	5·8	5·0	5·6
Herbst	3·4	3·4	2·9	3·1	3·7	3·1	6·5	7·1	5·9
Mittel	3·8	3·7	3·1	3·9	4·1	3·4	7·7	7·9	6·5

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Mittel	Jahr
Schatberg	1·93	1·72	1·35	1·75	1·69	0·64
Kremsmünster	2·16	1·61	1·11	1·36	1·56	0·70
Kremsm.-Schafbg. .	—0·23	0·11	0·24	0·39	0·13	—0·06
Obir	2·17	1·66	1·37	1·71	1·78	0·58
Klagenfurt........	2·57	1·55	0·97	1·51	1·65	0·64
Klagenfurt-Obir ...	—0·40	0·11	0·40	0·20	0·08	—0·06.

Völlig übereinstimmend ist der Winter auf den Gipfeln constanter, die anderen Jahreszeiten aber sind veränderlicher als am Fuss des Berges. St. Bernhard und Genf stehen sich im Winter nahe gleich, man muss aber berücksichtigen, dass Genf ein exceptionelles Klima geniesst; könnte man den St. Bernhard mit Martigny vergleichen, so würde man wohl ein mit obigen übereinstimmendes Resultat erhalten. Auch Sils-Maria hat im Winter eine kleinere Veränderlichkeit als Genf; in allen übrigen Jahreszeiten eine grössere.

Bemerkenswerth sind die geringen mittleren Abweichungen der Mitteltemperaturen der Sommermonate in den südöstlichen Alpenthälern, in Südtirol und Oberitalien ist die Veränderlichkeit merklich grösser. Diese geringe Veränderlichkeit der Sommermittel steht im Gegensatz zu der grossen Veränderlichkeit der Temperatur der Wintermonate, die jährliche Periode wird dadurch scharf ausgeprägt.

Sehr auffallend ist ferner die geringe Veränderlichkeit der Temperaturmittel im Winter in Südtirol; Bozen, verglichen mit der oberitalienischen Ebene, zeigt eine sehr merklich grössere Beständigkeit der Mitteltemperatur des Winters, wie folgender Vergleich nachweist:

	Herbst	Winter	Frühling	Sommer
Bozen	1·10	1·37	1·28	1·14
Mailand, Alessandria..	1·02	1·72	1·21	0·95.

Aber selbst die hochgelegenen, relativ rauhen Orte Sulden (1830 Met.) und Marienberg (1320 Met.) übertreffen die oberitalienische Ebene in der Beständigkeit der Mitteltemperaturen der Wintermonate.

	Herbst	Winter	Frühling	Sommer
Sulden Marienberg ..	1·19	1·60	1·39	1·08.

Laibach (46° 3′) liegt südlicher als Bozen (46° 30′) und hat doch eine der grössten mittleren Abweichungen der Wintermonate (2·53) in den Alpen aufzuweisen, im Sommer dagegen ist die Veränderlichkeit etwas kleiner als in Südtirol. Ebenso verhält es sich mit Rudolphswerth, Klagenfurt etc. Es stehen somit diese südöstlichen Alpenthäler in einem auffallenden Gegensatz zu den in gleichen Breiten liegenden Thälern auf der Südseite der Tiroler-, und wie man wohl hinzufügen kann, auch der Schweizer- und italienischen Alpen. Auf den Längenunterschied allein kann dies nicht zurückgeführt werden. Der Schutz den diese Thäler nach Norden wie nach Osten durch den Verlauf der Alpenketten geniessen, die Exposition nach Süden und das Fehlen stagnirender kalter Luftmassen (wie in den südöstlichen Alpenbecken und auf der oberitalienischen Ebene) in Folge der orographischen Verhältnisse sind die Gründe der milden Wintertemperaturen, sowie der Beständigkeit der Mittelwerthe derselben. Dass Alessandria im Winter veränderlicher ist als Mailand (1·81 gegen 1·63) ist auf den gleichen Grund zurückzuführen. Alessandria liegt in der Sohle des Po-Thales, wo die abnormale Erkaltung der oberitalienischen Ebene ihr Maximum erreicht. In den tieferen Lagen des kärntnerischen Beckens erreicht gleichfalls und in viel höherem Maasse die abnormale Winterkälte in Folge des durch orographische Verhältnisse bedingten Stagnirens der durch Wärmeausstrahlung erkalteten Luftmassen ein Maximum, dort treffen wir auch die grösste mittlere Abweichung der Monattemperaturen im Alpengebiet (soweit solche hier berechnet vorliegen) mit 2·57 Klagenfurt und 2·76 Tröpolach, was schon an streng continentale Verhältnisse anklingt. Die grössere Veränderlichkeit der Mitteltemperatur zu Altstätten im Rheinthale, im Vergleich zu Basel und München, hat ihre Ursache höchst wahrscheinlich in dem Umstande, dass Altstätten eine der Haupt-Föhnstationen der Schweiz ist.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Altstätten	2·53	1·62	1·19	1·39	1·68
Basel, München....	2·31	1·45	1·15	1·29	1·55.

Orte, welche dem Föhn sehr ausgesetzt sind, müssen überhaupt eine grössere Veränderlichkeit der Temperaturverhältnisse besitzen, als ihre Umgebung.

Wie rasch die Veränderlichkeit landeinwärts zunimmt, zeigt der Vergleich von Triest mit Agram, die in gleicher Breite liegen.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Mittel	Jahr
Triest	1·60	1·33	1·07	1·25	1·31	0·58.
Agram	2·42	1·68	1·15	1·45	1·68	0·75.

Venedig ist noch weniger veränderlich wie Triest, was zu erwarten war; der Vergleich würde wohl noch günstiger für Venedig ausfallen, wenn es mir möglich gewesen wäre die Monatmittel der Temperatur von Venedig einer gründlicheren Revision zu unterziehen. Vergleicht man blos Jänner und Februar mit Triest, so stellt sich das Verhältniss der Veränderlichkeit dieser Monate wie 1·35 zu 1·56. Bekanntlich ist auch das mittlere Temperaturgefälle im Winter zwischen Triest und Agram ungewöhnlich gross.

Gehen wir nun über zur Betrachtung der jährlichen Periode der mittleren Veränderlichkeit der Monatmittel. Zunächst tritt uns aus Tabelle V die bekannte allgemeine Erscheinung entgegen, dass in diesen (wie in höheren) Breiten die Veränderlichkeit im Winter am grössten, im Sommer und zu Anfang des Herbstes am kleinsten ist. Auf der Nordseite der Alpen und in dem südöstlichen Theile derselben ist die jährliche Periode viel schärfer ausgeprägt, als in Südtirol und am Südfuss der Alpen. Der December hat die grösste Veränderlichkeit (dies gilt eigentlich nur für die Periode 1851/80, die extremen December 1879 und 1880 mussten darauf einen wesentlichen Einfluss nehmen). Juni und September haben die geringste. Im Norden tritt im Februar ein zweites Maximum auf. Sehr bemerkenswerth ist das an allen Stationen ausgeprägte secundäre Minimum im April, dem im Mai ein auffallend hervortretendes secundäres Maximum folgt, worauf dann gleich im Juni das Hauptminimum eintritt (in Oberitalien erst im Juli). Im Juli und August steigert sich die Veränderlichkeit der Mittel wieder, um im September ein drittes Minimum zu erreichen. In den hochalpinen Stationen ist die mittlere Abweichung des April kleiner als die des September. In Lesina und Triest fällt auch auf den October ein secundäres Maximum, das offenbar dem unruhigen Charakter dieses Hauptregenmonates der Ostküste der Adria entspricht. (In Lesina fällt sogar das Hauptmaximum auf den März, ein Monat, der bekannt-

lich im Gebiete des Mittelmeeres überhaupt sich durch die Tendenz zum öfteren Eintritt eines Nachwinters auszeichnet.)

Es entsteht noch die Frage, ob das Auftreten des Maimaximums nicht vielleicht blos der Jahresreihe 1851/80 eigenthümlich war und in längeren Jahresreihen wieder verschwinden dürfte. Um dies zu entscheiden, wollen wir die Werthe der mittleren Veränderlichkeit der Monatmittel für einige Orte des Alpengebietes mit längeren Beobachtungsreihen und aus einer anderen Periode nach Dove hier anführen.

	Genf (40) 1826/65	St. Bernhard (33)	Basel (39)1827/63	Peissenberg (54) 1792—1850	Krems-münster (49) 1815/63	Wien (90) 1775/1864	Klagenfurt (51) 1813/63	Mailand (76)
December	1·76	1·78	2·01	1·9	**2·36**	2·31	2·19	1·51
Jänner	**1·95**	**1·81**	**2·44**	**2·5**	2·15	**2·47**	**2·10**	**1·88**
Februar	1·41	1·55	2·01	1·84	2·00	2·21	2·10	1·71
März	1·30	**1·81**	1·98	1·75	1·55	1·76	1·60	1·35
April	1·31	1·31	1·40	1·65	1·57	1·72	1·36	1·37
Mai	1·37	1·26	1·36	1·75	1·24	1·51	1·26	1·27
Juni	1·02*	1·42	1·09*	1·45	1·19	1·19*	1·25	1·13*
Juli	1·14	1·14	1·14	1·31*	1·16*	1·26	1·06*	1·25
August	1·20	1·03*	1·35	1·35	1·32	1·30	1·29	1·11
September	1·12	1·36	1·06	1·31*	0·95*	1·19*	1·15	1·10*
October	0·90*	1·08*	1·05*	1·50	1·29	1·42	1·26	1·21
November	1·29	1·55	1·38	1·76	1·67	1·39	1·74	1·20

Es scheint demnach die grosse Veränderlichkeit der Maimittel eine Eigenthümlichkeit der Periode 1851/80 zu sein, ebenso die des December gegenüber dem Jänner. Die Beständigkeit des Juni und des September wird durch die mittleren Abweichungen längerer Perioden bestätigt. Wie wohl zu erwarten, genügen demnach 30 Jahre nicht, um den jährlichen Gang der Veränderlichkeit der Monatmittel festzustellen. Unsere 30jährige Normalperiode 1851/80 zeichnete sich durch eine ungewöhnlich grosse Veränderlichkeit der Temperatur der December- und Maimonate aus.

Zu Vergleichungen der absoluten Werthe der mittleren Abweichungen dürfen aus mehrfachen Gründen die oben nach Dove reproducirten Mittelwerthe nicht herbeigezogen werden, wie schon ein Blick auf die unter Wien und Klagenfurt stehenden Zahlen zeigt.

Was nun die absoluten Schwankungen der Monat- und Jahresmittel innerhalb der Periode 1851/80 anbelangt, so zeigen die Tabellen IV, V, VI, dass im Winter die extremen Monate tiefer unter den Mittelwerth herab- als über denselben nach der positiven Richtung hinausgehen. Die abnorm grosse negative Abweichung des December ist hauptsächlich durch den kalten December 1879 hervorgerufen worden; auf der Südseite der Alpen war jedoch vielfach der Jänner 1880 kälter als der December 1879. Diese Verhältnisse werden übrigens im dritten Theile dieser Abhandlung zur specielleren Darlegung kommen. Im Frühling und Sommer haben die extremen positiven Abweichungen ein Übergewicht über die negativen; der Herbst hat einen unentschiedenen Charakter; die kältesten Jahre jedoch gehen wieder entschiedener tiefer unter den Mittelwerth hinab, als die wärmsten über denselben hinausgehen.

Vergleicht man die absolut grössten Abweichungen von Genf mit jenen auf den St. Bernhard nach Jahreszeitenmitteln, so kommt man zu folgendem übersichtlichen Resultat:

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Mittel	Jahr
St. Bernhard...	+3·8	+4·3	+3·1	+3·4	+3·65	+1·2
Genf..........	+4·6	+3·8	+2·8	+2·5	+3·42	+1·1
St. Bernhard...	—4·6	—4·0	—3·1	—4·3	—4·00	—1·8
Genf..........	—4·7	—3·3	—2·6	—3·3	—3·47	—1·6

Am St. Bernhard sind im Winter die extremen Abweichungen kleiner als in Genf, in den übrigen Jahreszeiten verhält es sich umgekehrt. In Genf halten sich die extremen positiven und negativen Abweichungen der Monate nahezu das Gleichgewicht, am St. Bernhard überwiegen die negativen im Herbst und Winter sehr erheblich. Die kältesten Jahre gingen an beiden Orten erheblich tiefer unter das Mittel, als die wärmsten dasselbe zu überschreiten vermochten.

Zur Charakterisirung der extremsten Temperatur-Anomalien Kärntens mögen noch folgende Zusammenstellungen hier Platz finden.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Mittel	Jahr
Klagenfurt	+5·4	+3·6	+2·6	+3·4	+3·75	+1·5
Tröpolach	+6·0	+4.5	+2·6	+3·6	+4·18	+1·7
Klagenfurt	—7·2	—3·5	—2·4	—4·0	—4·28	—1·3
Tröpolach	—7·5	—4·1	—2·9	—4·0	—4·62	—1·4

Im Sommer ist die absolute Schwankung in Klagenfurt kleiner als selbst in Genf, im Winter dagegen um 56% grösser. Tröpolach ist die extremste Station in Kärnten und zeigt dementsprechend auch die grösste mittlere und absolute Veränderlichkeit der Monattemperaturen des Winters. Sehr auffallend ist die überaus grosse absolute Veränderlichkeit der Monatmittel des Winters in Laibach, die negativen und theilweise auch die positiven grössten Abweichungen übertreffen noch jene von Tröpolach. Die Bodenconfiguration ist wohl auch hier das entscheidende.

Die Abweichungen der kältesten und wärmsten Decembermonate vom 30jährigen Mittel 1851/80 waren:

Klagenfurt	— 9·6	1879	und	5·4	1868
Tröpolach	— 9·8	1879	„	6·7	1868
Laibach	—10·3	1878	„	7·4	1868.

In Laibach waren also beide Abweichungen am extremsten.

Wir kommen nun zu einen für den Gegenstand dieser Arbeit höchst wichtigen Frage. Wie gross ist die Sicherheit der 30jährigen Mittel der Normalperiode 1851/80 in Folge der unregelmässigen Schwankungen der Temperaturmittel.

Tabelle V *B* gibt auf diese Frage Antwort, denn sie enthält die wahrscheinlichen Fehler der 30jährigen Mittel,

die nach Fechner's Formel aus den mittleren Abweichungen berechnet worden sind.

Überblicken wir die Ergebnisse dieser Berechnung, so finden wir, dass im ganzen Alpengebiete, mit Ausnahme von Südtirol (und ebenso den schweizerischen und italienischen südlichen Alpenthälern), der wahrscheinliche Fehler der 30jährigen Monatmittel im Winter noch 0°3 bis 0°4 beträgt, im Frühling 0°25 bis 0°20, im Sommer etwa 0°2 bis 0°15 und im Herbst wieder 0°20 bis 0°25. Selbst im beständigsten Monat, dem Juni, liegt der wahrscheinliche Fehler noch zwischen 0°1 und 0°2 und im December beträgt er durchschnittlich nahe 0°4. Das 30jährige Jahresmittel ist aber auf dem bezeichneten Gebiete schon bis auf 0°1 sicher.

In Südtirol und am Südfuss der Alpen sind die Verhältnisse günstiger; die Monatmittel des Winters haben denselben Grad der Sicherheit wie auf der Nord- und Ostseite jene des Frühlings und Herbstes, der wahrscheinliche Fehler liegt zwischen 0·2 und 0·25; im Frühling beträgt er durchschnittlich 0·2, im Sommer etwas mehr als 0°15 und im Herbste 0·15 bis 0·20. Die Sicherheit des Jahresmittels geht schon über 0°1 hinaus, indem der wahrscheinliche Fehler des 30jährigen Mittels nur mehr 0·08 beträgt.

Der wahrscheinliche Fehler des Decembermittels in Klagenfurt ist 0·46, in Tröpolach 0°49, dagegen in Bozen blos 0·23, also halb so gross, wie in Klagenfurt, so dass eine viermal kürzere Beobachtungsreihe in Bozen genügt, um das Decembermittel mit gleicher Sicherheit zu bestimmen. Im Juli stehen die Verhältnisse anders, dann beträgt der wahrscheinliche Fehler des Mittels in Klagenfurt 0°14, in Bozen dagegen 0°20.

Die folgende Tabelle gibt an, wie viele Beobachtungsjahre nöthig wären, um den wahrscheinlichen Fehler der Monat- und Jahresmittel bis auf ±0°1 zu vermindern.

Zahl der Jahre, nöthig zur Herabminderung des wahrscheinlichen Fehlers der Mittelwerthe auf ± 0°1 C.

	Nordfuss der Alpen	Hoch-alpen	Süd-östliche Alpen-thäler	Südtirol	Südfuss der Alpen	Nord-deutsch-land nach Hellmann
December...	480	370	460	190	200	260
Jänner......	290	200	370	130	200	290
Februar.....	330	310	370	160	170	340
März........	170	240	200	160	120	150
April.......	110	120	120	70	80	80
Mai........	250	220	190	160	160	110
Juni........	80	90	60	60	80	60
Juli........	120	130	70	100	70	70
August.....	110	160	80	80	80	60
September ..	90	130	80	70	70	40
October.....	120	200	190	90	120	70
November...	190	220	190	110	110	100
Jahr........	36	24	30	15	24	—
Winter......	370	290	400	160	190	300
Frühling	180	190	170	130	120	110
Sommer.....	100	130	70	80	80	60
Herbst......	130	180	150	90	100	70
Mittel.......	195	200	200	115	120	135

Auf der Nord- und Ostseite der Alpen und in diesen selbst würden 300—400 Beobachtungsjahre nöthig sein, um die Monatmittel des Winters bis auf ein Zehntel Grad Celsius sicher zu erhalten, worauf man demnach völlig verzichten muss; im Sommer genügen dazu 100 Jahre. In Südtirol und am Südfuss der Alpen stehen die Verhältnisse günstiger, dort genügen schon $1^1/_2$ bis 2 Jahrhunderte, um die Monatmittel des Winters, und 80 Jahre, um die des Sommers bis auf 0°1 sicher zu erhalten. Unsere 30jährige Periode genügt bloss, um die Jahresmittel bis auf einen wahrscheinlichen Fehler von $\pm$0°1 abzuleiten, soweit die Unsicherheit von den unperiodischen Schwankungen abhängt. In den Nordalpen sind 100 Jahre eben ausreichend, um den wahrscheinlichen Fehler der Monatmittel des Winters auf ein Fünftel Grad Celsius, die des Sommers auf 0°1 herabzumindern; in Südtirol genügen hiezu 40 und 80 Jahre.

Mit Rücksicht auf die unregelmässigen Schwankungen der Temperatur in unseren Gegenden ist demnach die Sicherheit der absoluten Werthe der 30jährigen Monatstemperaturen eine ziemlich beschränkte, sie geht im Winter wenig unter einen halben Grad herab und beträgt noch im Sommer $1^1/_2$ bis 2 Zehntel Grade. Diese Unsicherheit kommt mit ihrem ganzen Betrage zur Geltung, wenn wir diese Mittel mit jenen aus sehr entfernten Gegenden vergleichen, so dass, wie wir früher erörtert haben, die Differenzen zwischen denselben schon ebenso grosse Abweichungen unter einander zeigen, wie die absoluten Werthe selbst. Ganz anders verhält es sich aber, so lange wir nur die Mittelwerthe aus einem relativ kleinen Theile eines Erdtheiles unter einander zu vergleichen haben, namentlich wenn die betreffenden Länder ein ziemlich einheitliches klimatisches Regime haben, wie im vorliegenden Falle. Da genügen schon kürzere Beobachtungsreihen, um Mittelwerthe zu liefern, welche, soweit die unregelmässigen Temperaturschwankungen in Betracht kommen, bis auf 0°1 Grad unter einander vergleichbar sind. Wenn aber, wie in den meisten Fällen, die einzelnen Beobachtungsreihen, welche die zu vergleichenden Mittelwerthe geliefert haben, keine gleichzeitigen sind, so muss die Reduction auf eine und dieselbe Normalperiode stattfinden, wenn man nicht Lamont's Gedanken ausführen wollte, die Differenzen gegen eine

Hauptstation selbst als die thermischen Constanten aufzustellen. In diesem Falle müssten aber doch die Temperaturmittel dieser Hauptstationen auf die gleiche Periode zurückgeführt werden, und man sieht leicht ein, dass es schon empfehlenswerther ist, diese Reduction allgemein durchzuführen. Weitere Gründe dafür werden sich noch aus den folgenden Erörterungen ableiten lassen. Wir müssen aber nun daran gehen, den Satz auch nachzuweisen, dass eine viel geringere Zahl von Jahren genügt, den wahrscheinlichen Fehler der Differenzen der Temperaturmittel benachbarter Stationen auf das gleiche Mass herabzumindern, als nöthig wäre dies in Bezug auf die absoluten Werthe zu erreichen.

II. Die mittleren Abweichungen der Temperaturdifferenzen benachbarter Stationen und die wahrscheinlichen Fehler der Reduction auf die Normalperiode.

Ich habe schon in der Einleitung zu dieser Abhandlung bemerkt, dass eine strenge und umfassende Untersuchung der Sicherheit der nach der gewöhnlichen Dove'schen Methode der Reduction auf eine Normalperiode erhaltenen Mittelwerthe bisher nicht durchgeführt worden ist; namentlich die Frage nach der Zulässigkeit der Methode bei Stationen von bedeutenderem Höhenunterschiede ist bisher kaum berührt worden. Das mir vorliegende Materiale von Temperaturmitteln gestattete nun gerade diese Frage gründlicher zu beantworten. Von ihrer Lösung hängt der Grad der Brauchbarkeit fast des grössten Theiles des hier zur Verwendung kommenden Beobachtungsmateriales ab. Wir haben ja aus unserem Alpengebiete grösstentheils nur die Resultate kürzerer Beobachtungsreihen, welche zudem den verschiedensten Jahrgängen angehören.

So viel ich weiss, hat zuerst Hellmann den Versuch gemacht, die Sicherheit der Reduction auf eine Normalperiode zu prüfen.[1] Denn Dove's Gegenüberstellung der mittleren Abweichungen der Monatstemperaturen von Chiswick und London aus gleichen

---

[1] G. Hellmann: Über die Zurückführung einer kurzen Beobachtungsreihe der Luftwärme auf die längere einer benachbarten Normalstation. Zeitschrift für Met. 1875, X. Band, p. 181—186.

Jahrgängen kann man kaum hiebei in Betracht ziehen. (Über das Zurücktreten localer Einflüsse gegen die von den allgemeineren Bewegungen des Luftkreises abhängigen Wärmeänderungen. Monatsberichte der kön. Akademie zu Berlin, Nov. 1872). Hellmann stützte sich auf die 25jährigen gleichzeitigen Beobachtungsresultate der Stationen des preussischen met. Instituts, indem er annahm, dass von einer Station nur 20 Beobachtungsjahre vorhanden wären, die Mittel dieser 20 Jahre dann mit Hilfe einer Nachbarstation auf die 25jährige Normalperiode reducirte und die derart erhaltenen Mittel mit den wirklichen, von den Beobachtungen gelieferten 25jährigen Mitteln verglich. Er kam dabei schon zu einigen bemerkenswerthen Resultaten. Man sieht aber leicht ein, dass hier die Prüfung auf einen der günstigsten Fälle, in der die Methode überhaupt Anwendung finden wird, angewendet worden ist, eine Reduction von 20jährigen Mitteln auf 25jährige in einem Lande wie Norddeutschland, wo die Temperaturverhältnisse relativ so gleichförmig sind und Höhenunterschiede kaum in Betracht kommen. Es hat jedoch Hellmann am Schlusse seiner Abhandlung auch einige Stationen des württembergischen Beobachtungsnetzes von ziemlichen Höhenunterschieden auf gleiche Weise behandelt und die Schwierigkeiten aufgezeigt, denen hier die Reductionsmethode unterliegt.

Auf umfassendere Weise, aber nach gleicher Methode wie Herr Hellmann, hat Herr Wild in seinem Werke über die Temperaturverhältnisse des Russischen Reiches die Sicherheit der Reduction kürzerer auf längere Beobachtungsreihen geprüft (pag. 292—304). Er bestimmte auf dem obigen Wege die Fehler der Reduction einjähriger, 5jähriger und 10jähriger Mittel auf längere Perioden. Die verglichenen Stationen, im Ganzen 12 Paare, waren von einander 240 bis 1450 Kilometer entfernt. (Extreme: Kischinew-Nikolajew und Barnaul-Irkutsk.) Herr Wild kam hiebei zu wichtigen Resultaten, von denen einige hier angeführt werden müssen, weil das Argument der Entfernung bei seinen Vergleichen in viel grösseren Intervallen schwankte, als dies bei den hier zur Behandlung kommenden Temperaturmitteln der Fall ist.

„Bei allen Combinationen (5jährige und 10jährige Reihen) gewährte die Reduction einen Vortheil, nur bei der Reduction Irkutsk-Barnaul ist die Zahl der ungünstigen Fälle schon etwas

grösser als die der günstigen. Im Allgemeinen nimmt der Erfolg der Reduction (der Zulässigkeitsgrad derselben) mit wachsender Entfernung der betreffenden Orte ab; indessen ist dieser Factor durchaus nicht der allein massgebende, sondern wird offenbar durch den Einfluss der mehr oder minder gleichen klimatischen Lage überwogen. Soll die Reduction erhebliche Vortheile bieten, so scheint es, dass die Entfernung der beiden Orte nicht grösser als 800 Kilometer (circa 7 Grade) sein darf, und es wird nebenbei auch eine gleichartige klimatische Lage erfordert". — „Selbst bei Entfernungen von blos 200 Kilometern dürfte die Sicherheit der Reduction 5jähriger Mittel $\pm 0^\circ 3$ Abweichung vom Normalwerth kaum je übersteigen" (l. c. pag. 302).

Für die Untersuchung des Einflusses des Höhenunterschiedes der Stationen bot sich Herrn Wild keine Veranlassung.

Unsere nun folgende Untersuchung der Sicherheit der in Rede stehenden Reductionsmethode ist eine andere, als die von Herrn Hellmann und Herrn Wild angewendete. Sie ging wie von selbst aus dem von uns angewendeten Rechnungsvorgang zum Behufe der Reduction auf eine Normalperiode hervor. Der gewöhnlich befolgte Rechnungsvorgang ist ein zweifacher. Entweder sucht man mit Hilfe der correspondirenden Mittel einer Normalstation, deren Beobachtungen sich über die ganze Periode erstrecken, die durchschnittlichen Abweichungen der Monatmittel vom Normalstande für jene Periode auf, aus denen die Beobachtungsresultate der secundären Station stammen, deren Mittel zu reduciren sind (diese Abweichungen mit entgegengesetzten Zeichen bilden dann die Reductionsgrössen), oder man leitet auch für die Normalstation die den Mitteln der secundären Station correspondirenden Temperaturmittel ab, bildet deren Differenz und bringt diese Differenzen an die Normalmittel der Hauptstation an. Handelt es sich um Reduction vieler Temperaturmittel, die aus stets verschiedenen Perioden herrühren, so ist die Berechnung der vielen entsprechenden Abweichungen, oder Mittelwerthe der Hauptstation eine höchst lästige und ermüdende Arbeit, die mit um so grösserer Unlust vorgenommen wird, als der Vorgang der Ableitung dieser stets sich ändernden und doch nur wenig verschiedenen Zahlen in sich keine Controle der Richtigkeit der Rechnung darbietet.

Es ist desshalb viel vortheilhafter, die Differenz jedes individuellen Monat- und Jahresmittels gegen das entsprechende Mittel der Normalstation zu bilden, und diese Differenzen dann zu den entsprechenden Mittelwerthen zu vereinigen. Da diese Differenzen für die gleichen Zeitabschnitte des Jahres nur innerhalb eines gewissen kleinen Spielraumes schwanken, worauf ja die ganze Reductionsmethode beruht, so hat man in der Übereinstimmung der Differenzen für den gleichen Monat eine unmittelbare Rechnungscontrole. Jede etwas auffallende Abweichung von der erwarteten Constanz dieser Differenzen wird die Aufmerksamkeit wach rufen und nicht allein zu einer wiederholten Bildung der Differenz führen, sondern auch, falls dabei kein Rechenfehler entdeckt wird, zu einer Controle der verwandten Mittelwerthe selbst. Dies ist nun ein zweiter grosser Vorzug dieser Methode. So werden Fehler entdeckt, die in den Mitteln selbst der Beachtung vollkommen entgangen wären. Indem ich alle diese Differenzen für alle einzelnen Monats- und Jahresmittel aller Stationen selbst bildete, hatte ich eine ausgezeichnete Controle der in Verwendung kommenden Mittelwerthe. Es gewährt den grössten Vortheil, die einzelnen Differenzen selbst zu bilden, weil man dabei jeder einzelnen Differenz eine besondere Aufmerksamkeit zuwenden muss, und so jede auffallende Abweichung leicht entdeckt und dieselbe sogleich zum Gegenstand des Nachforschens über deren Richtigkeit wird.

Hat man nun eine Reihe von Jahrgängen solcher Temperaturdifferenzen gegen eine Normalstation und deren Mittelwerthe vor sich, so ergibt sich von selbst der Gedanke, durch Bildung von Abweichungen der einzelnen Differenzen gegen den entsprechenden Mittelwerth ein Maass für deren Verlässlichkeit zu erhalten. Indem man aus den Abweichungen Mittelwerthe bildet ohne Rücksicht auf die Vorzeichen, erhält man die mittlere Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen für die Monate und das Jahr und dadurch auch die wahrscheinlichen Fehler der mittleren Differenzen selbst. Damit ist die Aufgabe, die Sicherheit der Methode der Reduction auf eine Normalperiode festzustellen, allgemein gelöst. Man erhält so leicht für jede einzelne Station die wahrscheinlichen Fehler der Differenzen und der reducirten Mittel.

Die von mir hier angewendete Methode [1] hat aber noch einen weiteren höchst schätzbaren Vortheil. Man merkt es aus dem Gange der aufeinander folgenden Differenzen sogleich, wann eine derartige (auch „passive") Änderung in der Aufstellung der Instrumente an einer der beiden Stationen eingetreten ist, dass die neue Beobachtungsreihe mit der früheren nicht mehr „homogen" ist. Die Differenzen sind hiefür sehr empfindlich, namentlich die Differenzen der Jahresmittel, und zeigen Änderungen an, die einem sonst sicherlich entgangen wären, z. B. „passive" Änderungen in der Aufstellung durch Veränderungen in der Umgebung des Beobachtungsortes, Neubauten, die durch Windschutz oder Strahlung nun Einfluss nehmen etc. Ich werde im speciellen Theile vielfach Gelegenheit haben, dies nachzuweisen; es ist oft geradezu erstaunlich, auf wie weite Entfernungen (z. B. Graz-Klagenfurt, Laibach-Klagenfurt) die Differenzen Änderungen in der Umgebung der Thermometer anzeigen, deren Einfluss selbst dem Beobachter gänzlich unbekannt geblieben ist.

Die Bildung der einzelnen Temperaturdifferenzen für jeden Monat und namentlich auch für die Jahresmittel gewährt demnach folgende Vortheile: 1. gestattet sie die Ableitung der mittleren Veränderlichkeit der Differenzen und damit des wahrscheinlichen Fehlers derselben; 2. führt sie zur Auffindung der Unterbrechungen in der Homogenität der Beobachtungsreihen; 3. bietet sie eine Controle der Rechnung selbst, sowie der Richtigkeit der verwendeten Mittelwerthe; und 4. ist die Rechnung selbst bequemer als die anderen Rechnungsweisen, die man zum Behufe der Reduction kurzer Beobachtungsreihen auf eine längere Normalperiode überhaupt anwenden kann.

In den nachfolgenden Tabellen sind die mittleren Abweichungen der Temperaturdifferenzen von 47 Stationspaaren zusammengestellt zum Behufe der Prüfung der Sicherheit der Reductionsmethode unter den verschiedensten Verhältnissen. Es sind nur jene Stationen hiezu verwendet worden, von denen ver-

[1] Ich nehme natürlich durchaus nicht eine Priorität dafür in Anspruch. Jelinek namentlich hat von ihr reichlich Gebrauch gemacht, ebenso Buys-Ballot. Aber das Eingehen auf die individuellen Differenzen gibt dieser Methode erst ihren vollen Werth und dies geschieht hier zuerst im vollen Umfange.

lässliche Beobachtungsresultate vorliegen, weil die hier verwendeten Differenzen ja nur ein Maass für die Sicherheit der Reduction, nicht aber ein Maass für die Verlässlichkeit der einzelnen Beobachtungsreihen geben sollen. Alle Differenzen, die von nicht homogenen Reihen herrühren, mussten desshalb hier ausser Betracht kommen, dessgleichen die Resultate aus unsicheren Beobachtungsreihen. Ganz gleichwerthig sind natürlich trotzdem die folgenden Werthe der Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen zwischen den einzelnen Stationspaaren durchaus nicht; in manchen steckt auch noch ein Theil von Beobachtungsfehlern und vielleicht auch von trotz aller Controle nicht entdeckten Rechenfehlern. Namentlich die Mittel der hochgelegenen alpinen Stationen können selbstverständlich nicht immer dasselbe Maass der Sicherheit besitzen, wie Stationen an Observatorien in der Niederung. Die mittlere Veränderlichkeit dieser Differenzen gibt dann wenigstens ein Maass dafür ab, wie gross die Sicherheit der Methode mindestens geschätzt werden muss, also die untere Grenze derselben. Localeinflüsse dagegen, wenn sie nur constant geblieben sind, nehmen keinen störenden Einfluss auf die Ableitung der Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen, selbst wenn sie die Richtigkeit der Mittelwerthe selbst ersichtlich schädigen.[1] — Inwieferne die Prüfung der einzelnen Temperaturdifferenzen jeder Station gegen eine Normalstation und deren jährlicher Gang eine Controle für die Güte oder die Bedenklichkeit der betreffenden Beobachtungsreihe gewährt habe, gehört in den zweiten speciellen Theil dieser Abhandlung. — Die mittleren Abweichungen der Temperaturdifferenzen sind in drei Gruppen tabellarisch zusammengestellt worden: *A.* Stationspaare mit grosser Entfernung und geringen Höhenunterschieden; *B.* solche mit geringerer Entfernung und gleichfalls geringen Höhenunterschieden und *C.* jene mit grossen Höhenunterschieden bei sehr verschiedenen Entfernungen. In Gruppe *A* und *B* sind die Stationspaare nach der Entfernung angeordnet, in Gruppe *C* mehr nach localen Gesichtspunkten. *E* bezeichnet die Entfernung in Kilometern, ΔH den Höhenunterschied in Metern, $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda$ den Breiten- und Längenunterschied.

---

[1] Man kann natürlich constant bleibende Localeinflüsse in den Differenzen nicht erkennen, nur die Änderungen in denselben.

I.

Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen.

A. Grosse Entfernung, geringe Höhenunterschiede.

	Wien-Klagenfurt	Wien-Ofen	München-Kremsmünst.	Genf-Basel	Wien-Kremsmünst.	Wien-Graz	Obir-Schafberg	Basel-Altstätten	Mailand-Riva	Wien-Oberschützen
Zahl der Jahre	30	13	30	30	30	30	8	20	14½	11
E (Kilom.)	237	215	190	185	167	146	162	146	140	100
$\Delta\varphi$	1° 37′	0° 43′	0° 5′	1° 21′	0° 10′	1° 10′	1° 16′	0° 10′	0° 25′	0° 56′
$\Delta\lambda$	2° 4′	2° 41′	2° 34′	1° 26′	2° 14′	0° 54′	1° 1′	1° 58′	1° 39′	0° 6′
ΔH (Met.)	240	90	140	130	180	140	270	200	60	100
December	**1·63**	**0·91**	**0·71**	**0·78**	0·58	0·64	0·52	0·66	0·61	0·49
Jänner	1·56	0·66	0·67	0·63	0·54	0·60	0·68	**0·87**	**0·80**	0·31
Februar	1·58	0·56	0·67	0·69	**0·76**	**0·78**	0·46	0·73	0·65	**0·84**
März	0·68	0·56	0·43*	0·40	0·43	0·47	0·54	0·36	0·54	0·36
April	0·78	0·36	0·49	0·31*	0·32*	0·35*	0·41	0·37*	0·37*	0·32*
Mai	0·55	0·38	**0·53**	0·47	0·42	0·46	0·61	0·51	0·44	0·46
Juni	0·52*	0·35	0·40	0·62	0·38	0·45	0·40	0·30*	0·47	0·38
Juli	0·52*	0·30*	0·40	0·59	0·41	0·40	0·35	0·42	**0·55**	0·27*
August	**0·66**	0·33	0·36*	**0·74**	**0·48**	0·40	0·51	0·27*	0·40	0·39
September	0·53*	0·50	0·42	0·64	0·39	0·38*	0·30	0·46	0·39*	0·42
October	0·54	0·47	0·37	0·47	0·42	0·36	0·28	0·51	0·47	0·28*
November	1·11	0·59	0·48	0·67	0·54	0·58	0·42	0·40	0·53	**0·58**
Jahr	0·32	0·19	0·23	0·29	0·26	0·31	—	0·18	0·29	0·25
Winter	1·59	0·71	0·68	0·70	0·63	0·67	0·55	0·75	0·69	0·55
Frühling	0·67	0·43	0·48	0·39	0·39	0·43	0·52	0·41	0·45	0·38
Sommer	0·57	0·33	0·39	0·65	0·42	0·42	0·42	0·33	0·47	0·33
Herbst	0·73	0·52	0·42	0·59	0·45	0·44	0·33	0·46	0·46	0·43
Mittel	0·89	0·50	0·49	0·59	0·47	0·49	0·46	0·49	0·52	0·44
Winterhlbj.	1·18	0·62	0·56	0·61	0·54	0·57	0·48	0·59	0·60	0·51
Sommerhlbj.	0·59	0·37	0·43	0·56	0·40	0·41	0·43	0·39	0·44	0·37

II.

B. Entfernung unter 100 Kilometer, Höhendifferenz unter 400 Meter.

Zahl der Jahre	Graz-Klagenfurt 30	Sachsenb.-Klagenfurt 17½	Alessandria-Mailand 21	Graz-Oberschützen 11	Laibach-Rudolfswerth 18	Krems-Wien 12	Kremsmünster-Ischl 20	Wien-Guttenstein 11	Kremsmünster-St. Georgen 14	Graz-Bruck-Leoben 14
E (Kilom.)	98	75	75	63	57	55	54	51	50	41
Δφ	0° 27′	0° 32′	0° 33′	0° 14′	0° 15′	0° 11′	0° 21′	0° 21′	0° 8′	0° 15′
Δλ	1° 10′	0° 57′	0° 33′	0° 48′	0° 14′	0° 46′	0° 31′	0° 30′	0° 39′	0° 21′
Δ*H* (Met.)	90	110	50	240	130	20	80	260	180	170
December	**1·86**	**1·06**	0·40	0·32	0·29	0·22	**0·69**	0·38	**0·42**	**0·56**
Jänner	1·23	0·89	**0·65**	0·26	**0·57**	0·22	0·65	0·45	0·31	0·50
Februar	0·90	1·04	0·64	0·27	0·51	0·20	0·64	0·41	0·32	0·61
März	0·62	0·61	0·27	0·16*	0·31	0·22	0·55	**0·58**	0·25	0·30
April	0·68	0·45	0·28*	0·18	0·26*	**0·34**	0·31	0·42	0·25	0·18*
Mai	0·46	0·32	0·33	0·30	0·28	0·17*	0·30	0·33	0·21*	0·25
Juni	0·43	0·48	**0·48**	0·24	0·23	0·24	0·40	0·30*	0·39	0·29
Juli	0·37	0·40	0·32	0·27	**0·30**	0·19	0·27	0·51	**0·51**	0·27
August	0·34*	0·36	0·39	0·33	0·29	0·22	0·24	0·58	0·34	0·28
September	0·33*	0·26*	0·32	**0·40**	0·23	0·28	0·31	**0·59**	0·33	0·22
October	0·39	0·27	0·24*	0·34	0·20*	**0·28**	0·38	0·55	0·26*	0·19*
November	0·65	0·49	0·33	0·34	0·29	0·28	0·64	0·26*	0·42	0·60
Jahr	0·22	0·15	0·12	0·08	0·12	0·11	0·18	0·21	0·26	0·17
Winter	1·16	1·00	0·56	0·28	0·46	0·21	0·68	0·41	0·35	0·56
Frühling	0·59	0·46	0·29	0·21	0·28	0·24	0·39	0·43	0·24	0·24
Sommer	0·38	0·41	0·38	0·28	0·21	0·22	0·30	0·46	0·41	0·28
Herbst	0·46	0·34	0·30	0·36	0·24	0·28	0·44	0·47	0·34	0·34
Mittel	0·65	0·55	0·39	0·29	0·31	0·24	0·45	0·44	0·34	0·36
Winterhlbj.	0·86	0·73	0·42	0·28	0·36	0·24	0·59	0·43	0·33	0·46
Sommerhlbj.	0·44	0·38	0·35	0·29	0·27	0·24	0·31	0·45	0·34	0·25

III.

Zahl der Jahre	Krems-münst.-LinzFrg. 25	Krems-münst.-St. Florian 20	Wien-Mödling 9	Laibach-Krainburg 12	Bregenz-Altstätten 12'	Laibach-Stein 11	Wien-Kalksburg 24	Wien-Hadersdorf 8	Hüttenberg-Knappenberg 7
E (Kilom.)	30	26	18	24	21	19	15	11	2
Δφ	0° 14′	0° 9′	0° 9′	0° 7′	0° 7′	0° 11′	0° 4′	0° 1′	0° 0′
Δλ	0° 8′	0° 15′	0° 5′	0° 9′	0° 13′	0° 7′	0° 8′	0° 9′	0° 2′
Δ*H* (Met.) ..	10	90	40	110	70	170	60	30	260
December ..	**0·30**	0·28	**0·31**	**0·52**	0·27	**0·51**	0·31	0·15*	**0·51**
Jänner	0·24	0·22	0·22	0·42	**0·43**	0·43	0·28*	0·18	0·41
Februar	0·23	**0·30**	0·21	0·42	0·39	0·38	0·40	0·29	0·44
März	0·21*	0·18	0·19	0·38	0·33	0·55	0·38	0·32	0·37
April	0·29	0·21*	0·11*	0·22	0·18*	0·27	0·41	0·31	0·16
Mai	0·27	0·26	0·14	0·19*	0·40	0·13*	0·40	0·34	0·14*
Juni	0·29	0·32	0·18	0·23	0·30	0·28	0·41	0·24	0·30
Juli	0·26	**0·35**	0·17	**0·33**	0·24	0·19	**0·50**	0·23	0·21
August	0·27	0·30	0·20	0·26	0·28	0·26	0·36	**0·42**	0·21
September .	0·34	0·28	0·21	0·31	0·24	0·20	0·45	0·41	0·21
October	**0·42**	0·20	0·22	0·17*	0·30	0·27	0·37	0·26	0·29
November ..	0·28	0·19*	0·20	0·35	0·33	0·26	0·35	0·22	0·35
Jahr	0·12	0·17	0·07	0·14	0·13	0·05	0·20	0·10	0·09
Winter	0·26	0·27	0·25	0·45	0·36	0·44	0·33	0·21	0·45
Frühling ...	0·26	0·22	0·15	0·26	0·30	0·32	0·40	0·32	0·22
Sommer ...	0·27	0·32	0·18	0·27	0·27	0·24	0·42	0·30	0·24
Herbst	0·35	0·22	0·21	0·28	0·27	0·24	0·39	0·30	0·26
Mittel	0·28	0·26	0·20	0·32	0·30	0·31	0·38	0·28	0·30
Winterhlbj..	0·28	0·23	0·22	0·38	0·34	0·40	0·35	0·23	0·40
Sommerhlbj.	0·29	0·29	0·18	0·26	0·27	0·22	0·42	0·33	0·20

IV.

C. Grosse Höhenunterschiede (400—2000 Meter).

	St. Martin-Bozen	St. Martin-Mailand	St. Bernhard-Sils	Sulden-Marienberg	Hüttenberg-Graz	St. Lambrecht-Graz	St. Lambrecht-Klagenfurt	Steinpichl-Klagenfurt	Hausdorf-Klagenfurt
Zahl der Jahre	22	22	20	18	17	16	15	10	17
E (Kilom.)	33	281	210	20	69	86	49	28	35
$\Delta\varphi$	0° 17′	1° 19′	0° 34′	0° 10′	0° 7′	0° 0′	0° 27′	0° 11′	0° 18′
$\Delta\lambda$	0° 7′	2° 13′	2° 33′	0° 4′	0° 55′	1° 10′	0° 0′	0° 4′	0° 0′
ΔH (Met.)	360	480	670	510	440	690	600	640	520
December	**0·77**	**0·75**	**1·13**	0·57	0·49	0·63	1·32	**1·68**	**1·38**
Jänner	0·47	0·68	1·00	**0·65**	0·46	**0·81**	**1·89**	0·86	1·24
Februar	0·41	0·57	0·83	0·49	0·47	0·71	1·47	1·00	1·28
März	0·24	0·62	0·71	0·45	**0·66**	0·66	0·66	0·83	0·53
April	0·30*	0·39*	0·58	0·50	0·45	0·44	0·47	0·39	0·44
Mai	0·30	0·45	0·51	0·39*	0·30*	0·26*	0·40*	0·32	0·29*
Juni	**0·48**	0·40	0·33*	0·38	0·42	0·44	0·40	0·26*	0·35
Juli	0·45	0·41	0·38	**0·60**	**0·55**	**0·46**	**0·55**	0·26	0·28
August	0·35	**0·54**	0·45	0·47	0·43	0·36	0·38	**0·84**	0·24*
September	0·29*	0·42	0·58	0·41	0·42	0·33*	0·44	0·22*	0·32
October	0·30	0·43	0·56	0·25	0·29*	0·40	0·61	0·45	0·38
November	0·32	0·64	0·67	0·24*	**0·72**	**0·70**	0·95	0·81	0·57
Jahr	0·22	0·21	0·19	0·15	0·16	0·24	0·32	0·20	0·21
Winter	0·55	0·67	0·99	0·57	0·47	0·72	1·39	1·16	1·30
Frühling	0·28	0·49	0·60	0·45	0·44	0·45	0·51	0·51	0·42
Sommer	0·43	0·45	0·39	0·48	0·47	0·42	0·44	0·29	0·29
Herbst	0·30	0·50	0·60	0·30	0·48	0·48	0·67	0·49	0·42
Mittel	0·39	0·53	0·15	0·45	0·47	0·52	0·75	0·61	0·61
Winterhlbj.	0·42	0·62	0·82	0·44	0·51	0·65	1·07	0·93	0·90
Sommerhlbj.	0·36	0·44	0·47	0·46	0·43	0·38	0·44	0·30	0·32

V.

	St. Magdalena-Laibach	Sachsenburg-Turrach	Sachsenburg-Prägratten	Saifnitz-Luschariberg	Schafberg-Ischl	Obir-Hüttenberg	Obir-Klagenfurt	Obir-Laibach	St. Bernhard-Genf
Zahl der Jahre	12	10	21	19	13	9	20	9	30
E (Kilom.)	16	43	75	3	17	49	18	50	88
Δφ	0° 3′	0° 53′	0° 56′	0° 2′	0° 4′	0° 27′	0° 7′	0° 27′	0° 20′
Δλ	0° 21′	0° 32′	0° 59′	0° 1′	0° 11′	0° 6′	0° 9′	0° 3′	0° 3′
Δ*H* (Met.)	570	720	750	930	1310	1260	1610	1760	2070
December	**1·09**	0·95	**1·52**	—	**2·11**	1·03	1·81	2·20	**1·71**
Jänner	0·73	**1·34**	0·88	—	1·35	1·07	**2·01**	2·08	1·41
Februar	0·79	1·09	1·38	—	1·81	1·08	2·11	1·71	0·95
März	0·42	0·70	0·88	—	0·78	0·70	1·39	1·03	0·85
April	0·42	0·37	0·37	—	0·46	0·36	0·80	0·40	0·36
Mai	0·42	0·33*	0·36*	—	0·25*	0·57	0·83	0·58	0·40
Juni	0·43	0·41	0·45	0·36	0·50	0·59	0·81	0·54	0·26*
Juli	0·39	**0·47**	**0·49**	0·34	**0·45**	0·71	0·78*	0·56	0·38
August	0·41	0·36	0·35	0·49	0·43	0·56	0·91	0·53	0·54
September	0·37	0·20*	0·34*	0·60	0·45	0·44	1·15	0·50	0·59
October	0·41	0·64	0·36	—	0·82	0·55	1·20	0·70	0·65
November	0·72	0·70	0·78	—	0·97	1·06	1·25	1·44	1·77
Jahr	0·22	0·29	0·32	—	0·35	0·30	0·47	0·39	0·30
Winter	0·87	1·13	1·26	—	1·76	1·06	1·98	2·00	1·36
Frühling	0·42	0·47	0·54	—	0·50	0·54	1·01	0·67	0·54
Sommer	0·41	0·41	0·43	0·40	0·46	0·62	0·83	0·54	0·39
Herbst	0·50	0·51	0·49	—	0·75	0·68	1·20	0·88	0·67
Mittel	0·55	0·63	0·68	—	0·87	0·72	1·25	1·02	0·74
Winterhlbj.	0·69	0·90	0·97	—	1·31	0·91	1·63	1·53	1·06
Sommerhlbj.	0·41	0·36	0·39	—	0·42	0·57	0·88	0·52	0·42

Bevor wir in die Discussion der in den vorhergehenden Tabellen enthaltenen absoluten Werthe eingehen, wollen wir früher deren jährlichen Gang betrachten, weil uns dies gestatten wird, die Discussion der absoluten Werthe und die darauf basirte Untersuchung der wahrscheinlichen Fehler übersichtlicher und kürzer zu fassen.

Eine etwas aufmerksame Musterung der Tabellen I bis V lehrt sogleich, dass die Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen zwischen zwei Stationen, deren Entfernung oder Höhenunterschied einigermassen erheblich ist, einen sehr deutlich ausgesprochenen jährlichen Gang zeigt, mit einem Maximum im Winter und einem Minimum, das auf einen oder zwei Monate der wärmeren Jahreszeit fällt. Es stellt sich nämlich meist noch ein zweites kleines Maximum der Veränderlichkeit im Sommerhalbjahr ein, aber ohne die Tendenz auf einen bestimmten Monat zu fallen. Bei einigen Stationsgruppen von geringer gegenseitiger Entfernung wird sogar das Maximum des Sommerhalbjahrs zum Hauptmaximum und es zeigt sich eine Tendenz zu einer Abnahme der Veränderlichkeit im Winter.

Die Stationspaare aber mit grossen Höhenunterschieden, und namentlich jene, wo die unteren Stationen dem kärntnerischen Becken mit der grossen Winterkälte angehören, zeigen einen extremen jährlichen Gang derart, dass das Wintermaximum der Veränderlichkeit das Minimum um das Dreifache bis Sechsfache übertrifft.

Im Winter sind die Unterschiede der Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen sehr gross, im Sommer findet eine auffallende Ausgleichung derselben statt; besonders, wenn man von einigen abnormen Fällen, die nicht sichergestellt scheinen, absieht.

Eine auffallende Übereinstimmung in der jährlichen Periode, wie wir sie bei der mittleren Veränderlichkeit der Mittelwerthe selbst constatiren konnten, zeigt sich in den monatlichen Werthen der Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen nicht; es herrscht im Gegentheile in allen Einzeltheilen des jährlichen Ganges eine grosse Verschiedenheit, ja in einzelnen, allerdings wenigen Fällen kehrt sich der Gang geradezu um gegenüber der Mehrzahl der anderen Fälle. Es darf jedoch auch nicht übersehen werden, dass viele der vorliegenden Mittelwerthe aus einer zu geringen Anzahl

von Jahrgängen abgeleitet werden mussten, als dass diese Mittel selbst schon innerhalb des Betrages der jährlichen Schwankungen einigermassen sicher wären.

Um die Eigenthümlichkeiten des jährlichen Ganges besser überblicken zu können, sind in nachfolgender Tabelle einige Mittelwerthe, aus Stationsgruppen gebildet, zusammengestellt worden. Die Gruppen I und II, grosse Entfernungen, kleine Höhenunterschiede, zeigen, ich möchte sagen, die Norm, Maximum im Winter, Minimum im Sommer; Gruppe III, wo Stationen mit verschiedenen klimatischen Verhältnissen, Stationen im Flachlande mit Stationen im Gebirge oder an einem See verglichen sind (Alessandria-Mailand schliesst sich diesem Typus ziemlich an), zeigen ein zweites Sommermaximum von erheblicher Grösse, Minima im April und October. Gruppe IV (die eine Station im Alpenvorlande, die zweite im Gebirge selbst bei geringerer Entfernung) zeigt bei viel geringerer Veränderlichkeit eine Analogie mit Gruppe III; in Gruppe V übertrifft das Sommermaximum das des Winters, Minima März und October, die Stationen liegen gleichartig, das Wintermaximum wird durch Ungleichheit der unperiodischen Temperaturschwankungen, das Sommermaximum durch Ungleichheiten der Isolation in Folge verschiedener Bewölkung und Regenvertheilung verursacht (soweit Fehler mitspielen auch durch schädliche Strahlungseinflüsse); Gruppe VI zeigt das Verhalten ähnlich liegender[1] nicht weit von einander entfernter guter Temperaturstationen, geringen jährlichen Gang, Maximum im Winter, Minimum im Sommer. Gruppe VII endlich Temperaturdiffenzen von Wien gegen benachbarte Stationen im Wiener Wald oder in den Voralpen, zeigt ein Minimum der Veränderlichkeit im Winter und Frühsommer, Maxima im März und September. Im Winter, wo die Verhältnisse, welche Einfluss auf die Temperatur nehmen, in Wien und im Wiener Wald sehr gleichartig sind, ist die Grösse der Temperaturunterschiede und deren Veränderlichkeit am kleinsten, im März, wo um Wien die Schneedecke meist schon ganz verschwunden ist, dagegen im Wiener Wald und in den Voralpen noch anhält, erreicht die Veränderlichkeit ein erstes Maxi-

[1] Da die Differenzen aus dem letzten Decennium herrühren, ist die Vergleichsstation nicht Wien Stadt, sondern Wien Hohe Warte.

mum, bis zum Juni werden die Verhältnisse wieder immer gleichförmiger; im Spätsommer und Herbst dagegen, wo die Temperatur um Wien relativ sehr hoch und die Trockenheit immer grösser wird, während im Wiener Wald in Folge grösserer Feuchtigkeit und des abkühlenden Einflusses der Wälder die Temperatur viel niedriger ist, erreicht die Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen ihr Hauptmaximum. Bei so benachbarten Stationen wächst die Veränderlichkeit der Differenzen mit der absoluten Grösse derselben. Wie wir im speciellen Theile sehen werden, gleicht der Winter die mittleren Temperaturunterschiede von benachbarten Stationen gleicher Höhenlage und ähnlicher Terrainbildung bis zu einem Minimum aus, und bewirkt zugleich eine beträchtliche Constanz derselben, wenn auch die Vegetationsverhältnisse der Umgebung noch so verschieden sein mögen (wie bei Wien-Hadersdorf, Wien-Kalksburg). Im Sommer dagegen bewirkt eine Ungleichheit der letzteren eine bedeutende Temperaturdifferenz und zugleich eine grössere Veränderlichkeit derselben, Verminderung in nassen, trüben, grosse Steigerung in heiteren, heissen Perioden.

Gruppe Klagenfurt und Gruppe Sachsenburg zeigen die ungeheure Steigerung der Veränderlichkeit im Winter bei Stationen von einigem Höhenunterschiede in einem Gebirgslande, wo die Umkehrung der Temperaturabnahme mit der Höhe im Winter häufig eintritt. Die Grösse des Höhenunterschiedes spielt dabei die geringste Rolle, wie weit die Höhendifferenz über 200 bis 300 Meter noch hinausgeht, ist ziemlich gleichgiltig. Die Veränderlichkeit nimmt vom Winter zum Sommer rasch ab, und das Sommerminimum ist, wenigstens in Kärnten, ein sehr erhebliches. Die Gruppe Obir, Schafberg und St. Bernhard zeigen den jährlichen Gang von Stationsgruppen, wovon die eine auf einem Berggipfel oder doch einem hohen Passe, die andere in einem Thale liegt. Das Wintermaximum ist 3- bis 6mal grösser als das Minimum des Frühsommers.

Jährliche Periode der Veränderlichkeit

	Gruppe I (3)	Gruppe II (5)	Gruppe III (3)	Gruppe IV (5)	Gruppe V (3)
E (Kilom.)	430	160	130	40	40
ΔH (Met.)	240	150	80	130	90
December	**0·98**	**0·66**	0·60	0·51	**0·33**
Jänner	0·87	0·63	**0·69**	**0·51**	0·26
Februar	**0·96**	**0·73**	0 66	0·51	0·28
März	0·71*	0·43	0·40	0·42	0·21*
April	0·75	0·37*	0·32*	0·25	0·25
Mai	0·76	0·47	0·41	0·23*	0·25
Juni	0·52	0·38	**0·52**	**0·29**	0·33
Juli	0·47*	0·38	0·49	0·27	**0·37**
August	0·52	0·37*	0·51	0·27	0·30
September	0·56	0·42	0·45	0·25	0·32
October	0·57	0·41	0·39*	0·24*	0·29*
November	0·84	0·52	0·51	0·43	0·30
Jahr	0·31	0·24	0·23	0·13	0·18

Gruppe I. Basel-Kremsmünster, München-Wien (je 20 Jahre 1861/80).
„ II. Kremsmünster-München; Kremsmünster-Wien; Basel-Altstätten, Graz-Wien, Wien-Ofen-Oberschützen.
„ III. Mailand-Riva, Mailand-Alessandria, Basel-Genf.
„ IV. Kremsmünster - Ischl, Laibach - Rudolfswerth, Laibach-Krainburg, Laibach-Stein, Graz-Bruck-Leoben.
„ V. Kremsmünster - Linz, Kremsmünster - St. Florian, Krems-St. Georgen.

der Temperaturdifferenzen.

Gruppe VI (2)	Gruppe VII (3)	Gruppe Klagenfurt (4)	Gruppe Sachsen-burg (2)	Gruppe Obir (3)	Gruppe Schafberg-St. Bernh. (2)
40	30	30	60	40	50
30	120	590	730	1540	1700
0·26	0·28*	**1·44**	**1·23**	1·68	**1·91**
0·22	0·30	1·16	1·11	**1·72**	1·38
0·20	0·37	1·25	**1·23**	1·63	1·38
0·21	**0·41**	0·67	0·79	1·04	0·81
0·22	0·38	0·43	0·37	0·52*	0·41
0·15*	0·36	0·34	0·34*	0·66	0·32*
0·21	0·32*	0·34	0·44	0·65	0·38
0·18	0·41	0·36	0·48	0·68	0·41
0·21	**0·46**	0·32*	0·35	0·67	0·48
0·24	**0·48**	0·33	0·27*	0·70	0·52
0·25	0·39	0·48	0·50	0·82	0·73
0·24	0·28*	0·78	0·74	1·25	0·87
0·09	0·17	0·24	0·30	0·39	0·32

Gruppe VI. Wien-Krems; Wien-Mödling.
„ VII. Wien-Guttenstein, Wien-Kalksburg; Wien-Hadersdorf.
Gruppe Klagenfurt: Klagenfurt gegen Sachsenburg, St. Lambrecht, Hausdorf, Steinpichl.
„ Sachsenburg: Sachsenburg gegen Turrach und Pregratten.
„ Obir: Obir gegen Klagenfurt, Laibach, Hüttenberg.

Im Allgemeinen kann man sagen, bei grossen Unterschieden in der Entfernung oder der Höhenlage der verglichenen Stationen ist die jährliche Periode der Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen derselben analog der jährlichen Periode der Veränderlichkeit der Mittelwerthe selbst; liegen die Stationen aber in Hinsicht auf horizontale wie verticale Entfernung ziemlich nahe, dann befolgt die Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen keine einfache jährliche Periode, es machen sich dann die verschiedenen Localeinflüsse überwiegend geltend gegenüber den Einflüssen der Ungleichheiten der allgemeinen unperiodischen Temperaturschwankungen.

Nach diesem Blick auf die jährliche Periode der Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen wird es genügen, bei der Discussion des absoluten Betrages derselben, und der Verhältnisse, von denen derselbe abhängt, blos die Mittel der Jahreszeiten und des Jahres in Betracht zu ziehen, ja in den meisten Fällen werden wir uns auf Winter-, Sommer- und allgemeines Mittel beschränken müssen.

Wenn man die allgemeinen Mittelwerthe in den Tabellen I bis IV näher betrachtet, so erkennt man sogleich, dass die Grösse der Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen zweier Orte abhängt von der Entfernung E, dem Höhenunterschiede ΔH und in fast gleichem Maasse von Localverhältnissen.

Den Einfluss der Localverhältnisse auf die Steigerung der Veränderlichkeit im Winter zeigen am auffallendsten die Stationen in Kärnten; Entfernung und Verschiedenheit der Höhenunterschiede treten hier gegen die Localverhältnisse ganz zurück.

Obgleich z. B. St. Lambrecht von Graz fast doppelt so weit entfernt ist, als von Klagenfurt, während der Höhenunterschied fast der gleiche bleibt, ist die Veränderlichkeit der Differenzen St. Lambrecht-Klagenfurt im Winter fast doppelt so gross, als jene von St. Lambrecht-Graz; man braucht also eine 4mal längere Beobachtungszeit, wenn man sichere Normalmittel von St. Lambrecht durch Differenzen gegen das nähere Klagenfurt ableiten will, als gegen das viel entferntere Graz. Im Sommer dagegen ist die Veränderlichkeit der Differenzen die gleiche. In ähnlicher Weise zeigt sich bei allen Differenzen gegen Klagenfurt eine excessive Veränderlichkeit derselben, wie Graz-Klagenfurt, Sachsenburg-

Klagenfurt, Wien-Klagenfurt zeigen. Die Veränderlichkeit der letzteren Differenz ist im Winter 1·59, während bei viel grösserer Entfernung und grösserem Höhenunterschied (360 Kilomet. gegen 240 und 330 Met. gegen 240) die mittlere Veränderlichkeit der Differenzen Wien-München blos 0·94 ist. Dass nicht die Lage auf der anderen Seite der Alpen die Hauptursache dieser Differenz ist, zeigt Graz-Wien mit 0·67. Auch die auf Sachsenburg in Oberkärnten bezogenen Temperaturdifferenzen zeigen noch eine ähnliche abnorme Veränderlichkeit. Die in den Thalsohlen Kärntens liegenden Temperaturstationen sind desshalb als Vergleichsstationen höchst ungünstig; jene sind die ungünstigsten, welche im Winter die grösste negative Temperaturanomalie zeigen (St. Paul, Klagenfurt, Villach, Tröpolach etc.). Wir wollen bei dem Einfluss der Localverhältnisse auf die Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen noch etwas verweilen.

Der Einfluss einer verschiedenen Lage der verglichenen Stationen auf die Vergrösserung der Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen derselben zeigt sich recht deutlich in den Gruppen: Basel-Genf und Mailand-Riva.

	Entfg.	Winterhalbj.	Sommerhalbj.	Mittel	Jahr
Genf-Basel	185 Kilom.	0·61	0·56	0·58	0·29
Riva-Mailand	140 „	0·60	0·44	0·52	0·29
Dagegen:					
München-Kremsmünster	190 „	0·56	0·43	0·49	0·23
Wien-Kremsmünster	167 „	0·54	0·40	0·47	0·26

Die Differenzen Basel-Altstätten zeigen im Winter und Herbst eine grössere Veränderlichkeit als jene von Wien-Graz bei gleicher Entfernung, obgleich die beiden letzteren Stationen durch Ketten der Alpen getrennt sind, während Basel-Altstätten eine sehr gleichartige Lage haben. Die Ursache ist jedenfalls, dass Altstätten dem Föhn sehr ausgesetzt ist, im Sommer ist auch die Veränderlichkeit der letzteren Gruppe erheblich kleiner, als die der ersteren.

Im hohen Grade zeigt sich der günstige Einfluss gleicher Lage auf die Erhaltung der Constanz der Temperaturdifferenzen bei den Differenzen Schafberg-Obir.

	Entfg.	ΔH	Winter	Frühl.	Somm.	Herbst	Jahr
Obir-Schafberg	162 K.	270	0·55	0·52	0·42	0·33	0·46
Obir-Klagenfurth-Laibach	34 „	1680	1·99	0·84	0·68	1·04	1·13

Obgleich der Obir vom Schafberg 5mal weiter als von den Basisstationen Laibach-Klagenfurt entfernt ist, und zudem die Hauptkette der Alpen zwischen beiden Gipfeln liegt, ein ziemlich verschiedenes klimatisches Regime im Norden und Süden bedingend, ist doch die Veränderlichkeit für die 5mal grössere Entfernung im Winter 3·6 mal kleiner, so dass man die Wintertemperatur des Obirgipfels durch Vergleich mit dem Schafberggipfel aus einer 13mal kürzeren Beobachtungsreihe ebenso sicher ableiten kann, als einer 13mal längeren, aus correspondirenden Beobachtungen mit Laibach und Klagenfurt. Achtjährige Temperaturdifferenzen Schafberg-Obir gewähren daher die gleiche Sicherheit wie 100jährige gegen Klagenfurt oder Laibach; selbst im Sommer stellt sich das Verhältniss noch wie 8 zu 21.

Diese Wahrnehmung hat mich zu dem Versuch ermuthigt, die Temperaturdifferenzen Schafberg-St. Bernhard abzuleiten und auf ihre Veränderlichkeit zu prüfen, obgleich die Entfernung 532 Kilometer und der Höhenunterschied auch noch 700 Meter beträgt. Die Ableitung der Normalmittel für den Schafberggipfel aus den Differenzen Ischl-Schafberg ist noch mit grossen wahrscheinlichen Fehlern behaftet, aber immerhin weit sicherer, als die directen Mittelwerthe selbst. Der Rigi, an den ich als beste Vergleichsstation sogleich dachte, hat selbst keine längeren Aufzeichnungen und die vorhandenen sind sehr ungleichwerthig und lückenhaft. Es bleibt also im ganzen Alpengebiet als Normalstation für hohe Punkte nur der St. Bernhard. Folgendes war das, ich muss sagen mich überraschende Ergebniss des Vergleiches (aus 11—13 Jahren):[1]

Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen St. Bernhard-Schafberg.

$E = 532$ Kilom. $\Delta H = 700$ Met. $\Delta\varphi = 1°56'$ $\Delta\lambda = 6°22'$

December	1·03	März	1·09	Juni	0·50	September	1·04
Jänner	1·00	April	0·90	Juli	0·53	October	1·09
Februar	0·94	Mai	0·77	August	0·70	November	0·88
Winter	0·99	Frühling	0·92	Sommer	0·58	Herbst	1·00

[1] Die Jahre 1871 und 1872 vom Schafberg wurden bis auf die drei Sommermonate weggelassen, detto Jänner, Februar und März 1875, welche ganz abnorme Differenzen ergaben.

Gesammtmittel 0·87, Veränderlichkeit der Jahresmitteldifferenzen 0·24 (die geringe Veränderlichkeit der Jahresmitteldifferenzen ist charakteristisch für höhere Stationen).

Daraus ergibt sich folgender Vergleich gegen die Differenzen Schafberg-Ischl $E = 17$, $\Delta H = 1310$:

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Mittel	Jahr
Schafberg-Ischl	1·76	0·50	0·46	0·75	0·87	0·35
Schafberg-St. Bernhard.	0·99	0·92	0·58	1·00	0·87	0·24.

Es ist desshalb viel zweckmässiger, die Mittel der Wintermonate aus den Differenzen gegen St. Bernhard abzuleiten als aus jenen gegen Ischl; für die Monate des Sommerhalbjahres sind letztere geeigneter. Deutlicher wird dies noch aus folgender Zusammenstellung:

Wahrscheinlicher Fehler der mittleren Differenzen der Monatstemperaturen im

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahresmittel
Schafberg-Ischl (13)	±0·42	0·13	0·11	0·18	0·08
Schafberg-St. Bernhard (11)	±0·26	0·24	0·15	0·26	0·06

Jahre nöthig, um den wahrscheinlichen Fehler auf ±0°1 zu erniedrigen.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahresmittel
Schafberg-Ischl	230	19	15	41	9
Schafberg-St. Bernhard	73	63	25	74	4

Eine oder zwei Normalstationen auf grossen Alpenhöhen leisten also für die Reduction der Mittelwerthe der Temperatur der Wintermonate von hoch gelegenen Stationen weitaus bessere Dienste, als noch so zahlreiche in tieferen Niveaux. Allerdings kommt neben dem Höhenunterschied hiebei auch noch eine ähnliche Lage in Betracht. Wir wollen desshalb noch die Differenzen St. Bernhard-Sils hier anführen. Letztere Station ist allerdings im Winter negativen Temperaturanomalien unterworfen, aber in viel geringerem Maasse als die Stationen in den Thalsohlen Kärntens.

	Entfg.	ΔH	Winter	Frühl.	Sommer	Herbst	Jahr
St. Bernhard-Sils	210 Kilom.	670	0·99	0·60	0·39	0·60	0·65
Sachsenburg-Turrach	43 „	720	1·13	0·47	0·41	0·51	0·63.

Erst bei fünfmal grösserer Entfernung und gleicher Höhendifferenz ist die Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen ähnlich jener im oberen Kärnten. Reducirt man die Differenzen St. Bernhard-Sils auf gleiche Entfernung und Höhenunterschied,[1] wie jene von Obir-Schafberg, so erhält man folgenden Vergleich:

	Entfg.	ΔH	Winter	Sommer	Jahr
St. Bernhard-Sils	160 Kilom.	270	0·65	0·30	0·47
Schafberg-Obir	160 „	270	0·55	0·42	0·46
Wien-Kremsmünster.....	167 „	180	0·63	0·42	0·47.

Die Übereinstimmung ist demnach eine treffliche und der Vergleich mit der Veränderlichkeit der Differenzen Wien-Kremsmünster zeigt, dass die absolute Seehöhe dabei nicht in Betracht kommt, sondern blos die relativen Höhenunterschiede. Das mittlere Niveau des ersten Stationspaares ist 2100 Meter, des zweiten 1900 Meter, des dritten kaum 300 Meter.

Für den günstigen Einfluss gleicher orographischer Verhältnisse (wozu auch die Pflanzendecke des Bodens hinzukommt) auf die grössere Constanz der Mittelwerthe bei ähnlicher Entfernung und Höhendifferenz enthalten unsere Tabellen zahlreiche Nachweise.

	Entfg.	ΔH	Winter	Sommer	Mittel
I. Kremsmünster-St. Florian .	26 Kilom.	90	0·27	0·32	0·26
II. „ -St. Georgen	50 „	180	0·35	0·41	0·34
III. „ -Ischl	54 „	80	0·68	0·30	0·45
IV. „ -Wien	167 „	180	0·63	0·42	0·47.

Die Veränderlichkeit der Differenzen III ist im Winter gleich jener von IV trotz 3mal kleinerer Entfernung und geringerem Höhenunterschied, dies macht die Thallage von Ischl, während die anderen Stationen ausserhalb des Gebirges liegen, im Sommer gleichen sich die Unterschiede aus. Die geringe Veränderlichkeit Wien-Krems und Wien-Mödling zeigt den Vortheil ähnlicher Lage, Wien-Kalksburg die Steigerung der Veränderlichkeit durch Abänderung derselben. Die mit Laibach verglichenen Stationen zeigen, ähnlich wie die mit Klagenfurt verglichenen Reihen, aber in geringerem Maasse, eine grosse Veränderlichkeit. Auch Alessandria in der Sohle des Po-Thales zeigt im Winter ähnliches Verhältniss.

---

[1] Mittelst der später abgeleiteten Formeln.

	Entfg.	ΔH	Winter	Sommer	Mittel
St. Magdalena-Laibach..	16 Kilom.	570	0·87	0·41	0·55
Sulden-Marienberg	20 „	510	0·57	0·48	0·45.

Nachdem wir im Vorhergehenden den Einfluss ungleichartiger localer Verhältnisse auf die Grösse der Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen zweier Stationen erörtert und so demselben in gebührender Weise Rechnung getragen haben, wollen wir daran gehen, einige allgemeine Relationen zwischen Entfernung, Höhenunterschied und Betrag der Veränderlichkeit abzuleiten. Wir wollen damit ein allgemeines Maass gewinnen, mittelst welchem wir den Einfluss der Entfernung und des Höhenunterschiedes auf die Sicherheit der Ableitung von Normalmitteln mittelst der Methode der Differenzen abschätzen können. Zu diesem Behufe sind die in den Tabellen auf Seite 40—44 befindlichen Werthe der Veränderlichkeit in Gruppenmittel zusammengesetzt worden. Um eine Gruppe mit grosser Entfernung zu erhalten, wurden nachträglich speciell für diese Tabellen die Differenzen Agram-Mailand (verschiedene klimatische Verhältnisse), Basel-Kremsmünster und München-Wien aus 20 Jahren (1861/80) berechnet.[1]

[1] Das Detail der Resultate, die in den Haupttabellen nicht mehr Platz gefunden haben, folgt hier:

	Mailand-Agram	Basel-Kremsmünster	München-Wien		Mailand-Agram	Basel-Kremsmünster	München-Wien
Dec. .	1·39	0·92	1·05	Juni .	1·01	0·58	0·47
Jänn.	1·16	0·86	0·87	Juli .	0·86	0·42	0·52
Febr.	1·53	1·03	0·90	Aug.	0·77	0·65	0·40
März .	1·22	0·74	0·69	Sept.	1·10	0·61	0·50
April	1·01	0·97	0·53	Oct. .	0·86	0·73	0·41
Mai ..	1·28	0·89	0·64	Nov..	1·33	0·83	0·85

Jahr:

Mailand-Agram 0·48, Basel-Kremsmünsster 0·35, Wien-München 0·27.

Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen nach Stations-Gruppenmitteln.

Orte	Entfern.	Δ H	Wint.	Frühl.	Somm.	Herbst	Mittel	Jahr
Mailand-Agram	467	10	1·36	1·17	0·88	1·10	1·13	0·48
Basel-Kremsmünster	493	110	0·94	0·87	0·55	0·72	0·77	0·35
München-Wien	361	330	0·94	0·62	0·46	0·59	0·65	0·27
Mittel	440	150	1·08	0·89	0·63	0·80	0·85	0·37
München-Kremsmünster	190	140	0·68	0·48	0·39	0·42	0·49	0·23
Kremsmünster-Wien	167	180	0·63	5·39	0·42	0·45	0·47	0·26
Wien-Graz	146	140	0·67	0·43	0·42	0·44	0·49	0·31
Wien-Ofen	215	90	0·71	0·43	0·33	0·52	0·50	0·19
Basel-Altstätten	146	200	0·75	0·41	0·33	0·46	0·49	0·18
Mittel	173	150	0·69	0·43	0·38	0·46	0·49	0·23
Genf-Basel	185	130	0·70	0·39	0·65	0·59	0·58	0·29
Mailand-Riva	140	60	0·69	0·45	0·47	0·46	0·52	0·29
Mittel	162	100	0·70	0·42	0·56	0·52	0·55	0·29
Wien-Klagenfurt	237	240	1·59	0·67	0·57	0·73	0·89	0·32
Graz-Klagenfurt	98	90	1·16	0·59	0·38	0·46	0·65	0·22
Sachsenburg-Klagenfurt	75	110	1·00	0·46	0·41	0·34	0·55	0·15
Mittel	137	150	1·25	0·57	0·45	0·51	0·70	0·23
Wien-Oberschützen	100	100	0·55	0·38	0·33	0·43	0·44	0·25
Mailand-Alessandria	75	50	0·56	0·29	0·38	0·30	0·39	0·12
Kremsmünster-St. Georgen	50	180	0·35	0·24	0·41	0·34	0·34	0·26
Laibach-Rudolfswerth	57	130	0·46	0·28	0·21	0·24	0·31	0·12
Mittel	70	115	0·48	0·30	0·33	0·33	0·37	0·19
Kremsmünster-Ischl	54	80	0·68	0·39	0·30	0·44	0·45	0·18
Wien-Guttenstein	41	170	0·56	0·24	0·28	0·34	0·36	0·17
Graz-Leoben	24	110	0·45	0·26	0·27	0·28	0·32	0·14
Laibach-Krainburg	51	260	0·41	0·43	0·46	0·47	0·44	0·21
Mittel	43	155	0·53	0·33	0·33	0·38	0·39	0·18

Orte	Entfern.	Δ H	Wint.	Frühl.	Somm.	Herbst	Mittel	Jahr
Graz-Oberschützen	63	240	0·28	0·21	0·28	0·36	0·29	0·08
Kremsmünster-Linz	30	10	0·26	0·26	0·27	0·35	0·28	0·12
Kremsmünster-St. Florian	26	90	0·27	0·22	0·32	0·22	0 26	0·17
Wien-Krems	55	20	0·21	0·24	0·22	0·28	0·24	0·11
Wien-Mödling	18	40	0·25	0·15	0·18	0·21	0·20	0·07
Wien-Hadersdorf	11	30	0·21	0·32	0·30	0·30	0·28	0·10
Bregenz-Altstätten	21	70	0·36	0·30	0·27	0·27	0·30	0·13
Mittel	32	70	0·26	0·24	0·26	0·28	0·26	0·11
Laibach-Krainburg	24	110	0·45	0·26	0·27	0·28	0·32	0·14
Laibach-Stein	19	170	0·44	0·32	0·24	0·24	0·31	0·05
Hüttenberg-Knappenberg	2	260	0·45	0·22	0·24	0·26	0·30	0·09
Mittel	11	180	0·45	0·27	0·25	0·26	0·31	0·09
St. Martin-Mailand	281	480	0·67	0·49	0·45	0·50	0·53	0·21
St. Bernhard-Sils	210	670	0·99	0·60	0·39	0·60	0·65	0·19
Mittel	246	575	0·83	0·54	0·42	0·55	0·59	0·20
St. Lambrecht-Graz	86	690	0·72	0·45	0·42	0·48	0·52	0·24
Hüttenberg-Graz	69	440	0·47	0·44	0·47	0·48	0·47	0·16
Sachsenburg-Prägratten	75	750	1·26	0·54	0·43	0·49	0·68	0·32
Sachsenburg-Turrach	43	720	1·13	0·47	0·41	0·51	0·63	0·29
Mittel	68	650	0·89	0·48	0·43	0·49	0·58	0·25
Bozen-St. Martin	33	360	0·55	0·28	0·43	0·30	0·39	0·22
Sulden-Marienberg	20	510	0·57	0·45	0·48	0·30	0·45	0·15
St. Magdalena-Laibach	16	570	0·87	0·42	0·41	0·50	0·55	0·22
Mittel	23	480	0·66	0·38	0·44	0·37	0·46	0·20
St. Lambrecht-Klagenfurt	49	600	1·39	0·51	0·44	0·67	0·75	0·32
Hausdorf-Klagenfurt	35	520	1·30	0·42	0·29	0·42	0·61	0·21
Steinpichl-Klagenfurt	28	640	1·16	0·51	0·29	0·49	0·61	0·20
Mittel	37	590	1·28	0·48	0·34	0·53	0·66	0·24
Luschariberg-Saifnitz	3	930	—	—	0·40	—	—	—
Schafberg-Ischl	17	1310	1·76	0·50	0·46	0·75	0·87	0·35
Obir-Klagenfurt	18	1610	1·98	1·01	0·83	1·20	1·25	0·47
Obir-Laibach-Hüttenberg	50	1510	1·53	0·61	0·60	0·78	0·88	0·35
St. Bernhard-Genf	88	2070	1·36	0·54	0·39	0·67	0·74	0·30

Diese Gruppenmittel sind gebildet theils nach dem Argument der Entfernung (bei geringer Seehöhe), theils nach dem der Höhendifferenz (bei geringer Entfernung), theils nach ähnlichen Localverhältnissen (Genf-Basel, Riva-Mailand; Gruppe Klagenfurt). Sie gestatten die vorhin besprochenen Verhältnisse zu überblicken und den Einfluss der Entfernung, der Höhendifferenz, der ungleichen Lage der verglichenen Stationen zu beurtheilen. Aus diesen Gruppenmitteln habe ich nun wieder jene ausgewählt, welche abnormen Localverhältnissen am wenigsten unterliegen und versucht, mittelst derselben die Veränderlichkeit als Function der Entfernung und Seehöhe darzustellen. Ich will mich dabei beschränken, dies für die Mittel des Winters, Sommers und des Mittels aus allen 12 Monaten zu thun, denn dies genügt zur Beantwortung der Fragen, welche ich in der Einleitung zu dieser Abhandlung als der Lösung bedürftig aufgestellt habe. Bezeichnen wir mit V_t die Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen, mit E die Entfernung, mit ΔH den Höhenunterschied der Stationen, mit a, b, c gewisse aus den Beobachtungen zu bestimmende Constanten, so wollen wir setzen:

$$V_t = a + bE + c\Delta H.$$

Die Einführung der Constanten a wird durch die oben mitgetheilten Werthe der Veränderlichkeit gefordert, denn man sieht leicht ein, dass z. B. die ziemlich gleichen ΔH entsprechenden Werthe von E und V_t

E	440	173	70	43	32	11 Kilometer
V_t	0·85	0·49	0·37	0·39	0·26	0·31 „

nicht durch eine Formel dargestellt werden können, welche für $E = 0$ auch V_t gleich 0 macht; dieselbe Wahrnehmung macht man auch bei einer Zusammenstellung der zusammengehörigen Werthe von ΔH und V_t bei geringen Unterschieden der Entfernung. Wir müssen dabei bedenken, dass mit der Abnahme der Entfernung oder des Höhenunterschiedes nicht in gleichem Maasse auch die Verschiedenheit der Localverhältnisse schwindet, welche die Temperatur der beiden Orte und deren Schwankungen mit beeinflussen. Das könnte man nur verlangen, wenn wir Stationen in verschiedenen E und ΔH bei ganz gleicher Aufstellung der Thermometer

in ganz gleicher Umgebung hätten. Sonst bleibt immer eine Differenz, selbst wenn wir die Stationen ganz zusammenrücken, und der mittleren Grösse der Schwankungen um den Mittelwerth dieser Differenz entspricht die Constante a. Wir wollen aber auch zugeben, dass bei der geringen Zahl und Fehlerhaftigkeit der Werthe, die wir der Ableitung der Constanten hier zu Grunde legen müssen, der Werth von a von dem durch die natürlichen Verhältnisse concedirten ideellen Betrage mehr oder minder abweichen wird. Jedenfalls ist aber die Aufstellung dieser Constanten nicht unnatürlich oder den reellen Verhältnissen widersprechend.

Wir schreiten nun zur Aufstellung der Normalgleichungen und zur Ableitung der Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate. Aus einem Vorversuch hat sich sogleich ergeben, dass es zweckmässiger ist, und die Sicherheit und reelle Bedeutung der Resultate fördert, die Gleichungen in zwei Gruppen zu theilen, aus der einen Gruppe die Constanten a und b, aus der andern die Constante c (den Einfluss der Höhendifferenzen) abzuleiten. Zugleich wird dabei die Rechnung bequemer.

Aus den vorhin mitgetheilten Gruppenmitteln wurden folgende gewählt und in zwei Fällen neu gebildet, weil die Werthe von V_t sehr nahe übereinstimmten.

	E Kilometer	Δt Meter	V_t Winter	V_t Sommer	V_t Mittel
(1)	440	150	1·08	0·63	0·85
(2)	170	150	0·70	0·38	0·50
(3)	50	130	0·48	0·31	0·36
(4)	32	70	0·26	0·26	0·26
(5)	23	480	0·66	0·44	0·46
(6)	68	650	0·89	0·43	0·58
(7)	28	1290	1·53	0·51	0·82
(8)	88	2070	1·36	0·40	0·74.

Gruppe 7 ist aus Ischl-Schafberg und Obir-Hüttenberg gebildet, wobei ersterer Differenz das doppelte Gewicht beigelegt wurde, Gruppe 3 ist aus der 5., 6. und 8. Gruppe der vorhergehenden Zusammenstellung gebildet. Bei der Aufstellung der Gleichungen für den Sommer ist noch Luschariberg-Saifnitz aufgenommen worden, bei jenen für das allgemeine Mittel wurde gleichfalls auf die ausführlichere Tabelle zurückgegriffen.

I. Gleichungen für den Winter. Hier wie überall wurde als Einheit von E 10 Kilometer, als Einheit von ΔH 100 Meter angesetzt. Wir erhalten dann zur Ableitung von a und b die Gleichungen:

$$1\cdot08 = a + 44\,b + 1\cdot5\,c$$
$$0\cdot70 = a + 17\,b + 1\cdot5\,c$$
$$0\cdot48 = a + \;\;5\,b + 1\cdot3\,c$$
$$0\cdot26 = a + \;\;3\,b + 0\cdot7\,e$$

Daraus folgt:

$$a = 0\cdot32 \qquad b = 0\cdot01798.$$

Zur Ableitung der Constanten c sind diese Gleichungen natürlich nicht geeignet. Dazu dienten dann die zusammengehörigen Werthe:

E	5	2	7	3	9
ΔH	1·3	4·8	6·5	12·9	20·7
V_t	0·48	0·66	0·89	1·53	1·36.

Es wurde $V_t - a$ gebildet, mittelst b auf gleiche E reducirt und aus diesen Werthen c berechnet. Es ergibt sich so:

$$c = 0\cdot0617.$$

Sommer. Aus 1 bis 4 der letzten Tabelle folgt in gleicher Weise wie für den Winter berechnet

$$a = 0\cdot25 \qquad b = 0\cdot0086.$$

Zur Ableitung von c dienten folgende Werthe

E	4[1]	2	7	0	3	9
ΔH	1·0	4·8	6·5	9·3	12·9	20·7
V_t	0·28	0·44	0·43	0·40	0·51	0·40

Daraus folgt nach gleichem Vorgange wie oben $c = 0\cdot0138$ (ohne St. Bernhard würde $c = 0\cdot0197$ werden).

Mittel aus allen Monaten. Es wurden folgende Gleichungen, zurückgreifend auf die Haupttabelle, aufgestellt:

[1] Die Werthe 3 und 4 der Tabelle in einen Mittelwerth zusammengezogen.

$$0\cdot85 = a + 44\,b + 1\cdot5\,c$$
$$0\cdot50 = a + 17\,b + 1\cdot5\,c$$
$$0\cdot38 = a + 6\,b + 1\cdot3\,c$$
$$0\cdot28 = a + 2\,b + 1\cdot3\,c$$

Daraus folgt:

$$a = 0\cdot277$$
$$b = 0\cdot01309$$

Zur Ableitung der Constante c wurden folgende Werthe benützt:

E ..	3	4	2	4	7	3	9
ΔH ..	0·7	1·5	4·8	5·9	6·5	12·9	20·7
V_t ..	0·26	0·36	0·46	0·66	0·58	0·82	0·74

sie liefern, wie früher behandelt, $c = 0\cdot0283$.

Wir haben somit folgende Relationen:

Winter	$V_t = 0\cdot32 + 0\cdot00180\,E + 0\cdot0617\,\Delta H$
Sommer	$V_t = 0\cdot25 + 0\cdot00086\,E + 0\cdot0138\,\Delta H$
Allg. Mittel	$V_t = 0\cdot28 + 0\cdot00131\,E + 0\cdot0283\,\Delta H$

Die Einheit von E ist der Kilometer, die Einheit von ΔH 100 Met.

Diese Gleichungen sind nun ganz geeignet, die zwei Fragen zu beantworten, welche Genauigkeit die Methode der Zurückführung der Mittel kurzer Beobachtungsreihen auf eine längere Normalperiode mittelst der Differenzen correspondirender Jahrgänge beanspruchen kann, und wohin die Grenzen ihrer Anwendbarkeit nach Entfernung und Höhenunterschied zu verlegen sind, wenn sie noch Vortheile gewähren soll.

Die erstere Frage dürfte am vollständigsten durch die folgende Tabelle beantwortet werden, welche für gewisse Intervalle der Entfernung und der Höhendifferenzen die mittlere Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen und die daraus folgende Zahl der Jahre angibt, die nöthig sind, damit die Mittel bis auf ± 0°1 C. sicher sind. Ist n_1 diese Zahl der Jahrgänge, welche den wahrscheinlichen Fehler des Mittels der Temperaturdifferenzen auf ± 0°1 reducirt, n die Zahl der Jahrgänge, aus welchen die mittlere Veränderlichkeit V_t der Temperaturdifferenzen abgeleitet worden ist, so ergibt sich aus der Fechner'schen Formel:

$$n_1 = \left(\frac{n}{2n-1}\right) 100\,(1\cdot1955)^2 V_t^2.$$

Je grösser die Zahl n wird, desto mehr nähert sich $n:(2n-1)$ dem Grenzwerth $\frac{1}{2}$, aber selbst bei kleineren n ist es innerhalb der hier in Betracht kommenden Genauigkeitsgrenzen meistens gestattet, diesen Grenzwerth, oder doch einen mittleren Werth von n einzuführen. Es entsprechen z. B.

$$n = 15 \quad 20 \quad 25 \quad 30 \quad \infty$$
$$n_1 = 73 \cdot 9 V_t^2 \quad 73 \cdot 3 V_t^2 \quad 72 \cdot 9 V_t^2 \quad 72 \cdot 7 V_t^2 \quad 71 \cdot 5 V_t^2.$$

Die aus vielen Mittelwerthen nach der Methode der kleinsten Quadrate abgeleiteten, früher angeführten Formeln liefern, wie man annehmen darf, Werthe von V_t, welche einem sehr grossen n, also wahren Mittelwerthen entsprechen. Ich habe desshalb die Zahl der Jahre, welche nöthig sind, um den wahrscheinlichen Fehler auf $\pm 0^\circ 1$ herabzumindern, in der nachfolgenden Tabelle aus $71 \cdot 5 V_t^2$ berechnet.

Sicherheit der aus Temperaturdifferenzen abgeleiteten Monatmittel.

I. Höhenunterschied Null.

Entfernung (Kilom.)	25	50	100	200	300	400	500
Winter							
Veränderlichkeit	0·37	0·41	0·50	0·68	0·86	1·04	1·22
Jahre nöthig zu ± 0°1	10	12	18	33	53	77	107
Sommer							
Veränderlichkeit	0·27	0·29	0·34	0·42	0·51	0·59	0·68
Jahre nöthig zu ± 0°1	5	6	8	13	19	25	33
Mittel							
Veränderlichkeit	0·31	0·35	0·41	0·54	0·67	0·80	0·93
Jahre nöthig zu ± 0°1	7	9	12	21	32	46	62

II. Entfernung Null.

Höhenunterschied (Met.)	250	500	750	1000	1250	1500	2000
Winter							
Veränderlichkeit	0·47	0·63	0·78	0·94	1·09	1·24	1·55
Jahre nöthig zu ± 0°1	16	29	44	63	85	110	172
Sommer							
Veränderlichkeit	0·28	0·32	0·35	0·39	0·42	0·46	0·52
Jahre nöthig zu ± 0°1	6	7	9	11	13	15	19
Mittel							
Veränderlichkeit	0·34	0·42	0·49	0·56	0·63	0·70	0·85
Jahre nöthig zu ± 0°1	9	13	17	22	29	35	51

Wenn man die Werthe, die in dieser Tabelle zusammengestellt sind, vergleicht mit jenen der Tabelle (S. 616), welche aus der mittleren Veränderlichkeit der Monatmittel selbst abgeleitet sind, so springt der ungeheure Vortheil der Methode der Differenzen aus correspondirenden Mitteln sogleich in die Augen.

Selbst wenn die Station 100 und 200 Kilometer von der Normalstation entfernt liegt, genügen für die Wintermonate respective 18 und 33, für die Sommermonate 8 und 13 Jahre, um die mittleren Werthe der Differenzen bis auf ± 0°1 sicher zu stellen. Wir erhalten demnach auf diesem Wege schon aus wenigen Jahrgängen sehr genaue relative Werthe der Mitteltemperaturen, welche man ja bei Vergleichungen der klimatischen Unterschiede allein benöthigt. Wollte man hingegen solche Vergleiche auf die Mittelwerthe selbst stützen, so würden, wie wir früher gesehen haben, für die Wintermonate 3 bis 400 Jahrhunderte von Beobachtungen nöthig sein, um der Zehntelgrade sicher zu sein, für die Sommermonate auch nahezu 100 Jahre. Was nun den Einfluss des Höhenunterschiedes anbelangt, so wird man es im Allgemeinen wohl vermeiden können, dass die verglichenen Stationen eine grössere Höhendifferenz als etwa 500 Meter zeigen. Dann genügen im Winter 29, im Sommer 7 Jahre um den wahrscheinlichen Fehler der mittleren Temperaturdifferenzen der Monate auf ± 0°1 herabzudrücken, selbst bei 1000 Meter Höhenunterschied genügen aber noch respective 63 und 11 Jahre, und durchschnittlich 22 Jahre. Dabei wird aber vorausgesetzt, dass nicht eine der beiden Stationen im Winter grossen negativen Temperaturanomalien ausgesetzt ist, wie wir sie bei den Stationen in Kärnthen und auch im krainerischen Becken kennen gelernt haben. Hat ein Beobachtungsnetz grosse Höhenunterschiede der Stationen aufzuweisen, so ist es nöthig, auch in grösseren Höhen, sagen wir von 500 zu 500 Meter, wenigstens je eine Normalstation, d. h. eine Station mit continuirlichen, über lange Jahresreihen sich erstreckenden Aufzeichnungen zu besitzen. Dann wird man leicht alle kürzeren Reihen auf eine langjährige Normalperiode zurückführen können.

Wenn man die Wintermonate, etwa von November bis Februar ausnimmt, so gestatten übrigens selbst Höhendifferenzen

bis zu 1500 Meter noch eine genaue Reduction aus einer relativ geringen Anzahl von Beobachtungsjahren.

In Bezug auf den Einfluss auf die mittlere Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen ist ein Höhenunterschied von 100 Meter äquivalent einer horizontalen Entfernung von

34 Kilometer im Winter,
16 „ im Sommer
und 22 „ im Mittel aller Monate.

Natürlich handelt es sich auch hier um durchschnittliche, so zu sagen normale Verhältnisse, und sind Örtlichkeiten, wo im Winter häufig „Temperaturumkehrungen“ sich einstellen, nicht mit inbegriffen.

Die zweite Frage, innerhalb welcher Grenzen der Entfernung und des Höhenunterschiedes zweier Stationen die Reduction auf Normalmittel mittelst der Temperaturdifferenzen correspondirender Jahrgänge noch vortheilhaft ist, beantwortet sich ebenfalls leicht mittelst der früher aufgestellten Gleichungen. Diese Grenzen sind dort zu finden, wo die mittlere Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen gleich wird der mittleren Veränderlichkeit der Mittelwerthe selbst.

Die mittlere Veränderlichkeit der Monatmittel beträgt aber nach der Tabelle auf Seite 607

	Winter	Sommer	Mittel
Nord- und Ostalpen	2°18	1°15	1°58
Oberitalien und Südtirol ...	1·56	1·02	1·25.

Diese Veränderlichkeit wird nach den früher aufgestellten Formeln erreicht in folgenden Entfernungen und bei folgenden Höhenunterschieden der Vergleichsstationen

	Winter	Sommer	Mittel	Winter	Sommer	Mittel
Gebiet der	Entfernung: Kilometer			Höhendifferenz: Meter		
Nord- und Ostalpen ...	1030	1050	990	3000	6500	4600
Oberitalien und Südtirol	690	890	740	2000	5600	3400.

Die Methode der Reduction der Temperaturmittel aus kürzeren Beobachtungsreihen auf eine längere Normalperiode mittelst der Differenzen correspondirender Mittelwerthe gewährt demnach in allen praktisch vorkommenden Fällen noch Vortheile gegenüber der unmittelbaren Vergleichung der rohen Mittelwerthe.

Die äussersten Entfernungen von 800 bis 1000 Kilometer wären nur dann von reeller Bedeutung als Grenzwerthe, wenn durch dieselben nicht zugleich das Gebiet klimatischer Zusammengehörigkeit der beiden Stationen überschritten würde, was in Wirklichkeit in den meisten Fällen eintreten würde. Für die Höhenintervalle gilt eine ähnliche Einschränkung in minderem Masse, da das, was bis 2000 Meter Höhenunterschied giltig ist, auch noch für 3000 und 4000 Meter gelten mag; was darüber hinausgeht, hat ohnehin keine Anwendung mehr.

Im Allgemeinen ist stets zu beachten, dass diese Grenzwerthe für das Klima von Centraleuropa und speciell für das Alpengebiet gelten.

Man könnte noch fragen, ob es gleichgiltig sei, ob die Entfernungen im Sinne der Breiten- oder der Längengrade genommen werden. Diese Frage ist im Allgemeinen mit Ja zu beantworten, so lange nicht klimatische Grenzen überschritten werden, die nicht von Länge und Breite abhängen, z. B. die durch Centralalpenkette gebildete Klimagrenze.

Eine Gruppirung der Temperaturdifferenzen nach Längen- und Breitenunterschieden zum Zwecke einer directen Beantwortung dieser Frage wurde aus zwei Gründen nicht durchgeführt. Erstlich liesse sich auf unserem Gebiete nicht entscheiden, was dem Breitenunterschiede und was dem gleichzeitigen Einfluss der Scheidewand der Alpen zugeschrieben werden müsste, und zweitens liegen im Winter die Temperaturgegensätze im Norden der Alpenkette nicht in der Richtung Nord-Süd, sondern in der Richtung West-Ost. Die Fragestellung entbehrt demnach auf unserem Gebiete einer reellen Bedeutung. Sie könnte dagegen im norddeutschen oder russischen Beobachtungsgebiet beantwortet werden; die Frage nämlich, ob es bei gleicher Entfernung vortheilhafter ist, eine Normalstation ähnlicher Breite oder ähnlicher Länge zu wählen. Ist bei gleicher Entfernung die Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen in der Richtung Nord-Süd oder West-Ost grösser? Im Alpengebiete lässt sich diese Frage nicht beantworten.[1]

---

[1] Aus 24 Jahren zwischen 1858 bis 1883 ergaben sich folgende Werthe der mittleren Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen der Monate und Jahre zwischen Triest und Lesina:

Wir wollen nun zum Schlusse dieses Abschnittes noch einige mehr specielle Fragen über die Verlässlichkeit der Temperaturdifferenzen beantworten, respective für einige specielle Fälle die Zahl der Beobachtungsjahre angeben, die nöthig ist, um die mittleren Temperaturdifferenzen bis auf ± 0°1 höher zu stellen.

Für einige Gruppenmittel erhält man folgende Zahlen:

Jahre nöthig, um den wahrscheinlichen Fehler der mittleren Differenz auf ± 0°1 zu erniedrigen:

E	ΔH	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Mittel	Jahr
440	150	85	58	29	47	53	10
173	150	35	13	10	22	15	4
70	115	17	7	8	8	10	2—3
32	70	5	4	5	6	5	1
Schafberg-Ischl		230	19	15	41	56	9
Obir, Laibach, Hüttenberg		170	27	27	45	57	9
St. Bernhard-Genf		135	21	11	33	40	6—7.

Man sieht, dass selbst bei extremen Höhenunterschieden, und unter ungünstigen Verhältnissen (Thallage mit Gipfel ver-

---

Lesina-Triest $E = 350$ Kilom. $\Delta H = 0$

$\Delta\varphi = 2° 28'$ $\Delta\lambda = 2° 41'$

	V_t		V_t		V_t		V_t
December	0·75	März	0·62	Juni	0·71	September	0·82
Jänner	0·71	April	0·57	Juli	0·60	October	0·75
Februar	0·81	Mai	0·63	August	0·45*	November	0·66
Winter	0·76	Frühling	0·61	Sommer	0·59	Herbst	0·74

Das Mittel ist 0·67, die Veränderlichkeit der Jahresmittel 0·22.

Vergleicht man diese Werthe, die für die Breite von 44½° gelten, mit jenen für Basel-Kremsmünster, München-Wien unter 48°, so ergeben sich keine namhaften Differenzen, namentlich für gleiche Entfernung.

	E	ΔH	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Mittel
Wien-München, Basel-Kremsmünster	430	220	0·94	0·74	0·50	0·66	0·71
Lesina-Triest	350	0	0·76	0·61	0·59	0·74	0·67.

Reducirt man Winter, Sommer, Mittel auf gleiche Entfernung ohne Rücksicht auf die Höhendifferenzen, so erhält man Werthe, welche die Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen unter 48° noch geringer erscheinen lassen, als unter 44½°. Die Temperaturdifferenzen zwischen dem obersten und mittleren Theile der adriatischen Küsten sind also relativ grossen Schwankungen unterworfen, was wohl in den Einflüssen des Hinterlandes auf die Temperatur von Triest seinen Grund haben mag.

glichen) wenigstens die Mittel von neun Monaten des Jahres schon aus einer nicht sehr grossen Zahl von Beobachtungsjahren bis auf ±0°1 durch die Reduction richtig erhalten werden können, die Jahresmittel schon aus neun Jahren. Die Reductionsmethode ist demnach selbst in diesen Fällen nie bei Seite zu lassen.

Bis zu 30 Kilometer Entfernung bei geringem Höhenunterschied genügen 5—6 Jahre, um die reducirten Mittelwerthe bis auf ± 0°1 richtig zu erhalten. Wollte man desshalb die mittleren Temperaturverhältnisse eines Landes im Detail und genau kennen lernen, so würde eine Beobachtungsperiode von fünf Jahren hiezu vollkommen genügen, wenn in gleichen Niveaux die Stationen in Abständen von je 30 Kilometer oder rund von je fünf deutschen Meilen errichtet würden. Rationeller natürlich würden wandernde Stationen mit einem Turnus von fünf Jahren sein.

Hat man ein gebirgiges Terrain, dessen Thalbecken im Winter abnormen negativen Temperaturanomalien unterliegen, nach dem Beispiele Kärnthens, dann bedarf es im Winter allerdings vieler Jahrgänge, um selbst mittelst Differenzen die Monatmittel bis auf ±0°1 richtig zu erhalten; aber immer noch fünf- bis sechsmal weniger, als auf directem Wege durch die Mittel selbst.

Betrachten wir den ungünstigsten Fall, die Differenzen dreier Stationen (St. Lambrecht, Steinpichl, Hausdorf) gegen Klagenfurt, bei einem durchschnittlichen Höhenunterschied von nahe 600 Metern. Wir erhalten:

E	ΔH	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Mittel	Jahr
37	560	120	17	9	21	32	4.

Der grosse Vortheil der Methode der Differenzen während neun Monaten des Jahres ist augenscheinlich. Begnügen wir uns aber im Winter mit einer Sicherheit von ± 0°2, so sind dann auch 30 Jahre dazu hinreichend, also ein Beobachtungszeitraum, der nicht so schwer zu erreichen ist.

Das Hauptresultat unserer Untersuchung ist desshalb, dass auch im Alpengebiet selbst unter den ungünstigsten Localverhältnissen die Mittelwerthe aus kurzen Beobachtungsreihen mit grossem Vortheil mittelst der Differenzen correspondirender Jahrgänge auf die lange Normalperiode einer Hauptstation zurückgeführt werden können und sollen.

III. Die Temperaturvertheilung im Alpengebiete in der Periode 1851/80, dargestellt durch Abweichungen der einzelnen Monat- und Jahresmittel von den 30jährigen Mitteln.

Den Schluss dieses ersten Theiles meiner Abhandlung über die Temperaturverhältnisse der österreichischen Alpenländer möge eine synoptische Zusammenstellung der Temperaturabweichungen der einzelnen Monat- und Jahresmittel der Periode 1851/80 von den 30jährigen Mittelwerthen bilden. Der grösste Theil dieser Abweichungen ist den Tabellen entnommen, die zur Ableitung der mittleren Abweichungen gedient haben, die im ersten Abschnitte mitgetheilt und discutirt worden sind. Ein Theil derselben wurde aber für die folgende Zusammenstellung neu berechnet, weil hier alle Abweichungen (bis auf jene von drei Stationen) auf die Mittel der Periode 1851/80 bezogen sind. Nur die Abweichungen von Obir und Schafberg (beginnt mit 1871) sind wegen der Unsicherheit der Reduction auf die rohen Mittelwerthe von 20 und 13 Jahren bezogen worden. Es schien mir an dieser Stelle vorläufig besser, die Combination der Mittel so hoch gelegener Orte mit jenen der Niederung zum Zwecke der Reduction zu vermeiden. Die Abweichungen von Alessandria beziehen sich auf das 25jährige Mittel 1858/82, aus Gründen, die im speciellen Theile näher erörtert werden. Hier mag nur erwähnt werden, dass die Mittel von Mailand für die Periode 1851/60 auffallend niedrig sind gegen die später folgende Reihe, wesshalb ich die scheinbar sehr homogene Reihe von Alessandria absichtlich nicht nach Mailand reducirte, sondern sie Mailand coordinirte.

Bei der folgenden Darstellung der gleichzeitigen Wärmevertheilung durch Abweichungen wurde gesucht, eine Häufung der Stationen auf einzelnen Theile des Gebietes zu vermeiden und für gleichartige Regionen nur je eine Station als Repräsentanten aufzunehmen. Aus diesem Grunde fehlen hier manche Stationen, deren Abweichungen für längere Jahresreihen berechnet worden sind und die in der Tabelle der mittleren Abweichungen compariren.

Die folgenden Tabellen machen aufmerksam auf manche Eigenthümlichkeiten, welche in der gleichzeitigen Vertheilung der abnormen Erwärmungen oder Erkaltungen, namentlich im

Winterhalbjahr auftreten. Nicht allein der auffallende Unterschied, der sich hiebei oft, ja fast in den meisten Fällen zwischen den Niederungen und den Hochregionen der Alpen geltend macht, ist hiebei zu bemerken, sondern auch die ungleiche Vertheilung der Abweichungen auf der Nord- und Südseite der Alpenkette, das extreme Auftreten derselben an gewissen Localitäten, während gleichzeitig andere trotz einer scheinbar ähnlichen Lage davon nur im geringen Maasse berührt werden. So ist es besonders das Gebiet im Süden der Tiroler Centralalpenkette und der oberitalienische Abhang der Alpen gegen die Po-Ebene, welche alle Schwankungen der Temperatur nur nach einem stark verminderten Maassstabe mitmacht. Die abnorm hohe Temperaturabweichung des Decembers 1868 auf beiden Seiten der Alpen: Genf 6·4 Basel 6·8, Innsbruck 6·1, Agram 6·2, Laibach 7·4, Saifnitz 6·0, tritt in Südtirol unter gleicher Breite und Seehöhe in viel schwächerem Masse auf: Bozen 3·6, St. Martin, Sulden 2·9, Marienberg 2·2. Dasselbe finden wir in dem abnormen kalten December 1871 und zum Theil auch 1879, wo namentlich die höheren Lagen von Südtirol relativ warm waren, was damals allerdings im ganzen Alpengebiet der Fall war. Der Jänner bietet ähnliche Beispiele.

Am auffallendsten tritt die ungleichmässige Vertheilung der Abweichungen in verticaler Richtung hervor nicht nur bei den sogenannten „Temperaturumkehrungen“ nach oben, sondern auch in dem anderen Sinne einer abnormen Erkaltung der Höhen, während die Niederungen zu warm sind. Ich habe im Nachfolgenden nur einige derartige Thatsachen aus der Winterperiode tabellarisch dargestellt. (Siehe Seite 654 und 655.)

Es trifft sich im Winter selten, dass abnorme kalte und warme Monate unten auch zugleich auf den Höhen denselben Charakter haben; die kältesten und wärmsten Monate auf den Höhen fallen selten zusammen mit den gleichen Extremen unten.

Die sechs kältesten Monate des December und Jänner auf dem St. Bernhard hatten eine mittlere Abweichung von —3·5, die gleichen Monate in Genf aber nur —1°9; umgekehrt, die sechs kältesten Monate des December und Jänner zu Genf hatten eine mittlere Abweichung von —4·5, auf dem St. Bernhard hatten die gleichen Monate dagegen nur eine Abweichung von —1·4.

Einige Anomalien der Temperaturvertheilung in grossen Höhen gegenüber der Niederung.

Abweichungen der Temperatur vom Normale.

I. Oben warm, unten kalt.

December	Genf	St.Bernh.	Mailand	Klagenf.	Obir	Laibach
1851	—4·0	1·0	—1·3	—4·9	—0·9	—3·4
1857	—0·1	3·3	—0·2	0·5	2·2	—0·8
1861	—0·1	2·0	—1·3	—2·1	1·3	—0·3
				München	Schafbg.	Kremsm.
1871	—5·1	—2·8	—3·7	—6·6	—2·6	—6·4
1873	—0·4	3·3	0·4	0·5	2·5	1·1
1879	—6·7	—2·0	—5·2	—8·5	—2·4	—8·2

Jänner	Genf	St.Bernh.	Mailand	Klagenf.	Obir	Laibach
1861	—3·1	1·7	—1·7	—2·2	0·7	—3·9
1864	—3·8	—0·6	—3·6	—6·7	—1·9	—6·9
				München	Schafbg.	Kremsm.
1874	—0·3	2·1	—0·8			
1876	—1·8	0·7	—0·7	—2·1	—0·5	—2·7
1880	—4·2	0·1	—3·5	—3·4	—2·4	—1·9

II. Oben kalt, unten warm.

December	Genf	St.Bernh.	Mailand	Klagenf.	Obir	Laibach
1854	2·0	—1·5	1·3	1·4	—0·5	1·7
1860	0·9	—2·9	—0·5	2·4	—2·1	1·2
Jänner						
1857	—0·7	—3·5	0·3	—0·9	—4·5	—0·5
1865	2·1	—0·2	0·7	München	Schafbg.	Kremsm.
1877	3·4	0·6	3·6	4·0	1·7	2·7

Grösste negative Temperaturabweichungen am St. Bernhard.

	Genf	St.Bernh.	Mailand
December			
1853	—2·5	—3·1	—1·8
1855	—3·4	—3·4	—3·8
1859	—1·5	—3·4	—2·7
1870	—2·6	—3·2	—0·4
1874	—1·0	—3·5	0·0
1878	—1·9	—3·8	—2·4
Jänner			
1857	—0·7	—3·5	—0·4
1871	—3·3	—4·0	—1·6
Februar			
1853	—2·2	—5·9	—1·7
1854	—3·0	—3·6	—0·7
1860	—3·2	—4·7	—2·9
1865	—1·6	—3·3	—1·2
Mittel	—2·2	—3·8	—1·6

Grösste positive Temperaturabweichungen am St. Bernhard.

	Genf	St.Bernh.	Mailand
December			
1852	2·7	4·2	2·3
1857	—0·1	3·3	—0·2
1866	2·4	4·2	1·7
1868	6·4	3·6	2·9
1873	—0·4	3·3	0·4
1880	5·1	3·7	3·3
Jänner			
1866	3·0	2·6	2·5
1874	—0·3	2·1	—0·8
1875	2·0	3·1	0·9
Februar			
1856	1·3	3·2	2·6
1867	3·9	3·2	3·0
1869	3·5	4·2	3·0
1878	0·0	3·5	2·8
Mittel	2·3	3·4	1·9

Grösste Abweichungen in Genf.

	Genf	St. Bernh.		Genf	St. Bernh.		Genf	St. Bernh.
Dec.1851	—4·0	1·0	Jän.1864	—3·8	—0·6	Feb.1854	—3·0	—3·6
1871	—5·1	—2·8	1871	—3·3	—4·0	1860	—3·2	—4·7
1879	—6·7	—2·0	1880	—4·2	0·1	1875	—2·4	—2·9
1868	6·4	3·6	1853	2·7	0·4	1866	4·0	2·1
1876	4·3	2·7	1860	2·7	0·5	1867	3·9	3·2
1880	5·1	3·7	1866	3·0	2·6	1869	3·5	4·2
			1877	3·4	0·6			

Die sechs wärmsten Monate des December und Jänner auf dem St. Bernhard hatten eine mittlere Abweichung von 3°3, die gleichen Monate in Genf nur 2·5, umgekehrt, die sieben wärmsten Monate (December und Jänner) zu Genf 3°9, die gleichen Monate am St. Bernhard 2·0. Im Februar aber sind die Abweichungen schon viel gleichmässiger vertheilt, wie die vorige Tabelle zeigt.

Im Allgemeinen ist die Nichtübereinstimmung des Charakters abnormer Wintermonate oben und unten leicht erklärlich. Grosse Kälte unten entspricht meist einem Barometermaximum und Windstille mit häufigen „Temperaturumkehrungen", grosse Wärme dagegen lebhaften West- und Südwestwinden, die den Höhen Schnee und Kälte bringen. Heftige Winde sind im Allgemeinen auf grossen Höhen stets kalt, Windstille dagegen bringt positive Temperaturabweichungen. In den Niederungen verhält es sich im Winter dagegen umgekehrt.

Der October und November nehmen häufig schon an den Eigenthümlichkeiten der Wärmevertheilung im December und Jänner Theil. Durch besonders grosse Erwärmung der Höhen zeichnete sich der October 1876 aus, der October 1881 dagegen, der nicht mehr in diese Darstellung fällt, durch grosse Erkaltung, während der darauf folgende November auf den Höhen wieder sehr warm war, in den Niederungen dagegen nicht. Den merkwürdig entgegengesetzten Gang der Temperatur oben und unten ersieht man aus folgenden Monatsmitteln der Temperatur:

1881	Meter	Oct.	Nov.	1881	Meter	Oct.	Nov.
St. Wolfgang	553	5·3	4·0	Salzburg	436	5·1	4·5
Schafberg	1776	—1·7	2·0	Fraunschereck	742	3·1	4·1
				Gaisbergspitze	1286	0·4	4·7
Klagenfurt	440	6·6	1·4	Schmittenhöhe	1935	—1·8	1·7
Obir	2046	—2·2	0·8				
Bozen	260	9·5	5·6	Genf	408	7·1	6·0
Weissenstein	1520	1·3	3·1	St. Bernhard	2478	—3·8	0·2.

Würde man in einem Beobachtungsnetze nur eine derartige Höhenstation haben, so würde man leicht geneigt sein zu glauben, fehlerhafte Beobachtungen vor sich zu haben. Solche Fälle zeigen am besten, wie wichtig es ist zur Reduction auf eine Normal-

periode Hauptstationen von ähnlicher Höhenlage benützen zu können.

Wir wollen hier nicht länger bei einer speciellen Betrachtung der einzelnen Fälle der Wärmevertheilung im Alpengebiete verweilen, da der specielle II. Theil dieser Abhandlung Gelegenheit bieten wird, die Eigenthümlichkeiten der Temperaturvertheilung in Mittelwerthen sowohl wie in bemerkenswerthen einzelnen Fällen eingehender zu betrachten.

Zum Schlusse möchten wir nur noch darauf aufmerksam machen, wie relativ häufig es sich trifft, dass auf eine abnorme Abweichung eines bestimmten Monates im nächsten Jahre eine ähnlich abnorme Abweichung, aber im entgegengesetzten Sinne folgt. Solche Fälle sind:

November 1851 abnorm kalt, 1852 abnorm warm; ähnliche Gegensätze, aber in geringerem Maasse, bieten die Jahre 1871 und 1872. Die beiden December 1879 und 1880 haben durch ihren Gegensatz ohnehin die allgemeine Aufmerksamkeit erregt, auch jene von 1852 und 1853, 1867 und 1868, 1871 und 1872 sind bemerkenswerth. Dem ausserordentlich strengen Jänner 1864 ging ein sehr warmer Jänner (1863) voraus (in Laibach betrug die Differenz 12°), umgekehrt war es 1876 und 1877. Dem kalten Februar 1858 folgte 1859 ein sehr warmer, umgekehrt dem ausserordentlich warmen Februar 1869 im Jahre 1870 ein sehr kalter (in München Differenz 11°2). Geringere, aber ähnliche Gegensätze bieten die Märzmonate 1858 und 1859, 1864 und 1865, dann die Aprilmonate 1864 und 1865, die Maimonate 1875 und 1876, Juni 1868 und 1869, besonders auffallend Juli 1859 und 1860, ersterer der wärmste, letzterer der kälteste an vielen Orten. Wir wollen die Aufzählung nicht weiter fortführen. Es zeigt sich im Allgemeinen daraus, dass die allgemeinen Verhältnisse, welche die Temperaturanomalien in unseren Gegenden bedingen, nach Ablauf eines Jahres sich oft geändert haben und nun ein ganz entgegengesetzter Zustand Platz gegriffen hat. Es gibt, so scheint es wenigstens bei dieser oberflächlichen Betrachtung, keine Continuität in der Aufeinanderfolge des Temperaturcharakters desselben Monats in den sich folgenden Jahrgängen.

Abweichungen der Temperatur im Alpengebiete 1851—1880.

Jänner.

	1851	1852	1853	1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865
Genf	0·2	1·8	2·7	—0·6	—2·1	1·9	—0·7	—3·0	—0·6	2·7	—3·1	0·4	1·9	—3·8	2·1
St. Bernhard	0·6	1·3	0·4	0·5	—2·2	0·7	—3·5	—2·8	—0·7	0·5	1·7	—0·6	1·2	—0·6	—0·2
Basel	1·2	2·4	3·4	0·0	—3·8	1·7	—0·5	—3·9	—0·4	3·1	—4·6	0·3	2·5	—4·9*	1·9
Altstätten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—6·6	1·7
München	2·1	2·3	2·4	—1·1	—3·7	0·8	—1·0	—3·8	—0·6	2·3	—4·5	0·0	2·9	—5·4*	1·4
Alt Aussee	0·0	1·8	2·7	0·9	—3·3	3·0	—1·7	—2·5	—0·7	2·0	—2·5	—0·3	3·7*	—3·8*	0·7
Kremsmünster	0·9	1·6	2·3	—0·3	—2·1	0·6	—1·2	—2·6	0·1	2·1	—3·6	—0·9	3·8*	—4·2*	1·2
Wien	—0·2	2·1	2·1	0·1	—1·5	1·3	—0·4	—2·3	0·6	2·5	—3·2	—1·7	4·4*	—5·5*	1·1
Graz	—0·3	1·7	2·0	0·0	—1·5	1·7	0·2	—4·5	0·0	1·1	—2·4	—1·4	4·6*	—6·0*	0·5
Agram	—	—	—	—	—	3·8	—0·3	—3·2	0·8	1·9	—3·7	—2·0	5·1	—6·9	1·2
Rudolfswerth	—	—	—	—	—	—	—	—5·3	—0·6	2·3	—4·0	—1·7	4·4	—8·5	1·7
Laibach	1·9	2·0	3·9	1·3	—3·3	3·6	—0·5	—6·2	—1·7	1·7	—3·9	—0·4	5·1*	—6·9	1·5
Obir	1·0	3·0	2·1	1·2	—3·7	3·2	—4·5	—4·1	0·5	2·8	0·7	—0·2	1·7	—1·9	1·3
Klagenfurt	2·4	—1·2	4·2	1·1	—2·2	2·4	—0·9	—6·4	—1·7	0·1	—2·2	—0·3	4·9*	—6·7*	1·3
Saifnitz	2·3	2·3	4·1*	0·8	—3·1	3·5	—1·3	—5·8*	—1·5	1·7	—2·5	0·8	3·2	—5·6	1·3
Sachsenburg	—	—	—	—	—	2·2	—1·1	—5·5	—0·9	0·8	—2·2	1·3	3·4	—5·0	0·7
Innsbruck	4·0	2·8	1·4	0·2	—3·9	1·8	—1·4	—3·6	—3·1	3·7	—2·7	0·5	5·2*	—5·4*	0·6
Sils-Maria	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—2·9	0·3
Marienberg	—	—	—	—	—	—	—1·1	—1·0	—1·5	0·1	1·6	—0·8	1·0	—1·5	—0·7
Sulden	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—0·4
St. Martin	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—0·1	1·4	—3·1	0·1
Bozen	1·0	0·4	1·4	—1·4	—0·8	1·7	—0·1	—2·5	—0·4	—0·4	—1·2	—0·1	2·0	—2·6	0·2
Triest	2·1	1·4	3·3*	2·1	—2·8	2·3	—0·1	—3·3	—0·4	0·3	—1·7	—0·8	3·2	—4·1*	0·7
Venedig	1·7	0·2	2·4	0·8	—1·3	2·0	0·3	—4·2	—1·0	0·4	—2·0	0·8	2·9	—4·1	0·3
Mailand	2·5	0·6	2·5	0·1	—2·0	1·3	—0·4	—4·4*	—0·4	—0·8	—1·7	—0·1	2·4	—3·6	0·7
Alessandria	—	—	—	—	—	—	—	—5·8*	—1·7	—0·5	—2·8	0·2	2·2	—2·0	2·2
Lesina	—	—	—	—	—	—	—	—3·0	—1·5	1·4	—0·4	0·0	2·3	—3·7	2·2

	1866	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880
Genf	3·0	0·5	—1·1	0·4	—0·3	—3·3	0·5	1·6	—0·3	2·0	—1·8	3·4*	—1·2	—0·6	—4·2*
St. Bernhard	2·6	0·8	—0·5	—0·5	—1·4	—4·0*	—0·2	1·4	2·1	3·1*	0·7	0·6	—1·7	0·3	0·1
Basel	3·6	0·0	—1·3	0·2	0·1	—4·3	1·6	2·1	0·9	3·0	—2·9	3·7*	—1·3	—0·1	—4·1
Altstätten	3·4	1·4	—1·8	0·5	—1·0	—3·6	1·1	1·8	0·4	2 2	—2·3	5·6	—2·3	0·7	—5·0
München	3·8	1·0	—0·3	—1·2	—0·5	—4·1	—0·2	3·1	1·6	2·9	—2·1	4·0*	—0·4	0·6	—3·4
A Auss.Schafb.	2·4	0·6	—0·6	—1·3	—1·5	—2·4	1·9[1]	2·6	0 4	0·0	—0·5	1·7	—3·7	—0·8	—2·4
Kremsmünster	3·3	0·9	0·5	—1·2	0·1	—3·4	—0·7	2·6	1·0	2·6	—2·7	2·7	—0·8	—0·2	—1·9
Wien	2·2	0·7	—0·3	—1·0	0·0	—3 0	—0·2	2·5	0·7	1·0	—3·6	2·6	—0·3	—0·8	—1·0
Graz	2·1	1·0	—0·1	—1·0	0·2	—1·0	0·9	2·7	0·2	0·6	—2·7	4·2	—0·9	—0·4	—2·3
Agram	1·8	2·5	—0·6	—0·6	0·5	—1·1	1·0	2·9	0·7	0·7	—3·9	4·8	—0·8	0·8	—5·0
Rudolfswerth	2·0	2·3	—1·0	—1·8	—0·5	—0·6	1·4	3·8	0·6	0·8	—3·7	4·7	—1·9	0·9	—5·1
Laibach	1·6	2·4	—0·7	—1·2	—1·0	—1·0	1·5	4·4	1·3	0·5	—4·5	5·1*	—1·3	1·1	—7·1
Obir	3·6	1·0	—2·4	—2·3	—3·2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Klagenfurt	2·2	3·1	—0·8	—0·1	—2·8	—0·7	1·7	4·8	1·3	0·9	—3·5	4·6	0·1	—0·2	—6·5
Saifnitz	2·8	2·7	—0·6	—2·2	—2·1	—1·9	1·7	3·8	0·5	0·8	—2·2	4·1*	—1·1	0·2	—3·9
Sachsenburg	3·6	3·1	—1·4	—2·1	—3·4	—2·0	1·7	2·9	1·1	1·3	—2·0	4·2	1·4	1·0	—3·5
Innsbruck	2·3	1·2	—3·3	—0·2	—2·4	—2·5	2·1	3·6	1·3	0·5	—2·2	4·7	—1·9	1·3	—3·9
Sils-Maria	2·5	1·9	—0·7	—1·2	—1·8	—2·5	1·2	1·8	1·2	1·8	0·4	3·0	—0·4	0·3	—1·0
Marienberg	2·4	0·0	—1·2	—1·5	—1·8	—2·8	0·2	1·7	1·9	1·6	0·4	1·8	—0·4	—0·6	—0·2
Sulden	2·1	0·8	—0·6	—2·0	—1·7	—1·8	—0·1	2·3	2·3	2.5	0·1	0·8	—0·7	—1·4	—1·2
St. Martin	2·5	1·1	—1·1	—0·5	—1·8	—1·7	1·2	1·8	0·7	0·9	0·9	3·2	0·2	0·0	—1·5
Bozen	1·9	0·5	—1·0	0·3	—1·8	—0 8	1·2	2·3	0·4	1·0	0·5	3·6*	—0·6	—0·3	—3·4
Triest	2·1	2·3	—0·8	—2·2	—1·0	—1·5	0·9	2·4	—0·4	0·1	—1·4	2·0	—1·5	0·4	—3·3
Venedig	1·3	1·4	—0·4	—0·7	—0·8	—0·8	0·9	3·1*	—0·2	0·4	—0·3	3·2*	—1·1	0·0	—4·3
Mailand	2·5	0·4	—1·8	—0·1	—0·7	—1·6	0·9	3·5	—0·8	0·9	—0·7	3·6*	0·6	1·0	—3 3
Alessandria	3·4	0·6	—3·1	0·8	—0·1	—1·9	0·7	4·7*	0·1	1·5	—0·3	4·6	1·0	1·1	—4·7
Lesina	1·1	2·4	0·2	—1·8	—1·4	0·3	0·9	2·5	—0·5	—0·1	—0·5	1·3	—1·5	—0·8	—3·0

[1] Von 1871 an sind die Abweichungen jene der Station Schafberg.

Februar.

	1851	1852	1853	1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865
Genf	—0·6	0·5	—2·2	—3·0	—0·1	1·3	—2·1	—1·3	0·1	—3·2*	1·1	—0·5	—0·2	—1·5	—1·6
St. Bernhard	—0·5	—1·4	—5·9*	—3·6	0·3	3·2	—0·4	—1·8	—0·3	—4·7	1·5	0·9	1·7	—1·7	—3·3
Basel	—1·0	0·8	—2·7	—3·0	—2·5	0·7	—1·4	—3·0	1·1	—3·3	2·0	1·0	0·0	—1·4	—2·2
Altstätten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—2·0	—2·6
München	—0·9	1·6	—2·0	—2·2	—1·7	—2·5	—2·4	—5·0	0·4	—3·3	2·4	0·0	0·8	—1·7	—3·1
Alt Aussee	—0·5	0·2	—2·1	—3·5	—0·5	1·8	—0·6	—2·6	0·3	—3·8	3·6	—0·2	0·4	—0·2	—3·6
Kremsmünster	—1·4	2·6	—1·3	—0·9	—2·4	2·0	—3·5	—4·7	0·5	—2·2	1·4	—0·4	2·0	—0·3	—4·2
Wien	0·0	2·1	—0·8	—0·2	—3·9	2·4	—3·4	—7·4*	2·8	—0·8	2·5	—0·5	2·9	—0·5	—5·0
Graz	—0·2	1·0	—0·7	—0·7	—1·0	2·4	—3·5	—6·0*	2·8	—2·5	3·4	—0·1	1·6	—1·1	—3·5
Agram	—	—	—	—	—	1·1	—2·5	—7·5	3·7	—2·5	3·6	—0·5	1·8	—1·8	—4·2
Rudolfswerth	—	—	—	—	—	—	—	—7·4	3·2	—2·4	4·4	—0·6	0·7	—1·9	—1·3
Laibach	1·5	2·5	—0·4	—1·1	—1·0	1·0	—3·1	—7·1*	3·0	—2·6	3·5	0·7	0·9	—2·2	—3·1
Obir	—0·4	—1·7	—3·0	—6·4	1·0	2·9	0·0	—4·2	—0·2	—0·7	3·9	1·2	2·0	0·5	—1·6
Klagenfurt	1·6	0·6	0·0	—1·4	0·0	3·0	—4·9	—5·3*	3·2	—4·5	2·3	0·2	0·6	—2·2	—3·3
Saifnitz	1·6	0·6	0·0	—2·0	0·6	2·0	—2·5	—5·2	2·7	—3·4	3·5	0·7	—0·9	—1·2	—2·4
Sachsenburg	—	—	—	—	—	2·1	—3·2	—5·1	2·9	—3·7	1·8	2·1	—1·4	—1·7	—1·6
Innsbruck	0·1	2·1	—3·5	—2·3	0·2	2·7	—3·1	—2·9	—0·4	—4·0	4·9	1·4	0·7	—1·5	—3·4
Sils-Maria	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—0·8	—3·0
Marienberg	—	—	—	—	—	—	—2·4	—3·7	0·0	—4·0	2·2	1·2	1·2	—1·3	—3·2
Sulden	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—3·2
St. Martin	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·9	—0·3	—1·2	—1·6
Bozen	0·5	—0·1	—0·7	—2·3	—0·6	2·0	—1·9	—3·1*	1·2	—2·9	1·7	0·3	—0·2	—1·1	—1·2
Triest	1·1	1·6	0·0	—1·1	—0·5	1·0	—0·8	—4·5*	1·9	—2·4	2·3	—1·0	0·7	—0·4	—1·9
Venedig	0·8	0·4	—0·1	—1·0	—1·2	1·5	—1·0	—6·0*	0·9	—2·0	2·3	0·1	0·3	—1·4	—1·4
Mailand	0·6	1·5	—1·7	—0·7	—3·1	2·6	—2·1	—5·5*	1·4	—2·9	0·8	—0·7	0·1	—2·5	—1·2
Alessandria	—	—	—	—	—	—	—	—4·9*	1·9	—2·7	1·0	0·4	0·9	—3·0	—0·8
Lesina	—	—	—	—	—	—	—	-2·1	0·2	—1·7	2·6	0·0	—0·4	0·8	—2·8

	1866	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880
Genf	4·0*	3·9	1·5	3·5	—2·0	0·1	0·1	—0·3	—0·4	—2·4	1·6	2·5	0·0	1·5	0·0
St. Bernhard ..	2·1	3·2	2·5	4·2*	—0·4	2·4	1·2	—0·8	—1·1	—2·9	0·9	0·0	3·5	—0·1	1·8
Basel	3·9	4·2	1·5	4·4*	—3·6*	0·8	1·4	—0·1	—1·0	—3·6*	1·3	3·2	0·6	1·3	•0·8
Altstätten	4·0	5·9	2·7	6·0	—2·8	0·9	0·1	—0·9	—0·1	—4·1	1·2	3·0	—0·5	2·0	—0·2
München ...	3·8	4·4	3·4	6·1*	—5·1*	0·8	—0·8	—0·6	—0·9	—5·0	1·3	3·6	1·1	2·0	—0·5
A.Auss.Schafb.	2·5	2·8	1·7	4·9*	—1·9	0·9	2·5	—0·9	—2·6	—6·6	—0·3	—1·2	0·9	—0·1	3·2
Kremsmünster	4·0	3·9	3·6	5·7*	—4·4	—0·2	0·1	0·1	—0·8	—4·9*	0·2	3·3	1·6	1·9	—1·3
Wien	3·5	4·4	3·6	5·0*	—5·4	—1·0	0·4	0·1	—0·1	—4·9	—0·6	2·5	2·8	1·4	—1·6
Graz	3·5	3·3	1·6	5·3*	—3·2	—1·6	1·1	0·5	0·2	—4·5	—0·7	2·3	0·7	1·7	—2·4
Agram	4·1	3·7	2·2	5·8	—4·7	—0·1	0·9	—0·3	0·6	—5·2	—0·3	2·2	0·6	3·4	—3·8
Rudolfswerth .	4·1	3·4	1·0	5·1	—3·9	—0·2	2·2	—0·4	0·4	—4·4	—0·6	2·0	—0·5	3·7	—2·7
Laibach	3·8	3·8	0·9	5·0*	—3·0	—1·6	1·9	—1·1	0·7	—4·4	—1·1	3·3	—0·1	2·3	—2·5
Obir	3·0	2·1	2·2	4·8	—2·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Klagenfurt	4·4	2·5	—0·8	6·0*	—3·3	—2·9	2·7	0·6	1·6	—4·3	—1·7	2·8	0·1	3·5	—1·5
Saifnitz	4·4	3·1	0·7	5·0*	—2·5	—0·8	1·0	—0·6	—0·2	—5·5*	—1·1	1·0	0·6	1·9	0·3
Sachsenburg ..	4·0	3·4	0·3	4·8	—4·3	—2·4	0·1	—0·4	0·3	—4·5	—0·6	2·2	1·1	2·7	—0·7
Innsbruck	3·3	3·2	—0·6	5·9*	—2·7	0·6	2·7	0·6	—0·5	—5·3*	—1·7	2·0	—1·6	2·1	1·3
Sils-Maria	3·1	4·4	1·6	4·6	—0·2	0·9	—0·3	—0·6	—0·5	—2·5	0·8	2·0	2·1	1·3	1·3
Marienberg ...	1·9	3·1	2·2	4·6	—1·8	1·4	0·0	—0·4	—1·2	—3·4	0·0	1·2	3·4	—0·2	1·3
Sulden	1·7	3·2	2·1	5·0	—1·5	2·0	0·7	0·1	—0·7	—2·4	0·1	1·2	2·1	—0·3	0·3
St. Martin	2·7	3·0	1·1	3·7	—1·8	—0·8	—0·4	0·3	—0·2	—1·5	—0·3	1·5	2·3	1·0	0·6
Bozen	2·3	3·2	1·3	3·5*	—2·0	—0·3	0·3	0·5	—0·9	—2·1	—1·3	1·2	1·6	0·7	—0·1
Triest	3·0*	2·9	0·5	1·1	—1·7	—0·5	0·9	0·2	—1·1	—4·1	—0·2	0·7	—0·1	2·8	1·1
Venedig	2·5*	2·4	—0·1	1·0	—1·6	—0·5	2·2	1·4	—0·1	—3·3	0·3	1·2	0·1	1·7	0·0
Mailand	3·0*	3·0	1·2	3·0	—1·1	—1·2	1·4	0·4	—0·2	—2·3	0·5	1·6	2·8	1·6	—0·6
Alessandria ...	3·2*	3·0	—0·4	3·1	—1·3	—2·1	2·0	0·7	—1·1	—2·4	—1·6	2·0	1·8	1·9	—1·8
Lesina	3·0	1·6	0·1	2·2	—0·7	—0·4	0·9	0·6	—2·2	—3·1	0·4	—0·3	—0·5	2·7	0·6

März.

	1851	1852	1853	1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865
Genf	—0·9	—2·0	—4·1*	—0·1	0·0	0·1	—0·5	—0·8	2·3	—1·3	1·0	2·3	0·2	1·6	3·5
St. Bernhard	—1·6	—0·5	—4·1	1·2	—1·2	1·6	1·0	—0·6	2·2	—3·0	—0·4	3·1	0·3	1·0	—5·3*
Basel	0·0	—2·1	—4·3*	—0·2	—0·5	—0·9	—0·2	—0·7	2·8	—1·5	1·2	3·4*	0·6	1·9	—3·4
Altstätten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1·9	—4·4
München	—0·1	—2·8	—4·1*	—0·8	0·4	—1·3	—0·7	—1·4	3·2	—1·6	1·5	3·9*	0·9	1·5	—3·6
Alt Aussee	—0·2	—2·7	—2·2	—1·1	—0·1	—0·9	—0·8	—0·7	2·0	—0·6	0·6	4·6*	1·3	2·1	—4·0*
Kremsmünster	0·4	—2·1	—3·3	—0·1	0·6	—1·9	—0·9	—1·8	2·9	—2·0	1·6	2·9	1·9	1·4	—4·0*
Wien	1·2	—2·7	—3·1	—0·2	0·2	—2·1	—0·7	—1·4	3·7*	—1·3	1·4	2·9	2·7	1·9	—4·1*
Graz	0·2	—2·6	—2·4	—0·4	—0·2	—2·9	—1·1	—2·4	3·0	—1·9	1·2	3·1	2·6	2·2	—3·3
Agram	—	—	—	—	—	—2·2	—0·7	—2·9	2·9	—2·0	0·7	3·2	2·5	2·1	—4·5
Rudolfswerth	—	—	—	—	—	—	—	—3·0	2·4	—1·5	0·5	3·3	2·4	2·3	—3·8
Laibach	1·0	—1·9	—1·9	0·0	3·0	—2·0	—1·8	—3·4	2·7	—1·8	0·9	3·0	2·0	2·0	—3·9
Obir	—0·3	—2·5	—0·6	1·4	0·4	0·1	—	1·1	0·8	—0·5	—2·1	5·0	2·9	2·4	—2·2
Klagenfurt	1·1	—2·8	—2·2	0·1	0·6	—0·9	—2·7	—3·1	3·6	—3·2	0·9	2·7	2·8	1·8	—3·7*
Saifnitz	1·3	—1·5	—1·4	—0·1	—0·5	—1·1	—2·0	—1·8	4·0*	—2·2	0·8	3·2	1·5	2·0	—3·4
Sachsenburg	—	—	—	—	—	—1·3	—2·3	—1·9	4·1	—2·3	0·7	3·1	1·6	1·2	—3·2
Innsbruck	0·5	—2·0	—3·7	—1·4	0·6	—0·9	—0·6	—2·3	2·4	—2·9	1·1	4·2	1·5	1·8	—4·2*
Sils-Maria	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·6	—4·0
Marienberg	—	—	—	—	—	—	—0·3	—0·1	3·2	—2·1	0·2	2·4	0·9	0·8	—4·2
Sulden	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—3·9
St. Martin	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2·0	0·9	0·9	—3·2
Bozen	—0·8	—1·6	—2·4	—0·6	0·4	—0·3	—0·9	—0·2	3·4*	—1·9	0·6	2·0	0·8	1·1	—3·3*
Triest	0·3	—1·4	—0·9	—0·3	0·2	—2·2	0·0	—0·8	2·5	—0·8	0·3	1·8	2·8	1·1	—2·5
Venedig	—0·6	—2·3	—2·5	—0·5	0·3	—1·0	—0·6	—2·0	2·0	—0·8	0·2	2·3	2·0	1·4	—2·5
Mailand	—0·4	—1·4	—3·1	1·2	—0·6	—1·0	—1·2	—1·4	3·3*	—1·7	0·6	1·8	0·6	0·1	—3·7*
Alessandria	—	—	—	—	—	—	—	—2·0	2·1	—2·4	0·3	1·9	0·5	—0·1	—4·1*
Lesina	—	—	—	—	—	—	—	0·4	0·5	—1·5	—0·5	2·1	1·9	1·3	—1·6

	1866	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880
Genf	0·3	0·9	—0·3	—2·2	—0·8	0·6	1·5	2·5	0·4	—0·4	0·8	—0·3	—0·2	1·4	2·8*
St. Bernhard	—0·5	1·6	—1·4	—3·3	—0·4	1·6	1·2	2·4	0·1	—0·1	0·0	—1·2	—1·2	2·2	4·6*
Basel	0·7	0·5	—0·3	—2·5	—1·0	1·1	1·7	2·6	—0·3	—1·3	1·2	—1·0	—0·1	0·4	3·1
Altstätten	0·9	0·5	—0·6	—2·5	—1·7	1·5	2·2	2·9	—0·1	—2·3	1·2	—0·8	—0·9	0·3	3·0
München	0·7	0·6	0·5	—2·1	—1·7	1·7	2·7	3·3	0·3	—2·6	1·9	—0·7	—0·3	—0·2	2·0
A.Auss.Schafb.	1·3	0·1	—0·7	—1·6	—1·7	1·8	1·6	3·0	—2·3	—3·1	0·0	—1·8	—2·6	0·1	2·3
Kremsmünster	0·9	0·0	0·7	—1·2	—2·5	1·3	2·6	3·3*	—0·1	—3·0	1·4	—0·6	0·2	—0·1	1·3
Wien	1·1	—0·8	0·7	—0·8	—2·3	0·8	2·4	3·1	0·1	—3·9	1·8	—0·1	0·7	—0·4	—0·2
Graz	1·7	—0·3	1·2	—0·1	—1·5	0·0	2·6	3·7*	—0·1	—3·8*	1·4	—0·7	0·4	—0·1	—0·1
Agram	2·3	—0·5	—0·4	—0·6	—2·6	0·9	1·7	3·8	—0·7	—4·9	1·7	—0·6	—0·4	0·3	—0·2
Rudolfswerth	3·0	—0·2	0·1	—0·8	—2·0	—0·1	2·0	3·9	—0·7	—4·6	2·0	—0·3	0·2	0·3	—1·3
Laibach	2·6	0·1	0·6	—0·5	—1·6	0·1	1·5	3·8*	—0·9	—4·3*	0·7	—1·0	1·7	0·2	0·2
Obir	1·6	1·0	—1·3	—1·2	—2·1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Klagenfurt	2·6	1·1	0·4	0·0	—2·3	—0·5	1·9	3·6*	—0·1	—3·6	0·7	—0·2	0·7	—0·1	1·4
Saifnitz	2·3	0·7	0·4	—0·6	—1·4	0·8	1·3	2·6	—1·5	—3·5*	0·7	—1·3	—0·2	—0·6	1·6
Sachsenburg	1·7	0·9	0·5	—1·1	—2·0	—0·3	1·3	2·2	—0·7	—3·0	0·9	—0·6	0·5	—0·5	1·6
Innsbruck	1·3	1·0	—0·4	—1·5	—1·6	2·5	2·7	4·8*	0·3	—3·6	1·0	—0·9	—1·4	0·6	2·6
Sils-Maria	0·6	1·9	—0·5	—1·9	—0·2	1·0	1·3	2·8	—0·2	—0·6	0·7	—1·1	—0·5	1·2	2·6
Marienberg	0·2	1·5	—0·5	—1·9	—0·6	1·8	1·1	2·8	0·8	—0·6	0·2	—1·9	—1·0	1·8	3·5
Sulden	—0·9	1·8	—0·8	—1·9	0·0	1·4	1·8	3·2	0·0	—0·2	0·6	—0·8	—1·7	1·7	2·9
St. Martin	0·3	1·2	0·3	—1·8	—0·4	0·7	0·9	2·5	0·4	—1·1	—0·3	—2·0	—0·8	0·8	2·2
Bozen	0·7	1·2	0·7	—2·2	—0·6	0·9	1·2	2·4	0·0	—1·2	—0·3	—1·7	—0·9	0·3	1·9
Triest	2·5	0·8	0·7	—0·7	—1·8	0·2	1·8	3·1*	—1·7	—3·3*	1·2	—0·8	—0·9	0·2	—0·7
Venedig	2·0	0·4	0·6	—0·3	—0·8	0·9	2·4	3·9*	—0·7	—2·9*	1·5	—0·3	—0·4	0·5	—0·8
Mailand	0·4	0·9	0·4	—2·2	0·3	1·4	1·1	2·8	0·7	—2·4	0·9	—1·3	0·7	1·5	1·1
Alessandria	0·0	0·2	0·0	—2·3	—0·2	1·1	0·5	2·5*	0·1	—3·1	1·1	—1·0	0·0	0·8	1·0
Lesina	2·1	1·4	—0·4	—1·4	—1·6	—0·4	1·8	2·6	—2·8	—2·6	1·2	—1·5	—1·5	0·2	—1·1

April.

	1851	1852	1853	1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865
Genf	—0·1	—1·3	—1·8	0·5	—1·3	0·7	—1·8	1·8	0·0	—2·2	—0·6	2·1	1·1	—0·3	3·6*
St. Bernhard	0·1	—1·0	—2·7	0·5	—1·1	0·0	—2·1	1·7	0·1	—3·4*	—1·2	3·0	1·1	—0·4	3·4*
Basel	0·2	—1·9	—2·1	0·4	—1·1	0·8	—0·7	1·6	0·4	—2·1*	—1·1	2·3	1·4	—0·9	3·8*
Altstätten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—1·7	4·0
München	1·1	—3·1*	—2·7	0·4	—1·6	1·5	—1·2	0·1	0·1	—1·4	—1·9	2·2	0·3	—2·9	2·5*
Alt Aussee	0·9	—2·9	—3·6	0·0	—2·5	2·9	—0·4	0·5	0·2	—1·4	—1·8	2·7	—0·3	—3·3	5·9*
Kremsmünster	2·2	—2·7	—3·0*	—0·3	—1·2	2·0	—0·2	—0·7	0·3	—1·0	2·0	2·7*	0·0	—3·0*	1·9
Wien	0·9	—3·3	—3·6*	—0·6	—1·8	1·9	0·3	—0·8	0·3	—0·6	—2·5	2·8*	—0·7	—3·2	1·9
Graz	0·7	—3·4*	—2·9	—1·3	—1·8	1·5	0·5	—0·7	0·3	—0·8	—1·9	2·7*	—0·4	—2·9	1·8
Agram	—	—	—	—	—	1·1	0·8	—0·4	0·4	—1·4	—2·0	2·7	0·9	—3·5	1·6
Rudolfswerth	—	—	—	—	—	—	—	—0·4	0·6	—2·4	—1·9	2·2	0·8	—3·1	1·2
Laibach	1·9	—2·3	—3·0	—0·5	—1·3	1·4	0·8	0·0	0·3	—1·1	—1·7	2·7*	0·9	—3·2*	1·3
Obir	—0·2	—3·7	—1·6	3·3	—1·8	1·6	—1·6	2·4	0·5	—1·7	—1·7	—	1·6	—2·5	5·1*
Klagenfurt	1·3	—1·2	—2·8*	—0·3	—1·8	2·0	—0·1	0·7	0·4	—2·0	—1·5	2·8*	0·9	—2·6	0·7
Saifnitz	1·4	—1·1	—3·0*	—0·6	—2·2	1·8	—1·1	1·1	1·1	—1·6	—0·4	3·1*	1·0	—1·7	1·4
Sachsenburg	—	—	—	—	—	1·8	—1·1	0·8	0·6	—1·8	—1·2	2·0	0·7	—2·5	1·6
Innsbruck	1·1	—1·5	—2·5	0·2	—1·1	2·4*	—0·3	0·2	—0·1	—1·9	—2·0	1·7	—0·4	—3·8*	2·3
Sils-Maria	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—1·5	2·6
Marienberg	—	—	—	—	—	—	—1·9	1·4	0·9	—1·9	—0·4	2·6	0·8	—1·6	3·5
Sulden	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3·1
St. Martin	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2·1	0·9	—1·2	2·8
Bozen	—0·4	—0·1	—2·8*	—0·9	0·4	—0·3	—1·4	1·2	0·1	—2·2	—0·5	2·1	1·1	—0·8	3·5*
Triest	1·2	—1·3	—2·2	—0·3	—0·8	0·8	1·7	1·9*	0·8	—0·4	—1·8	1·7	1·2	—2·2	1·5
Venedig	—1·6	—1·1	—2·4	—1·1	—0·6	0·6	—0·3	0·5	0·5	—1·3	—1·1	2·5*	1·4	—2·3*	1·5
Mailand	—0·4	—0·9	—2·0	0·3	—0·7	—1·1	—1·2	0·8	0·4	—2·6*	—1·2	1·9	1·1	—1·2	2·4*
Alessandria	—	—	—	—	—	—	—	0·6	—0·1	—2·5*	—1·0	2·2*	1·8	—1·0	1·5
Lesina	—	—	—	—	—	—	—	1·2	0·5	—0·1	—0·6	2·1	0·6	—2·6	0·6

	1866	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880
Genf	0·8	0·5	—0·6	1·2	0·3	0·9	0·3	—1·4	1·5	—0·1	—0·6	—0·4	—0·3	—2·4*	0·6
St. Bernhard	0·9	0·8	—0·7	1·5	—0·3	0·7	1·1	—2·2	1·4	0·0	—0·3	—0·5	0·7	2·6	0·4
Basel	1·0	0·6	—0·7	1·4	—0·3	0·6	0·3	—1·4	1·3	—0·4	0·0	—0·6	0·4	—2·1	0·3
Altstätten	1·2	0·0	—0·8	1·6	—0·8	—0·5	0·4	—1·9	1·2	0·0	0·0	—1·0	—0·1	—1·2	0·5
München	1·5	0·8	0·2	2·5	—0·5	0·1	1·5	—0·7	1·8	—0·1	1·0	—1·2	0·3	—0·9	1·0
A.Auss.Schafb.	2·1	—0·6	—0·8	2·3	—0·6	—0·2	1·1	—1·5	0·8	—1·0	1·9	—1·4	0·2	—1·1	2·3
Kremsmünster	2·0	0·7	—0·5	2·0	—1·4	0·1	2·1	—0·6	1·3	—0·8	1·7	—2·0	0·7	—1·0	2·0
Wien	2·0	0·5	—0·6	2·4	—1·1	—0·5	2·2	—0·7	1·7	—1·0	2·3	—1·5	0·8	—0·8	1·9
Graz	1·7	1·0	0·0	2·5	—1·0	0·7	1·8	—1·1	1·4	—0·9	1·5	—1·1	0·0	—0·5	1·7
Agram	1·2	0·5	—1·0	1·6	—1·8	—0·3	0·8	—1·5	1·0	—1·9	1·2	—1·3	—0·4	—0·9	1·7
Rudolfswerth	1·5	0·8	—0·6	1·6	—1·9	—0·1	1·1	—1·1	1·3	—1·1	1·7	—0·4	0·3	0·6	2·4
Laibach	1·1	1·0	—0·7	1·9	—1·5	0·0	1·0	—1·4	1·7	—1·0	0·8	—1·0	—0·1	—0·3	1·8
Obir	2·0	0·4	—0·7	1·6	—1·6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Klagenfurt	1·3	1·5	—0·5	2·0	—2·4	0·5	0·3	—1·9	1·5	—1·5	0·1	—1·4	0·0	0·2	2·2
Saifnitz	0·6	2·0	—0·2	2·0	—1·7	0·5	1·3	—1·8	1·7	—1·3	—0·8	—1·0	—0·6	—1·2	1·4
Sachsenburg	0·2	0·8	—0·7	1·6	—2·0	0·2	0·6	—2·0	1·7	—0·5	—0·4	—0·9	—0·7	—1·2	1·3
Innsbruck	1·3	0·4	—0·7	1·4	—1·4	0·5	0·9	0·3	2·3	1·3	1·1	—0·7	0·7	—2·0	1·3
Sils-Maria	0·4	1·2	—0·3	0·8	—0·5	0·5	1·1	—0·9	1·6	—1·3	0·3	—0·5	—0·1	—1·3	1·2
Marienberg	0·3	0·4	—0·6	1·3	—0·7	0·3	1·1	—1·1	0·9	—0·2	—0·2	—0·6	—0·1	—1·6	1·1
Sulden	—0·4	0·0	—1·1	0·9	—1·2	0·1	1·1	—0·7	2·2	—1·1	0·6	—0·9	—0·9	—0·7	1·3
St. Martin	0·2	0·6	—0·3	1·1	—0·1	0·5	1·1	—1·3	1·4	—0·9	—0·2	—0·6	0·2	—1·5	1·2
Bozen	0·0	1·0	—0·6	1·6	0·2	1·0	0·6	—1·5	1·1	—0·5	—0·8	—0·9	—0·1	—1·8	0·8
Triest	0·6	1·4	—0·4	0·9	—1·4	0·3	1·3	—1·2	1·0	—2·3*	0·3	—1·3	—0·3	—0·9	0·8
Venedig	1·0	1·1	—0·6	0·1	—1·5	0·3	2·1	—0·4	2·0	—1·2	1·3	—0·8	0·4	—1·5	0·6
Mailand	0·0	1·6	—0·4	0·7	0·3	1·6	1·6	—0·7	2·0	—0·6	—0·2	—0·8	0·4	—2·2	0·4
Alessandria	—0·6	1·0	—0·4	0·2	0·0	1·2	1·2	—1·2	1·8	—1·0	—0·3	—0·5	—0·3	—2·2	—0·3
Lesina	1·4	1·0	—0·7	0·2	—1·3	0·2	1·0	0·7	0·0	—1·5	1·4	—0·2	—0·1	—0·8	0·8

Mai.

	1851	1852	1853	1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865
Genf.	—2·8	0·1	—1·5	0·1	—1·8	—2·0	—0·2	—1·6	—0·1	1·2	0·4	2·5	1·5	1·0	3·1
St. Bernhard . .	—2·1	—0·6	—1·1	—0·3	—2·5	—2·2	0·0	—1·7	0·1	0·7	—1·1	2·1	1·5	1·1	2·5
Basel	—2·8	0·8	—0·9	0·7	—1·2	—1·6	1·6	—1·6	0·2	1·4	—0·2	2·6	1·5	0·5	3·2
Altstätten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—0·1	3·7
München	—3·0	0·6	—0·7	1·1	—1·0	—0·7	0·2	—1·9	0·2	0·9	—0·9	1·9	1·2	—1·0	3·7
Alt Aussee . . .	—3·6	0·3	0·7	1·4	—0·9	0·4	0·7	—1·8	1·3	1·1	—1·8	2·9	2·6	—0·5	5·1*
Kremsmünster	—2·5	1·3	0·6	1·6	—0·2	0·3	0·8	—1·6	0·3	0·8	—2·1	2·4	1·9	—1·1	4·0
Wien	—2·6	0·8	0·1	1·5	—0·4	0·5	0·1	—0·9	0·8	1·5	—2·2	2·0	2·0	—2·2	3·9
Graz	—2·9	—0·4	—0·6	0·6	—0·5	0·1	0·8	—0·7	0·1	1·1	—1·3	1·7	1·6	—1·6	3·8
Agram	—	—	—	—	—	—0·2	0·4	—0·6	0·0	0·9	—1·5	3·0	3·2	—1·0	3·4
Rudolfswerth .	—	—	—	—	—	—	—	—1·0	—0·6	1·1	—2·0	1·7	1·3	—0·9	3·2
Laibach	—2·5	0·3	0·0	0·8	—0·4	0·1	0·4	—0·4	0·1	1·2	—1·2	2·2	1·4	—0·6	3·1
Obir	—5·4	—0·7	—0·5	1·1	—2·7	—0·3	—2·8	—0·2	0·2	0·4	0·3	2·0	1·3	—1·2	4·6
Klagenfurt. . . .	—3·3	0·5	0·8	1·1	—0·7	0·0	0·6	—0·9	—0·4	1·1	—0·4	2·2	2·0	—0·4	3·3
Saifnitz.	—3·2	1·6	—0·8	0·7	—1·8	—0·7	0·7	—0·2	0·0	1·2	—0·3	2·7	2·2	0·2	3·7
Sachsenburg . .	—	—	—	—	—	—0·1	0·6	—1·0	—0·5	0·6	—0·1	2·0	1·5	—0·2	2·5
Innsbruck	—2·1	1·2	0·9	—0·4	0·8	—0·2	1·1	—3·1	0·2	0·2	—1·0	2·0	1·0	—1·0	2·9
Sils-Maria.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·9	3·1
Marienberg . . .	—	—	—	—	—	—	1·2	—1·3	0·1	0·7	0·2	1·8	1·1	—0·2	2·4
Sulden	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2·4
St. Martin.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1·8	1·7	0·5	2·4
Bozen	—2·7	1·0	—0·6	—1·6	—1·0	—2·3	0·3	—1·3	—0·5	0·8	1·1	1·9	2·1	0·6	2·9
Triest	—1·6	0·4	0·3	1·0	—0·4	—0·1	1·4	0·6	0·3	2·0	—1·8	1·8	2·4	—0·7	2·8
Venedig	—1·7	—0·9	—2·3	—0·2	—1·4	—0·9	0·5	—0·7	0·0	1·5	—1·4	2·5	2·2	—0·5	2·6
Mailand	—2·1	0·4	—1·2	—0·4	—2·2	—2·1	—0·6	—1·4	—1·0	1·1	0·4	1·4	1·3	0·0	2·5
Alessandria . . .	—	—	—	—	—	—	—	—0·7	—1·0	0·3	—0·4	1·6	0·9	0·2	1·9
Lesina	—	—	—	—	—	—	—	—0·2	0·2	0·8	—1·6	1·9	1·8	—1·1	2·0

	1866	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880
Genf	—1·4	0·4	4·9*	1·8	2·4	0·4	—0·6	—1·1	—2·5	2·7	—2·1	—1·6	1·4	—3·3*	—0·6
St. Bernhard	—1·0	1·2	4·9*	2·3	2·5	0·5	—1·0	—1·5	—3·1	3·3	—1·4	—1·6	1·5	—3·3*	0·0
Basel	—1·8	0·6	4·9*	1·2	1·2	—1·2	—0·8	—1·8	—3·1	2·1	—2·3	—2·1	1·6	—3·4*	—0·6
Altstätten	—1·9	1·1	5·6	2·4	2·1	—1·2	—0·4	—3·3	—3·7	2·7	—3·2	—2·4	1·3	—4·4	—1·2
München	—1·7	—1·0	5·4*	3·1	2·8	—2·0	0·9	—2·0	—2·9	2·3	—3·1*	—1·9	1·1	—2·6	—1·3
A. Auss. Schafb.	—1·7	0·5	5·1*	3·8	2·8	—2·1	1·8	—2·4	—3·5	2·6	—3·0	—1·7	2·3	—1·4	0·0
Kremsmünster	—1·4	0·5	5·0*	2·6	2·2	—2·5	2·0	—2·7	—3·8*	1·4	—3·6	—2·4	0·7	—2·6	—1·2
Wien	—1·9	0·0	4·0*	3·1	1·9	—2·8	3·0	—2·4	—3·5*	1·5	—3·2	—2·0	0·6	—1·6	—1·2
Graz	—1·8	1·2	4·7*	3·4	1·8	—2·4	2·0	—2·1	—3·3*	1·1	—3·3	—1·6	0·4	—1·8	—1·2
Agram	—1·9	1·1	4·7	2·9	1·5	—3·4	1·4	—2·5	—3·7	1·0	—4·2	—1·9	0·9	—2·1	—1·6
Rudolfswerth	—1·8	1·2	3·8	2·5	1·3	—3·5	1·1	—1·8	—3·2	1·4	—3·4	—0·1	1·2	—1·6	—1·0
Laibach	—1·8	0·9	4·3*	2·8	1·8	—2·7	1·0	—1·6	—3·2	1·5	—3·7*	—0·9	0·8	—2·0	—0·6
Obir	—3·0	—0·3	3·1	2·6	1·5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Klagenfurt	—2·0	0·7	4·5*	3·3	1·8	—2·4	0·6	—2·5	—3·7	1·2	—3·9*	—2·0	0·7	—2·0	—0·6
Saifnitz	—1·5	1·0	4·9*	3·2	1·2	—1·5	1·0	—1·9	—3·7	1·6	—4·0*	—1·6	0·7	—3·1	—0·9
Sachsenburg	—2·2	0·0	3·9	2·6	1·7	—1·8	0·6	—1·6	—2·9	2·0	—3·1	—1·6	0·4	—2·7	—1·5
Innsbruck	—1·6	0·9	4·7*	2·3	1·8	—0·5	1·1	—1·8	—2·9	1·8	—3·3*	—1·8	1·3	—3·1	—1·4
Sils-Maria	—1·4	1·0	4·4	2·9	2·4	—0·1	—0·3	—0·7	—2·1	2·4	—1·5	—1·8	1·4	—2·6	0·8
Marienberg	—2·2	0·8	4·3	2·1	2·2	—1·0	—0·5	—1·5	—3·4	3·3	—2·0	—2·1	1·0	—3·0	—0·2
Sulden	—2·2	—0·3	3·4	2·1	1·8	—1·4	—0·5	—1·5	—3·0	2·5	—1·4	—1·7	1·0	—1·8	0·3
St. Martin	—1·8	0·5	4·1	2·3	2·4	—0·5	—0·5	—1·0	—2·6	2·9	—1·9	—1·5	1·1	—2·5	0·6
Bozen	—1·7	0·2	3·7*	2·3	2·6	—0·1	—1·1	—1·3	—2·9	2·8	—2·0	—1·7	1·1	—3·2*	—0·2
Triest	—1·4	1·4	4·6*	1·6	1·2	—1·7	0·4	—2·0	—3·8	1·0	—4·2*	—1·6	1·0	—2·7	—1·2
Venedig	—1·2	1·4	4·0*	1·9	1·2	—1·4	1·4	—0·9	—2·8	2·1	—2·9	—0·9	1·9	—3·5*	—1·1
Mailand	—1·5	0·8	3·6*	1·9	2·7	0·2	—0·6	0·2	—2·0	3·2	—2·2	—1·4	1·9	—3·5*	—0·2
Alessandria	—2·0	0·0	3·1*	1·6	2·1	—0·1	—0·5	—0·4	—1·8	2·8	—2·0	—1·0	1·1	—3·6*	—1·0
Lesina	—1·3	0·9	2·9	3·1	0·9	—1·5	1·5	—1·6	—3·4	1·3	—1·1	—1·2	0·9	—2·9	—0·4

Juni.

	1851	1852	1853	1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865
Genf	0·8	—1·3	—1·1	—1·1	—1·0	0·1	—0·6	2·4	—0·5	—0·9	0·3	—0·4	0·3	—0·8	1·2
St. Bernhard	0·8	—1·3	—0·8	—1·1	—1·2	0·2	—0·8	2·4	—0·8	—0·6	0·0	—1·2	0·4	—0·9	1·1
Basel	0·7	—0·7	—0·5	—1·0	—0·5	1·1	0·3	3·9*	0·6	—0·5	2·0	—1·0	—0·5	—1·1	—0·2
Altstätten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—1·4	—0·3
München	—0·3	0·1	—0·2	—1·1	—0·4	0·9	—0·7	2·4	0·1	—0·1	0·7	—0·8	—0·6	—0·8	—1·2
Alt Aussee	—1·3	0·8	—0·4	—2·0	0·1	1·5	—0·4	—	0·4	0·6	1·7	—0·8	0·0	—0·3	—2·1
Kremsmünster	—0·4	0·8	0·3	—1·1	0·4	1·1	—0·7	1·9	—0·2	—0·4	1·3	—0·5	—0·1	—0·2	—1·5
Wien	—0·8	0·4	—0·3	—1·4	0·4	1·4	—0·2	2·1	0·3	0·3	0·9	—0·7	0·1	—0·2	—2·1
Graz	—1·1	0·4	—0·7	—1·4	0·4	1·3	0·2	1·7	—0·1	0·4	2·0	—0·3	0·0	0·0	—1·2
Agram	—	—	—	—	—	2·0	—0·3	1·7	0·0	0·7	1·6	1·3	1·1	—0·2	—2·2
Rudolfswerth	—	—	—	—	—	—	—	0·7	—0·5	0·8	1·7	0·1	0·1	—0·3	—1·3
Laibach	—1·4	—0·2	—0·3	—0·4	1·1	2·1*	—0·8	1·7	—0·4	0·8	1·7	0·0	—0·2	—0·3	—0·9
Obir	1·2	—0·1	—1·6	—0·2	—0·5	2·5	—0·9	1·2	—	0·6	—0·2	0·2	0·1	—1·3	—1·5
Klagenfurt	—0·4	0·6	0·2	—0·1	0·6	1·6	—1·2	1·7	—0·2	0·3	1·6	—0·2	0·3	—0·4	—0·8
Saifnitz	—0·3	1·7	—0·3	—0·6	0·2	1·4	—0·1	2·1*	0·2	—0·4	1·1	—0·1	0·0	—0·6	—0·1
Sachsenburg	—	—	—	—	—	1·1	—0·1	1·7	0·2	—0·4	0·8	—0·6	0·3	—1·0	—0·3
Innsbruck	—0·1	0·1	0·2	—0·8	—0·1	1·8	—0·3	0·3	0·1	—0·5	0·5	—1·1	—0·7	—1·5	—1·6
Sils-Maria	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—0·2	0·8
Marienberg	—	—	—	—	—	—	0·5	2·4	0·1	—0·1	1·2	—0·7	—0·5	—0·8	0·2
Sulden	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·4
St. Martin	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—0·3	—0·1	—0·3	0·8
Bozen	0·1	0·6	—1·1	—2·3	—0·3	0·9	0·1	3·1*	—0·2	—0·7	1·3	—0·2	0·5	—0·5	1·2
Triest	0·3	0·5	—0·4	0·3	1·0	1·5	0·8	2·7*	—0·4	0·8	0·9	0·0	0·5	—1·0	—0·4
Venedig	2·0*	—1·8	—1·8	—0·9	—0·5	1·2	—0·4	1·5	—0·5	0·1	1·1	0·0	0·3	—0·8	0·8
Mailand	0·4	—0·7	—1·6	—0·8	—1·1	0·2	—0·6	1·8	—1·3	—0·8	—1·3	—0·4	—0·7	—0·2	1·1
Alessandria	—	—	—	—	—	—	—	2·1*	—0·7	—0·9	0·1	0·2	0·5	0·0	0·8
Lesina	—	—	—	—	—	—	—	0·9	—0·7	0·9	0·7	1·3	0·1	—0·8	—0·5

	1866	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880
Genf	1·4	0·2	1·4	—1·8	2·1	—2·8*	—0·4	0·1	0·8	1·0	—0·2	2·5*	—0·5	0·4	—1·9
St. Bernhard	1·4	0·4	1·7	—1·9	1·2	—3·1*	0·3	—0·4	0·9	0·8	0·0	3·2*	—0·1	0·9	—1·3
Basel	1·5	—0·6	1·2	—2·9	0·7	—3·2*	—0·7	—0·2	—0·2	1·0	—0·2	3·1	—0·6	0·5	—1·4
Altstätten	1·8	—0·1	1·5	—2·9	0·6	—3·9	—1·1	—0·7	0·3	0·8	—0·3	2·9	—0·6	—0·1	—1·9
München	1·3	—0·2	1·8	—2·2	0·7	—2·8*	—0·5	0·2	0·5	1·6	0·6	2·5*	—0·3	0·3	—1·2
A.Auss.Schafb.	3·0*	—0·1	2·4	—2·2	0·3	—2·9	—1·2	—0·1	1·6	2·1	0·6	3·0	—0·9	1·0	—0·6
Kremsmünster	2·3*	0·0	1·9	—2·8*	—0·1	—2·7	—0·4	—0·2	—0·3	1·6	0·2	1·1	—0·4	0·1	—1·1
Wien	2·2	—0·4	1·6	—2·2	—0·7	—3·2*	—0·8	—0·7	0·2	2·3*	0·4	1·7	—0·4	0·5	—0·7
Graz	1·7	0·3	2·2*	—1·7	—0·1	—2·1*	—1·4	—0·7	—0·2	1·7	—0·8	1·2	—0·5	1·1	—1·2
Agram	2·5	0·1	1·3	—2·5	—1·0	—3·0	—1·6	—1·4	0·1	1·6	—0·3	0·7	—0·5	0·7	—2·0
Rudolfswerth	1·7	—0·1	1·3	—2·5	—0·5	—3·1	—1·3	—1·1	0·0	1·5	0·6	1·8	0·0	1·9	—0·7
Laibach	1·5	0·1	1·1	—2·0	—0·2	—3·1*	—1·2	—0·9	0·0	1·1	0·0	0·9	—0·8	1·0	—1·2
Obir	1·2	0·1	0·4	—2·9	—0·4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Klagenfurt	1·2	0·1	1·8*	—2·1	—0·6	—2·8*	—1·5	—0·9	—0·7	1·1	—0·3	1·4	—0·3	1·7	—0·6
Saifnitz	1·1	0·9	1·9	—1·9	—0·3	—2·9*	—0·9	—0·7	—0·2	0·7	—0·6	1·2	—0·8	0·3	—1·3
Sachsenburg	0·3	0·2	2·0	—2·0	—0·1	—2·8	0·1	0·1	0·3	0·8	0·1	1·3	—0·8	0·1	—1·5
Innsbruck	1·2	—0·4	1·4	—2·6*	0·4	—1·8	1·3	0·4	0·7	1·3	0·3	3·9*	—0·6	0·9	—1·8
Sils-Maria	1·1	0·6	1·9	—1·7	1·3	—2·9	0·2	0·1	0·7	0·6	0·0	2·2	—0·2	—0·1	—1·4
Marienberg	0·9	0·3	1·4	—2·5	0·2	—3·7	—0·2	0·0	0·3	0·7	0·0	2·2	—0·1	0·3	—1·8
Sulden	0·5	—0·7	0·3	—2·0	0·2	—4·0	0·4	0·0	0·4	0·7	0·2	1·9	—0·7	0·2	—1·4
St. Martin	1·0	0·2	1·0	—1·7	0·7	—3·0	0·2	0·0	0·6	0·6	0·1	2·3	—0·6	0·2	—1·5
Bozen	1·0	0·4	1·5	—1·6	0·3	—2·8*	—0·6	—0·3	—0·1	0·2	—0·2	1·3	—1·1	0·4	—2·4
Triest	1·6	0·6	2·5	—2·6	—0·8	—3·7*	—1·4	—1·7	—0·5	1·0	—1·5	0·8	—0·7	0·5	—2·3
Venedig	1·8	1·1	1·5	—2·5	—0·6	—3·8*	—0·5	—0·3	0·9	1·5	0·2	1·6	—0·1	0·1	—2·0
Mailand	1·4	1·6	1·0	—1·6	1·0	—2·7*	0·7	0·2	1·1	1·4	0·1	3·1*	0·2	0·9	—1·7
Alessandria	0·5	0·6	1·7	—1·4	0·6	—2·4*	—0·5	—1·0	0·5	0·2	—0·3	1·9	—0·4	—0·1	—2·0
Lesina	0·2	0·3	2·4	—0·2	0·1	—2·1	—1·6	—2·1	1·1	1·9	—0·4	0·7	0·4	0·4	—0·4

Juli.

	1851	1852	1853	1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865
Genf	—2·3	0·2	—0·6	—0·9	—1·3	—1·2	1·5	—2·1	3·3*	—2·4	—1·7	0·9	0·8	0·5	0·9
St. Bernhard	—2·2	—0·1	—0·1	—0·8	—1·3	—1·6	0·6	—2·7	2·7*	—3·5*	—1·4	0·9	—0·2	0·5	1·3
Basel	—1·2	1·4	0·2	—0·4	—1·6	—1·2	2·1	—1·0	3·8*	—2·2	—0·1	0·7	—1·3	—0·7	1·3
Altstätten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—1·4	1·4
München	—1·8	0·6	0·5	—0·2	—0·6	—1·8	1·2	—1·5	3·0	—3·1*	—0·6	0·2	—1·2	—1·3	1·6
Alt Aussee	—1·7	0·9	1·0	0·0	—0·5	—2·4	1·0	—1·6	4·0*	—3·4*	0·4	1·2	—1·0	—1·8	3·0
Kremsmünster	—1·8	1·3	0·8	0·6	—0·3	—2·4	1·1	—1·1	3·4*	—3·4*	0·1	0·9	—1·1	—1·3	1·9
Wien	—1·6	1·2	0·4	—0·3	—0·4	—2·5	1·5	—0·6	3·5*	—2·8*	—0·1	0·2	—0·5	—2·1	2·2
Graz	—1·5	0·4	0·8	—0·2	—0·3	—1·8	1·7	—0·2	3·4*	—2·4*	0·7	0·4	—1·1	—1·6	2·3
Agram	—	—	—	—	—	—1·8	1·0	0·0	2·3	—2·4	—0·3	2·0	0·2	—1·2	2·3
Rudolfswerth	—	—	—	—	—	—	—	—0·3	1·9	—2·3	0·3	—0·1	—1·2	—1·3	1·8
Laibach	—1·7	0·4	1·8	0·3	—0·4	—1·6	0·4	—0·4	2·4*	—2·2	—0·1	0·5	—1·1	—1·0	1·9
Obir	—0·6	—0·6	2·2	1·0	0·5	—2·2	1·5	—0·2	4·7	—3·3	0·8	0·3	—0·9	—1·6	2·4
Klagenfurt	—1·5	0·4	1·2	0·1	0·5	—1·3	1·3	—0·5	2·7*	—2·3*	—0·4	0·2	—0·8	—1·1	2·1
Saifnitz	—1·3	0·6	0·7	—0·2	0·2	—1·6	0·7	—0·6	2·7*	—2·2	—0·5	0·3	—1·0	—1·0	1·7
Sachsenburg	—	—	—	—	—	—2·1	0·8	—0·3	3·2	—2·0	—0·4	0·2	—1·1	—1·2	1·1
Innsbruck	—1·0	1·0	0·2	0·1	—0·7	—1·7	0·8	—2·5	2·7	—3·8*	—0·8	0·5	—1·3	—1·8	1·8
Sils-Maria	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·1	1·0
Marienberg	—	—	—	—	—	—	1·5	—1·8	3·6	—1·9	—0·5	0·6	—0·6	—0·2	0·8
Sulden	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·9
St. Martin	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·8	0·1	—0·2	0·5
Bozen	—2·8*	1·3	2·1	0·3	—0·3	—1·7	1·0	—1·6	2·8	—2·6	—0·8	0·9	0·0	—0·3	0·8
Triest	—2·1	—0·1	1·7	1·7	1·0	—0·4	1·0	—0·3	2·5*	—2·6*	—0·7	—0·2	—0·2	—1·0	1·6
Venedig	—1·6	—1·5	1·7	0·3	0·0	—1·1	—0·8	—1·2	2·7*	—1·8	0·0	0·3	—0·8	—1·0	—0·7
Mailand	—3·2*	—0·7	0·3	—0·3	—1·1	—2·1	0·0	—2·3	1·2	—2·1	—1·2	0·3	0·0	0·2	0·9
Alessandria	—	—	—	—	—	—	—	—0·9	1·0	—2·3*	—1·0	0·9	0·4	0·5	0·4
Lesina	—	—	—	—	—	—	—	0·2	1·6	—1·3	0·3	1·6	—0·2	—0·7	0·6

	1866	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880
Genf	—0·4	—1·2	0·3	1·8	2·6	0·3	0·7	1·8	1·9	—1·7	1·0	—0·3	—0·5	—2·8*	1·0
St. Bernhard	—0·4	—1·1	0·1	2·6	1·5	0·6	1·0	2·0	2·3	—1·1	1·0	—0·4	—0·2	—2·5	2·0
Basel	—0·8	—1·9	0·5	1·1	1·7	0·0	0·6	1·1	1·7	—1·6	1·1	—0·8	—1·4	—2·9*	0·5
Altstätten	—0·7	—1·6	—0·1	1·9	1·4	0·2	0·1	1·3	2·2	—1·2	0·5	—1·2	—1·2	—3·1	0·5
München	—0·8	—0·9	0·7	2·1	2·4	0·7	0·8	2·2	3·1*	—0·8	0·9	—0·5	—1·3	—2·6	0·5
A. Auss.Schafb.	—1·2	—0·6	0·9	2·6	2·1	0·9	0·2	1·7	2·9	—0·7	—0·1	—1·3	—1·8	—3·0	1·4
Kremsmünster	—0·9	—0·6	0·6	1·5	1·4	0·6	0·8	2·0	2·1	—0·6	—0·6	—1·0	—1·6	—2·8	—0·6
Wien	—1·0	—1·3	0·2	1·3	0·5	0·0	0·4	2·0	2·4	—0·1	0·0	—0·5	—1·3	—2·6	1·2
Graz	—0·3	—0·7	0·1	1·3	0·4	1·1	—0·4	1·3	1·9	—0·5	—1·1	—0·1	—1·3	—2·4	1·0
Agram	—0·3	—0·9	—0·3	0·8	0·4	0·6	—0·5	1·0	2·0	—0·5	—1·3	—0·2	—1·1	—2·3	0·7
Rudolfswerth	0·3	—0·5	0·0	0·4	0·2	—0·3	—0·4	1·2	1·6	—0·7	—0·3	0·7	—0·6	—1·7	1·4
Laibach	0·5	—1·1	—0·1	1·1	0·9	0·3	0·1	1·1	1·7	—0·7	—0·6	—0·1	—0·8	—2·4*	1·3
Obir	—1·5	—2·2	—0·9	1·0	0·7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Klagenfurt	—0·1	—0·6	0·2	1·4	—0·1	0·6	—0·1	0·7	1·2	—0·8	—0·5	—0·4	—0·5	—2·3*	1·2
Saifnitz	—0·2	—0·1	0·4	1·9	1·2	1·0	0·2	0·8	1·5	—0·3	—0·6	—0·5	—1·0	—3·1*	1·0
Sachsenburg	—0·5	—0·5	0·4	2·2	0·5	1·1	1·0	1·7	1·5	—0·4	0·0	—0·7	—1·0	—3·6	0·1
Innsbruck	—1·0	—1·0	0·2	2·7	1·6	1·7	2·1	2·2	3·0*	—0·4	0·4	—0·7	—0·7	—2·9	0·9
Sils-Maria	0·0	—0·8	0·3	1·9	1·5	0·8	0·6	1·7	2·4	—1·1	1·0	—0·6	—0·1	—2·1	1·3
Marienberg	—0·4	—0·5	—0·7	1·7	1·7	0·5	0·6	1·7	1·6	—1·7	0·6	—1·2	—0·6	—3·1	0·6
Sulden	—0·6	—2·0	—1·2	1·7	0·6	—0·2	0·4	1·8	0·9	—0·7	0·0	—0·9	0·2	—2·1	0·6
St. Martin	—0·1	—0·5	—0·3	2·0	1·3	0·2	0·8	2·1	1·7	—1·3	1·0	—0·8	—0·5	—3·0	0·7
Bozen	0·4	—0·5	0·6	2·0	1·3	1·0	0·8	1·7	0·8	—2·2	0·3	—1·4	—1·3	—2·8*	0·5
Triest	—0·5	—0·5	—0·5	0·4	0·3	0·4	—0·2	0·9	1·5	—1·1	—1·2	—0·9	—1·3	—1·7	1·4
Venedig	0·5	—0·4	—0·3	1·5	0·2	1·0	0·9	1·9	2·7*	—1·0	0·1	0·5	—0·8	—1·9*	1·2
Mailand	0·8	—0·2	—1·1	1·6	1·1	1·1	0·6	2·3*	1·6	—0·9	1·1	0·1	0·2	—1·3	1·8
Alessandria	—0·1	—0·3	—0·7	1·1	0·8	0·4	0·0	1·4*	1·3	—1·5	0·4	—0·4	—0·5	—1·2	0·6
Lesina	1·7	—0·3	—0·3	0·1	0·0	0·4	—0·6	0·2	0·8	—0·2	—0·7	—0·3	—0·7	—1·2	1·1

August.

	1851	1852	1853	1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865
Genf	—0·9	—1·6	0·0	—1·6	0·9	1·8	0·0	—2·1*	2·5*	—1·8	1·8	—0·6	1·3	—0·4	—0·8
St. Bernhard	—0·6	—1·8	0·7	—1·3	0·5	1·2	—0·7	—2·6	1·4	—1·7	2·7	—0·9	0·7	—0·7	—0·4
Basel	0·1	—0·9	0·7	—1·1	—0·8	2·9	1·1	—0·7	3·0	—0·9	3·4*	0·2	1·0	—1·6	—1·1
Altstätten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—1·7	—1·2
München	—1·0	—0·3	0·2	—1·3	0·5	1·3	0·5	—1·6	1·9*	—1·3	1·1	—1·3	1·6	—2·3*	—0·6
Alt Aussee	—1·3	0·4	0·5	—1·9	0·9	1·3	0·8	—2·1	2·4	—0·2	2·9*	—0·2	2·3	—2·1	—0·3
Kremsmünster	—0·7	0·5	0·5	—0·5	0·7	1·0	0·7	—2·1	1·8	—1·7	2·3*	—0·6	1·5	—2·3*	—0·5
Wien	—0·8	0·2	0·1	—1·6	0·4	1·1	1·6	—1·3	2·2	—0·3	1·7	—1·1	2·2*	—2·7*	—0·6
Graz	—0·7	—0·5	0·1	—1·6	0·4	1·0	1·3	—1·1	1·8	—0·4	2·9*	—0·7	1·9	—1·6	0·1
Agram	—	—	—	—	—	1·1	1·4	0·2	1·9	—0·9	2·2	0·7	3·0	—1·7	0·2
Rudolfswerth	—	—	—	—	—	—	—	—1·2	1·9	0·0	2·1	—0·3	1·4	—1·5	1·0
Laibach	—2·0*	0·0	0·8	—1·1	1·2	1·4	0·8	—1·5	2·2	—0·6	2·5*	—0·5	1·2	—1·5	0·8
Obir	—0·8	—1·0	1·3	—0·9	2·7	2·0	1·0	—0·4	3·7	—0·6	4·3	—0·3	0·9	—2·0	0·8
Klagenfurt	—0·5	—0·1	0·0	—1·4	0·9	1·0	1·4	—1·4	1·9	—0·6	3·4*	—0·1	1·4	—1·1	0·5
Saifnitz	—0·3	0·1	0·7	—1·4	0·8	1·1	0·7	—1·4	2·0	—0·7	2·1*	—0·4	1·1	—0·3	0·6
Sachsenburg	—	—	—	—	—	0·5	1·4	—1·3	1·3	—0·9	2·7	—0·3	1·5	—1·0	0·2
Innsbruck	0·0	0·4	0·3	—0·8	1·0	1·0	1·2	—2·3*	1·2	—1·4	1·1	—0·4	1·2	—2·0	—0·1
Sils-Maria	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—1·1	—0·5
Marienberg	—	—	—	—	—	—	1·0	—1·9	2·3	—1·2	3·8	—0·9	0·9	—1·5	—0·7
Sulden	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—0·2
St. Martin	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—0·5	0·8	—0·8	—0·8
Bozen	—0·4	—0·3	2·2	—2·6*	1·9	0·3	0·6	—1·6	1·9	—1·5	3·2*	—0·8	1·6	—0·8	—1·1
Triest	—0·8	1·2	0·3	—0·3	0·9	1·7	1·2	—0·9	2·7*	—1·7	1·9	—0·3	1·5	—1·0	0·8
Venedig	—0·4	—0·4	0·5	—1·0	0·0	1·6	0·0	—1·5	2·4	0·0	2·8*	—0·5	1·1	—0·7	0·4
Mailand	—1·2	—1·5	0·1	—1·2	0·4	0·1	—1·2	—2·1	1·0	—1·0	2·5	—0·9	1·0	—0·1	—0·1
Alessandria	—	—	—	—	—	—	—	—1·6	1·3	—1·8	2·4*	—0·2	0·9	—0·1	—0·1
Lesina	—	—	—	—	—	—	—	—1·2	2·0	0·8	1·7	—0·1	0·3	—1·1	0·6

	1866	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880
Genf	—1·8	0·8	0·4	—0·5	—1·5	0·5	—0·9	1·7	—1·2	1·0	1·1	1·4	0·0	1·5	—0·7
St. Bernhard	—2·0	0·6	0·2	—0·8	—2·8*	0·9	—0·6	1·4	—0·5	1·8	0·8	2·2	0·8	3·3*	—1·1
Basel	—2·3	0·0	0·2	—2·2	—2·4*	0·3	—1·9	1·1	—2·2	1·3	1·3	1·0	—0·2	0·3	—0·8
Altstätten	—2·5	0·8	0·6	—1·7	—2·4	0·0	—2·0	1·0	—1·9	1·6	0·7	1·0	—0·1	1·5	—1·4
München	—1·5	1·3	1·5	—0·9	—1·3	0·4	—0·8	1·6	—1·2	1·8	1·3	1·3	0·0	1·1	—1·3
A. Auss. Schafb.	—2·2	1·2	1·3	—1·3	—2·6*	0·7	—1·9	2·0	—2·0	2·4	0·8	1·2	0·4	1·3	—1·3
Kremsmünster	—2·0	1·3	1·8	—1·3	—1·5	0·5	—0·8	1·5	—1·7	1·1	0·3	1·0	—0·2	0·8	—1·6
Wien	—2·2	0·9	1·0	—1·1	—1·8	0·1	—1·7	2·1	—1·6	1·0	0·6	1·9	—0·2	0·5	—1·8
Graz	—2·0*	0·9	0·3	—0·9	—1·9	0·2	—1·5	1·3	—1·2	0·5	—0·8	1·4	0·2	0·8	—1·3
Agram	—2·0	0·9	0·0	—1·0	—2·3	—0·4	—1·2	0·8	—1·9	0·2	—0·7	2·1	0·0	0·3	—2·5
Rudolfswerth	—1·3	0·1	0·0	—0·5	—1·5	—1·3	—0·6	0·5	—1·5	0·2	0·1	2·5	0·6	1·2	—0·8
Laibach	—1·7	0·4	—0·1	—1·1	—1·2	—1·7	—1·0	0·9	—1·5	0·5	—0·6	1·9	0·5	1·2	—1·2
Obir	—3·3	—0·5	—0·8	—2·7	—3·3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Klagenfurt	—1·8	0·9	0·5	—1·5	—2·0*	—0·5	—1·4	1·0	—1·7	0·2	—0·6	0·8	0·8	2·0	—0·9
Saifnitz	—1·4	0·8	0·2	—1·0	—0·9	—0·2	—1·4	0·8	—2·0*	0·4	—0·6	1·0	0·2	1·1	—1·4
Sachsenburg	—1·4	0·4	1·1	—1·2	—1·4	—0·3	—0·8	1·2	—1·3	0·7	0·2	0·8	—0·2	0·7	—1·5
Innsbruck	—1·6	0·9	0·7	—1·8	—1·5	0·5	0·7	1·8	—1·2	0·9	0·8	2·1*	—1·1	1·3	—1·3
Sils-Maria	—1·4	0·5	0·8	—0·2	—1·4	0·2	—0·9	1·3	—0·3	0·9	0·6	1·9	0·6	2·2	—0·4
Marienberg	—1·7	0·9	0·4	—1·0	—1·7	—0·1	—1·1	1·0	—1·3	0·9	0·4	1·5	—0·1	2·1	—1·3
Sulden	—2·2	0·0	—0·5	—0·9	—1·7	—1·0	—0·8	0·9	—1·4	1·3	0·8	2·1	0·2	2·1	—1·2
St. Martin	—1·0	0·5	0·5	—0·7	—1·4	—0·2	—0·9	0·8	—0·8	0·4	0·4	1·6	—0·1	1·0	—1·0
Bozen	—1·4	0·9	0·6	—0·4	—1·3	0·1	—1·0	0·5	—1·3	0·5	—0·2	2·1	—0·1	1·5	—2·3
Triest	—2·4*	0·7	—0·2	—1·1	—1·8	—0·1	—1·1	1·1	—1·7	—0·1	—0·2	1·5	0·1	1·5	—2·2
Venedig	—2·5	0·5	—0·3	—0·7	—3·0*	—0·2	—1·6	1·4	—0·5	1·4	0·8	2·6	0·2	1·3	—2·2
Mailand	—0·5	0·1	—0·9	—0·4	—2·3*	0·3	—0·6	2·3	—0·2	1·2	0·8	2·8	0·2	2·5	—1·3
Alessandria	—1·4	0·5	0·1	—0·9	—2·4*	0·1	—0·9	1·8	—0·7	0·5	0·4	1·7	—0·2	1·4	—1·3
Lesina	—0·9	0·6	0·3	—1·0	—1·7	—0·8	—0·3	1·1	—1·3	0·1	0·1	1·8	0·1	1·1	—1·8

September.

	1851	1852	1853	1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865
Genf	—3·7*	—1·0	—1·2	—0·2	0·4	—1·6	1·1	1·1	—0·1	—1·7	0·2	0·1	—1·3	—0·7	1·7
St. Bernhard	—3·5	—2·0	—1·0	0·9	—0·1	—3·6*	0·3	0·6	—0·7	—1·8	0·1	—0·7	—1·4	—0·6	3·4*
Basel	—3·0*	—0·6	—0·3	0·3	—0·2	—0·6	1·8	2·4*	0·4	—1·3	0·0	0·9	—0·3	—0·7	1·3
Altstätten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—1·1	2·0
München	—2·8*	—0·6	—0·6	—1·3	—0·9	—1·6	0·6	1·5	—0·4	—0·7	—0·2	0·4	—0·8	—0·7	1·0
Alt Aussee	—3·6	—0·5	0·0	—0·6	—0·4	—1·6	0·6	1·8	—1·4	0·1	0·0	1·7	—0·1	—0·8	1·8
Kremsmünster	—2·3	0·5	0·2	—0·6	—0·9	—1·8	0·1	1·2	—0·9	—1·0	0·4	0·7	0·2	—0·4	0·5
Wien	—2·5	—0·4	—0·6	—1·1	—1·0	—1·6	0·6	1·7	—1·0	0·2	0·7	0·9	1·0	—0·4	0·5
Graz	—2·7	—0·1	—0·3	—1·1	—1·0	—0·9	0·4	1·2	—0·6	—0·2	1·2	0·7	0·8	—0·1	0·8
Agram	—	—	—	—	—	—0·8	0·2	1·8	—0·8	—0·1	1·2	0·8	1·4	—0·1	0·5
Rudolfswerth	—	—	—	—	—	—	—	0·4	—0·4	0·1	0·9	0·8	0·8	0·0	—0·1
Laibach	—1·9	—0·8	0·3	—1·3	—0·4	—0·5	0·5	0·7	—0·5	0·2	1·5	0·7	0·7	0·1	0·2
Obir	—5·4	—2·1	1·3	2·4	—0·5	—3·1	1·8	2·8	—0·2	0·7	0·9	0·7	—0·1	0·4	1·8
Klagenfurt	—2·3	—0·4	—0·9	—1·8	—0·4	—1·3	1·2	1·1	—0·9	0·4	1·7	0·5	0·4	0·0	1·1
Saifnitz	—2·1	—0·1	—0·8	—1·1	—0·1	—1·2	0·7	1·2	—0·6	0·4	0·6	0·7	0·5	0·4	1·4
Sachsenburg	—	—	—	—	—	—1·8	0·8	1·0	—1·4	0·2	0·7	0·0	—0·5	—0·5	1·0
Innsbruck	—2·3	0·5	—0·2	—0·9	0·4	—1·3	1·8	0·6	—1·5	—0·8	0·7	1·0	—1·1	—1·0	0·1
Sils-Maria	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·0	1·9
Marienberg	—	—	—	—	—	—	0·4	1·1	—0·7	—1·0	0·5	—0·1	—1·2	—0·4	2·8
Sulden	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1·6
St. Martin	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·4	—0·8	0·1	1·7
Bozen	—4·0*	—0·3	0·4	—0·4	0·6	—2·3	0·4	0·8	—1·3	—0·6	0·0	0·3	—0·9	—0·5	2·7*
Triest	—2·9*	—0·1	0·4	—0·9	0·0	—1·2	0·7	1·7	—0·9	—1·0	0·6	0·3	1·3	—0·1	2·3*
Venedig	—3·6*	—2·1	—1·4	—0·9	—0·6	—1·8	—0·3	1·1	—0·5	—0·1	0·0	0·0	0·9	0·2	2·0*
Mailand	—3·8*	—1·7	—1·0	—1·0	—1·2	—2·3	—0·3	0·3	—0·8	—1·5	—0·8	0·1	—0·5	0·0	2·8*
Alessandria	—	—	—	—	—	—	—	0·2	—0·7	—1·9*	0·8	—0·3	—0·3	—0·1	2·2*
Lesina	—	—	—	—	—	—	—	—0·2	—0·9	1·1	0·6	0·3	2·0	—1·1	0·4

	1866	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880
Genf	0·8	1·1	1·7	0·6	—1·1	2·5*	1·0	—0·5	1·3	2·1	—1·1	—1·4	0·0	0·0	0·7
St. Bernhard	—0·3	1·9	1·3	1·0	—0·2	2·0	1·3	0·2	1·5	1·5	—1·2	—1·4	1·3	0·0	1·2
Basel	0·0	0·6	1·5	0·3	—2·2	1·2	0·1	—1·2	0·5	1·1	—1·2	—2·4	0·4	0·5	0·6
Altstätten	0·7	0·9	2·1	1·0	—2·2	1·3	—0·1	—1·4	1·5	0·8	—1·6	—2·5	—0·3	—0·1	—0·2
München	1·8	1·2	2·6*	1·8	—1·5	1·7	1·4	—0·6	1·8	—0·2	—0·1	—2·7	0·3	0·5	0·4
A. Auss. Schafb.	2·4	1·4	3·3*	1·2	—1·3*	2·6	1·2	—0·6	2·6	—0·9	—2·1	—2·9	0·8	1·9	0·0
Kremsmünster	1·7	1·8	2·8*	0·9	—1·8	1·0	1·4	—0·8	1·3	—1·3	—0·8	—3·1*	0·6	0·5	0·3
Wien	1·6	0·9	2·4*	1·1	—2·0	0·1	0·8	—1·1	1·7	—1·2	—0·2	—2·7*	0·8	0·6	—0·1
Graz	1·4	1·4	2·2*	0·2	—2·6	0·7	0·5	—1·4	1·5	—1·4	—1·6	—3·1*	1·2	1·6	0·5
Agram	1·0	1·7	2·2	—0·1	—2·5	0·4	0·2	—1·4	1·0	—2·1	—1·8	—3·2	0·9	0·5	—0·6
Rudolfswerth	1·4	1·1	2·3	—0·9	—2·5	—0·4	0·3	—1·2	1·0	—1·8	—1·0	—2·5	1·6	1·0	0·0
Laibach	1·2	1·3	2·5*	0·0	—1·9	0·4	0·2	—1·2	1·1	—1·5	—0·4	—2·8*	1·4	0·8	0·3
Obir	0·2	0·3	1·2	0·4	—3·5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Klagenfurt	1·0	1·5	2·1*	0·1	—2·0	1·1	0·0	—1·4	1·1	—1·3	—1·4	—3·6*	1·2	1·5	0·6
Saifnitz	1·3	1·8	2·5*	0·9	—1·1	1·8	0·1	—1·5	1·0	—1·3	—1·6	—3·3*	0·6	0·6	—0·2
Sachsenburg	0·2	0·8	2·0	0·6	—1·9	1·4	0·2	—1·1	1·4	—0·3	—1·1	—2·6	0·3	0·3	—0·4
Innsbruck	0·8	0·8	1·9	0·6	—2·6*	2·3*	2·1	0·2	1·6	—0·5	—0·8	—2·3	0·2	0·3	—0·1
Sils-Maria	0·4	1·3	1·1	1·4	—0·6	1·9	0·6	—0·2	1·6	0·5	—0·9	—0·8	0·8	0·9	0·9
Marienberg	—0·4	2·0	1·3	0·9	—1·4	1·8	0·5	—0·7	1·4	0·3	—1·2	—1·5	0·4	0·4	0·2
Sulden	0·0	0·8	0·9	1·3	—1·5	1·8	0·2	—0·6	1·2	0·3	—2·6	—1·0	0·4	0·3	0·7
St. Martin	0·1	1·2	0·5	1·1	—0·9	1·8	0·3	—0·7	1·5	0·5	—1·0	—1·5	1·1	0·5	0·2
Bozen	0·2	1·4	1·1	0·7	—1·2	1·4	0·1	—0·8	1·5	0·4	—1·1	—1·3	0·8	0·6	—0·5
Triest	—0·3	1·9	1·5	—0·7	—1·7	1·8	—0·2	—1·1	0·8	—1·3	—1·5	—2·1	1·1	0·9	—0·3
Venedig	—0·3	1·7	1·5	0·0	—1·7	1·4	1·6	0·1	1·7	0·2	0·2	—0·9	1·3	0·5	—0·2
Mailand	0·8	1·7	0·2	1·1	—0·6	2·3	1·8	—0·1	2·4	1·5	—0·5	—0·1	0·7	0·7	0·7
Alessandria	0·0	1·1	0·6	0·5	—1·3	1·9	0·9	—0·1	1·2	0·9	—1·1	—0·7	0·4	—0·1	—0·2
Lesina	0·5	2·4	0·5	—0·7	—2·5	0·1	0·8	—0·2	0·6	—2·6	—0·7	—0·3	0·9	1·2	—0·5

October.

	1851	1852	1853	1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865
Genf	—0·5	—1·0	—0·3	0·2	1·2	—0·1	0·7	0·3	1·0	—0·9	1·7	1·9	0·5	—1·2	0·7
St. Bernhard	0·8	—0·6	—1·0	—0·3	0·9	1·1	—0·1	—0·2	0·7	0·0	2·3	1·2	0·8	—1·5	—0·7
Basel	0·2	—0·8	0·5	0·5	2·0	0·6	1·1	0·3	1·7	—0·6	1·8	1·7	1·5	—1·8	0·9
Altstätten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—1·2	1·4
München	0·9	—1·2	—0·2	0·3	2·4*	0·0	2·0	0·3	0·9	—1·3	0·2	1·5	0·8	—2·2	0·4
Alt Aussee	1·4	—1·9	0·7	—0·1	2·8*	1·9	2·7	0·9	1·5	—2·1	2·2	2·1	2·3	—1·8	0·4
Kremsmünster	1·6	—1·5	—0·1	0·1	2·3	0·5	2·6*	0·4	0·6	—1·7	0·9	2·3	1·1	—2·1	—0·2
Wien	1·8	—2·1	0·3	—0·2	2·7	—0·1	2·8*	1·3	1·2	—1·5	0·3	1·3	1·8	—1·8	0·2
Graz	1·8	—2·0	0·0	—0·1	2·8*	0·7	2·7	1·8	1·2	—1·7	0·2	1·8	1·4	—1·6	0·2
Agram	—	—	—	—	—	0·4	2·8	1·9	2·5	—1·5	0·1	2·0	1·4	—1·1	0·4
Rudolfswerth	—	—	—	—	—	—	—	1·8	2·0	—1·7	—1·0	2·2	1·1	—1·1	0·1
Laibach	1·4	—1·3	0·7	0·1	3·2*	0·1	3·0	2·1	2·2	—1·8	—0·4	2·1	1·2	—0·9	0·2
Obir	0·5	—1·7	0·2	1·2	2·6	2·8	1·8	2·3	2·0	1·1	1·9	1·5	1·8	—3·1	—1·4
Klagenfurt	2·0	—1·5	0·0	—0·5	2·9	—0·1	3·3*	1·9	2·2	—1·3	0·0	1·9	1·4	—1·5	0·4
Saifnitz	2·1	—1·3	0·2	—0·4	2·9*	0·2	2·6	2·1	2·2	—2·1	0·2	2·2	1·7	—1·1	0·2
Sachsenburg	—	—	—	—	—	0·0	2·7	1·8	1·5	—1·5	0·4	1·9	1·5	—1·5	0·0
Innsbruck	1·5	—0·7	—0·7	1·0	3·9*	0·7	3·2	0·5	0·8	—2·1	—0·3	1·9	1·9	—1·4	0·4
Sils-Maria	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—1·5	—0·5
Marienberg	—	—	—	—	—	—	1·1	0·6	1·6	—0·9	1·2	1·3	0·9	—1·9	—0·7
Sulden	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—1·1
St. Martin	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1·7	1·7	—1·1	—0·3
Bozen	1·1	—1·3	—0·1	0·0	2·9*	0·0	1·5	1·3	1·7	—1·6	0·4	1·6	1·1	—1·4	0·2
Triest	1·2	—1·5	0·4	0·2	2·4	0·9	3·0*	2·0	2·5	—2·3	0·2	2·2	2·4	—1·2	0·3
Venedig	0·8	—1·9	—0·2	0·2	2·4*	0·1	2·2	1·7	2·3	—1·1	0·9	1·7	1·2	—1·8	—0·2
Mailand	0·2	—1·5	—0·9	0·1	1·2	—0·7	1·2	1·4	1·7	—1·5	0·6	1·8	0·5	—1·6	—0·5
Alessandria	—	—	—	—	—	—	—	1·7	1·7	—0·9	0·8	2·5*	1·4	—1·6	—0·2
Lesina	—	—	—	—	—	—	—	1·1	2·8	0·0	0·4	2·1	0·4	—1·7	0·2

	1866	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880
Genf	1·0	—1·8	0·2	—1·9	—0·3	—1·0	—0·1	0·5	—0·3	—0·9	2·0*	—2·2*	0·4	—1·5	1·3
St. Bernhard	0·6	—2·3	—0·8	—2·4*	—1·2	—0·7	—0·5	0·6	1·2	—1·1	2·9*	—1·9	0·3	0·7	1·3
Basel	—0·3	—1·7	—0·1	—2·4*	—0·1	—2·4	—0·1	0·5	—0·2	—1·4	2·2*	—2·0	0·7	—1·6	—0·5
Altstätten	—0·4	—2·1	0·7	—2·7	—1·1	—3·2	1·4	0·8	0·3	—1·8	2·3	—2·4	0·5	—1·7	0·1
München	—2·0	—1·1	1·2	—2·1	0·0	—2·9*	1·6	1·7	0·5	—2·3	1·9	—2·0	1·0	—1·5	0·2
A.Auss.Schafb.	—0·6	—1·8	1·0	—3·6*	—0·9	—2·8	2·9	1·9	2·9	—2·1	4·0	—2·8	0·7	—1·2	0·4
Kremsmünster	—1·9	—0·7	1·6	—2·5*	—0·5	—2·5*	2·2	1·5	—0·2	—2·2	1·4	—2·3	0·9	—1·1	0·0
Wien	—2·2	—1·1	1·7	—2·6	—1·0	—2·8*	2·3	2·2	0·2	—2·5	0·4	—2·2	0·8	—1·5	—0·5
Graz	—2·6	—1·0	1·8	—3·1*	—1·8	—2·3	2·0	2·2	—0·5	—1·5	1·6	—2·9	0·7	—1·3	0·1
Agram	—2·2	—1·5	2·0	—2·5	—1·1	—3·4	2·1	2·5	—0·7	—1·0	0·5	—3·0	1·1	—2·1	0·2
Rudolfswerth	—3·5	—1·2	1·3	—3·6	—1·5	—3·4	1·8	2·2	—0·4	—1·4	0·5	—3·3	1·0	—1·7	0·4
Laibach	—3·1	—0·9	1·4	—3·3	—1·1	—3·5	1·7	1·9	—0·8	—1·3	0·8	—3·8*	0·9	—2·1	0·2
Obir	—3·4	—2·6	—0·2	—3·8	—3·1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Klagenfurt	—2·2	—1·0	1·7	—3·6	—2·3	—1·7	1·8	2·0	—0·6	—1·5	0·8	—3·9*	1·2	—1·8	1·3
Saifnitz	—2·1	—1·1	1·6	—3·3	—1·8	—2·5	1·5	1·8	—0·9	—1·9	1·1	—3·8*	0·1	—2·6	1·0
Sachsenburg	—2·0	—1·2	1·8	—3·1	—1·9	2·3	1·9	2·2	—0·4	—0·5	1·3	—2·4	1·0	—2·2	0·5
Innsbruck	—0·8	—1·8	—1·1	—2·5*	—1·9	—2·3	3·0	2·2	—2·3	—1·7	2·1	—2·5	0·8	—2·2	0·5
Sils-Maria	0·0	—2·2	0·8	—2·1	—1·3	—1·4	1·0	1·1	0·9	—1·1	2·1	—2·3	0·2	—0·2	0·8
Marienberg	0·1	—1·8	0·7	—2·1	—1·7	—1·9	0·4	1·2	0·9	—1·0	2·4	—1·9	—0·2	—0·2	—0·2
Sulden	0·1	—2·0	0·5	—2·6	—1·7	—1·5	0·9	1·5	1·0	—0·6	1·8	—2·0	—0·1	—0·4	0·2
St. Martin	—0·8	—1·2	1·0	—1·2	—1·2	—1·5	1·1	1·8	0·2	—0·3	1·6	—2·5	0·5	—1·3	0·3
Bozen	—0·2	—1·6	1·0	—0·7	—0·8	—1·4	0·6	1·6	0·3	—0·9	2·0	—2·3*	0·4	—1·6	0·3
Triest	—1·5	—1·7	0·9	—3·2	—1·5	—2·7	1·0	1·0	0·0	—1·5	—0·1	—3·3*	0·0	—1·4	0·1
Venedig	—1·6	—1·8	0·9	—2·0	—2·2	—2·2	2·0	2·3	1·0	—0·2	1·8	—2·8*	0·2	—2·1	0·0
Mailand	—1·1	—1·4	0·6	—1·9	—0·7	—1·3	0·9	1·8	0·2	0·0	2·4*	—3·0*	0·6	—0·2	1·1
Alessandria	—1·2	—1·0	0·9	—1·4	—0·8	—1·1	0·9	2·1	0·0	0·1	2·3	—3·2*	0·8	—0·6	1·0
Lesina	—1·3	—0·3	2·2	—1·1	—2·7	—1·9	2·1	1·2	0·4	—1·7	0·8	—2·4	1·1	—1·3	—0·3

November.

	1851	1852	1853	1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865
Genf	—4·1*	3·0*	1·0	—1·0	—0·4	—2·2	0·6	—1·5	0·0	—0·9	1·2	1·3	1·1	0·2	1·9
St. Bernhard	—6·8*	3·8*	1·1	—2·8	—0·4	—2·7	2·3	—1·4	1·0	—1·0	1·5	1·0	2·2	0·1	2·0
Basel	—3·4*	4·6*	0·1	—1·5	—1·0	—2·6	0·4	—3·1	—0·4	—1·4	1·4	0·5	1·4	0·6	2·0
Altstätten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·5	2·8
München	—3·2	5·5	—0·1	—1·5	—0·7	—2·6	0·0	—4·4*	—0·5	—2·2	1·7	1·0	1·9	—0·5	2·3
Alt Aussee	—3·9*	5·6*	0·0	—2·0	0·3	—3·3	1·2	—3·1	0·2	—0·6	1·0	3·5	2·2	0 1	2·4
Kremsmünster	—2·8	4·7*	—0·2	—1·3	—0·2	—2·7	—0·9	—4·7*	0·0	—2·3	1·5	1·7	2·3	—0·9	2·0
Wien	—1·9	3·6*	—0·7	—1·3	0·8	—2·7	—1·2	—4·0*	—0·4	—1·3	0·3	0·4	1·6	—0·4	1·8
Graz	—1·3	4·4*	—0·4	—1·2	0·9	—3·6	0·5	—3·9*	—0·1	—0·7	0·9	1·5	1·5	0·2	2·8
Agram	—	—	—	—	—	—2·6	—0·2	—3·2	1·3	—0·5	1·8	0·1	0·8	—0·2	3·0
Rudolfswerth	—	—	—	—	—	—	—	—3·5	0·8	—1·3	1·3	1·0	1·0	—0·5	2·8
Laibach	—2·1	5·5*	0·6	—0·9	1·8	—2·9	—0·2	—2·8	1·0	—0·8	1·5	1·7	1·1	—0·4	2·7
Obir	—4·5	5·4	0·3	—4·1	0·1	—5·7	3·2	0·8	0·2	—1·4	1·3	0·7	1·6	0·0	2·8
Klagenfurt	—2·6	4·7*	1·4	—2·0	2·2	—4·5*	0·9	—3·3	0·4	—0·8	0·8	3·2	1·4	0·9	2·8
Saifnitz	—2·5	4·8*	1·5	—2·0	1·2	—4·5*	0·2	—2·3	0·6	—1·3	1·1	2·2	1·0	1·0	3·5
Sachsenburg	—	—	—	—	—	—4·0	1·3	—3·0	—0·3	—0·8	1·0	2·5	1·0	0·5	2·8
Innsbruck	—3·5	5·9*	1·5	—1·3	—0·2	—3·6*	1·0	—3·0	—0·8	—1·2	0·5	2·6	1·1	0·5	2·9
Sils-Maria	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·9	2·0
Marienberg	—	—	—	—	—	—	1·3	—2·3	0·1	—1·5	—0·5	0·9	2·0	—0·4	1·6
Sulden	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1·4
St. Martin	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1·9	1·5	1·3	2·1
Bozen	—2·8*	3·9*	1·6	—1·8	3·2	—2·8*	—0·4	—2·0	—0·4	—1·2	0·0	1·9	1·0	1·2	1·8
Triest	—1·3	3·8*	1·1	—0·3	0·2	—2·6*	0·2	—2·5	0·1	—1·8	0·5	1·2	2 1	0·4	2·7
Venedig	—1·8	3·4*	1·7	—0·8	1·1	—3·1*	—0·1	—2·1	0·5	—0·8	0·2	2·4	2·0	0·5	2·0
Mailand	—3·0*	2·3	1·6	—1·0	1·5	—2·9	0·3	—2·3	0·2	—0·9	—0·5	2·5*	0·6	0·6	1·5
Alessandria	—	—	—	—	—	—	—	—2·7*	—0·4	—1·0	—0·6	3·0*	2·2	1·0	1·7
Lesina	—	—	—	—	—	—	—	—1·2	0·9	—1·6	2·4	1·7	2·0	0·9	1·0

	1866	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880
Genf	0·4	—1·2	—1·4	0·6	0·2	—2·3	2·9	1·0	—0·9	0·9	—0·7	2·2	—1·0	—2·3	1·8
St. Bernhard	1·0	0·4	—0·5	1·4	—0·3	—2·1	1·4	1·4	—0·8	—0·7	—1·0	2·8	—3·0	—1·7	2·6
Basel	1·2	—1·5	—1·8	1·0	1·2	—2·8	3·4	1·0	—2·0	0·6	0·1	3·0	—0·5	—2·5	1·5
Altstätten	1·2	—0·6	—1·4	1·1	0·9	—3·0	3·1	1·2	—2·9	0·7	—0·4	3·0	0·5	—2·7	2·3
München	1·7	—1·1	—1·9	1·8	0·4	—2·1	3·1	1·1	—2·8	0·5	—1·1	2·9	—0·6	—2·5	2·4
A.Auss.Schafb.	0·5	—1·6	—1·2	0·1	1·3	—0·8	2·8	0·1	—2·3	—1·8	—1·3	3·0	—0·8	—3·8	1·5
Kremsmünster	1·8	—0·7	—0·5	1·6	1·1	—1·4	2·7	2·0	—2·6	0·1	—2·4	1·6	0·0	—2·6	2·4
Wien	1·4	—0·9	—0·2	1·3	2·3	—0·8	2·8	2·2	—2·3	—0·3	—3·0	1·5	0·8	—2·3	1·9
Graz	0·5	—0·7	—0·5	—0·7	1·9	0·7	1·9	1·2	—3·2	0·1	—2·9	1·4	0·8	—2·4	1·2
Agram	0·4	—1·4	—0·6	—0·2	3·3	—0·7	3·9	1·6	—3·9	—0·2	—3·7	2·0	1·9	—3·3	0·9
Rudolfswerth	0·4	—1·5	—1·2	—1·2	3·1	—0·1	3·0	0·7	—3·7	0·0	—3·4	1·7	1·0	—2·8	0·9
Laibach	0·5	—1·0	—0·9	—1·5	3·6	—0·2	3·0	0·4	—4·1*	—0·5	—2·8	1·2	0·1	—3·7	1·4
Obir	—0·5	0·0	—0·3	—0·3	1·3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Klagenfurt	—0·1	—0·8	—0·4	—3·0	2·1	1·0	0·3	0·9	—4·1	0·0	—2·4	0·6	0·9	—2·7	1·9
Saifnitz	0·7	0·3	0·4	—1·8	2·1	0·2	1·5	1·0	—3·9	—0·4	—2·1	1·1	—1·3	—3·5	0·8
Sachsenburg	0·2	0·3	—0·3	—2·5	1·3	0·8	1·0	1·3	—3·2	0·4	—1·2	1·0	0·0	—1·2	1·3
Innsbruck	—0·1	—2·2	—1·9	0·0	2·6	—0·9	2·9	1·1	—2·8	—0·1	—0·9	1·5	—0·8	—1·7	1·1
Sils-Maria	0·9	0·1	—1·0	1·2	0·6	—1·4	2·1	1·3	—2·3	—0·4	—0·1	1·6	—1·3	—1·4	1·9
Marienberg	0·4	0·1	—0·7	0·6	—0·2	—1·9	1·1	1·1	—1·9	—0·8	—1·0	1·0	—2·4	—1·8	1·4
Sulden	0·5	—0·2	—0·6	0·7	0·0	—1·9	1·7	1·1	—2·3	—0·3	—0·7	1·2	—2·8	—2·1	1·3
St. Martin	0·0	0·3	—0·4	—0·3	0·6	—0·2	1·4	0·5	—2·7	—0·3	—0·6	0·2	—1·3	—1·2	0·7
Bozen	—0·4	0·0	—0·2	—1·1	1·2	—0·4	1·1	0·1	—2·4	—0·1	—1·2	0·2	—1·3	—2·2	0·5
Triest	—0·3	—1·0	—1·0	—0·1	1·7	—0·3	1·8	0·4	—2·0	—1·2	—2·3	1·7	0·0	—2·3	1·4
Venedig	—0·1	—1·0	—0·7	—1·3	1·2	—0·4	2·4	—0·4	—1·3	—0·3	—1·3	1·9	—0·3	—3·0	0·8
Mailand	0·6	0·3	—0·9	—0·3	1·1	—1·1	1·7	0·7	—1·2	—0·5	—1·4	1·4	—0·7	—2·0	1·9
Alessandria	0·4	—0·5	—1·0	—0·9	1·4	—0·7	1·5	0·6	—2·0	—0·6	—0·8	1·2	—1·2	—2·0	1·3
Lesina	—0·3	—2·5	—1·3	—0·8	1·2	0·0	1·6	0·0	—1·4	—0·9	—2·7	0·7	1·1	—2·0	1·7

December.

	1851	1852	1853	1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865
Genf	—4·0	2·7	—2·5	2·0	—3·4	0·4	—0·1	1·5	—1·5	0·9	—0·1	1·5	1·1	—1·6	—0·3
St. Bernhard	1·0	4·2*	—3·1	—1·5	—3·4	—0·3	3·3	—0·4	—3·4	—2·9	2·0	0·6	2·0	0·3	2·3
Basel	—2·1	4·4	—4·8	2·6	—2·4	1·1	0·4	1·6	—1·8	1·0	—0·3	1·8	2·4	—2·1	—1·0
Altstätten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—3·0	—2·1
München	—0·5	4·4	—4·2	3·2	—3·2	0·2	0·8	2·0	—1·9	0·8	—0·6	1·6	2·9	—3·6	—0·8
Alt Aussee	0·1	4·5*	—2·3	1·1	—3·6	0·4	2·0	1·3	—2·4	0·5	—1·0	1·4	2·0	—1·0	0·8
Kremsmünster	0·5	3·9	—3·4	3·9	—4·4	—1·7	0·8	1·2	—2·8	0·0	—0·8	1·3	3·4	—2·8	0·5
Wien	0·8	3·9	—3·9	3·8	—5·1	—0·4	2·0	1·4	—2·5	—0·4	—1·0	0·1	2·9	—2·9	0·5
Graz	—0·6	4·0	—4·0	2·2	—4·7	—0·5	0·8	1·3	—2·8	0·9	—1·1	0·5	2·3	—1·5	0·8
Agram	—	—	—	—	—	—0·1	—0·1	2·4	—2·3	1·1	—1·5	—0·4	1·0	—2·0	0·2
Rudolfswerth	—	—	—	—	—	—	—	1·5	—2·1	1·1	—1·7	—0·4	1·3	—0·9	0·6
Laibach	—3·4	5·9	—2·1	1·7	—5·2	0·0	—0·8	1·9	—2·2	1·2	—0·3	—0·2	1·3	—0·3	0·5
Obir	—0·9	4·9	—2·3	—0·5	—5·5	—1·8	2·2	—1·4	—1·1	—2·1	1·3	0·1	1·5	0·7	2·2
Klagenfurt	—4·9	5·4*	—0·6	1·4	—3·9	—2·6	0·5	3·0	—2·8	2·4	—2·1	0·7	2·4	1·9	1·9
Saifnitz	—4·9	5·0	—2·4	0·8	—2·8	—0·3	1·5	1·6	—1·4	1·3	—2·8	—1·3	1·7	—0·3	1·3
Sachsenburg	—	—	—	—	—	—1·3	0·6	3·2	—2·0	0·6	—2·0	—1·2	3·4	0·6	1·6
Innsbruck	—1·3	5·2	—1·5	1·7	—4·5	0·1	—0·6	0·6	—1·8	1·6	—1·7	1·9	1·6	—1·2	—2·3
Sils-Maria	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—0·5	0·9
Marienberg	—	—	—	—	—	—	—1·1	0·3	—2·7	—2·4	1·3	0·8	2·3	—0·9	2·3
Sulden	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1·0
St. Martin	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—1·2	2·2	0·1	1·3
Bozen	—0·6	2·2	—1·4	2·3	—2·0	—1·2	—0·2	0·7	—2·7	—0·4	—1·3	0·4	2·5	0·6	0·9
Triest	—0·8	4·0*	—1·7	0·5	—3·2	0·5	1·0	0·3	—2·6	—0·7	—1·8	—0·3	1·3	—0·3	1·1
Venedig	—1·2	3·3	—1·2	1·0	—3·1	—0·8	—0·3	0·5	—2·2	0·8	—1·6	—0·9	1·0	0·5	0·8
Mailand	—1·3	2·3	—1·8	1·3	—3·3	—0·8	—0·2	1·0	—2·7	—0·5	—1·9	0·0	1·2	1·4	1·0
Alessandria	—	—	—	—	—	—	—	1·0	—3·3	—0·8	—1·3	—0·1	1·3	1·6	1·0
Lesina	—	—	—	—	—	—	—	0·6	—0·7	0·2	—1·5	—1·5	—1·0	0·5	0·2

	1866	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880
Genf	2·4	—0·9	6·4*	—0·1	—2·6	—5·1	2·9	—0·4	—1·0	—1·3	4·3	2·0	—1·9	—6·7*	5·1
St. Bernhard	4·2*	—2·5	3·6	—1·7	—3·2	—2·8	1·5	3·3	—3·5	—0·5	2·7	0·0	—3·8*	—2·0	3·7
Basel	3·0	—1·0	6·8*	—0·6	—4·1	—6·0	3·7	—0·1	—1·0	—2·5	4·4	1·7	—1·7	—9·8*	6·3
Altstätten	3·1	—1·6	6·8	0·0	—2·8	—8·0	4·5	—0 7	—0·3	—2·9	4·6	1·4	—1·2	—8·1	5·9
München	3·2	—1·3	5·7	—0·2	—3·8	—6·6	3·3	0·5	—0·5	—1·8	4·0	1·6	—1·8	—8·5*	5·9*
A.Auss.Schafb.	1·9	—2·0	4·4	1·5	—3·5	—2·6	1·4	2·5	—3·6	—2·1	4·1	—1·5	—2·6	—2·4	2·6
Kremsmünster	2·4	—0·8	4·6	1·2	—2·6	—6·4	4·1	1·1	—0·9	—1·3	2·8	1·6	—1·7	—8·2*	5·4*
Wien	0·0	—0·9	4·5*	2·0	—3 4	—5·9	4·1	1·9	—0·3	—1·1	2·7	0·6	—1·2	—6·7*	4·5*
Graz	0·4	0·0	4·3	2·4	—2·0	—4·7	4·5*	0·7	0·1	—2·2	3·1	0·0	—2·4	6·0*	4·3
Agram	1·0	—1·9	6·2	2·0	—1·6	—5·7	5·1	0·2	0·1	—2·9	5·1	—0·2	—1·8	—8·2	4·6
Rudolfswerth	1·2	—2·4	6·7	1·6	—1·5	—5·9	6·2	—0·2	0·8	—3·4	5·2	—0·6	—1·0	—8·0	4·3
Laibach	1·6	—0·7	7·4*	1·8	—1·6	—5·4	6 6	—0·4	—0·1	—3·4	5·8	—1·2	—1·8	-10·3*	4·3
Obir	3·7	—3·2	4·0	—0·2	—1·6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Klagenfurt	—0·5	—0·5	5·4*	3·4	—2·1	—6·8	4·8	0·7	—0·6	—5 2	4·4	1·5	—2·0	—9·6*	4·4
Saifnitz	2·1	—0·9	6·0*	2·2	—1·0	—7·3*	4·2	2·0	—0·6	—2·8	4·1	—0·2	—2·0	—6·8	4·6
Sachsenburg	2·0	0·0	5·1	2·0	—1·8	—7·9	2·7	1·9	—1·2	—2·9	3·4	1·7	—0·5	—6 7	6·2
Innsbruck	1·3	—1·4	6·1*	1·8	—1·3	—7·9*	5·5	0·1	—0·5	—2·7	4·3	0·5	—1·2	—7·0	4 4
Sils-Maria	3·3	—0·9	4·4	0·9	—1·2	—4·3	3·4	1·2	—2·3	—0·6	2·9	0·2	—2·7	—3·2	4·2
Marienberg	3·3	—1·3	2·2	—0·7	—2·5	—3·0	1·6	1·5	—2·9	0·0	1·6	—0·2	—3·7	—2·3	3·3
Sulden	3·4	—0·6	2·9	—0·2	—1·8	—4·0	2·3	1·8	—2·6	0·1	1·9	—0·8	—4·4	—3·3	3·2
St. Martin	1·9	0·0	2·9	0·4	—1·0	—4·3	1·4	0·8	—1·0	—0·3	1·7	0·4	—2 5	—2·0	3·6
Bozen	0·6	0·1	3·6*	1·3	0·2	—3·7	2·0	0·8	—0·6	—0·8	1·1	—0·1	—2·7	—5·3*	2·5
Triest	1·4	—1·5	3·3	1·4	—2·6	—3·4	4·0*	0·2	—0·2	—1·3	3·1	—0·2	—1·5	—4·4	2·8
Venedig	1·2	—1·7	2·9	1·8	—1·4	—3·2	5·1*	1·0	1·2	—0·6	3·1	1·2	—2·5	—6·7*	1·4
Mailand	1·7	—0·8	2·9	1·3	—0·4	—3·7	3·6*	0·4	0·0	—0·2	1·8	1·2	—2·4	—5·2*	3·3
Alessandria	1·1	—0·6	3·0	1·3	—0·2	—4·1	3·1*	0·0	—0·3	0·2	2·0	0·6	—3·2	—7·2*	2·3
Lesina	0·7	—2·1	2·1	1·4	—0·2	—3·5	3·5	—0·4	1·3	—1·1	2·6	—0·4	—0·6	—3·2	2·3

Jahr.

	1851	1852	1853	1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865
Genf	—1·6*	0·0	—0·9	—0·5	—0·7	0·0	—0·2	—0·4	0·6	—0·9	0·2	1·0	0·7	—0·6	0·8
St. Bernhard	—1·2	0·0	—1·5	—0·8	—1·0	—0·2	0·0	—0·8	0·2	—1·8*	0·6	0·7	0·8	—0·3	0·5
Basel	—1·0	0·6	—0·9	—0·2	—1·2	0·1	0·5	—0·4	0·9	—0·8	0·4	1·2*	0·8	—1·0	0·5
Altstätten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—1·5	0·6
München	—0·8	0·6	—1·0	—0·4	—0·8	—0·1	0·0	—1·1	0·5	—0·9	—0·1	0·9	0·9	—1·7*	0·3
Alt Aussee	—1·2	0·5	—0·5	—0·7	—0·7	0·4	0·4	—0·9	0·6	—0·7	0·4	1·5	1·3	—1·1	0·7
Kremsmünster	—0·5	1·0	—0·6	0·1	—0·6	—0·3	—0·1	—1·2	0·5	—1·1	0·1	1·0	1·4	—1·4*	0·1
Wien	—0·6	0·4	—0·8	—0·1	—0·8	—0·1	0·3	—1·0	0·9	—0·3	—0·1	0·6	1·7*	—1·6*	0·1
Graz	—0·7	0·3	—0·7	—0·4	—0·5	—0·2	0·4	—1·1	0·7	—0·6	0·5	0·8	1·4*	—1·5*	0·4
Agram	—	—	—	—	—	0·1	0·2	—0·8	1·0	—0·6	0·2	1·0	1·9	—1·5	0·2
Rudolfswerth	—	—	—	—	—	—	—	—1·5	0·7	—0·5	0·0	0·7	1·2	—1·5	0·2
Laibach	—0·6	0·9	0·0	—0·1	—0·1	0·2	—0·1	—1·3	0·8	—0·5	0·8	1·0	1·2	—1·3	0·4
Obir	—1·3	0·0	—0·2	0·0	—0·6	0·2	—0·2	0·0	1·2	—0·3	1·0	0·9	1·3	—0·7	0·4
Klagenfurt	—0·6	0·4	0·1	—0·8	—0·1	—0·1	0·0	—1·1	0·7	—0·9	0·3	1·1	1·5*	—1·0	0·5
Saifnitz	—0·4	0·8	—0·1	—0·6	—0·4	0·1	0·0	—0·7	1·1	—0·8	0·3	1·2	1·0	—0·7	0·8
Sachsenburg	—	—	—	—	—	—0·2	0·1	—0·8	0·8	—0·9	0·2	1·1	1·0	—1·0	0·5
Innsbruck	—0·2	1·3	—0·6	—0·4	—0·3	0·3	0·2	—1·4	0·0	—1·1	—0·1	1·4	0·9	—1·5*	0·0
Sils-Maria	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—0·5	0·4
Marienberg	—	—	—	—	—	—	0·0	—0·6	0·6	—1·4	0·8	0·7	0·7	—1·1	0·3
Sulden	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·2
St. Martin	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·8	0·8	—0·4	0·4
Bozen	—1·0	0·5	—0·1	—1·1	0·5	—0·5	—0·1	—0·5	0·5	—1·3*	0·4	0·9	1·0*	—0·4	0·7
Triest	—0·2	0·8	0·2	0·3	—0·2	0·2	0·9	—0·2	0·8	—0·8	0·0	0·6	1·6*	—0·9	0·8
Venedig	—0·6	—0·3	0·1	—0·3	—0·4	—0·1	0·0	—0·9	0·6	—0·4	0·1	1·0	1·2	—0·8	0·5
Mailand	—1·0	—0·1	—0·7	—0·2	—1·0	—1·0	—0·5	—1·1	0·3	—1·2*	—0·3	0·4	0·7	—0·6	0·7
Alessandria	—	—	—	—	—	—	—	—1·0	0·0	—1·4*	—0·2	1·1*	1·1*	—0·3	—0·6
Lesina	—	—	—	—	—	—	—	—0·3	0·4	—0·2	0·4	1·0	0·9	—0·8	0·3

	1866	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880
Genf	0·9	0·3	1·1*	0·3	—0·1	—0·8	0·7	0·5	0·0	0·3	0·4	0·7	—0·8	—1·2	0·5
St. Bernhard	0·7	0·4	0·8	0·2	—0·5	—0·3	0·5	0·6	0·0	0·3	0·4	0·1	—0·2	—0·4	1·2*
Basel	0·8	0·0	1·0	—0·1	—0·8	—1·4	0·8	0·3	—0·5	—0·2	0·4	0·5	—0·2	—1·6*	0·5
Altstätten	0·9	0·4	1·3	0·4	—0·8	—1·6	0·8	0·0	—0·2	—0·3	0·2	0·6	—0·4	—1·4	0·2
München	1·0	0·5	1·7*	0·8	—0·7	—1·2	1·1	0·8	0·1	—0·3	0·5	0·6	—0·1	—1·2	0·4
A.Auss.Schafb.	0·8	0·0	1·4	0·5	—0·9	—0·8	1·1	0·8	—0·4	—0·9	0·4	—0·4	—0·6	—0·8	0·8
Kremsmünster	1·0	0·5	1·8*	0·5	—0·8	—1·3	1·3	0·8	—0·4	—0·6	—0·2	0·0	0·0	—1·3	0·4
Wien	0·6	0·2	1·6	0·7	—1·1	—1·6	1·3	1·0	0·0	—0·7	—0·2	0·2	0·4	—1·1	0·2
Graz	0·5	0·5	1·4	0·7	—0·8	—0·9	1·2	0·7	—0·3	—0·9	—0·5	0·1	0·0	—0·8	0·1
Agram	0·6	0·4	1·3	0·5	—1·0	—1·4	1·1	0·5	—0·5	—1·3	—0·6	0·1	0·2	—1·1	—0·6
Rudolfswerth	0·7	0·3	1·1	0·0	—0·9	—1·6	1·4	0·5	—0·3	—1·1	—0·2	0·5	0·2	—0·5	—0·1
Laibach	0·7	0·5	1·3	0·3	—0·6	—1·5*	1·4*	0·5	—0·3	—1·1	—0·5	0·1	0·1	—1·2	—0·3
Obir	0·3	—0·3	0·4	—0·2	—1·4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Klagenfurt	0·5	0·7	1·2	0·5	—1·3*	—1·3*	0·9	0·6	—0·4	—1·2	—0·7	0·0	0·2	—0·8	0·2
Saifnitz	0·9	1·0	1·5*	0·4	—0·6	—1·1	1·0	0·5	—0·7	—1·1	—0·6	—0·2	—0·4	—1·4*	0·3
Sachsenburg	0·5	0·7	1·3	0·2	—1·3	—1·3	0·9	0·7	—0·3	—0·5	—0·2	0·2	0·2	—1·1	0·2
Innsbruck	0·6	0·2	0·6	0·5	—0·7	—0·6	2·3*	1·3	—0·1	—0·9	0·1	0·5	—0·5	—1·0	0·4
Sils-Maria	0·8	0·7	1·0	0·5	—0·1	—0·6	0·8	0·7	0·0	—0·1	0·5	0·3	0·0	—0·4	1·0
Marienberg	0·4	0·4	0·7	0·1	—0·8	—0·8	0·3	0·6	—0·2	—0·1	0·0	—0·2	—0·4	—0·7	0·6
Sulden	0·2	0·1	0·5	0·2	—0·7	—0·8	0·7	0·9	—0·1	0·2	0·2	0·0	—0·6	—0·6	0·6
St. Martin	0·4	0·5	0·4	0·3	—0·3	—0·8	0·5	0·6	—0·1	—0·1	0·1	0·0	—0·1	—0·7	0·5
Bozen	0·3	0·6	0·7	0·6	—0·2	—0·4	0·4	0·7	—0·2	—0·2	—0·3	—0·1	—0·3	—1·1	—0·1
Triest	0·4	0·6	1·0	—0·4	—0·9	—0·9	0·8	0·3	—0·6	—1·1*	—0·6	—0·2	—0·3	—0·5	—0·2
Venedig	0·4	0·4	0·7	—0·1	—0·9	—0·7	1·6*	1·1	0·4	—0·3	0·4	0·6	—0·1	—1·2*	—0·5
Mailand	0·7	0·7	0·4	0·3	0·1	—0·4	1·1	1·2*	0·3	0·1	0·2	0·6	0·5	—0·5	0·3
Alessandria	0·3	0·4	0·4	0·2	—0·1	—0·6	0·8	1·0	0·0	—0·2	0·0	—0·5	0·0	—1·0	—0·4
Lesina	0·6	0·5	0·7	0·0	—0·8	—0·8	1·0	0·4	—0·8	—0·9	0·1	—0·2	0·0	—0·4	—0·1

Über die aus Hydrochinon in der Natronschmelze entstehenden Körper.

Von **L. Barth** und **J. Schreder.**

(Aus dem I. Wiener Universitäts-Laboratorium) (XCVIII.).

Vor einiger Zeit (Monatshefte IV. 1883, pag. 176) haben wir, mitgetheilt, dass beim Verschmelzen von Hydrochinon mit einem Überschusse von Ätznatron neben anderen Producten auch das dritte, bis dahin unbekannte Trioxybenzol entstehe, dem wir um an seine Provenienz und an die Stellung der Hydroxylgruppen zu erinnern, den Namen Oxyhydrochinon gegeben haben.

Wir haben damals erwähnt, dass wir Näheres über diese interessante Substanz, sowie über die anderen, bei der genannten Reaction sich bildenden Körper berichten werden, wenn wir das mühselige Trennungs- und Reinigungsverfahren verbessert und uns in den Besitz etwas grösserer Mengen von Materiale gesetzt haben werden. Dies ist uns nun im Wesentlichen gelungen und im Nachfolgenden theilen wir die Resultate unserer neueren Versuche mit.

Über den Verlauf der Schmelzoperation selbst haben wir nichts neues mehr zu bemerken, nur sei nochmals hervorgehoben, dass bei gut geleiteten Operationen keine bemerkenswerthe Ausscheidung erfolgt, wenn man den Schmelzkuchen in verdünnte Schwefelsäure einträgt, sondern sich Alles zu einer klaren hellgelblichen Flüssigkeit löst. Die vereinigten sauren Lösungen wurden 12 mal mit Äther ausgeschüttelt. Aus 500 Grm. in Arbeit genommenen Hydrochinons resultirten circa 400 Grm., allerdings nach wasser- und ätherhältigen Ätherrückstandes; davon enthielten die 1. und 2. Ausschüttelung 285 Grm., die 3. und 4. 65 Grm., die 5. und 6. 32 Grm., die 7. bis inclusive 12. 26 Grm., die zwölfte speciell lieferte kaum 1 Grm.

Wir konnten denselben allerdings nicht vollständig trocknen, um eine genauere Angabe über die Rohausbeute zu machen, weil

zu starke Färbung und Zersetzung eintrat, glauben aber nicht zu hoch zu greifen wenn wir angeben, mindestens 50% des verwendeten Hydrochinons an Reactionsproducten erhalten zu haben.

Es sei hier gleich bemerkt, dass diese Ätherrückstände ausser Oxyhydrochinon, dem schon in unserer ersten Mittheilung erwähnten, in Wasser schwer löslichen, an der Luft rasch blauschwarz werdenden Körper und unzersetztem Hydrochinon im Wesentlichen noch zwei neue Substanzen enthalten: Dihydrochinon und ein neues Hexaoxydiphenyl.

Die Verarbeitung derselben war etwas verschieden von der früher beschriebenen, da uns mannigfache Tastversuche — wenn auch von grossen Verlusten begleitet, einiges über die Eigenschaften der zu trennenden Verbindungen gelehrt hatten.

Zunächst constatirten wir, dass die Ätherauszüge 1—4 die Gesammtmenge des vorhandenen Hydrochinons und Dihydrochinons als den in Äther am leichtesten löslichen Substanzen enthielten. Diese wurden daher zunächst getrennt verarbeitet.

Man löste in Wasser, filtrirte von dem schwerlöslichen, sofort sich blau färbenden Pulver ab, versetzte unter Umrühren mit etwas Bleizuckerlösung, wodurch sehr dunkel gefärbte schmierige Flocken gefällt werden und die Flüssigkeit merklich lichter wurde, trennte von diesem der Menge nach nicht bedeutenden Niederschlage und versetzte sie mit Bleizuckerlösung, der soviel Bleiessig zugesetzt war, dass die über dem jetzt massenhaft sich bildenden Niederschlage stehende Lösung nicht allzusauer reagirte. Es hat dies den Zweck, die Wiederauflösung des Oxyhydrochinonblei's durch die freiwerdende Essigsäure möglichst zu verhindern; während, wie wir uns durch besondere Versuche überzeugten, Hydrochinon- und Dihydrochinonblei nicht herausfallen, auch wenn die Flüssigkeit nur schwach sauer reagirt.

Der voluminöse Niederschlag wird in geschlossener Flasche mit Wasser durch Decantiren gut gewaschen, durch Schwefelwasserstoff zerlegt und das Filtrat vom Schwefelblei 20—25 mal mit Äther ausgeschüttelt. Die nach dem Verjagen des Äthers bleibenden Rückstände, im Wesentlichen aus Oxyhydrochinon und dem neuen Hexaoxydiphenyl bestehend, wurden mit den oben erwähnten Rückständen der 5.—12. Ätherausschüttelung

der ursprünglichen sauren Lösung vereinigt. Diese krystallinischen Massen wurden möglichst von Äther befreit und dann mit wasserfreiem Amylalkohol angerührt und abgesaugt. Die auf dem Filter bleibenden Krystalle sind grau und dunkeln stark nach. Die abgesaugte Flüssigkeit ist zäh, braungefärbt und wird beim Stehen auch zusehends dunkler von Farbe.[1] Die graubräunlichen Krystalle werden in wasserfreiem Äther gelöst und die Lösung mit Thierkohle in der Kälte geschüttelt, wobei ziemliche Entfärbung zu beobachten ist. Der Äther wird verdampft, der Rückstand in Wasser aufgenommen und neuerdings in der Kälte mit Thierkohle unter Einleiten von Wasserstoff (zur Bewegung der Masse) behandelt.

Man filtrirte bei Luftabschluss und dampfte unter der Luftpumpe ein. Dabei zeigte sich stets neuerdings Dunkelfärbung der Lösung. Bei einer gewissen Concentration begann die Ausscheidung von krystallinischen Blättchen, die abgesaugt und getrocknet wurden. Sie bestehen im Wesentlichen aus dem äusserst luftempfindlichen neuen Hexaoxydiphenyl. Die Mutterlauge neuerdings unter der Luftpumpe eingedampft gab zunächst nochmalige Ausscheidung von Hexaoxydiphenyl, die wieder getrennt wurde, dann schied sich vornehmlich Oxyhydrochinon mit wenig Hexaoxydiphenyl aus. Diese letzte Ausscheidung wurde neuerdings in Wasser gelöst, entfärbt und so oft fractionirt krystallisiren gelassen, bis endlich das Oxyhydrochinon schon ziemlich rein erhalten wurde.

Die Mutterlaugen dieser letzten Ausscheidung wurden verdünnt, durch Zusatz einiger Tropfen Bleizuckerlösung und Entfernen der entstehenden braunen Flocken entfärbt und das eben beschriebene Verfahren damit wiederholt, bis wieder eine gewisse Menge Oxyhydrochinon daraus abgeschieden worden war, freilich mit grossen Verlusten. Das gesammelte Oxyhydrochinon wurde schliesslich mehrmals aus Äther unter Zusatz von Thierkohle umkrystallisirt. Die nun schon ziemlich weisse Krystallmasse wurde in Wasser in der Kälte aufgenommen, im Vacuum eingedampft, nochmals von Spuren Hexaoxydiphenyls getrennt und nach Wiederholung dieses Verfahrens endlich rein erhalten.

---

[1] Von ihrer Verarbeitung wird weiter unten die Rede sein.

Oxyhydrochinon.

Wenn das Oxyhydrochinon ganz rein, so ist seine Luftempfindlichkeit nicht gerade besonders bedeutend, doch dunkelt es bei längerem Aufbewahren merklich nach. Den Schmelzpunkt bestimmten wie zu 140°5 C. (uncorr.) Es krystallisirt wasserfrei, zeigte alle von uns schon früher angegebenen Reactionen und gab bei der Analyse:

0·3103 Grm. Substanz gaben 0·6510 Gr. Kohlensäure und 0·1335 Grm. Wasser.

	Gefunden	$C_6H_6O_3$
C	57·21	57·14
H	4·78	4·76.

Es gelang uns von dem ganz reinen Präparate messbare Krystalle zu gewinnen.

Herr Dr. A. Brezina hatte die Freundlichkeit, die betreffende Untersuchung vorzunehmen und theilte uns darüber folgendes mit:

„Oxyhydrochinon, Krystallsystem monoklin.

Elemente $a:b:c:=0·7485:1:1·0106; \eta=91° 46·2$

Formen c (001) m (110) p ($\bar{1}$11)

Winkel

			Rechnung	Messung
$m\,m'$	(110)	(1$\bar{1}$0)	73° 36	73° 58
$m\,c$	(110)	(001)	88 35	88 13
$c\,p$	(001)	($\bar{1}\bar{1}$1)	60 23	60 45
$p\,\bar{m}$	($\bar{1}\bar{1}$1)	($\bar{1}\bar{1}$0)	31 2	31 2
$p\,p'$	($\bar{1}$11)	($\bar{1}\bar{1}$1)	62 47	62 10

Die Elemente sind durch Ausgleichung aus allen gemessenen Winkeln berechnet; alle Flächen geben vielfache Bilder, die Messungen sind deshalb wenig genau, so dass die Elemente auch auf

$$a:b:c=0·75:1:1·01;\ \eta=91° 46$$

abgerundet werden können.“

Acetylproduct.

2 Grm. Oxyhydrochinon wurden mit 2 Grm. geschmolzenem essigsauren Natron und der 10fachen Menge Essigsäureanhydrid durch einige Stunden am Rückflusskühler erhitzt. Die Reactionsmasse wurde in Wasser gegossen und das sich bald krystallinisch ausscheidende Acetylproduct mit Wasser gewaschen, getrocknet und aus absolutem Alkohol umkrystallisirt. Schöne, weisse, luftbeständige, büschelförmig verwachsene Nadeln. Schmelzpunkt 96° 5 (uncorr.)

Da Mono-Di- und Triacetat des Oxyhydrochinons bei der Verbrennung ganz gleiche Zahlen liefern mussten, so wurde davon Umgang genommen und nur eine Essigsäure-Bestimmung gemacht.

1,1226 Grm. Substanz wurden mit Ätzkali am Rückflusskühler durch 2 Stunden gekocht. Sodann wurde die Flüssigkeit in eine Retorte gebracht, mit wässriger concentrirter Phosphorsäure im Überschusse versetzt und nun viermal, unter jedesmaligem Ersatze des übergegangenen Wassers, bis fast zu einem Fünftel des ursprünglichen Volums abdestillirt. Das Übergehende reagirte bei der letzten Destillation vollkommen neutral. Die vereinigten Destillate wurden nun mit $^1/_{10}$ Normalkalilösung titrirt.

Es wurden verbraucht 0·7364 Grm. KOH welche 0·7875 Grm. Essigsäure entsprechen. In Procenten:

	Gefunden	Berechnel für $C_6H_3O_3(C_2H_3O)_3$
Essigsäure	70·15	71·43

Einwirkung von Brom auf Oxyhydrochinon, Tribromoxychinon.

Oxyhydrochinon wurde mit trockenem Brom im Überschusse in einer Schale verrieben, bis es einen gleichförmig dünnen Brei darstellte. Das Brom wurde im Wasserbade verjagt und der gelbbräunliche feste Rückstand in starkem Alkokol gelöst. Die Lösung ist braun, die sich ausscheidenden krystallinischen Krusten sind ebenfalls braun gefärbt. Behandelt man diese Krystalle mit Wasser, so lösen sie sich mit prachtvoll violetter Farbe auf und

beim Concentriren über Schwefelsäure erhält man wieder Krystalle, die scheinbar ebenfalls violett gefärbt sind. Giesst man aber die Mutterlauge ab und presst die Krystalle, so sieht man, dass sie etwas missfärbig braun gefärbt sind. Wasser scheint also eine Zersetzung herbeizuführen. Desshalb wurde der Rest der aus Alkohol erhaltenen Substanz aus siedendem Chloroform umkrystallisirt[1], wobei er in Form von prächtig orangerothen Krystallkörnern erhalten wird, die sich beim Auskühlen des Lösung mittels ziemlich rasch und vollständig ausscheiden. Die Substanz bleibt bei 180° noch unverändert, bei 206°—207° schmilzt sie zu einer undurchsichtigen Flüssigkeit.

Beim längeren Aufbewahren in einem verschlossenen Glase beobachtet man, dass sich die Innenwände des Gefässes mit einem violetten Hauche beschlagen.

Die Analyse gab folgende Resultate:

0·3755 Grm. Substanz gaben 0·2729 Grm. Kohlensäure und 0·0097 Grm. Wasser

0·2624 Grm. Substanz gaben 0·4110 Grm. Bromsilber. In Procenten:

	Gefunden	Berechnet für $C_6HBr_3O_3$
C	19·82	19·94
H	0·29	0·28
Br	66·65	66·48

Durch die Einwirkung des Brom ist also, neben der Ersetzung von H_3 durch Br_3, auch eine Chinonbildung erfolgt und die Verbindung muss demgemäss als Tribromoxychinon bezeichnet werden.

Einwirkung von Schwefelsäure auf Oxyhydrochinon.

Löst man Oxyhydrochinon in der Kälte in concentrirter Schwefelsäure, so tritt eine bräunlich-grüne, oder auch dunkelgrüne Färbung ein, die nach und nach in's Violette umschlägt. Erwärmt man nun im Wasserbade, so wird die Farbe der Lösung

[1] Die vorhergehende Alkoholbehandlung scheint deshalb zweckmässig, damit sich etwa gebildete Bromoxylderivate dabei sicher zerlegen.

prachtvoll dunkel kirschroth. Die Reaction ist empfindlich und kann zur Erkennung des Oxyhydrochinons benützt werden. Es bildet sich dabei eine Sulfosäure, denn wenn man mit Bleicarbonat absättigt und vom ausgeschiedenen Bleisulfat filtrirt, so resultirt eine bleihaltige Lösung. Versucht man aber die Sulfosäure frei darzustellen, so erhält man stets braune Lösungen, die beim Concentriren dunkle Flocken abscheiden und also, wie es scheint in fortwährender Zersetzung begriffen sind.

Bei einem andern Versuche wurde daher das Absättigen der sauren Flüssigkeit mit Baryumcarbonat vorgenommen und das Filtrat vom schwefelsauren Baryt für sich concentrirt. Die gelbe barythältige Lösung färbte sich dabei dunkler und schied endlich braune Häute ab, die durchaus amorph, sich zur Analyse nicht empfahlen. Auf die Gewinnung eines brauchbaren Präparats zur Feststellung der Formel des bei dieser Einwirkung gebildeten Reactionsproductes musste so verzichtet werden. Das beim Eindampfen zur Trockene in dunkelbraunen Häuten sich ausscheidende Barytsalz wurde probeweise mit Kaliumhydroxyd in der Silberschale verschmolzen.

Die Einwirkung geht ziemlich glatt vor sich, beim Ansäuern den Schmelze entweicht viel schweflige Säure und die Lösung ist eine vollständige. Äther entzieht derselben eine leicht krystallisirende Substanz. Die Reaction konnte bisher nicht in grösserem Massstabe ausgeführt werden, scheint aber des Verfolgens werth zu sein.

Einwirkung von Salpetersäure auf Oxyhydrochinon. Oxychinhydron.

Tröpfelt man in eine kalte, mässig verdünnte Lösung von Oxyhydrochinon in Wasser, vorsichtig starke Salpetersäure, so tritt Dunkelfärbung der Flüssigkeit ein und endlich sieht man wie kleine dunkelgefärbte Kryställchen dieselbe zu erfüllen beginnen. Öfteres Schütteln befördert die Ausscheidung. Man filtrirt, wäscht mit Wasser vollkommen aus und trocknet über Schwefelsäure. Kleine dunkel graublaue Krystalle mit schwachem Flächenschimmer. Sie sind stickstofffrei, enthalten kein Krystallwasser und erwiesen sich bei der Analyse als das Chinhydron des Oxyhydrochinons, also als Oxychinhydron.

0·2887 bei 100° getrockneter Substanz gaben 0·6013 Grm. Kohlensäure und 0·0998 Grm. Wasser,

in Procenten:

	Gefunden	Berechnet für $C_{12}H_{10}O_6$
C	56·80	57·60
H	3·84	4·00.

Wie man sieht, hängt derselben noch eine kleine Quantität eines sauerstoffreicheren Productes an, von dem wir sie, der geringen zur Verfügung stehenden Menge wegen, nicht ganz zu befreien vermochten.

Umkrystallisiren lässt sich der Körper wie es scheint nicht, wenigstens wird er aus Alkohol missfärbig erhalten. Hat man bei der Darstellung zu wenig Salpetersäure verwendet, so bewirkt ein neuerlicher Zusatz der letzteren zum Filtrate wieder eine Ausscheidung von Krystallen, aber diese sind dunkler gefärbt und offenbar nicht mehr so rein. Setzt man von Anfang an zu viel Salpetersäure zu, so entsteht gar keine Ausscheidung, sondern die Flüssigkeit bleibt klar und dunkel rothbraun gefärbt. Auch Chromsäure erzeugt in Oxyhydrochinonlösungen einen dunkelgefärbten krystallinischen Niederschlag, der nach dem Trocknen etwas heller wird. Das eigentliche Chinon haben wir bis jetzt nicht zu isoliren vermocht. Im Filtrate vom Oxychinhydron finden sich noch geringe Mengen dieses Körpers gelöst, daneben unkrystallisirbare braune Substanzen und etwas Oxalsäure.[1]

---

[1] Am Schlusse unserer Eingangs citirten ersten Mittheilung über das Oxyhydrochinon haben wir aus der Constitution dieses Phenols als des unsymmetrischen Trioxybenzols Folgerungen gezogen, welche die Constitution der Pyrogallussäure des Phloroglucins, der Gallussäure, Pyrogallocarbonsäure und der Ellagsäure betreffen.

Die Herren W. Will und O. Jung haben nun in ihrer Abhandlung „Zur Kenntniss des Daphnetins", Berl. Ber. XVII. 1089—1091 (vergl. auch W. Will und K. Albrecht, Berl. Ber. XVII, 2102), ebenfalls Betrachtungen über die Stellung der Hydroxyle in den drei isomeren Trioxybenzolen und der Carboxylgruppe zu den Hydroxylen in der Gallussäure und Pyrogallocarbonsäure angestellt. Ohne unserer ganz bestimmt gezogenen Schlüsse zu erwähnen, kommen sie zu denselben Resultaten, die wir schon vor mehr als Jahresfrist veröffentlicht hatten. Was sie anführen, ist eine willkommene

δ-Hexaoxydiphenyl.

Es ist oben gesagt worden, dass die bei der Reindarstellung des Oxyhydrochinons sich ausscheidenden, schwerer löslichen

---

Bestätigung unserer Ansichten. Die Gründe aber, welche die genannten Autoren vorbringen, sind nicht so zwingender Natur, dass man daraus allein schon die genannten Stellungsfragen als endgiltig erledigt betrachten könnte. Wir halten unsere Argumentation für besser. Will und Jung folgern kurz etwa so: Phloroglucin ist das symmetrische Trioxybenzol, denn es zerfällt bei der Einwirkung des Chlor (nur) in Dichloressigsäure und es entsteht aus Resorcin in der Natronschmelze. Oxyhydrochinon ist das unsymmetrische, daher Pyrogallussäure das Trioxybenzol mit benachbarter Stellung der Hydroxyle. Vom Pyrogallol können sich nur zwei Monocarbonsäuren ableiten; die sind bekannt, ebenso die triäthylirten Säuren. Eine Triäthoxybenzoësäure ist aus dem Daphnetin erhalten. In derselben „wäre auch wie in der Methylcumarsäure und Dimethylumbellsäure die Carboxylgruppe in der Orthostellung zu einer Hydroxylgruppe anzunehmen", sie ist identisch mit der triäthylirten Pyrogallocarbonsäure, daher muss Pyrogallocarbonsäure die Stellung 1. 2. 3. 4. haben. Letzteres wird auch durch die Eisenreaction der Pyrogallocarbonsäure bestätigt. — Dagegen ist Folgendes zu bemerken. Dass das Phloroglucin die Hydroxyle in der Stellung 1. 3. 5. hat, wird, wie ich schon längst hervorgehoben habe, wahrscheinlich gemacht durch den Zerfall in Essigsäure respective Dichloressigsäure. Aus der Bildung des Phloroglucins aus Resorcin einen Schluss auf die Constitution des ersteren zu ziehen, ist durchaus unstatthaft, denn durch Eintritt eines Hydroxyls in das Resorcin können je nachdem, alle drei Trioxybenzole entstehen.

Dass in der triäthoxylirten Benzoësäure, welche aus dem Daphnetin gewonnen wird und welche sich mit der Triäthylpyrogallocarbonsäure identisch erwies, respective in der daraus dargestellten Trioxybenzoësäure die Carboxylgruppe zu einer Hydroxylgruppe in der Orthostellung sich befinde, weil auch in der Methylcumarsäure und Dimethylumbellsäure dasselbe der Fall ist, ist zwar ebenfalls wahrscheinlich, aber nicht bewiesen.

Unsere Betrachtungen, die (l. c.) allerdings nur ganz kurz ausgeführt sind, aber wie wir glaubten doch verständlich sein sollten, sind folgende: Im Oxyhydrochinon sind die Hydrohyle in der Stellung 1. 2. 4., damit ist auch für die Pyrogallussäure die Stellung 1. 2. 3. und für Phloroglucin 1. 3. 5. festgestellt. Die Reihenfolge in den wir die drei Isomeren genannt haben ist zu beachten, sie ist dieselbe in der sich logisch nacheinander die Constitutionsformeln ergeben. Über die Anordnung der Hydroxyle in der Pyrogallussäure und dem Phloroglucin wusste man bis dahin nichts Sicheres, nur das konnte man behaupten, dass in der erstern die symmetrische Stellung nicht vorhanden sein könne. Denn sie entsteht durch das Zwischenglied

Krystalle im Wesentlichen aus dem neuen Hexaoxydiphenyl bestehen. Eine weitere Quantität gewinnt man noch aus den dunkelbraun gefärbten, fast theerartig sich verdickenden amylalkoholischen Mutterlaugen, die beim Waschen und Absaugen des Gemenges von Oxyhydrochinon und Hexaoxydiphenyl erhalten worden waren. Man löst diese braunen Massen in Wasser versetzt mit etwas Bleizucker unter Umrühren filtrirt von dem dunkeln,

---

der Gallussäure aus der symmetrischen Dioxybenzoësäure in der eben der eine nothwendige Platz schon durch das Carboxyl besetzt ist. Nun ist das Oxyhydrochinon sicher als 1. 2. 4. Trioxybenzol nachgewiesen, folglich muss Pyrogallussäure 1. 2. 3. und daher muss auch Phloroglucin 1. 3. 5. sein.

Was die Carbonsäuren des Pyrogallols betrifft, so ist deren Stellung, wie wir glauben endgiltig dadurch entschieden, dass Pyrogallussäure 1. 2. 3. ist und dass Gallussäure sowohl aus symmetrischer Dioxybenzoësäure als auch aus Protokatechusäure entsteht, während sie aus Dijodsalicylsäure nicht erzeugt werden kann. (Über diesbezügliche Versuche, die in meinem Laboratorium angestellt werden, wird nächstens Herr H. Fischer berichten.) Die Herren Will und Jung sind so freundlich zu constatiren, dass diese Thatsache mit ihren Ansichten sich in Übereinstimmung befinden, „obwohl die Anwendung der Kalischmelze in dieser Hinsicht keine sicheren Schlüsse gestatte".

Was den Werth der Kalischmelze zur Ortsbestimmung betrifft, so habe ich mich über diesen Gegenstand schon mehrfach ausgesprochen, kann daher dies jetzt füglich unterlassen. Ich will nur anführen, dass Umlagerungen, die in der That zu falschen Schlüssen führen können, weil sie nicht als Nebenreactionen in unbedeutendem Masse, sondern fast quantitativ auftreten, ziemlich selten sind und dass für einzelne Fälle nachgewiesen wurde (Phenolsulfosäuren, Benzoldisulfosäuren), dass dieselben vor der eigentlichen Einwirkung des schmelzenden Kalis stattfinden. Aber um diese Frage handelt es sich im vorliegenden Falle gar nicht. Hier handelt es sich darum, ob vorhandene Hydroxyle in der Protokatechusäure oder symmetrischen Dioxybenzoësäure (α-Resorcylsäure) ihre Plätze wechseln, Verbindungen, also sich als nicht stabil erweisen sollten, die ja doch in der Kalischmelze entstanden sind. Umlagerungen sind schon bei den verschiedensten Reactionen beobachtet worden, welche **auch** zur Ortsbestimmung herangezogen wurden. Eine Wanderung von Hydroxylen, wie sie in dem Falle nöthig wäre, um das Entstehen von Gallussäure aus Protokatechusäure und symmetrischer Dioxybenzoësäure zu erklären, wenn Gallussäure nicht die Stellung 1. 3. 4. 5. hätte, ist aber nie constatirt worden. Aus diesen Gründen müssen wir unsere früher gezogenen Schlüsse als vollkommen richtig, aufrecht erhalten.

B.

schmierigen Niederschlage ab und fällt das Filtrat mit Bleizucker vollständig aus. Die vom Bleiniederschlag ablaufende Flüssigkeit enthält keine nennenswerthe Menge von organischer Substanz mehr. Der Niederschlag selbst wird bei Luftabschluss durch Decantiren gewaschen und mit Schwefelwasserstoff zerlegt. Die nunmehr erhaltene Lösung wird mit Äther oftmals (20—25 mal) extrahirt, der Äther verdampft und der Rückstand unter der Glocke einer Luftpumpe längere Zeit sich selbst überlassen. Nach und nach erstarrt er zu einem dicken Krystallmagma das durch Absaugen von dem unkrystallisirbaren Syrup getrennt wird. Diese Krystalle bestehen aus unreinem Hexaoxydiphenyl; sie werden mit den, wie oben beschrieben, gewonnenen Partien vereinigt. Durch oftmaliges Umkrystallisiren aus Wasser, Behandeln mit Thierkohle und schwefliger Säure können sie endlich völlig gereinigt werden.

Das Hexaoxydiphenyl erscheint dann in fast farblosen blättchenförmigen Krystallen, ähnlich wie Naphtalin aussehend. Es ist im feuchten Zustande ausserordentlich empfindlich gegen Luft und wird rasch blau und endlich fast schwarz. Trocken hält es sich etwas besser, aber auch in gut verschlossenen Gefässen färbt es sich nach einiger Zeit blaugrau. In Wasser ist es ziemlich schwer löslich, leicht in Alkohol und Äther. Versetzt man eine wässerige Lösung mit etwas Eisenchloridlösung, so tritt eine rothe Färbung ein, dann entsteht ein schmutzig blauer undeutlich krystallinischer Niederschlag. Mit Ätzkali versetzt, färbt sich eine Lösung dieses Hexaoxydiphenyls blutroth. Der Schmelzpunkt desselben konnte nicht bestimmt werden, weil gegen 290° Schwärzung und beginnende Verkohlung eintritt.

Die Analyse lieferte folgendes Resultat:

0·300 Grm. Substanz gaben 0·6345 Grm. Kohlensäure und 0·1115 Grm. Wasser, d. i. in Procenten:

	Gefunden	Berechnet für $C_{12}H_{10}O_6$
C	57·68	57·60
H	4·13	4·00

Das δ-Hexaoxydiphenyl ist der zersetzlichste und veränderlichste der Substanzen, die aus Hydrochinon in der Natron-

schmelze entstehen und auch die Ursache, warum sich die Rohproducte so sehr verschmieren und erst mit grossen Verlusten getrennt und gereinigt werden können. Was die Bezeichnung des neuen Körpers betrifft, so haben wir sie gewählt, weil die Isomeren desselben, welche sich von der Pyrogallussäure ableiten, die entsprechenden Bezeichnungen α, β, γ tragen, weil, wenn wir nach sonstigen Analogien vorgehend, denselben etwa Dioxyhydrochinon genannt hätten eine Verwechslung künftig nicht ausgeschlossen wäre, da vom Oxyhydrochinon selbst noch andere isomere Hexaoxydiphenyle abgeleitet werden können, für die dann eine neuerliche Unterscheidung nöthig werden würde.

Acetylproduct

unter Anwendung der Liebermann'schen Reaction dargestellt, scheidet sich beim Eingiessen der essigsauren Masse in Wasser fast farblos krystallinisch aus. Nach dem Waschen und Trocknen wird es aus absolutem Alkohol umkrystallisirt. Lange, weisse, in Alkohol, selbst in warmem, schwerlösliche Nadeln.

Da die Zahlen für verschiedene Acetylproducte unter einander fast gar nicht differiren, da überhaupt unter den angegebenen Verhältnissen das höchste, also sechsfach acetylirte Product zu erwarten war, so haben wir von einer Analyse Umgang genommen und nur zum Vergleiche den Schmelzpunkt bestimmt, da derselbe für die Acetylderivate des α, β, γ Hexaoxydiphenyls bekannt ist. Das erste schmilzt bei 145° (Liebermann), das zweite bei 170° (Barth und Goldschmiedt) das dritte bei 163°—164° (Cobenzl).

Die Acetylverbindung unseres neuen Hexaoxydiphenyls zeigt einen Schmelzpunkt von 172°.

Dihydrochinon.

Diese Substanz ist, wie schon erwähnt, in den ersten vier Ätherauszügen der angesäuerten Schmelze enthalten. Die Verarbeitung derselben wurde schon früher mitgetheilt. Das Filtrat von den unlöslichen Bleiverbindungen des Oxyhydrochinons und Hexaoxydiphenyls, wurde mit Bleiessig versetzt. Es fällt ein weisser Niederschlag in reichlicher Menge heraus, der alles vor-

handene Dihydrochinon enthält, aber auch nur dieses und nicht das in der Flüssigkeit ebenfalls reichlich vorhandene und nicht in die Reaction eingetretene Hydrochinon. Wir haben uns durch besondere Versuche überzeugt, dass dieser letztere Körper aus einer Flüssigkeit, die Bleizucker enthält, durch Bleiessig niemals gefällt wird, sondern von diesem nur dann, wenn die Lösung kein neutrales Bleiacetat enthält.

Das Dihydrochinonblei wird filtrirt, gewaschen und mit Schwefelwasserstoff zerlegt. Das Filtrat vom Schwefelblei gibt an Äther leicht alles Dihydrochinon ab. Nach dem Verjagen des Athers hinterbleibt eine bräunlich gelbe Krystallmasse, die in Wasser gelöst und mit Thierkohle unter Zusatz von schwefliger Säure entfärbt wurde. Nach zwei- bis dreimaligem Umkrystallisiren ist die Substanz rein. Sie bildet fast farblose, ziemlich grosse, verwachsene Blättchen, die leider nicht in messbarer Form erhalten werden konnten, obwohl das Dihydrochinon eine ausnehmende Tendenz hat, leicht und schnell zu krystallisiren. Es löst sich sehr leicht in Äther und Alkohol, etwas schwieriger in Wasser. Sein Geschmack ist stark und rein süss. Bei 237° (uncorr.) schmilzt es unter Bräunung. Es krystallisirt ohne Krystallwasser.

Bei der Analyse lieferte es folgende Zahlen:

I. 0·3028 Grm. Substanz gaben 0·7310 Grm. Kohlensäure und 0·1280 Grm. Wasser.

II. 0·3041 Grm. Substanz gaben 0·7347 Grm. Kohlensäure und 0·1301 Grm. Wasser.

In Procenten:

	Gefunden I.	Gefunden II.	Berechnet für $C_{12}H_{10}O_4$
C	65·84	65·89	66·06
H	4·69	4·75	4·59

Eine wässerige Lösung des Dihydrochinons wird auf Zusatz von etwas Eisenchlorid roth gefärbt und lässt, wenn von letzterem kein Überschuss angewendet wurde, nach kurzer Zeit grünlich blau schimmernde Nadeln des betreffenden Chinhydrons herausfallen.

Dieses wird am besten auf folgende Weise erhalten:

Chinhydron des Dihydrochinons, oder Dichinhydron.

In die kalte, verdünnte Lösung des Dihydrochinons, tröpfelt man vorsichtig eine nicht allzu concentrirte Eisenchloridlösung. Ein Überschuss von Eisenchlorid ist schädlich, doch kann man nach ein paar Versuchen im kleinen ziemlich leicht an den Farbennuancen den richtigen Punkt erkennen, wenn hinlänglich von dem Eisensalze zugesetzt ist. Alsbald beginnt dann, namentlich beim Schütteln, die Ausscheidung des Chinhydrons in Form feiner, glänzender, blau-violett, manchmal grünlich schillernder Nädelchen. Die richtige Farbe derselben ist sehr schwer zu bestimmen.

Diese werden abfiltrirt, ausgewaschen und dann aus verdünntem Alkohol, in dem sie sich mit rother Farbe lösen, umkrystallisirt. Nach dem Trocknen sind sie sehr dunkel-blau-grün violett mit dunkelgrünem metallisch glänzendem Reflexe. Sie sind in Wasser fast unlöslich, leicht löslich dagegen in Alkohol und Äther. In Wasser suspendirt und mit Eisenchlorid neuerdings behandelt, verwandeln sie sich in das später zu beschreibende Chinon, doch kann dieses auf dem Wege nicht rein erhalten werden. Schwefelige Säure entfärbt sie beim Erwärmen sofort vollständig. Der Schmelzpunkt des Dichinhydrons ist nicht bestimmbar, weil früher Zersetzung eintritt. Es krystallisirt wasserfrei.

Bei der Verbrennung erhielt man:

0·3402 Grm. Substanz gaben 0·7405 Grm. Kohlensäure und 0·1040 Grm. Wasser,

oder in Procenten:

	Gefunden	Berechnet für $C_{12}H_8O_4$ resp. $C_{24}H_{16}O_8$
C	66·39	66·67
H	3·79	3·70.

Chinon des Dihydrochinons oder Dichinon.

Zur Darstellung dieses Körpers verfährt man zweckmässig folgendermassen.

Zu der siedend heissen concentrirten Lösung des Dihydrochinons wird Eisenchlorid im Überschusse zugegeben. Die Flüssigkeit färbt sich dunkelroth und wird dann ganz plötzlich lichtgelb. Man kühlt nun rasch ab und alsbald erfüllt sich die Flüssigkeit mit haarfeinen, strohgelben Nadeln. Die Reaction verlauft fast quantitativ. Nach einiger Zeit werden sie abfiltrirt und sehr gut ausgewaschen, bis die Waschwässer keine Eisenreaktion mehr zeigen. Der Körper wird so ganz rein erhalten. Weder aus Wasser noch aus Alkohol lässt er sich ohne Zersetzung umkrystallisiren. Sein Schmelzpunkt liegt circa bei 186°—187°, aber er beginnt sich bei dieser Temperatur schon theilweise zu zersetzen.

Er ist krystallwasserfrei und zeigte folgende Zusammensetzung:

0·3037 Grm. Substanz gaben 0·7490 Grm. Kohlensäure und 0·0774 Grm. Wasser,

d. i. in Procenten:

	Gefunden	Berechnet für $C_{12}H_6O_4$
C	67·26	67·29
H	2·83	2·80

Dem Filtrate vom Dihydrochinonblei kann nach der Behandlung mit Schwefelwasserstoff durch Äther noch eine beträchtliche Menge Hydrochinon (wir erhielten über 80 Grm.) entzogen werden, so dass beiläufig ein Fünftel des zur Reaction verwendeten Hydrochinons nicht in dieselbe eingetreten war.

Noch haben wir ein paar Worte über den Eingangs erwähnten, beim Behandeln der ursprünglichen Ätherrückstände mit Wasser als fast unlösliches weisses Krystallpulver sich ausscheidenden Körper zu sagen.

Leider ist es uns vorderhand nicht gelungen seine Zusammen setzung genau zu ermitteln. Er bildet sich in relativ geringer Menge (es standen uns nur wenige Gramme zur Verfügung) und

ist so empfindlich gegen Luft, dass er beim Abfiltriren und Auswaschen sofort blau wird und selbst in ganz trockenem Zustande noch immer nachdunkelt, endlich fast schwarz wird. Er lässt sich zwar mittelst schwefliger Säure, ja sogar mittelst Natriumamalgams entfärben, aber er erscheint dann in Flocken, die völlig amorph zu sein scheinen und womöglich noch luftempfindlicher sind. Analysen verschieden lang aufbewahrter Präparate stimmten unter einander nicht gut überein. Eine mit dem am wenigst gefärbten Präparate ausgeführte scheint darauf hinzudeuten, dass mindestens drei Moleküle Hydrochinon bei seiner Bildung betheiligt sein müssen und dass überdies theilweise Oxydation (Hydroxylirung) eingetreten ist. Bei der Destillation mit Zinkstaub verkohlt der Körper grösstentheils, Diphenyl konnte in der geringen Menge Destillats nicht nachgewiesen werden. Auch Versuche, Derivate des Körpers darzustellen, aus denen ein Schluss auf seine Constitution hätte gezogen werden können, ergaben bisher kein brauchbares Resultat. Es scheint uns jedoch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, mit Hilfe der Erfahrungen, die wir gesammelt haben, bei einer neuen Darstellung denselben analysenrein zu erhalten. Wir gedenken darüber gelegentlich zu berichten, wenn wir in der Lage sind, neue Mengen von Hydrochinon verarbeiten zu können und dabei auch vielleicht noch einige Abkömmlinge der im Vorstehenden charakterisirten Verbindungen zu erhalten, deren Kenntniss uns aus mehreren Gründen wünschenswerth erscheint.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass Versuche im Gange sind, das Oxyhydrochinon auch noch auf anderem Wege synthetisch zu erhalten.

Über Oxyphosphinsäuren.

I. Abhandlung.

Von Dr. **Wilhelm Fossek.**

(Aus dem Universitäts-Laboratorium des Prof. A. Lieben.)

In einer vorläufigen Notiz im Maihefte dieses Jahrganges der Monatshefte für Chemie habe ich die Mittheilung gemacht, dass den Aldehyden die Eigenschaft zukommt mit Phosphortrichlorid ölige Producte zu geben, welche beim Behandeln mit Wasser unter Bildung phosphorhältiger organischer Säuren zersetzt werden.

Im Verlaufe der weiteren Untersuchungen, die ich hiermit vorlege, haben sich die erwähnten Säuren als Verbindungen erwiesen, welche den Phosphinsäuren, wie sie A. W. Hofmann[1] durch Oxydation der Phosphine mittelst Salpetersäure erhielt, sehr nahestehen. Um ein Atom Sauerstoff im Molekül reicher stehen sie zu diesen im Verhältniss von Oxysäuren; ich nenne sie darum Oxyphosphinsäuren.

Darstellung.

Die Darstellung der Oxyphosphinsäuren ist sehr einfach und geschieht rationell auf folgende Weise: In (4 Mol.) Aldehyd wird anfangs tropfenweise, später rascher unter Umschwenken des Kolbens und guter Kühlung, (1 Mol.) Phosphortrichlorid einfliessen gelassen. Die beiden Flüssigkeiten mischen sich unter starkem Erwärmen und es resultirt ein dickflüssiges Öl, welches, wenn die Kühlung beim Vermischen wenig ausgiebig war, gelb oder braun, bei guter Kühlung aber farblos erscheint.

Dieses ölige Zwischenproduct, aus welchem durch Behandeln mit Wasser die Oxyphosphinsäuren hervorgehen, ist äusserst

---

[1] Berichte d. d. chem. Ges. 5. 104 und 6. 303.

labiler Natur. Schon nach wenigen Stunden beginnt unter Braunfärbung, Verdickung und Salzsäureabspaltung seine Zersetzung. Durch keinerlei Mittel konnte ich es erreichen, zu einer annähernden Kenntniss seiner Zusammensetzung zu gelangen. An der Luft raucht es stark und mit wenig Wasser versetzt, reagirt es unter explosionsartigem Ausstossen von Salzsäure und grosser Erhitzung. Mit viel kaltem Wasser versetzt, ist die Reaction minder heftig. In die circa 20fache Menge Wasser eingegossen, sinkt das Öl vorerst unter, bald aber löst es sich unter Erwärmen und es entstehen zwei Schichten — eine wässerige und eine auf dieser schwimmende, meist gefärbte, ölige.

Die obere ölige Schichte besteht aus Aldehyd, in welchem eine kleine Menge eines mit Wasserdampf schwerer flüchtigen Öles, welches weder Phosphor noch Chlor enthält und wohl ein Condensationsproduct sein dürfte, gelöst ist. Sie wird durch Abheben und Filtration durch ein nasses Filter von der wässerigen Flüssigkeit getrennt und beträgt nahezu zwei Drittheile der in Verwendung genommenen Aldehydmenge.

Dass der Aldehyd, der auf diese Weise wieder zurückgewonnen wird, in dem ersterwähnten öligen Zwischenproduct nicht schon frei als solcher vorhanden, sondern darin gebunden war und erst durch die Einwirkung des Wassers aus seiner Bindung frei wurde, geht daraus hervor, dass dieselbe Abscheidung auch bei einem Producte statt hat, welches sich durch einige Tage im evacuirten Raum befand, während Kohlensäureblasen dasselbe durchströmten. Nur beigemengter Aldehyd würde auf diese Weise gewiss entfernt worden sein.

Die wässerige Lösung enthält die dem angewandten Aldehyd entsprechende Oxyphosphinsäure sowie Salzsäure, welche — wie schon früher erwähnt — in grosser Menge bei der Zersetzung des Zwischenproductes durch Wasser frei wird, in Lösung. Beim Eindampfen auf dem Wasserbade bleibt, wenn die Trennung von der oberen Schichte sorgfältig geschah, die Oxyphosphinsäure als weisser krystallinischer Kuchen zurück.

Es ist wesentlich, auf eine möglichst vollständige Abscheidung der Aldehydschichte von der wässerigen Lösung zu achten, da sonst durch die in der Wärme vor sich gehende Einwirkung der Salzsäure auf die obere (Aldehyd-) Schichte Harze entstehen, die

sich in der unteren Schichte theilweise lösen und nach dem Eindampfen der Lösung der ausgeschiedenen Krystallmasse hartnäckig anhaften.

Die Ausbeute an solcher roher Oxyphosphinsäure beträgt 80% von der theoretisch (auf 1 PCl_3 1 Aldehyd) zu erwartenden Menge.

Die Oxyphosphinsäuren, durch Eindampfen der wässerigen Lösung gewonnen, sind von deutlich krystallinischem, wallratähnlichen Aussehen und an der Luft vollkommen beständig. Sie lösen sich in Ammoniak, Kalilauge, Wasser, Äther, Alkohol und Eisessig, sind fast unlöslich in Benzol und Chloroform. Die wässerige Lösung besitzt einen angenehmen, rein sauren Geschmack und röthet blauen Lakmus intensiv. In der Hitze und mit Wasserdampf sind diese Säuren nicht flüchtig. Gegen ammoniakalische Silberlösung und Fehling'sche Lösung üben sie auch in der Wärme keine reducirende Wirkung.

Das weitere chemische Verhalten, insoferne es einen Schluss auf die Constitution dieser Säuren erlaubt, bringe ich anschliessend in den Versuchen, welche ich mit einzelnen Gliedern dieser neuen Säurereihe vornahm.

Oxyisoamylphosphinsäure.

Zur weiteren Untersuchung der Oxyphosphinsäuren verwendete ich zum grössten Theil die Oxyisoamylphosphinsäure, die ich auf die angegebene Weise aus Valeraldehyd und Phosphortrichlorid darstellte.

Durch Eindampfen der wässerigen Lösung erhielt ich sie als perlmutterglänzende, sich fettig anfühlende Schuppen vom Aussehen des Wallrats; durch langsames Verdunstenlassen der alkoholisch wässerigen Lösung krystallisirte sie in schönen messbaren Formen.

Herr Hofrath Prof. von Zepharovich hatte die grosse Güte, dieselben krystallographisch zu untersuchen. Die mitgetheilten Daten, für welche ich an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank ausspreche, lasse ich anschliessend folgen:

Die dem monosymmetrischen System angehörigen sechsseitigen sehr dünnen Täfelchen oder Schüppchen mit vier ebenen Winkeln von 119° 1′ und zwei von 121° 58′ können als Combi-

nationen (001) $0P$. (110) ∞P. ($\bar{1}01$) $P\infty$ gedeutet werden. Der Normal-Winkel (001:$\bar{1}$01) ist annähernd 78° 41′, während (001:110) = 82° 49′ (80$^1/_2$° — 85°) nur durch unsichere Schimmermessungen der bogenförmig gekrümmten und gewölbten (110) bestimmt werden konnte.

Die Auslöschungen erfolgen auf (001) parallel zur Kante mit ($\bar{1}$01) und unter 28° zur Kante mit (110). Durch (001) sieht man eine optische Axe sehr stark seitlich gegen (110) hin austreten; bei gelbem Lichte wurde im Mohnöl diese Axe gegen die Normale auf (001) unter circa 52° geneigt beobachtet.

Der Schmelzpunkt dieser Säure liegt bei 183—184°.

Die Elementaranalyse gab folgende Resultate:

I. 0·2813 Grm. Substanz lieferten 0.1986 Grm. H_2O und 0·3686 Grm. CO_2.

II. 0·4301 Grm. Substanz lieferten 0·2890 Grm. $Mg_2P_2O_7$.

III. 0·4090 Grm. „ „ 0·2720 Grm. $Mg_2P_2O_7$.

Dem entsprechend sind in 100 Theilen

	Gefunden			Berechnet
	I	II	III	für $C_5H_{13}PO_4$
C =	35·71	—	—	35·71
H =	7·73	—	—	7·83
P =	—	18·74	18·62	18·57

Die Zusammensetzung entspricht demnach einer empirischen Formel, welche additionell die Elemente $H_3PO_3 + C_5H_{10}O = C_5H_{13}PO_4$ enthält.

Die Verbrennung zur Bestimmung des Kohlenstoff- und Wasserstoffgehaltes I geschah mit chromsaurem Blei.

Die Oxydation der Substanz zur Phosphorbestimmung II wurde durch mehrstündiges Erhitzen mit rauchender Salpetersäure im zugeschmolzenen Rohr auf 160—170°, die Bestimmung III durch Schmelzen mit Kaliumhydroxyd vorgenommen.

Bei der Oxydation der Substanz mit rauchender Salpetersäure verdient die Beobachtung Erwähnung, dass sich dieselbe gegen Salpetersäure wie auch Königswasser äusserst resistent verhält. Ein Auflösen der Oxyisoamylphosphinsäure in concentrirter rother Salpetersäure oder Königswasser und Abdampfen der Lösung am Wasserbade führt lange nicht zum Ziele. Auch

nach drei- und viermaliger Wiederholung dieser Operation war immer noch ein ansehnlicher Theil derselben unangegriffen geblieben und erst ein sechsstündiges Erhitzen im zugeschmolzenen Rohr auf 160—170° war im Stande die vollständige Oxydation herbeizuführen.

Dieselbe Wahrnehmung der schweren Oxydirbarkeit durch Salpetersäure hatte A. W. Hofmann[1] auch bei der Oxydation der Phosphinsäuren gemacht, ein Umstand, welcher durch seine Auffälligkeit geeignet ist, die Analogie der beiden Säurereihen bemerkbar zu machen.

Die Zerstörung der Säure mit Kaliumhydroxyd gelang sehr präcis[2]. Ich ging dabei in der Weise vor, dass ich die gepulverte Oxyphosphinsäure mit der circa zehnfachen Menge gepulverten Kaliumhydroxyds gemischt im Silbertiegel erhitzte, bis kein Aufschäumen mehr stattfand, dann die erkaltete Schmelze in Wasser löste, mit Salzsäure neutralisirte und die Phosphorsäure mit Magnesiamischung ausfällte.

Die Oxydation der Säure mit Kaliumpermanganat, welche ich später erwähne, dürfte sich übrigens ebenfalls zur Phosphorbestimmung benützen lassen.

Oxyisoamylphosphinsaure Salze.

Die Oxyisoamylphosphinsäure ist eine starke, wohl charakterisirte Säure, die Kohlensäure leicht aus ihren Verbindungen austreibt. Die folgende Untersuchung der Salze zeigt, dass sie zweibasisch ist und zwei Reihen Salze, saure und neutrale liefert.

Saures Bariumsalz. Wird die wässerige Lösung der Oxyisoamylphosphinsäure mit der zur halben Sättigung nöthigen Menge Barytwasser versetzt, so erhält man eine sauer reagirende Flüssigkeit, welche sich beim Kochen nicht trübt. Beim Versetzen mit etwas Alkohol oder eingedampft beim Erkalten lässt sie prächtige Sternchengruppen aus der Lösung fallen. Diese Krystalle stellen das saure Barytsalz $(C_5H_{12}PO_4)_2Ba$ dar.

---

[1] Berichte d. d. chem. Gesellschaft. 5. 104.

[2] A. W. Hofmann wendete mit gleichem Erfolg Salpeter und Soda an.

Eine mit 0·4320 Grm. Substanz vorgenommene Barytbestimmung gab 0·2135 Grm. $BaSO_4$,

d. i. in 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet auf $(C_5H_{12}P_1O_2)Ba$
Ba . .	28·96	29·10

Dieses saure Salz ist, im Gegensatze zu dem gleich zu erwähnenden neutralen, in heissem Wasser leichter löslich als im kalten.

Neutrales Bariumsalz. Auf weiteren Zusatz von Baryt wasser — (doch nur so viel, dass beim Durchleiten von Kohlensäure noch kein Niederschlag entsteht) — zur Lösung des sauren Salzes, nimmt diese eine stark alkalische Reaction an. Erhitzt man sie nun, so trübt sie sich und bei Siedetemperatur endlich scheidet sich reichlich ein flockiger Niederschlag aus, der bei längerem Kochen als körnig krystallinisches Pulver zu Boden sinkt.

Dieser Niederschlag ist neutraler oxyisoamylphosphinsaurer Baryt; seine wässerige Lösung reagirt alkalisch.

Dieses Salz ist in kaltem Wasser leichter löslich als in warmem. Beim Erhitzen eines Gemenges der beiden Salzlösungen fällt es darum als Niederschlag aus, während das saure Salz in Lösung bleibt. Die Flüssigkeitsschichte, die vor dem Kochen alkalisch reagirte, zeigt daher nach dem Ausfällen des neutralen Salzes auch wieder eine saure Reaction.

Das so gewonnene neutrale Salz dieser Oxyphosphinsäure, welches durch Waschen mit kochendem Wasser leicht vom noch anhaftenden sauren Salz befreit wird, stellt ein weisses krystallinisches Pulver dar, dem die Formel $C_5H_{11}PO_4Ba + 2H_2O$ zukommt. Sein Krystallwasser verliert es erst durch mehrstündiges Erhitzen auf 140°. Über 150° erhitzt, färbt es sich braun.

0.4745 Grm. der zwischen Filterpapier getrockneten Substanz gab durch Ausfällen mit Schwefelsäure 0·3306 Grm. $BaSO_4$.

In 100 Theilen:



	Gefunden	Berechnet auf $C_5H_{11}PO_4Ba + 2H_2O$
Ba . .	40·98	40·43

Die Calciumsalze verhalten sich wie die Barytsalze. Das neutrale Calciumsalz ist ebenfalls in kaltem Wasser leichter löslich als in warmem. Eine bei 0° gesättigte klare Lösung scheidet beim Erhitzen eine so reichliche Menge Salz aus, dass die Flüssigkeit davon ganz erfüllt wird.

Die mit Ammoniak genau neutralisirte Lösung der Säure gibt mit Silbernitrat einen weissen, käsigen Niederschlag, der in Ammoniak und Salpetersäure leicht löslich ist. Die Bestimmung des Silbergehaltes ergab für dieses Salz eine Zusammensetzung, nach welcher in der Oxyisoamylphosphinsäure zwei Wasserstoffatome durch Ag ersetzt wurden. Es entstand das neutrale Silbersalz $C_5H_{11}PO_4Ag_2$.

Durch Fällung mit Bleiacetat entsteht ebenfalls das, in Essigsäure unlösliche, neutrale Bleisalz $C_5H_{11}PO_4Pb$.

Die mit Ammoniak neutralisirte und im Vacuum über Schwefelsäure zur Trockne gebrachte Lösung der Säure gibt ein weisses verwittert aussehendes Ammonsalz, das bei gelindem Erhitzen Ammoniak abgibt und sich in einen durchsichtigen Gummi verwandelt. Derselbe ist stickstoffhältig und sehr hygroskopisch.

Die Lösung des Ammonsalzes gibt mit allen Schwermetallen im Wasser unlösliche, zum Theil schön gefärbte Niederschläge.

Mercurinitrat gibt damit eine weisse, Mercuronitrat in der Wärme eine citronengelbe Färbung.

Einwirkung von Phosphorpentachlorid.

Durch die Untersuchung der Salze der Oxyisoamylphosphinsäure wurde erwiesen, dass von den vier Sauerstoffatomen, welche das Molekül der Säure enthält, nur zwei als saure Hydroxylgruppen, welche die Zweibasicität der Säure bedingen, vorhanden sind. Über die Natur, respective Bindung der beiden anderen Sauerstoffatome versprach die Einwirkung von Phosphorpentachlorid einigen Aufschluss zu geben. Dieselbe bewerkstelligte ich folgendermassen:

In ein Kölbchen, das mit einem Rückflusskühler verbunden war und 52 Grm. (3 Mol.) Phosphorpentachlorid enthielt, gab ich 13 Grm. (1 Mol.) Oxyisoamylphosphinsäure. Bald nach dem Eintragen der Säure entstand eine ziemlich heftige Reaction,

welche durch Kühlen des Kölbchens abgeschwächt werden musste. Es fand ein Ausstossen von Salzsäuregas und Verflüssigung des Kolbeninhaltes statt.

Nachdem sich die Heftigkeit der Reaction gemindert hatte, erwärmte ich vorsichtig und erhielt endlich um eine möglichst vollständige Einwirkung des Phosphorpentachlorids zu erzielen, den Kolbeninhalt durch 6 Stunden im Sieden. Als nach dieser Zeit nur mehr geringe Mengen Salzsäuregas entwichen, wendete ich den Kühler um und destillirte vorerst das entstandene Phosphoroxychlorid (bis 120°) über. Den Rückstand unterwarf ich der Destillation im evacuirten Raum. Ich erhielt so als letztes Destillationsproduct circa 7 Grm. eines ziemlich dicken farblosen Öles, das bei einem Drucke von 22 Mm. zwischen 134—140° übergegangen war.

Im Kölbchen war eine schwarze, dickflüssige Masse, welche beim Erkalten vollständig erhärtete, im Rückstand geblieben.

Das erhaltene Chlorproduct hatte einen eigenthümlich scharfen Geruch, rauchte schwach an der Luft und nahm, dem Tageslichte ausgesetzt, eine dunkle Färbung an.

Mit Kalk im Rohr geglüht, erhielt ich für den Gehalt an Chlor die folgenden Zahlen:

0·7143 Grm. Product gaben 1·3377 Ag Cl.

d. i. in 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_5H_{10}POCl_3$	Berechnet für $C_5H_{11}PO_2Cl_2$
Cl	= 46.32	47.65	34.64

Diese Zahlen zeigen eine so annähernde Übereinstimmung mit jenen für die Formel $C_5H_{10}POCl_3$, welche die Substitution dreier Hydroxylgruppen im Säuremolekül durch Cl ausdrückt und weichen so bedeutend von denen für die beigesetzte Formel $C_5H_{11}PO_2Cl_2$ ab, welche nur zwei Hydroxylgruppen durch Cl ersetzt enthält, dass man wohl an dem Vorhandensein dreier Hydroxylgruppen im Molekül der Oxyisoamylphosphinsäure nicht zweifeln kann. Diese zweibasische Säure erscheint somit dreiwerthig.

Für die abweichende Natur einer von den drei durch Cl ersetzten Hydroxylgruppen — der alkoholischen — von der

beiden anderen — den sauren — spricht auch das Verhalten des Chlorids gegen Wasser.

Mit solchem geschüttelt, tritt alsbald Erwärmung (Abspaltung von Salzsäure) ein, und nach einiger Zeit sammelt sich ein schwerer Tropfen am Boden des Gefässes. Wird dieser von der überstehenden salzsauren Flüssigkeit, welche auch etwas Öl gelöst enthält, getrennt und über Schwefelsäure getrocknet, so erstarrt er zu einer krystallinischen, äusserst hygroskopischen Masse.

Es ist zu erwarten, dass die beiden Chloratome, welche im Chlorproduct an die Stelle der sauren Hydroxylgruppen getreten waren, schon bei der Behandlung des Chlorids mit kaltem Wasser wieder ihren Platz an Hydroxylgruppen abgegeben haben, während das dritte Chloratom in seiner Bindung — der Vertretung des alkoholischen Hydroxyls — verbleibt. Es sollte dann also eine chlorhältige zweibasische Säure von der Formel $C_5H_{12}PO_3Cl$ — eine chlorsubstituirte Phosphinsäure resultiren.

In der That scheint nach vorläufigen Versuchen ein solches Product hier vorzuliegen. Es ist nach der qualitativen Untersuchung eine Chlor- und Phosphor enthaltende Säure. Da ich diese analysenrein noch nicht in Händen habe, bleibt das Untersuchungsergebniss einer nächsten Abhandlung vorbehalten.

Behandlung mit Kalilauge und Oxydation mit Kaliumpermanganat.

Wie beständig sich die Oxyisoamylphosphinsäure gegen Salpetersäure und Königswasser verhält und dass selbst ein oftmaliges Eindampfen mit Königswasser ein vollständiges Zerreissen des Säuremoleküls nicht herbeizuführen im Stande war, habe ich bei der Bestimmung des Phosphorgehaltes der Säure schon erwähnt. Noch stabiler verhält sich dieser Körper gegen Kalilauge.

Einige Gramm davon in einem grossen Überschuss concentrirter wässeriger Kalilauge gelöst und stundenlang in einem Silberkolben am Rückflusskühler gekocht, erfuhren nicht die mindeste Veränderung. Nach vierstündigem Kochen der kalischen Lösung, konnte ich aus der mit Schwefelsäure angesäuerten Flüssigkeit die ganze ursprünglich angewandte Menge

mit Äther extrahiren. Auch der Schmelzpunkt war unverrückt geblieben.

Nach diesen Erfahrungen von der ausserordentlichen Stabilität dieser Säure, war es um so auffallender, dass Kaliumpermanganat mit Leichtigkeit den Zerfall des Moleküls herbeiführte.

Wird eine wässerige Lösung der Säure mit Kaliumpermanganat versetzt, so tritt in der Kälte nach einigen Minuten, bei gelindem Erwärmen der Flüssigkeit aber sogleich eine vollständige Entfärbung des Chamäleons ein. Bei weiterem Zutropfen der Chamäleonlösung erfährt nun nach der Einleitung der Reaction jeder Tropfen auch ohne Erwärmung sofort nach dem Einfallen eine Entfärbung und gleichzeitig macht sich der Geruch des Aldehyds bemerkbar.

Wenn ich das Kölbchen, das die wässerige Lösung der Oxyisoamylphosphinsäure enthielt, mit einem Kühler verband und die Flüssigkeit unter gleichzeitigem Eintropfen der Permanganatlösung erwärmte, so konnte ich aus dem in der Vorlage angesammelten Destillat den Valeraldehyd leicht isoliren. Der Rückstand im Kölbchen enthielt Phosphorsäure.

Es zerfällt also die Oxyisoamylphosphinsäure, welche sich gegen Kalilauge und Salpetersäure so widerstandsfähig erweist und auch gegen salpetersaures Silber und Fehling'sche Lösung keine reducirenden Eigenschaften äussert, durch den oxydirenden Einfluss des Kaliumpermanganates leicht, und wie es scheint, vollständig in Aldehyd und phosphorige Säure. Die letztere wird sogleich zu Phosphorsäure oxydirt.

Trockene Destillation.

Die A. W. Hofmann'schen Phosphinsäuren lassen sich mit geringer Zersetzung destilliren; die Oxyphosphinsäuren aber sind nicht unzersetzt flüchtig.

Wird die Oxyisoamylphosphinsäure im Kölbchen über ihren Schmelzpunkt erhitzt, so färbt sich die geschmolzene Säure erst roth, wird dann wieder gelblich und spaltet gleichzeitig Valeraldehyd ab, der überdestillirt. Bei fortgesetzter Erwärmung findet dann plötzlich ein lebhaftes Aufschäumen des Kolbeninhaltes statt, und Ströme eines Gases oder weisser Nebel ent-

weichen. Explosionen, die unter Feuererscheinung, welche die fahlgrüne Farbe verbrennenden Phosphors zeigen, in der Vorlage auftreten und ein durchdringender widerlicher Geruch, der diese Erscheinung begleitet, lassen das entweichende Gas unschwer als Phosphorwasserstoff erkennen.

Im Kölbchen selbst aber bleibt eine weisse Masse zurück, die sich leicht mit Ausnahme einiger Flocken in Wasser löst. Es ist Phosphorsäure.

Das Auftreten von Phosphorwasserstoff bei der trockenen Destillation der Oxyisoamylphosphinsäure und der Phosphorsäure im Rückstand sind als secundäre Reactionen zu betrachten. Es sind dies die Zersetzungsproducte der phosphorigen Säure, in welche diese bekanntlich beim Erhitzen zerfällt. Als nächste Zersetzungsproducte der Oxyisoamylphosphinsäure beim Erhitzen sind daher nur Valeraldehyd und phosphorige Säure zu betrachten.

Constitution.

Die vorangeführten Untersuchungsresultate berechtigen zu folgenden Schlüssen auf die Constitution dieser Säure.

Nach den Ergebnissen der Elementaranalyse und der Untersuchung der Salze ist der vorliegende Körper eine zweibasische Säure von der Zusammensetzung $C_5H_{13}PO_4$.

Für die Structur einer solchen ist theoretisch nur eine der drei folgenden Formeln wahrscheinlich.

I.

$$\begin{array}{ccccccc} & & H & & & & \\ & & | & & & & \\ C_4H_9 & — & C & — O — & P & \begin{matrix} —OH \\ —OH \end{matrix} \\ & & | & & \| & & \\ & & H & & O & & \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{ccccccc} & & OH & & & & \\ & & | & & & & \\ C_4H_9 & — & C & — O — & P & \begin{matrix} —OH \\ —OH \end{matrix} \\ & & | & & & & \\ & & H & & & & \end{array}$$

III.

$$\begin{array}{cccccc} & & OH & & & \\ & & | & & & \\ C_4H_9 & — & C & — & P & \begin{matrix} —OH \\ —OH \end{matrix} \\ & & | & & \| & \\ & & H & & O & \end{array}$$

Dass die Structur der Formel I — die eines primären Amylesters der Phosphorsäure — der vorliegenden Substanz nicht

zukommt, bewies schon das Verhalten derselben zu Phosphorpentachlorid und Kalilauge. Überdies aber ist die so constituirte Amylphosphorsäure bekannt[1] und differirt wesentlich in ihren Eigenschaften von denen des untersuchten Productes.

Demnach ist die Formel I ausgeschlossen und es bleibt nur noch die Wahl zwischen den beiden dreiwerthigen Schemen II und III.

Diese beiden unterscheiden sich nur durch die Bindung des nicht hydroxylirten Sauerstoffes und manche der vorangeführten Untersuchungs-Ergebnisse, die Einwirkung des Phosphorpentachlorids und auch die bei der Behandlung mit Kaliumpermanganat und beim Erhitzen vor sich gehende Spaltung in Valeraldehyd und phosphorige Säure, liessen sich mit beiden Formeln vereinbaren. Dagegen ist das Verhalten gegen Kalilauge und Salpetersäure mit den Eigenschaften, wie sie theoretisch von der Formel II zu erwarten wären, nicht in Einklang zu bringen.

Die Formel II stellt einen primären Amylester (mit hydroxylirtem Alkyl) der symmetrischen phosphorigen Säure dar. Ein solcher Ester würde sich gegen Kalilauge nicht resistent verhalten, er würde wahrscheinlich, wenn überhaupt existenzfähig,[2] eine sehr lose Verbindung sein und auch, da er den Phosphor dreiwerthig enthält, wohl eher eine reducirende Wirkung als einen Widerstand gegen Salpetersäure und Königswasser erwarten lassen.

Mithin kann auch die Formel II nicht als der Ausdruck für die Eigenschaften gelten, die in der vorliegenden Substanz zu Tage treten; es muss ihr also nothwendig die Constitution III zukommen. In der That gelingt es auch unschwer zu zeigen, dass sämmtliche Eigenschaften in der Anordnung dieser Formel ihre Erklärung finden.

Die directe Bindung der hydroxylirten Alkylgruppe an Phosphor lässt eine Widerstandsfähigkeit gegen Kalilauge wohl

---

[1] Guthrie. Annal. der Chemie und Pharmacie 99. 57.

[2] Die von Würtz (Ann. 58, 72) dargestellte äthyl- und amylphosphorige Säure ist ebenso wie die von Schiff (Ann. d. Ch. u. Ph. 133—164) beschriebene methylphosphorige sehr zersetzlich.

erwarten und die Fünfwerthigkeit des Phosphoratoms macht die schwere Oxydirbarkeit des Säuremoleküls durch Salpetersäure um so eher verständlich, als den Phosphinsäuren Hofmann's welche bei sonst gleicher Structur ein Alkyl statt des hydroxylirten Alkyls enthalten, dieselbe auffallende Eigenschaft zukommt.

Die Phosphinsäuren gleichen übrigens den Oxyphosphinsäuren auch in manchen physikalischen Eigenschaften — die Isoamylphosphinsäure krystallisirt beispielsweise sowie die Oxyisoamylphosphinsäure in perlmutterglänzenden Blättchen, hat einen nicht allzuabweichenden Schmelzpunkt und zeigt ähnliche Löslichkeiten; ferner sind die Bleisalze beider in Essigsäure unlöslich — was wohl als ein weiterer Beweis analoger Structur gelten kann.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{H} & & \\ & & | & & \\ \mathrm{C_4H_9} & - & \mathrm{C} & - & \mathrm{P}\begin{array}{l}-\mathrm{OH}\\-\mathrm{OH}\end{array} \\ & & | & & \| \\ & & \mathrm{H} & & \mathrm{O} \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{ccccc} & & \mathrm{OH} & & \\ & & | & & \\ \mathrm{C_4H_9} & - & \mathrm{C} & - & \mathrm{P}\begin{array}{l}-\mathrm{OH}\\-\mathrm{OH}\end{array} \\ & & | & & \| \\ & & \mathrm{H} & & \mathrm{O} \end{array}$$

Isoamylphosphinsäure. Oxyisoamylphosphinsäure.

Auch die weiteren Ergebnisse der vorangeführten Untersuchungen stehen im vollkommenen Einklange mit der Oxyphosphinsäureformel (III).

Durch Kaliumpermanganat wird das Molekül in Aldehyd und phosphorige Säure gespalten. Die letztere wird sofort zu Phosphorsäure oxydirt.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{OH} & & \\ & & | & & \\ \mathrm{C_4H_9} & - & \mathrm{C} & - & \mathrm{P}\begin{array}{l}-\mathrm{OH}\\-\mathrm{OH}\end{array} \\ & & | & & \| \\ & & \mathrm{H} & & \mathrm{O} \end{array} + \mathrm{O} = \begin{array}{ccc} & & \mathrm{O} \\ & & \| \\ \mathrm{C_4H_9} & - & \mathrm{C} \\ & & | \\ & & \mathrm{H} \end{array} + \begin{array}{c} \mathrm{HO} \\ | \\ \mathrm{P}\begin{array}{l}-\mathrm{OH}\\-\mathrm{OH}\end{array} \\ \| \\ \mathrm{O} \end{array}$$

Bei der trockenen Destillation tritt die Zerreissung des Moleküls in derselben Weise ein.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{O} \,|\, \mathrm{H} & & \\ & & / \quad | & & \\ \mathrm{C_4H_9} & - & \mathrm{C} \; - | - & & \mathrm{P}\begin{array}{l}-\mathrm{OH}\\-\mathrm{OH}\end{array} \\ & & \backslash & & \backslash\backslash \\ & & \mathrm{H} & & \mathrm{O} \end{array} = \begin{array}{ccc} & & \mathrm{O} \\ & & // \\ \mathrm{C_4H_9} & - & \mathrm{C} \\ & & \backslash \\ & & \mathrm{H} \end{array} + \begin{array}{c} \mathrm{H} \\ | \\ \mathrm{P}\begin{array}{l}-\mathrm{OH}\\-\mathrm{OH}\end{array} \\ \| \\ \mathrm{O} \end{array}$$

Aldehyd destillirt über, die phosphorige Säure aber erfährt bei der hohen Temperatur die beobachtete weitere Zersetzung in Phosphorwasserstoff und Phosphorsäure.

$$4H_3PO_3 = PH_3 + 3H_3PO_4$$

Durch die Einwirkung von Phosphorpentachlorid erfolgte der Ersatz der drei im Molekül vorhandenen Hydroxylgruppen durch Chlor. Es entsteht das Trichlorid.

```
        Cl
        |
C4H9 —  C — P  —Cl
        |     \\ —Cl
        H      O
```

Bei Behandlung dieses mit Wasser ist durch Wiedereinführung der beiden sauren Hydroxyle die Entstehung einer monochlorsubstituirten Phosphinsäure vorauszusehen, welche bei der Reduction mit Natrium die Amylphosphinsäure zu liefern hätte.

Diese Überführung — ein directer Beweis der angegebenen Constitution — wird mit ein Gegenstand meiner nächsten Abhandlung sein.

Die Oxyphosphinsäuren gleichen in ihrer Zusammensetzung den additionellen Verbindungen der Aldehyde mit Natriumbisulfit, Blausäure und Ammoniak. Indem diese Körper ein Wasserstoffatom an den Aldehydsauerstoff abgeben, wird es den einwerthigen Resten $—CN$, $—SO_3Na$ und $—NH_2$ möglich, mit der nunmehr hydroxylirten Alkylgruppe (dem durch den Wasserstoff-Eintritt veränderten Aldehyd) in Bindung zu treten.

Diesen Beispielen analog lässt sich auch in der Oxyphosphinsäure das dem angewandten Aldehyd entsprechende hydroxylirte Alkyl mit dem einwerthigen Rest der unsymmetrischen phosphorigen Säure $—PO_3H_2$ in Bindung denken.

```
   OH           OH            OH
   |            |             |
R—C—CN      R— C —NH2      R—C—SO3Na
   |            |             |
   H            H             H
```

$$R-\overset{\overset{\displaystyle OH}{|}}{\underset{\underset{\displaystyle H}{|}}{C}}-PO_3H_2$$

Von diesem Gesichtspunkte aus war es naheliegend, den Versuch zu machen, ob nicht beim Zusammenbringen von Aldehyd mit phosphoriger Säure oder deren Salzen direct diese Verbindung entstünde. Der Versuch gab ein negatives Resultat.

Oxyisobutylphosphinsäure.

Diese Säure von der Zusammensetzung

$$C_3H_7-\overset{\overset{\displaystyle OH}{|}}{\underset{\underset{\displaystyle H}{|}}{C}}-P\begin{matrix}-OH\\-OH\\=O\end{matrix}$$

wurde auf die angegebene Weise aus Isobutyraldehyd und Phosphortrichlorid dargestellt. Sie stellt ebenfalls eine wallrathähnliche krystallinische Masse dar, wenn sie durch Eindampfen der wässerigen Lösung erhalten wird.

Aus schwach alkoholischer Lösung, welche der freiwilligen Verdunstung überlassen war, krystallisirt sie in schön ausgebildeten Formen, welche im Aussehen von denen der Oxyisoamylphosphinsäure etwas abweichen.

Die folgende krystallographische Bestimmung verdanke ich ebenfalls der Güte des Herrn Hofrathes Prof. von Zepharovich.

Krystallsystem: rhombisch.

Elemente: $a:b:c:=0\cdot9715:1=3\cdot9383$.

Formen: a (100) $\infty\bar{P}\bar{\infty}$; c (001) $0P$; r (101) $\bar{P}\bar{\infty}$; o (111) P; e (122) $\breve{P}2$.

Dicktafelige Combinationen der vorwaltenden $0P$ und P mit untergeordnetem $\breve{P}2$, welche sehr vollkommen nach $0P$ spaltbar sind.

Ausnahmsweise und mit minimaler Ausdehnung erscheinen $\infty\bar{P}\bar{\infty}$ und $\bar{P}\bar{\infty}$.

	Flächen	Rechnung	Messung	n
oc	$(111\cdot001) =$	—	79°58′ —	16
oo″	$(111\cdot1\bar{1}1) =$	—	86°39′ —	8
ec	$(122\cdot001) =$	77°16·7′	77°12′ —	9
ee′	$(122\cdot\bar{1}22) =$	53° 1·6′	52°49′ —	5
oe	$(111\cdot122) =$	18°25·3	18°17′ —	11

Durch die Spaltlamellen, mit orientirter Auslöschung, ist eine optische Mittellinie sichtbar.

Diese Säure schmilzt bei 168—169°. In allen anderen chemischen und physikalischen Eigenschaften gleicht sie vollkommen dem beschriebenen homologen Gliede.

Die Zahlen der Elementaranalyse bestätigen die Formel $C_4H_{11}PO_4$.

In 100 Theilen Substanz

	Gefunden I	Gefunden II	Gefunden III	Berechnet für $C_4H_{11}PO_4$
C =	31·06	30·98	—	31·11
H =	—	7·16	—	7·14
P =	—	—	19·52	20·11

Von ihren Salzen habe ich das saure und neutrale Barytsalz auf den Barytgehalt untersucht. Die erhaltenen Zahlen stimmen ebenfalls mit denen der zu erwartenden Formeln.

Für das saure Salz $(C_4H_{10}PO_4)_2Ba$ berechnet sich ein Percentgehalt von 30·9 Ba, ich fand 31·7 Ba.

Das neutrale Salz verlangt für die Zusammensetzung $C_4H_9PO_4$ Ba 47·4% Ba, die Analyse ergab 47·2%.

Auch das Verhalten dieser Säure beim Erhitzen und bei der Behandlung mit Kalilauge und Kaliumpermanganat gleicht vollkommen dem der Oxyisoamylphosphinsäure.

XXIV. SITZUNG VOM 13. NOVEMBER 1884.

Der Secretär legt Dankschreiben für die Betheilung mit akademischen Publicationen vor von den Directionen des königl. sächs. meteorologischen Instituts in Chemnitz und der königl. Oberrealschule in Semlin.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. Dr. A. Rollett in Graz übersendet den ersten Theil einer für die Denkschriften bestimmten Abhandlung unter dem Titel: „Untersuchungen über den Bau der quergestreiften Muskelfasern."

Der Secretär legt folgende versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor:

1. Von Herrn Edmund Poppy in Wien. Dasselbe trägt die Aufschrift: „Vernichtung der Reblaus."
2. Von Herrn Arthur v. Raimann, mit der Inhaltsangabe: „Beschreibung einer Erfindung."

Herr Dr. Eduard Freiherr v. Haerdtl in Wien überreicht die Fortsetzung seiner Abhandlung: „Bahnbestimmung des Planeten Adria (143)" (III. Theil).

Herr Dr. Norbert Herz in Wien überreicht eine Abhandlung: „Bemerkungen über die physische Constitution der Atmosphäre".

Herr Dr. Otto Stapf, Assistent am botanischen Museum der Wiener Universität, überreicht folgende zwei Abhandlungen:

1. „Die botanischen Ergebnisse der Polak'schen Expedition nach Persien im Jahre 1882."
2. „Bericht über die von Dr. Fel. von Luschan in Lycien und auf dem Nemrud Dagh in Mesopotamien gesammelten Pflanzen."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia caesarea Leopoldino-Carolina-germanica naturae curiosorum: Nova acta. XLV et XLVI. Halle, 1884; gr. 4°.

Academy, the Davenport of natural sciences: Proceedings. Vol. III. Part III. 1879—1881. Davenport, 1883; 8°.

Accademia, gioenia di scienze naturali in Catania: Atti. Serie terza — tomo XVII. Catania, 1883; 4°.

— pontificia de' nuovi Lincei: Atti, Anno XXXV, sessione VIa del 21 Maggio 1882. Roma, 1883; 4°. — Anno XXXVI, sessione Ia del 31. Dicembre 1882. Roma, 1883; 4°.

— reale dei Lincei: Atti. Anno CCLXXXI 1883—84. Serie terza. Transunti. Vol. VIII. Fascicoli 13°—15°. Roma, 1884; 4°.

Akademija, umiejętności w Krakowie: Rocznik zarządu. Rok. 1883. Kraków, 1884; 8°.

— — Lud. Serya XVI et XVII. Kraków, 1883 und 1884; 8°.

— — Zbiór wiadomości do Antropologii Krajowój. Tom. VIII. W Krakowie, 1884; 8°.

— — Sprawozdanie komisyi fyzyjograficznéj. Tom. XVIII. W Krakowie, 1884; 8°

— — Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń wydziału matematyczno-przyrodniczego. Tom. XI. W Krakowie, 1884; 8°.

Akademija, jugoslavenska znanosti i umjetnosti: Rad. Knjiga LXIX—LXX. U Zagrebu, 1884; 8°.

— — Flora fossilis Susedana; auctore Georgio Pilar. Zagrabiae, 1883; Folio.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VIII. Nr. 86—87. Cöthen, 1884; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCIX, 2e semestre, Nr. 17. Paris, 1884; 4°.

Gesellschaft, gelehrte, estnische, zu Dorpat: Sitzungsberichte, 1883. Dorpat, 1884; 8°.

— deutsche, geologische: Zeitschrift. XXXVI. Band, 2. Heft. Berlin, 1884; 8°.

— k. k. der Ärzte: Medizinische Jahrbücher. Jahrgang 1884. II. und III. Heft. Wien, 1884; 8°.

Gesellschaft, mähr.-schlesische zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde: Schriften der historisch-statistischen Section. XXVI Band. Brünn, 1884; 8⁰.

— österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XIX. Band. November-Heft 1884. Wien, 1884; 8⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. XIV. Band, Jahrgang 1882. Heft 1. Berlin, 1884; 8⁰.

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie. Für 1883. I. Heft. Giessen, 1884; 8⁰:

Johns Hopkins University: American Journal of Mathematics. Vol. VII. Nr. 1. Baltimore, 1884; 4⁰.

Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat in den Jahren 1877 bis 1880. Dorpat, 1884; 8⁰.

Nature, Vol. XXXI. Nr. 784. London, 1884; 8⁰.

Observatory, The: A monthly review of Astronomy. Nrs. 88 bis 91. London, 1884; 8⁰.

Society, the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLIV. Nos. 8 und 9. London, 1884; 8⁰.

— the royal Dublin: The scientific Transactions. Vol. I (Series II) Nos. XX — XXV. Dublin, 1883: 4⁰. — Vol. III (Series II) Nos. I—III. Dublin 1883—1884; 4⁰.

— — the scientific Proceedings. Vol. III. Parts VI. und VII. Dublin, 1882—1883; 8⁰. — Vol. IV. (N. S.) Parts I—IV. Dublin, 1883—1884; 8⁰.

— the royal geographical: Proceedings and Monthly Record of Geography. Vol. VI. No. 11. London, 1884; 8⁰.

— the Buffalo of natural sciences. Bulletin. Vol. VI. Nr. 4. Buffalo, 1883; 8⁰.

Verein, physikalischer, zu Frankfurt am Main: Jahresbericht für 1882—1883. Frankfurt a. M., 1884; 8⁰.

Würzburg, Universität: Akademische Schriften pro 1883—1884; 120 Stücke, 4⁰ et 8⁰.

Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten.

Von **Emanuel Czuber** in Prag.

(Mit 5 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. November 1884.)

Die Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten ist, soweit sie beliebig in der Ebene gezogene Gerade betrifft, durch M. W. Crofton (Philosophical Transactions, vol. 158) begründet worden. Am Schlusse der betreffenden Abhandlung regt Crofton die Ausdehnung seiner Grundsätze auf Gerade im Raume und Ebenen an; er stellt den Begriff einer beliebig im Raume gezogenen Geraden und einer willkürlich gelegten Ebene fest und deutet an, wie ein Mass für die Gesammtheit solcher Geraden und Ebenen zu finden ist, welche eine convexe, geschlossene Fläche schneiden.

In den folgenden Blättern wird der Versuch gemacht, den berührten Gegenstand weiter auszuführen.

1. Eine Gerade im Raume möge festgelegt werden mit Hilfe des Parallelstrahls OA durch einen festen Punkt O und mittelst jenes Punktes P, in welchem sie eine zu dem Parallelstrahl normale Ebene E schneidet. Der Punkt O sei gleichzeitig der Nullpunkt eines rechtwinkligen Raumcoordinatensystems und der Strahl AO bestimmt durch den Winkel $ZOA = \theta$ und den Winkel φ der Ebenen ZOA und ZOX. Der Punkt P sei in E durch irgendwelche Coordinaten (u, v) charakterisirt. — Unter einer willkürlich im Raume gezogenen Geraden soll dann eine solche Gerade verstanden werden, welche zu einer beliebigen Werthverbindung der Variabeln (θ, φ); (u, v) gehört.

Alle Geraden, welche zu derselben Werthcombination von θ und φ gehören, machen ein Bündel paralleler Geraden aus; da ferner der Gesammtheit aller Werthverbindungen von θ und φ ein Strahlenbündel um O entspricht, so löst sich die Gesammtheit

aller willkürlich gezogenen Geraden in Parallelenbündel auf, deren Richtungen durch die Geraden eines Strahlenbündels bestimmt werden.

Als Element dieser Gesammtheit bezeichnen wir jene Geraden, deren Argumente zwischen den benachbarten Grenzen θ und $\theta+d\theta$, φ und $\varphi+d\varphi$, dann u und $u+du$, v und $v+dv$ enthalten sind. Um für dasselbe ein Mass zu erhalten, suchen wir ein solches erst für die Strahlen, deren Winkelcoordinaten zwischen die bezeichneten Grenzen fallen, und beschreiben zu diesem Ende aus dem Ursprunge O mit der Einheit als Halbmesser eine Kugelfläche; dieselbe wird von den erwähnten Strahlen innerhalb eines Vierecks getroffen, das von zwei benachbarten Parallelkreisen und zwei benachbarten Meridianen begrenzt wird und dessen Inhalt

$$\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

ein Mass für die Anzahl der Strahlen ist. Durch den Übergang von u zu $u+du$ und von v zu $v+dv$ wird ferner ein Element der Ebene E bestimmt, dessen Inhalt dF die Anzahl der Geraden angibt, welche die Ebene E in diesem Element rechtwinklig durchsetzen. Demnach ist

$$dG = dF \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{1}$$

die geforderte Grösse.

Um für die Gesammtheit der Geraden, welche eine convexe, geschlossene Fläche schneiden, ein Mass zu erhalten, betrachte man zunächst Gerade von bestimmter Richtung oder mit constantem θ und φ; sie sind, soweit sie die Oberfläche schneiden, von einer diese umhüllenden Cylinderfläche eingeschlossen und treffen die Ebene E innerhalb des Schnittes, den sie mit jener Cylinderfläche ergibt; ist Ω der Inhalt dieses Normalschnittes, so hat man den Ausdruck 1) in Bezug auf F über Ω zu integriren und erhält so

$$\Omega \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Das Integral dieses Ausdruckes über das Gebiet aller Strahlen erstreckt, d. i. zwischen den Grenzen 0 und π in Bezug auf θ sowohl als φ genommen, gibt das verlangte Mass für die Menge aller die Fläche schneidenden Geraden, nämlich:

$$G = \int_0^\pi \int_0^\pi \Omega \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Nachdem aber für eine convexe, geschlossene Fläche die Beziehung besteht:

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \Omega \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{\pi}{2} O,^1 \qquad 2)$$

wenn O deren Oberfläche bedeutet, so ist

$$G = \frac{\pi}{2} O. \qquad 3)$$

Für eine ebene Figur mit convexem Umfange ergibt sich der entsprechende Werth, indem man sie als Grenze einer convexen geschlossenen Fläche ansieht. Wird der Inhalt der Figur mit F bezeichnet, so hat man auf Grund dieser Anschauung $O = 2F$ zu setzen und findet so

$$G = \pi F. \qquad 4)$$

Mit Unterdrückung des constanten Factors $\frac{\pi}{2}$ in 3) und 4) ist also O ein Mass für die Anzahl der Geraden, welche eine Fläche schneiden, und $2F$ das entsprechende Mass für eine ebene Figur.

2. Als Beispiel sollen zunächst die beiden verwandten Aufgaben gelöst werden: Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man zu erwarten, dass eine beliebige Gerade, welche die Oberfläche einer Kugel schneidet, einen bestimmten Hauptkreis derselben trifft, und wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Gerade, wenn sie eine Halbkugel schneidet, auch durch die entgegengesetzte Halbkugel geht?

Die Menge der Geraden, welche die Kugeloberfläche schneiden, kann durch $4\pi r^2$, die Menge derjenigen, welche den bezeichneten Diametralkreis treffen, in gleicher Weise durch $2\pi r^2$ gemessen werden; die erste der beiden Fragen ist also mit $^1/_2$ zu beantworten.

---

[1] Vergl. des Verf. „Geometr. Wahrsch. u. Mittelwerthe" (Leipzig, Teubner, 1884), pag. 168 flg.

Da eine Halbkugel von $3\pi r^2$ Geraden getroffen wird, eine dieser Geraden die entgegengesetzte Halbkugel nur dann schneidet, wenn sie durch die beiden gemeinsame Kreisfläche geht, und da endlich die Menge der Geraden dieser Eigenschaft durch $2\pi r^2$ angegeben wird, so ist die zweite der verlangten Wahrscheinlichkeiten gleich $^2/_3$.

3. An zweiter Stelle wollen wir uns mit der Lösung des nachstehenden verwickelteren Problems befassen: Innerhalb einer gegebenen Kugel wird ein Punkt beliebig angenommen; es ist die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass eine beliebige Gerade, welche die Kugel schneidet, an dem Punkte in einer Entfernung vorbeigeht, die kleiner ist als c — und anschliessend daran die mittlere Entfernung der Geraden und des Punktes berechnen.

Wir behandeln die Aufgabe unter der Voraussetzung $c < r$.

Denkt man sich um den angenommenen Punkt P mit dem Halbmesser c eine Kugelfläche beschrieben, so wird die Gerade der gestellten Bedingung genügen, wenn sie ausser der gegebenen auch diese Kugelfläche schneidet.

α) So lange die Entfernung des Punktes P vom Centrum O der gegebenen Kugel kleiner ist als $r - c$, ist die zweite Kugelfläche ganz innerhalb der ersten enthalten, und jede Gerade, welche jene schneidet, schneidet auch diese. Da nun einer so beschaffenen Lage des Punktes P die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{^4/_3\,\pi\,(r-c)^3}{^4/_3\,\pi\,r^3},$$

und einer Geraden, welche beide Kugelflächen trifft, die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{4\pi\,c^2}{4\pi\,r^2}$$

zukommt, so ist die Wahrscheinlichkeit des obigen Ereignisses für dieses Gebiet von P gleich

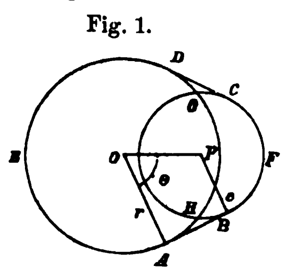
$$\Pi_1 = \frac{(r-c)^3\,c^2}{r^5}. \tag{5}$$

β) Wird die Entfernung der Punkte P und O grösser als $r-c$, so schneiden sich die Oberflächen der beiden Kugeln, Fig. 1.

Wird die Entfernung OP mit x bezeichnet, so ist die Wahrscheinlichkeit einer derartigen Lage von P ausgedrückt durch

$$\frac{4\pi\, x^2\, dx}{{}^4/_3\pi\, r^3} = \frac{3x^2\, dx}{r^3}. \qquad 6)$$

Fig. 1.



Um nun die Wahrscheinlichkeit einer Geraden zu finden, welche beide Kugelflächen schneidet, muss die Menge solcher Geraden bestimmt werden, und diese ergibt sich durch folgende Betrachtung.

Bezeichnen $N(O)$, $N(P)$ die Mengen der Geraden, welche die respectiven Kugelflächen schneiden, so zählt die Summe $N(O) + N(P)$ alle Geraden, welche die durch den Durchschnitt der beiden Kugeln erzeugte Oberfläche *GEHFG* treffen, mit der Bemerkung jedoch, dass in der genannten Summe die Geraden, welche beide Kugelflächen zugleich schneiden [ihre Anzahl sei $N(O,P)$], doppelt gezählt erscheinen, weil sie sowohl in $N(O)$ als in $N(P)$ auftreten, während sie in der damit verglichenen Anzahl nur einmal vorkommen; es ist daher

$$N(O) + N(P) = N(GEHFG) + N(O,P).$$

Die Fläche *GEHFG* wird aber offenbar von eben so vielen Geraden geschnitten als diejenige convexe Fläche *ABFCDEA*, welche durch die Kugelflächen und die ihnen gemeinsam umschriebene Kegelfläche gebildet wird. Mithin ist weiter

$$N(O,P) = N(O) + N(P) - N(ABFCDEA),$$

wobei für die Anzahlen rechter Hand einfach die bezüglichen Oberflächen zu setzen sind. Führt man dabei den durch die Figur verdeutlichten Winkel θ ein, so ist

$$N(O) = 4\pi\, r^2, \qquad N(P) = 4\pi\, c^2,$$

$$N(ABFCDEA) = 4\pi r^2 \cos^2\frac{\theta}{2} + 4\pi c^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + \pi(r^2 - c^2)\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

folglich die gesuchte Anzahl

$$N(O,P) = 4\pi r^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + 4\pi c^2 \cos^2\frac{\theta}{2} - \pi(r^2 - c^2)\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass eine Gerade, welche die Kugel

O schneidet, auch die Kugel P trifft, ist nun durch den Quotienten $\frac{N(O,P)}{4\pi r^2}$ dargestellt.

Integrirt man das Product aus diesem Quotienten und dem Ausdrucke (6), nachdem darin die Variable x durch θ ersetzt worden, zwischen den Grenzen $\theta = 0$ und $\theta = \arccos\frac{r-c}{r}$, so erhält man als Resultat die Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses auf dem Werthgebiet von $x=r-c$ bis $x=r$, nämlich

$$\Pi_2 = \frac{3(r-c)^3}{4r^5}\int_0^{\arccos\frac{r-c}{r}} \frac{\sin\theta}{\cos^4\theta}\left\{2(r^2+c^2)-(r^2-c^2)\frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta}\right\}d\theta$$

$$= \frac{1}{16r^5}\{44r^2c^3-51rc^4+17c^5\}. \qquad 7)$$

Die Summe der Ausdrücke (5) und (7) gibt endlich die vollständige Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Entfernung der beliebig gezogenen Geraden von dem willkürlich angenommenen Punkte kleiner ist als c:

$$\Pi = \frac{1}{16r^5}\{16r^3c^2-4r^2c^3-3rc^4+c^5\}. \qquad 8)$$

Die zweite Annahme, $c > r$, führt nach einer unwesentlich geänderten Rechnung zu dem nämlichen Resultate.

Es ist nun auch möglich, für beliebige Grenzen von c, z. B. c_1 und c_2, die Wahrscheinlichkeit anzugeben; sie ist durch die Differenz $\overset{c=c_2}{\Pi} - \overset{c=c_1}{\Pi}$ dargestellt. So ist insbesondere

$$\overset{r}{\Pi}-\overset{0}{\Pi}=\frac{5}{8}, \quad \overset{2r}{\Pi}-\overset{r}{\Pi}=\frac{3}{8}, \quad \overset{2r}{\Pi}-\overset{0}{\Pi}=1.$$

Das nach c genommene Differential von Π drückt die Wahrscheinlichkeit aus, dass die Entfernung der Geraden von dem Punkte zwischen den benachbarten Grenze c und $c+dc$ enthalten ist; demnach ist der Mittelwerth dieser Entfernung:

$$M_c = \int_0^{2r} c\,d\Pi = \frac{1}{16r^5}\int_0^{2r}(32r^3c^2-12r^2c^3-12rc^4+5c^5)\,dc = \frac{13}{15}r. \qquad 9)$$

4. Eine Ebene sei bestimmt durch die Länge des Lothes $OA = p$, welches vom Ursprunge eines rechtwinkligen Raum-

coordinatensystems auf dieselbe gefällt wird, und durch die Winkelcoordinaten θ, φ des Lothes im Sinne von Nr. 1. Dann soll unter einer willkürlich gelegten Ebene eine solche verstanden werden, welche zu einer beliebigen Werthcombination der Variabeln p, θ, φ gehört. Um alle Ebenen zu erschöpfen, hat man θ alle Werthe von 0 bis π, φ alle Werthe von 0 bis 2π (oder umgekehrt) und p alle positiven Werthe zu ertheilen.

Diejenigen Ebenen, welche zu den Werthverbindungen θ, φ und $\pi - \theta$, $\pi + \varphi$ gehören, machen in ihrer Gesammtheit ein System paralleler Ebenen aus; da ferner die Lothe, welche den Werthverbindungen von θ und φ entsprechen, ein Bündel von Geraden um den Ursprung O ergeben, so setzt sich die Gesammtheit aller willkürlich gelegten Ebenen aus Systemen paralleler Ebenen zusammen, welche die Geraden eines Bündels rechtwinklig schneiden.

Ein Element dieser Gesammtheit wird durch jene Ebenen gebildet, deren Argumente zwischen den unendlich nahen Grenzen p und $p + dp$, θ und $\theta + d\theta$, φ und $\varphi + d\varphi$ enthalten sind. Ein Mass dafür ist leicht zu finden, indem die Menge der Strahlen, deren Winkelcoordinaten innerhalb der bemerkten Grenzen liegen, nach früherem durch das Product $\sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ gemessen wird; und da jeder dieser Strahlen auf der Strecke zwischen p und $p + dp$ von dp Normalebenen getroffen wird, so ist

$$dE = dp \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \tag{10}$$

das verlangte Mass.

Um die Gesammtheit aller Ebenen zu bestimmen, welche eine convexe, geschlossene Fläche schneiden, wähle man den Ursprung O innerhalb des durch die Fläche begrenzten Raumes und betrachte zunächst Ebenen von bestimmter Stellung oder mit constantem θ und φ; sie treffen das gemeinsame Loth innerhalb der Strecke P, welche die tangirende unter ihnen darauf abschneidet; die Integration des Ausdruckes 10) in Bezug auf p gibt also $$P \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$ und erstreckt man sie nun noch über alle Strahlen, so ergibt sich das verlangte Mass:

$$E = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \tag{11}$$

Einfacher wird der Ausdruck für eine Rotationsfläche, wenn man die Z-Axe mit der Rotationsaxe coincidiren lässt; dann ist P unabhängig von φ, daher

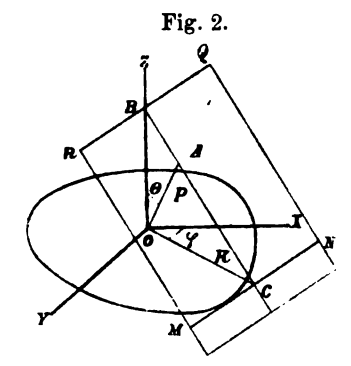
$$E = 2\pi \int_0^\pi P \sin\theta \, d\theta \qquad 12)$$

Das Integral rechter Hand bezieht sich nunmehr auf die Meridiancurve und ihre Tangenten.

Die Grösse E hat die Bedeutung einer für die Fläche charakteristischen Länge.

Wir gehen nun daran, die Ebenen zu zählen, welche eine ebene Figur mit convexer Begrenzung schneiden. Den Ursprung wählen wir innerhalb der Figur, die Z-Axe normal zu ihrer Ebene. Wird die ebene Eigur als Grenze einer convexen, geschlossenen Fläche aufgefasst, so sind die Berührungsebenen ihres Umfangs die Tangentialebenen dieser Fläche. Sei $MNQR$, Fig. 2, eine solche Tangentialebene, OA das zu ihr gefällte Loth; ihre Schnittlinie MN mit der Ebene der Figur ist Tangente an den Umfang der letzteren. Die Ebene AOZ schneidet die Tangentialebene nach der Geraden BC, die Ebene der Figur längs der Geraden OC, welch letztere ein Loth ist zur Tangente MN. Wird wie oben $OA = P$ gesetzt, so ist die verlangte Anzahl gegeben durch

Fig. 2.



$$E = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P \sin\theta \, d\theta \, d\varphi;$$

nun ist aber, wenn $OC = R$ geschrieben wird, wegen $P = R \sin\theta$:

$$E = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R \sin^2\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

und da R unabhängig ist von θ, weiter

$$E = \int_0^\pi \sin^2\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} R \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} R \, d\varphi;$$

das noch übrige Integral drückt aber die Länge des Umfangs der

Figur aus, so dass, wenn dieser mit L bezeichnet wird, schliesslich

$$E = \frac{\pi}{2} L. \qquad 13)$$

Daraus ergibt sich in einfacher Weise die Anzahl der Ebenen, welche eine begrenzte Gerade von der Länge l schneiden; man kann nämlich die Gerade als Grenze einer convex begrenzten ebenen Figur, etwa einer Ellipse mit verschwindender Nebenaxe ansehen. Wird der Umfang dieser Figur mit L bezeichnet, so hat man $L = 2l$ zu setzen und erhält so

$$E = \pi l \qquad 14)$$

5. Die Ergebnisse des vorigen Abschnittes sollen zunächst zur Lösung des folgenden Problems verwendet werden: Es ist die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass eine beliebige unter den Ebenen, welche ein Rotationsellipsoid schneiden, *a*) den Äquator trifft; *b*) die Pole trennt.

Werden die Anzahlen der Ebenen, welche das Ellipsoid, seinen Äquator, seine Axe schneiden, mit E, E', E'' beziehungsweise bezeichnet, so hat man für die geforderten Wahrscheinlichkeiten die Ausdrücke

$$\varpi' = \frac{E'}{E}, \quad \varpi'' = \frac{E''}{E}.$$

Zunächst ist, zufolge der Gleichung 12),

$$E = 2\pi \int_0^{\pi} P \sin\theta \, d\theta;$$

wählt man aber den Mittelpunkt der Meridianellipse als Ursprung, so kann dafür geschrieben werden:

$$E = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} P \sin\theta \, d\theta.$$

Nun ist P als Leitstrahl der auf den Mittelpunkt bezogenen Fusspunktcurve der Ellipse, deren Halbaxen mit a, b bezeichnet werden mögen, durch die Gleichung

$$P^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta \quad \text{oder} \quad P^2 = a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta$$

bestimmt, je nachdem das Ellipsoid ein oblonges oder ein abge-

plattetes ist. Mit Unterscheidung dieser beiden Fälle hat man also ($a^2 - b^2 = c^2$ gesetzt):

$$E = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta} \sin\theta \, d\theta = 2\pi\left(a + \frac{b^2}{c} l. \frac{a+c}{b}\right),$$

beziehungsweise

$$E = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta} \sin\theta \, d\theta = 2\pi\left(b + \frac{a^2}{c} \arcsin \frac{c}{a}\right)^1.$$

Ferner hat man, auf Grund von Gleichung 13),

$$E' = \pi^2 b \quad \text{oder} \quad E' = \pi^2 a,$$

dann zufolge der Gleichung 14),

$$E'' = 2\pi a \quad \text{oder} \quad E'' = 2\pi b.$$

Mit Benützung all' dieser Werthe ergeben sich die verlangten Wahrscheinlichkeiten u. zw. für ein oblonges sowohl als für das abgeplattete Ellipsoid

$$\tilde{\omega}' = \frac{\pi b}{2\left(a + \frac{b^2}{c} l. \frac{a+c}{b}\right)}, \text{ beziehungsweise } = \frac{\pi a}{2\left(b + \frac{a^2}{c} \arcsin \frac{c}{a}\right)};$$

$$\tilde{\omega}'' = \frac{a}{a + \frac{b^2}{c} l. \frac{a+c}{b}}, \quad " \quad = \frac{b}{b + \frac{a^2}{c} \arcsin \frac{c}{a}}.$$

Für $a = b$ und $c = o$ erhält man die auf die Kugel bezüglichen Wahrscheinlichkeiten der betreffenden Ereignisse, nämlich

$$\tilde{\omega}' = \frac{\pi}{4}, \quad \tilde{\omega}'' = \frac{1}{2}.$$

6. Aus der Gesammtheit der Ebenen, welche eine convexe geschlossene Fläche schneiden, werden zwei Ebenen willkürlich herausgegriffen; es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass ihre Schnittlinie die Fläche schneidet.

Wird das nach Nr. 4 zu berechnende Mass für die Gesammtheit aller die Fläche schneidenden Ebenen mit E bezeichnet, so

[1] Wird $a=b=r$ und $c=o$ gesetzt, so gelten beide Ausdrücke für eine Kugel vom Halbmesser r und verwandeln sich in $4\pi r$, von welchem Werthe für E später wiederholt Gebrauch gemacht ist.

drückt der Quotient

$$\frac{dp \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{E}$$

die Wahrscheinlichkeit aus, dass die erstgewählte Ebene dem durch die Werthe p, θ, φ gekennzeichneten Elemente jener Gesammtheit angehört.

Soll nun das erwartete Ereigniss eintreffen, so muss die zweite Ebene die erste innerhalb ihres Schnittes mit der Fläche treffen, und die Wahrscheinlichkeit dafür ist, wenn mit L der Umfang des Schnittes bezeichnet wird, durch

$$\frac{\frac{1}{2}\pi L}{E}$$

gegeben.

Daraus resultirt für die verlangte Wahrscheinlichkeit der allgemeine Ausdruck

$$w = \frac{\pi}{2E^2}\iiint L \, dp \sin\theta \, d\theta \, d\varphi, \tag{15}$$

worin die Integration über alle Ebenen zu erstrecken ist, welche die gegebene Fläche schneiden.

Auf die Kugel angewendet, hat man

$$L = 2\pi\sqrt{r^2 - p^2},$$

$$\iiint L \, dp \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi\int_0^r\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2 - p^2} \, dp \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi^3 r^2,$$

$$E = 4\pi r,$$

mithin

$$w = \frac{\pi^2}{16}.$$

Mit der hier berechneten Wahrscheinlichkeit steht der mittlere Umfang[1] der Fläche in einfachem Zusammenhange;

[1] Der Umfang der Fläche als Umfang eines ebenen Schnittes derselben definirt.

derselbe ist nämlich durch die Gleichung

$$M_L = \frac{1}{E}\iiint L\, dp \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \qquad 16)$$

bestimmt; vergleicht man diese mit der Gleich. 15), so ergibt sich die Beziehung:

$$w = \frac{\pi M_L}{2E}, \qquad 17)$$

so dass mit einer der Grössen w, M_L auch die andere ermittelt ist. Vorhin wurde für die Kugel w berechnet; daraus erhält man den mittleren Umfang der Kugel

$$M_L = \frac{\pi^2 r}{2}.$$

7. Aus der Gesammtheit der Ebenen, welche eine convexe geschlossene Fläche schneiden, werden drei Ebenen beliebig herausgegriffen; es ist die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass der gemeinschaftliche Punkt dieser Ebenen innerhalb der Fläche liegt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erstgewählte Ebene dem durch die Werthe p, θ, φ charakterisirten Element der Gesammtheit aller die Fläche schneidenden Ebenen angehört, ist

$$\frac{dp \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{E}; \qquad \alpha)$$

wird ferner der Umfang des Schnittes, den diese Ebene mit der Fläche ergibt, mit L bezeichnet, so begegnet die zweite Ebene der ersten innerhalb dieses Schnittes mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\pi L}{2E}; \qquad \beta)$$

und das erwartete Ereigniss wird nun eintreffen, wenn die dritte Ebene die durch die beiden ersten gebildete Sehne der Fläche schneidet. Mit der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit dieses dritten einfachen Ereignisses wollen wir uns nun beschäftigen.

Wählt man in der Schnittfigur der ersten Ebene, nach dem Vorgange in Fig. 2, einen Punkt O' als Ursprung eines rechtwinkeligen Raumcoordinatensystems, dessen Z-Axe zu der Ebene normal ist, und hebt unter den Ebenen, welche die Schnittfigur treffen, diejenigen heraus, welche in Bezug auf das neue Axensystem durch Werthe zwischen p' und $p'+dp'$, θ' und $\theta'+d\theta'$, φ' und $\varphi'+d\varphi'$ charakterisirt sind, so kommt einer Ebene dieses Elements die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{dp'\,\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'}{\frac{\pi}{2}L} \qquad \gamma')$$

zu. Die Secanten der Schnittcurve, welche sich auf solche Weise ergeben, sind bezüglich des Axenkreuzes $XO'Y$ durch das Loth $p''=\frac{p'}{\sin\theta'}$ aus dem Punkte O' und die Neigung φ' dieses Lothes gegen $O'X$ bestimmt, und ist C die Länge der auf einer solchen Secante ausgeschnittenen Sehne, so ist

$$\frac{\pi C}{E} \qquad \gamma'')$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die dritte Ebene diese Sehne schneidet.

Das Product der Ausdrücke $\gamma')$ und $\gamma'')$, auf dem Werthgebiete der Variabeln p'', θ', φ' integrirt, liefert die Wahrscheinlichkeit, dass für irgend eine günstige Lage der zweiten Ebene auch die dritte Ebene den Forderungen der Aufgabe genügt, nämlich

$$\frac{2}{EL}\int\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} C\,dp''\,\sin^2\theta'\,d\theta'\,d\varphi' = \frac{\pi}{EL}\int\int_0^{2\pi} C\,dp''\,d\varphi',$$

wobei die Grenzen von p'' durch die Tangenten der Schnittfigur vorgeschrieben sind. Da aber der Quotient

$$\frac{\int\int_0^{2\pi} C\,dp''\,d\varphi'}{L}$$

als mittlere Länge der Sehnen der Schnittfigur gleich ist $\frac{\pi F}{L}$, wenn F ihren Flächeninhalt bezeichnet, so verwandelt sich der obige Ausdruck in

$$\frac{\pi^2 F}{EL}. \qquad \gamma)$$

Die Wahrscheinlichkeit, um die gefragt wird, ergibt sich nun, wenn man das Product der einfachen Wahrscheinlichkeiten α), β), γ) integrirt und diese Integration über alle Lagen der ersten Ebene ausdehnt, soweit sie die Fläche schneidet; man erhält so:

$$W = \frac{\pi^3}{2E^3}\int_0^P\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F\, dp \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Integrirt man das Product Fdp, welches ein Element des von der Fläche eingeschlossenen Raumes I darstellt, für irgend ein Werthepaar θ, φ und das supplementäre $\pi-\theta, \pi+\varphi$, d. h. zwischen irgend zwei parallelen Tangentialebenen der Fläche, so erhält man I; daher ist

$$\int_0^P\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F\, dp \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{2} I \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi I. \qquad \delta)$$

Mit dieser Bemerkung wird endlich

$$W = \frac{\pi^4 I}{E^3}. \qquad 18)$$

So hat man, wenn unter den eine Kugel schneidenden Ebenen drei willkürlich herausgegriffen werden, mit der Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{\frac{4}{3}\pi^5 r^3}{(4\pi r)^3} = \frac{\pi^2}{48}$$

zu erwarten, dass ihr gemeinschaftlicher Punkt innerhalb der Kugel sich befindet.

8. In dem von einer convexen geschlossenen Fläche begrenzten Raume werden zwei Punkte beliebig angenommen;

es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass eine beliebige von den Ebenen, welche die Fläche schneiden, die Punkte trennt.

Diese Aufgabe lässt zwei verschiedene Lösungen zu, je nachdem man die Ebene zuerst und dann die Punkte gewählt denkt, oder umgekehrt.

a) Wie in früheren Fällen drückt der Quotient

$$\frac{dp \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{E}$$

die Wahrscheinlichkeit einer besonderen Lage der Ebene aus. Theilt die Ebene in dieser Lage den von der Fläche eingeschlossenen Raum I in die Segmente Σ, Σ', so ist

$$\frac{2\Sigma\Sigma'}{I^2}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die nachher gewählten zwei Punkte zu verschiedenen Seiten der Ebene liegen.

Die vollständige Wahrscheinlichkeit des in Rede stehenden Ereignisses ist demnach

$$\omega = \frac{2}{EI^2}\iiint \Sigma\Sigma' \, dp \sin\theta \, d\theta \, d\varphi, \qquad 19)$$

wobei die Integration über alle die Fläche schneidenden Ebenen auszudehnen ist.

b) Angenommen, die beiden willkürlich gewählten Punkte A, B hätten die Entfernung z; sind dA, dB die an die Punkte A, B anstossenden Elemente des von der Fläche eingeschlossenen Raumes I, so hat die hervorgehobene gegenseitige Lage der Punkte die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{dA \, dB}{I^2},$$

und die beliebig herausgegriffene Ebene trennt die Punkte oder schneidet ihre Verbindungslinie $AB = z$ mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\pi z}{E}.$$

Auf diesem Wege ergibt sich also

$$\omega = \frac{\pi}{EI^2}\iint z\, dA\, dB, \tag{20}$$

in welchem Ausdrucke beide Integrationen über den Raum I auszudehnen sind.

Wir wollen die beiden Lösungen an dem besonderen Falle der Kugel zur Ausführung bringen.

ad *a)* Die Segmente, in welche die Kugel durch eine Ebene, deren Entfernung vom Mittelpunkte p ist, getheilt wird, sind

$$\Sigma = \frac{\pi}{3}(2r^3-3r^2p+p^3), \quad \Sigma' = \frac{\pi}{3}(2r^3+3r^2p-p^3);$$

durch Anwendung der Formel 19) erhält man

$$\omega = \frac{1}{32\pi r^7}\int_0^r\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(4r^6-9r^4p^2+6r^2p^4-p^6)dp \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$
$$= \frac{1}{8r^7}\int_0^r(4r^6-9r^4p^2+6r^2p^4-p^6)dp = \frac{9}{35}.$$

ad *b)* Liegt Punkt A in der Entfernung x vom Mittelpunkte der Kugel, so ist das anstossende Element eine Hohlkugel vom inneren Halbmesser x und der Dicke dx, daher

$$dA = 4\pi x^2 dx.$$

Ist ferner z die Entfernung des zweiten Punktes, B, von A, so ist das an B anstossende Element des Kugelraumes, so lange $z<r-x$, ebenfalls eine Hohlkugel mit den Dimensionen z und dz; folglich

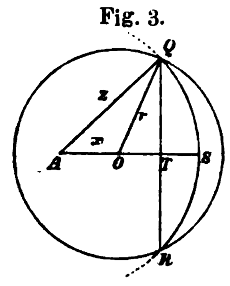


Fig. 3.

$$dB = 4\pi z^2 dz, \quad \text{wenn } z<r-x;$$

wenn dagegen $z>r-x$ wird, so schneidet die aus A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $AQ=z$ beschriebene Kugelfläche die gegebene Kugel (Fig. 3), und wird die Oberfläche des auf der ersteren ausgeschnittenen Segments mit u bezeichnet, so ist zunächst

$dB = udz$, und da

$$u = 2\pi z . ST = \pi z \frac{r^2 - (z-x)^2}{x}$$

ist, so hat man

$$dB = \pi z \frac{r^2 - (z-x)^2}{x} dz, \quad \text{wenn } z > r - x.$$

Durch Anwendung der Formel 20) ergibt sich also

$$\omega = \frac{9}{16 r^7} \int_0^r x^2 dx \left[\int_0^{r-x} 4z^3 dz + \int_{r-x}^{r+x} z^2 \frac{r^2 - (z-x)^2}{x} dz \right]$$

$$= \frac{3}{80 r^7} \int_0^r [15 r^4 x^2 + 10 r^2 x^4 - x^6] dx = \frac{9}{35}.$$

Mit der Wahrscheinlichkeit, dass zwei innerhalb einer convexen, geschlossenen Fläche willkürlich angenommene Punkte durch eine beliebige Ebene von einander getrennt werden, steht die mittlere Entfernung jener Punkte in enger Beziehung. Mit den oben gebrauchten Bezeichnungen ist nämlich der Mittelwerth der Entfernungen aller Punktepaare innerhalb der Fläche durch

$$M_s = \frac{\int\int z dA dB}{I^2}$$

gegeben. Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem für ω in Gleichung 20) erhaltenen, so ergibt sich die Beziehung

$$\omega = \frac{\pi M_s}{E}, \tag{21)}$$

und im Hinblicke auf Gleichung 19) weiter

$$M_s = \frac{2}{\pi I^2} \int\int\int \Sigma\Sigma' \, dp \sin\theta \, d\theta \, d\varphi, \tag{22)}$$

darin die Integration über alle die Fläche schneidenden Ebenen ausgedehnt.

Vermöge der Formel 21) ist es möglich, aus einer der Grössen ω, M_s die andere zu berechnen. So ergibt sich mittelst

des oben für die Kugel gefundenen Werthes $\omega = \frac{9}{35}$ die Gleichung

$$\frac{9}{35} = \frac{\pi M_z}{4\pi r},$$

aus welcher die mittlere Entfernung zweier Punkte innerhalb der Kugel

$$M_z = \frac{36}{35} r$$

folgt.

9. Aus den eine convexe geschlossene Fläche schneidenden Ebenen und Geraden wird eine Ebene und eine Gerade beliebig herausgegriffen; es ist die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene innerhalb der Fläche sich befindet.

Die Lösung kann in zweifacher Weise erfolgen, je nachdem man die Ebene oder die Gerade zuerst wählt.

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ebene einem näher bezeichneten Elemente der Gesammtheit angehört, ist

$$\frac{dp \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{E},$$

und bezeichnet F den Flächeninhalt des Schnittes, welchen die Ebene mit der Fläche ergibt, so ist durch

$$\frac{2F}{O}$$

die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt, dass die nachher angenommene Gerade die Ebene innerhalb dieses Schnittes trifft.

Aus diesen einfachen Wahrscheinlichkeiten ergibt sich die vollständige Wahrscheinlichkeit des obigen zusammengesetzten Ereignisses:

$$w = \frac{2}{OE} \iiint F \, dp \sin\theta \, d\theta \, d\varphi; \qquad a)$$

beachtet man aber die Gleichung δ) in Nr. 7, der zufolge der Werth des dreifachen Integrals gleich $2\pi I$ ist, so wird

$$w = \frac{4\pi I}{OE}. \qquad 23)$$

Da das Product OE die Schnittpunkte aller Ebenen und Geraden zählt, welche die Fläche schneiden, so gibt der Zähler $4\pi I$ ein Mass ab für die Anzahl derjenigen von diesen Schnittpunkten, welche innerhalb der Fläche enthalten sind.

b) Den Ausführungen in Nr. 1 zufolge ist

$$\frac{d\Omega \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{\frac{\pi}{2} O}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die herausgegriffene Gerade dem durch die Werthe θ, φ und die Lage von $d\Omega$ bestimmten Elemente der Gesammtheit angehört. Wenn nun auf den Geraden dieses Elementes Sehnen von der Länge C abgeschnitten werden, so ist

$$\frac{\pi C}{E}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die angenommene Gerade durch die nachher gewählte Ebene innerhalb der Fläche getroffen wird.

Demnach ist

$$w = \frac{2}{OE} \iint_0^\pi \int_0^\pi C \, d\Omega \sin\theta \, d\theta \, d\varphi; \qquad b)$$

da aber $C d\Omega$ ein Element des von der Fläche begrenzten Raumes darstellt und die bei constantem θ und φ über Ω ausgedehnte Integration den ganzen Raum I ergibt, so ist

$$\iint_0^\pi \int_0^\pi C \, d\Omega \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi I;$$

daher wie oben

$$w = \frac{4\pi I}{OE}.$$

Für eine Kugel liefert diese Formel $w = \frac{1}{3}$, so dass von den Schnittpunkten aller Ebenen und Geraden, welche eine Kugel schneiden, ein Drittheil innerhalb der Kugel und zwei Drittheile ausserhalb derselben sich befinden.

Den beiden Lösungsmethoden des vorliegenden Problems der Wahrscheinlichkeitsrechnung entsprechen zwei Aufgaben

über Mittelwerthe und zwar: den mittleren Flächeninhalt der ebenen Schnitte einer convexen, geschlossenen Fläche und die mittlere Länge ihrer Sehnen[1] zu bestimmen.

Der erste dieser beiden Werthe ist nämlich durch die Gleichung

$$M_F = \frac{1}{E}\iiint F\,dp \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

dargestellt; vergleicht man diese mit Gleichung *a)*, so folgt für w der Ausdruck:

$$w = \frac{2 M_F}{O}, \tag{24}$$

welcher wieder, mit jenem in Gleichung 23) verglichen,

$$M_F = \frac{2\pi I}{E} \tag{25}$$

ergibt. Vermöge der Gleichung 24) kann die eine der Grössen w, M_F durch die andere ausgedrückt werden.

Die mittlere Länge der Sehnen ist durch den Quotienten

$$M_C = \iiint C d\Omega \sin\theta\, d\theta\, d\varphi : \iint \Omega \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{2}{\pi O}\iiint C d\Omega \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

ausgedrückt; durch Verbindung dieser Gleichung mit Gleichung *b)* erhält man

$$w = \frac{\pi M_C}{E} \tag{26}$$

und daraus durch Vergleichung mit Gleichung 23):

$$M_C = \frac{4I}{O}\ . \tag{27}$$

Die erste dieser Gleichungen gestattet, aus einer der Grössen w, M_C die andere zu berechnen.

---

[1] Die Sehne als Abschnitt definirt, welchen die Fläche auf einer sie schneidenden Geraden bildet.

10. Aus den Gleichungen 25) und 27) ergeben sich zwei bemerkenswerthe **Ausdrücke für den Inhalt des von einer convexen, geschlossenen Fläche von sonst beliebiger Form eingeschlossenen Raumes**, nämlich:

$$I = \frac{1}{2\pi} M_F E \quad \text{und} \quad I = \frac{1}{4} O M_C. \tag{28}$$

Hiernach ist der Inhalt einerseits gleich dem mittleren Flächeninhalte aller ebenen Schnitte der Fläche multiplicirt mit dem Halbmesser eines Kreises vom Umfange E, anderseits gleich dem vierten Theile der Oberfläche multiplicirt mit der mittleren Länge der Sehnen.

Die Gleichungen 28) führen weiter zu der Beziehung

$$\frac{M_F}{O} : \frac{M_C}{E} = \frac{\pi}{2}, \tag{29}$$

wornach das Doppelverhältniss aus dem mittleren Flächeninhalt der ebenen Schnitte und der Oberfläche einerseits und der mittleren Länge der Sehnen und der charakteristischen Länge E anderseits bei allen convexen, geschlossenen Flächen den nämlichen Werth $\frac{\pi}{2}$ besitzt.

Eine ebene Figur mit convexer Begrenzung kann immer als Grenze einer convexen, geschlossenen Fläche angesehen werden. Bei dem Grenzübergange verschwinden zwar die Mittelwerthe M_F und M_C, ihr Quotient aber nähert sich dabei einer festen Grenze.

Wird nämlich der Flächeninhalt der ebenen Figur mit F, die Länge ihres Umfanges mit L bezeichnet, so hat man bei der oben berührten Auffassung

$$O = 2F, \qquad E = \frac{\pi}{2} L$$

zu setzen und erhält mit Rücksicht auf Gleichung 29)

$$\lim \frac{M_F}{M_C} = \frac{2F}{L}. \tag{30}$$

So nähert sich beispielsweise bei einem abgeplatteten Ellipsoid, wenn die kleinere Axe der Meridianellipse im Verschwinden begriffen ist, der Quotient $\frac{M_F}{M_C}$ der Grenze a, d. i. dem Halbmesser des Äquatorkreises, in welchen das Ellipsoid zusammensinkt.

11. Die in Nr. 9 entwickelten Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerthe mögen beispielsweise für den gleichseitigen Kegel und den Würfel berechnet werden.

Fig. 4.

α) Wenn r der Basishalbmesser des Kegels ist, so hat man

$$O = 3\pi r^2, \qquad I = \frac{1}{3}\pi r^3\sqrt{3};$$

ferner ergibt sich mit Beziehung auf Fig. 4, welche einen Axenschnitt des Kegels darstellt, unter Anwendung der Gleichung 12):

$$E = 2\pi\left\{\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \rho\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\sin\theta\, d\theta + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \rho\cos(\pi - \theta)\sin\theta\, d\theta\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\pi r(3\sqrt{3} + 2\pi).$$

Mit Benützung dieser drei Werthe erhält man 1. die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Ebene und eine willkürlich angenommene Gerade innerhalb des Kegels sich schneiden:

$$w = \frac{4\sqrt{3}}{9\sqrt{3} + 6\pi} = 0{\cdot}201\ldots;$$

2. den mittleren Flächeninhalt der ebenen Schnitte des Kegels:

$$M_F = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + 2\pi}\pi r^2 = 0{\cdot}302\ldots\pi r^2;$$

3. die mittlere Länge der Sehnen seiner Oberfläche:

$$M_C = \frac{4\sqrt{3}}{9} r = 0\cdot770 \ldots r.$$

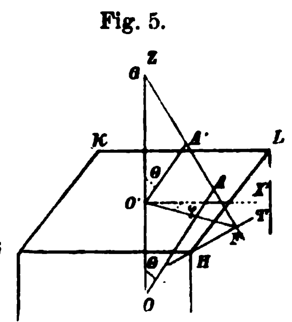
β) Aus der Seite s des Würfels berechnet sich zunächst

$$O = 6s^2, \qquad I = s^3.$$

Behufs Berechnung von E wähle man den Mittelpunkt O des Würfels als Ursprung und das zu einer Würfelseite gefällte Loth als Z-Axe (Fig. 5).

Ist HT die Spur einer Berührungsebene auf der Ebene von $HIKL$, G der Schnittpunkt der Berührungsebene mit der Z-Axe, so führe man aus dem Mittelpunkte O' von $HIKL$ die Senkrechte $O'F = p$ auf HT, verbinde F mit G und fälle auf letztere Gerade aus O' und O die Lothe $O'A' = P'$ und $OA = P$. Dann ergeben sich unmittelbar die Beziehungen

Fig. 5.



$$P' = p \sin\theta,$$

$$P = P' + \frac{s}{2}\cos\theta = p\sin\theta + \frac{s}{2}\cos\theta;$$

mithin ist

$$E = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\left(p\sin\theta + \frac{s}{2}\cos\theta\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} p\,d\varphi + 2\pi s\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\, d\theta;$$

da aber $\int_0^{2\pi} p\,d\varphi$ den Umfang des Quadrates $HIKL$ ausdrückt, so ist weiter

$$E = 8s\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\, d\theta + 2\pi s\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = 3\pi s.$$

Aus den Werthen von O, I, E berechnet sich 1) die Wahrscheinlichkeit, dass eine Ebene und eine Gerade innerhalb des Würfels sich schneiden:

$$w = \frac{2}{9};$$

2) der mittlere Inhalt der ebenen Schnitte des Würfels:

$$M_F = \frac{2}{3} s^2;$$

3) die mittlere Länge der Sehnen seiner Oberfläche:

$$M_C = \frac{2}{3} s.$$

Über Resorcinfarbstoffe.

Von **P. Weselsky** und **R. Benedikt.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. November 1884.)

Wir haben im Anschluss an eine Untersuchung über einige farbige Derivate der Resorcinäther[1] vor einigen Jahren das Studium der beiden merkwürdigen, als „Weselsky's Diazoresorcin und Diazoresorufin" bekannten Körper wieder aufgenommen und bereits eine Reihe interessanter Daten gesammelt; es ist uns jedoch bisher nicht gelungen, die Arbeit vollständig zum Abschlusse zu bringen. Die Mittheilungen, welche Heinrich Brunner und Charles Krämer[2] vor Kurzem über denselben Gegenstand gemacht haben, zwingen uns, die bis heute gefundenen Resultate zu veröffentlichen, wobei wir gleich bemerken, dass dieselben in den meisten Punkten von den Angaben von Brunner und Krämer abweichen.

Auch wir sind der Ansicht und haben dieselbe auch schon ausgesprochen,[3] dass die Formeln, welche Weselsky zur Zeit der ersten Entwicklung der Structurtheorie aufgestellt hat, den Thatsachen durchaus nicht mehr entsprechen, sind aber auch heute noch nicht in der Lage, Näheres über die Constitution dieser Farbstoffe auszusagen. Wir können uns aber ebensowenig mit den jeder wissenschaftlichen Basis entbehrenden Formeln von Brunner und Krämer befreunden. Wir gehen im Folgenden umsoweniger in eine genaue Analyse einer jeden einzelnen ein, als wir, wie wir zeigen werden, schon gegründete Zweifel an der Richtigkeit der von diesen Forschern aufgestellten empirischen Formeln hegen, wobei wir besonders auf unsere Analysen des mit grösster Sorgfalt gereinigten Acetyldiazoresorufins hinweisen.

[1] Monatshefte für Chemie, I., 886.

[2] Berl. Ber. 17. 1847, 1867 und 1875.

[3] l. c. pag. 887. Fussnote.

Unsere Arbeiten sind durch die Herren Bindschedler, Busch & Co. in Basel sehr gefördert worden, indem uns dieselben nicht nur grosse Quantitäten Diazoresorcin und Diazoresorufin zur Verfügung stellten, sondern uns auch werthvolle Mittheilungen über deren Darstellung und Verhalten machten.

Weselsky's Diazoresorcin.

Da wir uns bewusst waren, dass das Diazoresorcin mit den wahren Diazoverbindungen in gar keinem Zusammenhange steht, machten wir den Vorschlag,[1] dasselbe vorläufig als „Weselsky's Diazoresorcin" zu bezeichnen. Brunner und Krämer ziehen dagegen vor, diese Verbindung Azoresorcin zu nennen, obwohl dieser Name von der allgemein gebräuchlichen chemischen Nomenclatur für einen ganz anderen Körper in Anspruch genommen wird. Wir bleiben daher auch noch weiter bei unserer Bezeichnung.

Das Verfahren Weselsky's[2] zur Darstellung des Diazoresorcins kann insoferne etwas abgeändert werden, als man grössere Mengen Resorcin auf einmal verarbeiten und ein im Verhältniss weit geringeres Quantum Äther anwenden kann.

Man löst z. B. 1 Kilo Resorcin in circa 40 Liter Äther.

Wie wir berichtet haben,[3] kann das Weselsky'sche Reagenz, die grüne, mit Salpetrigsäuredämpfen gesättigte Salpetersäure, mit Vortheil durch rothe, rauchende Säure ersetzt werden. Man erhält auf diese Weise ein weit reineres, krystallinisches Diazoresorcin, während dem mit der grünen Säure dargestellten stets beträchtliche Mengen Diazoresorufin beigemengt sind. Zahlreiche Ausbeuteversuche lieferten im Mittel 40—45, zuweilen auch 60 Procent vom angewandten Resorcin.

Der Stickstoff des Diazoresorcins wird nur zum geringsten Theile von der Untersalpetersäure, zum grösseren von der Salpetersäure geliefert, was daraus hervorgeht, dass die in der angewendeten rothe Säuren enthaltene Untersalpetersäure bei weitem nicht genug Stickstoff enthält, um die erhaltene Quantität Farbstoff zu liefern.

---

[1] l. c.

[2] Liebig's Annalen 162. 273.

[3] Monatshefte für Chemie 2. 369. Fussnote.

Es wurden z. B. 10 Grm. Resorcin in 500 CC. Äther gelöst und mit 6 CC. rother Salpetersäure versetzt, welche im Cubikcentimeter 0·0383 Grm. Untersalpetersäure (N_2O_4) enthielt. Die Ausbeute betrug genau 40 Grm. Diazoresorcin. Nehmen wir für dasselbe den von Brunner und Krämer gefundenen niedrigen Stickstoffgehalt von 6·06% als richtig an, so enthalten 4 Grm. Diazoresorcin 0·2424 Grm. Stickstoff, wovon die in 6 CC. der rothen Säure enthaltene Untersalpetersäure nur 0·0465, also kaum den fünften Theil liefern konnte.

Schon daraus folgt, dass die Auffassung von Brunner und Krämer irrig sein müsse, nach welcher sich bei der Darstellung des Diazoresorcins zuerst durch die Einwirkung von salpetriger Säure Nitrosoresorcin bilde, welches sich dann unter Wasseraustritt mit Resorcin vereinige. Dies geht ferner noch daraus hervor, dass das Diazoresorufin, welches seine Entstehung höchst wahrscheinlich einem derartigen Condensationsprocesse verdankt, nicht, wie Weselsky ursprünglich annahm und auch Brunner und Krämer meinen, ein Anhydrid, sondern, wie wir zeigen werden, ein Reductionsproduct des Diazoresorcins ist.

Salze des Diazoresorcins. Brunner und Krämer geben an, dass sich Diazoresorcin und Diazoresorufin „nicht nur mit Basen, sondern auch mit Säuren zu Salzen verbinden.“ Diese Beobachtung ist nicht neu, da wir das Verhalten von Diazoresorcin gegen Salpetersäure und Schwefelsäure bereits beschrieben haben.[1] Die Verbindungen sind so lose, dass sie schon beim Kochen mit Wasser zerfallen, das Diazoresorcin ist somit eine sehr schwache Base. Der basische Charakter nimmt nun bekanntlich durch den Eintritt von Halogenen rasch ab (vergl. z. B. Anilin und Bromaniline) und es erscheint daher ganz unverständlich, wie Brunner und Krämer die beim Bromiren von Diazoresorcin und Diazoresorufin in alkalischer Lösung entstehenden Producte, welche die Behandlung mit Wasser und sogar ein längeres Kochen in alkoholischer Lösung vertragen, ohne Bromwasserstoffsäure abzugeben, als Bromhydrate auffassen können. Es geschieht dies offenbar nur, um auch diese Producte in die willkürlich aufgestellten Formeln zu pressen.

[1] Monatshefte für Chemie. I., 889.

Diazoresorufin.

Diazoresorufin wurde in der Fabrik der Herren Bindschedler, Busch & Co. in grösseren Mengen durch Einwirkung von Nitrosylschwefelsäure auf Resorcin, dargestellt. Die Vorschrift von Brunner und Krämer stimmt ziemlich genau mit dem dabei befolgten Verfahren überein. Auf die Reinigung des Productes, welchem andere Farbstoffe sehr hartnäckig anhaften, wurde die grösste Sorgfalt verwendet.

Die Darstellung des Diazoresorufins aus Resorcin und Nitrosoresorcin nach dem Patente von Bindschedler, Busch & Co.[1] ist weniger vortheilhaft, weil die Bereitung grösserer Mengen des Mononitrosoresorcins auf Schwierigkeiten stösst. Diese Bildungsweise ist aber, wie auch Brunner und Krämer mit Recht hervorheben, theoretisch wichtig, weil dadurch bewiesen wird, dass das Diazoresorufin nicht der von Liebermann[2] aufgestellten Formel entspricht, nach welcher es vom Dinitrosoresorcin abstammen würde.

Aus welchem Grunde die Condensation von Nitrosoresorcin und Resorcin gerade nach dem von Brunner und Krämer gegebenen Schema verlaufen soll, ist uns nicht ersichtlich, und wir haben wohl noch mehr Grund an der Richtigkeit dieser Hypothese zu zweifeln, wenn wir uns vor Augen halten, dass es noch gar nicht erwiesen ist, dass die Nitrosoresorcine wahre Nitrosoverbindungen sind. Sind doch die bisherigen Ansichten über diese Körperclasse durch die schönen Untersuchungen Heinrich Goldschmidt's stark erschüttert worden!

Weselsky, welcher das Diazoresorufin durch Erhitzen von Diazoresorcin mit concentrirter Schwefelsäure auf 210° zuerst darstellte, hielt dasselbe für ein durch Wasseraustritt entstandenes Condensationsproduct des Diazoresorcins und dieser Anschauung schliessen sich auch Brunner und Krämer an.

Wir haben dagegen nachgewiesen, dass das Diazoresorcin durch Reduction in Diazoresorufin übergeht.

Die blaue Lösung von Diazoresorcin in verdünntem Ammoniak nimmt z. B. bei Zusatz von wenig Zinkstaub sofort die

---

[1] Deutsches Pat. 14622 vom 30. December 1880.

Farbe und Fluorescenz der Diazoresorufinlösungen an, versetzt man nun mit Salzsäure, so fällt Diazoresorufin. In dieser Weise dargestellt enthält es häufig noch unreducirtes Diazoresorcin, desshalb verfährt man noch besser so, dass man so lange Zinkstaub hinzufügt, bis die Flüssigkeit in Folge der Bildung von Hydrodiazoresorufin vollständig entfärbt ist. Dann filtrirt man ab, oxydirt durch Einblasen von Luft und fällt mit Salzsäure.

Auch durch Kochen seiner sehr verdünnten ammoniakalischen Lösung mit Natriumbisulfit lässt sich Diazoresorcin in sehr reines Diazoresorufin überführen.

Ähnlich wirken andere alkalische Reductionsgemenge, wie Traubenzucker und kohlensaures Natron, Eisenvitriol und Ammoniak etc.

Saure Reductionsmittel, z. B. Zinn und Salzsäure verwandeln das Diazoresorcin in salzsaures Hydrodiazoresorufin (Weselsky).

Die Umwandlung von Diazoresorcin in Diazoresorufin gelingt sehr gut mit saurer Eisenchlorürlösung. Man kocht 1 Theil Diazoresorcin mit 2 Theilen Eisenchlorür und 10 Theilen rauchender Salzsäure, bis sich alles zu salzsaurem Hydrodiazoresorufin gelöst hat und verdünnt sodann mit Wasser. Nun kommt das bei der Reduction gebildete Eisenchlorid zur Wirkung, es oxydirt die Hydroverbindung zu Diazoresorufin, welches ausfällt.

Man erhält nach diesen verschiedenen Verfahren sehr gute Ausbeuten, meist 80 bis 90% vom angewandten Diazoresorcin.

Diazoresorufin bildet sich ferner in geringer Menge bei der Oxydation von salzsaurem Amidoresorcin mit rothem Blutlaugensalz, neben einem Farbstoff, welcher sich in Ammoniak mit blauer Farbe ohne Fluorescenz löst.

Die Angabe von Brunner und Krämer, dass „hydratisirende Agentien, z. B. verdünnte Alkalien den Hydroazoresorufinäther (Weselsky's Hydrodiazoresorufin) zuerst in Azoresorufin, dann in Azoresorcin (Diazoresorcin) verwandeln, können wir nicht bestätigen. Wir haben nie beobachtet, dass alkalische Lösungen von Diazoresorufin in Diazoresorcin übergehen.

Einwirkung von Zinn und Salzsäure auf Diazoresorufin. Dieser Versuch wurde in der Hoffnung unternommen, dass es gelingen werde, das Diazoresorufin durch energische

Reduction in einfachere Bestandtheile zu zerlegen und dadurch Einblick in seine Constitution zu erlangen.

Kocht man Diazoresorcin oder Diazoresorufin mit Zinn und Salzsäure, so bildet sich zuerst salzsaures Hydrodiazoresorufin, welches beim Erkalten in Nadeln auskrystallisirt. Bei fortgesetztem Kochen kommt man aber schliesslich dahin, dass auch nach dem Erkalten Alles gelöst bleibt. Man verdünnt mit Wasser, fällt das Zinn mit Schwefelwasserstoff aus und kocht nach dem Abfiltriren im Kohlensäurestrome ein.

Beim Erkalten scheidet sich eine grünlichweisse Masse aus, welche aus mikroskopischen durchsichtigen Kügelchen besteht. Dieser Körper löst sich im Wasser sehr leicht auf, concentrirte Salzsäure fällt ihn unverändert aus. Exponirt man seine wässrig-ammoniakalische Lösung der Luft, so färbt sie sich sofort prachtvoll blau. Vollendet man die Oxydation durch Einblasen von Luft, so kann man hernach mit Salzsäure einen schwarzbraunen, amorphen Farbstoff ausfällen, welcher sich in Ammoniak und in concentrirter Schwefelsäure mit blauer Farbe löst und Seide purpurbraun färbt.

Aus den Mutterlaugen des grünlichen Reductionsproductes schieden sich beim weiteren Eindampfen neben neuen Partien desselben Körpers nur ganz geringe Mengen sehr feiner zerfliesslicher Nadeln aus, welche zur weiteren Untersuchung nicht hinreichten.

Eine glatte Spaltung des Diazoresorufins in einfachere Bestandtheile ist uns demnach nicht gelungen.

Verhalten gegen Kalilauge. Kocht man Diazoresorufin mit Kalilauge, so tritt selbst bei ziemlich starker Verdünnung (4—5 Theile Kalihydrat in 100 Theilen Wasser) sehr rasch eine Farbenveränderung ein. Die prachtvoll zinnoberrothe Fluorescenz verschwindet und die Flüssigkeit wird dunkelblau. Beim Ansäuern scheidet sich ein Farbstoff aus, welcher dem bei der Reduction mit Zinn und Salzsäure und Reoxydation des Productes erhaltenen sehr ähnlich ist. Er ist vielleicht mit dem Resorcinblau identisch, welches Benedikt und Julius[1] beim Erhitzen von Resorcin mit salpeterigsaurem Kali erhalten haben.

---

[1] Monatshefte für Chemie. V., 534.

Auch das Diazoresorcin verändert seine Farbe beim Kochen mit verdünnter Kalilauge. Die Lösung wird zuerst intensiver blau, bei weiterem Kochen schmutzig blau und endlich nahezu farblos.

Acetyldiazoresorufin.

Krämer und Brunner erhielten Acetyldiazoresorufin beim Erhitzen von Diazoresorcin mit Essigsäureanhydrid und Natriumacetat. Sie beschreiben es als eine gelbbraune amorphe Masse, die aus keinem Lösungsmittel krystallisirt erhalten werden konnte. Sie haben offenbar ein ganz unreines Product in Händen gehabt.

Auch wir haben Diazoresorcin mit Essigsäureanhydrid und Natriumacetat behandelt. Die Masse wurde nach dem Kochen am Rückflusskühler in Wasser eingegossen, der Niederschlag gesammelt, getrocknet und mit Benzol ausgekocht. Es ging sehr viel Acetyldiazoresorufin in Lösung, während ein Rückstand hinterbleibt, der sich in Alkalien mit carmoisinrother Farbe ohne Fluorescenz löst.

Zur Darstellung von Acetyldiazoresorufin geht man jedoch am besten vom Diazoresorufin selbst aus, indem man 1 Theil desselben mit $^1/_2$ Theil Natriumacetat und 2 Theilen Essigsäureanhydrid kocht. Man giesst in Wasser ein und krystallisirt den Niederschlag aus absolutem Alkohol, Eisessig oder am besten aus Benzol um.

Das Acetyldiazoresorufin besteht aus orangefarbigen glänzenden Schuppen, welche unzersetzt schmelzen und beim vorsichtigen Erhitzen sublimiren. Diese Verbindung ist weit leichter löslich als das Diazoresorcin und Diazoresorufin, viel leichter umzukrystallisiren und zu reinigen. Sie kann daher sehr gut zur Controle der bisher giltigen Formeln der Resorcinfarbstoffe dienen.

Die Analyse ergab für drei Präparate verschiedener Bereitung, von denen das eine aus Alkohol, das zweite aus Benzol und das dritte aus Eisessig krystallisirt war, folgende Zahlen:

	I.	II.	III.
C.....	65·29	65·41	65·45
H	3·74	3·88	3·88
N	5·79	6·62	6·08

Diese Resultate stimmen mit Weselsky's Resorufinformel nicht überein, der Stickstoff ist viel zu niedrig, der Wasserstoff zu hoch gefunden. Noch grösser ist jedoch die Differenz mit den von Brunner und Krämer gegebenen Zahlen und der daraus abgeleiteten Formel, wie aus folgender Zusammenstellung erhellt:

	Gefunden im Mittel	Berechnet für $C_{36}H_{16}(C_2H_3O)_2N_4O_9$ (Weselsky)	Berechnet für $C_{24}H_{14}(C_2H_3O)_2N_2O_7$ (Brunner u. Krämer)
C	65·38	65·39	63·63
H	3·83	3·00	3·78
N	6·49	7·63	5·30

Es unterliegt demnach kaum einem Zweifel, dass die Weselsky'schen Formeln der Resorcinfarbstoffe werden abgeändert werden müssen, wir wollen dies aber nur auf Grund eines ganz ausreichenden analytischen Materiales versuchen, welches uns heute noch nicht vollständig zur Verfügung steht.

Äther des Diazoresorufins.

Unter dem Namen Azoresorufindimethyläther beschreibt Krämer einen Körper, den man erhält, wenn man *p*-Nitrotoluol mit Resorcin und Schwefelsäure erhitzt. Derselbe entspricht einem Diazoresorufin, „in welchem 2 Atome Wasserstoff der beiden Hydroxylgruppen durch Methyl vertreten sind.“ Der Körper löst sich in Alkalien „mit purpurrother Farbe und herrlicher zinnoberrother Fluorescenz“. Es ist nun an und für sich schon mehr als unwahrscheinlich, dass sich ein Äther, der keine freie Hydroxylgruppe enthält, in Alkalien löse, wir haben aber überdies die Unlöslichkeit der Äther der hieher gehörigen Farbstoffe speciell für den Diäthyläther des Diazoresorcins nachgewiesen.[1] Somit ist auch diese Reaction von Krämer irrig gedeutet worden.

Fluorescirendes Resorcinblau.

Unter diesem Namen ist von der Firma Bindschedler, Busch & Co. versuchsweise ein Farbstoff in den Handel gebracht worden, welcher ein Bromderivat des Diazoresorufins ist. Zu

[1] Monatshefte für Chemie. I., 889.

seiner Bereitung löst man sorgfältig gereinigtes Diazoresorufin in kohlensaurem Kali auf, fügt Brom hinzu und fällt den Farbstoff mit Salzsäure aus. Der Niederschlag wird gewaschen und in das Natron- oder Ammonsalz übergeführt.

Das „fluorescirende Blau" ist in der zehnprocentigen Paste des Handels in Form grünglänzender, sehr kleiner Nädelchen enthalten. Es löst sich sehr schwer im Wasser und in absolutem Alkohol, leichter in verdünntem Alkohol, aus welchem es in grösseren Krystallen erhalten werden kann. Die Lösungen sind blau mit prachtvoll rother Fluorescenz. Auch von concentrirter Schwefelsäure wird es mit blauer Farbe aufgenommen.

Aus sauren Bädern auf Seide oder Wolle gefärbt, gibt es blaue Töne mit lebhafter rother Fluorescenz. Die Färbungen sind vollständig säure-, licht- und luftecht.

Den freien Farbstoff kann man durch gelindes Erwärmen der käuflichen Paste mit starker Salzsäure erhalten oder man fällt eine Lösung von salzsaurem Hydrodiazoresorufin mit in Salzsäure gelöstem Brom. Nach dem Umkrystallisiren aus Toluol bildet er braune Nadeln, welche in Wasser unlöslich sind und sich in Alkohol nur wenig leichter lösen, wie seine Salze.

Die Analyse der freien Säure ergab:

	I.	II.
C	28·91	28·50
H	0·87	1·14
Br	59·28	—

Aus diesen Zahlen ergibt sich, dass der Farbstoff auf je 6 Atome Kohlenstoff 2 Atome Brom enthält.

Nicht fluorescirendes Blau.

Versetzt man eine verdünnte alkalische Lösung von Diazoresorcin (1 Molekül Diazoresorcin, 9 Moleküle Ätzkali) mit Bromwasser (12 Moleküle Brom), so erhält man eine dunkelpurpurne flockige Ausscheidung, welche man abfiltrirt und so lange wäscht, bis das Filtrat eine rein blaue, wenn auch nur schwache Färbung zeigt. Beim Umkrystallisiren aus verdünntem Weingeist erhält man schöne grüne Krystallnadeln, welche bei der Analyse folgende Zahlen gaben:

	I.	II.
Br	52·88	52·18
K	6·15	6·73
N	2·83.	

Die weingeistigen Lösungen dieses Farbstoffes fluoresciren nicht, sie sind rein blau, ebenso die Lösung in Schwefelsäure.

Beim Erwärmen mit Schwefelsäure und bei der Behandlung mit reducirenden Agentien geht er sehr leicht in das „fluorescirende Blau“ über, geradeso, wie sich Diazoresorufin in Diazoresorcin verwandelt.

Auf Seide und Wolle gibt er ein sehr schönes, echtes und leichtbeständiges Blau, nur ist es sehr schwer zu vermeiden, dass sich beim Färben ein Theil des Farbstoffes zu fluorescirendem Blau reducire, wodurch der schöne grünblaue Ton in ein Röthlichblau übergeht. Auch nehmen damit gefärbte Fasern schon beim Dämpfen die Farbe und Fluorescenz des Diazoresorufinderivates an.

Wir setzen die Versuche über alle besprochenen Körper fort und hoffen, in nicht gar zu langer Zeit unsere Mittheilungen vervollständigen zu können.

XXV. SITZUNG VOM 20. NOVEMBER 1884.

Herr Prof. Dr. C. v. Nägeli in München dankt für seine Wahl zum ausländischen correspondirenden Mitgliede dieser Classe.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt einen durch das k. k. Oberst-Hofmeisteramt übersendeten Reisebericht des k. k. Hauptmannes im Infanterie-Regimente Nr. 97, Herrn Heinrich Himmel, aus Alexandrien vom 19. September 1884 zur Kenntnissnahme der darin enthaltenen Mittheilungen.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über die durch zahlreiche, unregelmässig vertheilte Körperchen hervorgebrachten Beugungserscheinungen", von Herrn Dr. Karl Exner, Professor am Staatsgymnasium des IX. Bezirkes in Wien.
2. „Über die singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen" und
3. „Über n simultane Differentialgleichungen der Form $\sum_{\mu=1}^{n+m} X_\mu dx_\mu = 0$", letztere beide Arbeiten von Herrn Dr. Otto Biermann, Privatdocent an der deutschen Universität zu Prag.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Adolf Siegmund, Architekt und Civil-Ingenieur in Teplitz, vor. Dasselbe trägt die Aufschrift: „Vorschlag zur Bekämpfung der Reblaus".

Das w. M. Herr Director E. Weiss berichtet über den Inhalt einer für die Denkschriften bestimmten Abhandlung unter dem

Titel: „Entwickelungen zum Lagrange'schen Reversionstheorem und Anwendung derselben auf die Lösung der Keppler'schen Gleichung".

Das w. M. Herr Hofrath F. Ritter v. Hauer überreicht eine Abhandlung von Herrn Karl Alphons Penecke in Graz, betitelt: „Das Eocaen des Krappfeldes in Kärnten".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg: Bulletin. Tome XXIX Nr. 3. St. Pétersbourg, 1884; gr. 4°.

Accademia pontificia de Nuovi Lincei: Atti. Anno XXXVI, sessioni II^a, III^a, IV^a. Roma, 1884; 4°.

Akademie der Wissenschaften, k. b. zu München: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe. 1884. Heft II. München, 1884; 8°.

— kaiserliche, Leopoldino - Carolinische deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XX. Nr. 19—20. Halle a. S., 1884; 4°.

Annales des Mines. 8e série. Tome V. 2e et 3e livraisons. Paris, 1884; 8°.

— des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents. 6e série, 4e année, 9e cahier. Paris, 1884; 8°.

Breslau, Universität: Academische Schriften pro 1883—1884. 57 Stücke, 4° und 8°.

Commissionen for Ledelsen of de geologiske og geographiske Underøgelser i Grønland: Meddelelser om Grønland. 2—6 Hefte. Kjøbenhavn, 1881—1883; 8°. Tillaeg til femte Hefte. Kjøbenhavn, 1883; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCIX, 2e semestre, Nr. 18. Paris, 1884; 4°.

Gesellschaft, astronomische: Vierteljahrsschrift. XIX. Jahrgang, 3. Heft. Leipzig, 1884; 8°.

— deutsche chemische: Berichte. XVII. Jahrgang. Nr. 15. Berlin, 1884; 8°.

— deutsche, entomologische: Deutsche entomologische Zeitschrift. 27. Jahrgang (1883). II. Heft. London, Berlin, Paris, 1883; 8°.

Gesellschaft, physikalisch chemische: Journal. Tome XVI. Nr. 7. St. Petersburg, 1884, 8°.

Institute, the Anthropological of Great Britain and Ireland: The Journal. Vol. XIV. Nr. II. London, 1884; 8°.

Jaarboek, Nederlandsch meteorologisch voor 1877. Decl. II. Utrecht, 1884; quer 4°.

Journal the American of Science. Vol. XXVIII. Nr. 167. New Haven, 1884; 8°.

Museum of comparative Zöology: Bulletin: Vol. XI. Nr. 10. Cambridge, 1884; 8°.

Nature. Vol. XXXI. Nr. 785. London, 1884; 8°.

Société belge de Microscopie: Bulletin. IX° année. Nos. VIII, X et XI. Bruxelles, 1883; 8°. — X° année. Nos I—XI Bruxelles, 1883—1884; 8°.

Society, the philosophical of Washington: Bulletin. Vol. VI. Washington, 1884; 8°.

— royal microscopical: List of Fellows, 1884. London et Edinburgh; 8°.

— the zoological of London: Proceedings of the scientific meetings for the year 1883. Part IV. London, 1884; 8°.

— — Catalogue of the library. Supplement. Additions, to August 30, 1883. London, 1883; 8°. — A. List of the Fellows. London, 1884; 8°.

United States: Report of the Superintendent of the U. S. Coast and geodetic Survey showing the progress of the work during the fiscal year ending with June, 1882. Parts I et II. Washington, 1883; gr. 4°.

— — Commission of Fish and Fisheries: Report for 1880. Washington, 1883; 8°.

— — — Bulletin. Vol. VIII. for 1883. Washington, 1883; 8°.

Verein für Erdkunde zu Halle a. S.: Mittheilungen. 1884, Halle a. S., 1884; 8°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. IV. Jahrgang 1884. 11. Heft, November. Berlin, 1884; 4°.

— für physiologische Chemie. IX. Band, 1. Heft. Strassburg, 1885; 8°.

Bahnbestimmung des Planeten „Adria“.

III. Theil.

Von Dr. **Eduard Freih. v. Haerdtl.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. November 1884.)

In dem II. Theil meiner Abhandlung „Bahnbestimmung des Planeten Adria“, welcher in den Sitzungsberichten der k. Akademie der Wissenschaften (März 1883) veröffentlicht wurde, finden sich für die Elemente des Planeten folgende Angaben:

Adria (148)

Epoche 1880. März 29·0.

$$\left.\begin{aligned} L &= 197° \; 14' \; 39''62 \\ \pi &= 221 \;\; 25 \;\; 11\cdot44 \\ \Omega &= 333 \;\; 40 \;\; 32\cdot31 \\ \iota &= 11 \;\; 28 \;\; 55\cdot71 \end{aligned}\right\} \text{Mittl. Äq. 1880}$$

$$\varphi = 4 \;\; 9 \;\; 13\cdot17$$

$$\mu = 773''0363120$$

Zur Ableitung dieser Elemente waren die Beobachtungen von vier Oppositionen (1875, 1877, 1880, 1882) herangezogen worden. Da die nächste Opposition im Januar 1884 bevorstand, hatte ich am Schlusse derselben Abhandlung noch eine Oppositionsephemeride mitgetheilt, mit deren Hilfe der Planet auch aufgefunden und an vier Abenden: Jan. 22, Jan. 25, Jan. 26 und Febr. 2 in Wien beobachtet wurde. Ich setze diese Beobachtungen hier an und bemerke, dass die Aberration in der Beobachtungszeit berücksichtigt und die Beobachtungen bereits auf den Erdmittelpunkt übertragen sind.

			AR	*D*
1884 Jan. 22	$10^h \; 2^m 29^s$	mittl. Berl. Zeit	$9^h 10^m 33^s 19$	+24° 4' 43"0
„ 25	11 38 8	„	9 7 25·85	+24 8 10·5
„ 26	10 33 46	„	9 6 27·48	+24 9 5·7
Febr. 2	7 40 37	„	8 59 10·65	+24 13 39·7

Da die Rechnung für dieselben Zeiten die Positionen ergibt:

		AR	*D*
1884 Jan.	22.	9h10m35·78	+24° 4'17"8
„	25.	9 7 29 42	+24 7 45 0
„	26.	9 6 30·17	+24 8 41·4
Febr.	2.	8 59 14·26	+24 13 11·4

resultiren folgende Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung:

		Δ *AR* cos *D*	Δ*D*
1884 Jan.	22.	—35"47	+25"2
„	25.	—48·87	+25·5
„	26.	—36·82	+24·3
Febr.	2.	—49·38	+28·3

Vergleicht man die Differenzen in den Rectascensionen, so zeigt es sich, dass die erste und dritte, sowie die zweite und vierte Beobachtung unter einander gut stimmen, während die beiden Gruppen gegenübergestellt, fast um eine Zeitsecunde differiren. — Ich werde auf diese auffallenden Differenzen weiter unten noch zu sprechen kommen.

Ich setze der Übersicht halber die Fehler nochmals hier an, welche aus der Darstellung der Beobachtungen der Jahre 1875 bis 1882 resultiren.

Da die Beobachtungen des Jahres 1875 zu drei, die des Jahres 1877 zu einem Normalort vereinigt der Rechnung zu Grunde gelegt worden waren, aus dem Jahre 1880 und 1882 mir aber beziehungsweise drei und eine Einzelbeobachtung zur Verfügung standen, hat man mit Zuziehung der Beobachtungen aus dem Jahre 1884 im Ganzen 12 Orte.

Die folgenden Differenzen sind im Sinne Beobachtung weniger Rechnung angesetzt:

			Δ *AR* cos *D*	Δ*D*
1875	Febr.	25	—0"37	—0"87
	März	28	—3·75	+0·49
	Mai	2	—0·08	—1·93
1877	Oct.	9	+0·16	—3·39
1880	März	15	—0·15	+8·71
	April	13	+0·01	—7·56
	„	30	+4·91	—6·25

	Δ *AR* cos *D*	Δ *D*
1882 Nov. 3	−45″96	−18″79[1]
1884 Jan. 22	−35·47	+25·20
„ 25	−48·87	+25·50
„ 26	−36·82	+24·30
Febr. 2	−49·38	+28·30

Vor allem war es nöthig, mit Zugrundelegung der letzten Beobachtungen verbesserte Elemente zu ermitteln. Da mir aber die Zusammenfassung der vier Beobachtungen aus dem Jahre 1884 zu einem Normalort wegen der grossen Rectascensions-Differenzen nicht rathsam schien, berechnete ich für jede einzelne Beobachtung getrennt die Differentialquotienten, wobei ich dieselbe Rechnung auch für die weiteren Oppositionen wiederholte, da die Angaben, welche im ersten Heft dieser Abhandlung sich vorfinden, aus dem Grunde zu verbessern sind, als sie ja mit den Ausgangselementen berechnet waren, welches Elementensystem in Folge der Berücksichtigung der Störungen starke Änderung erfuhr.

Die Rechnung ergab:

$\cos\delta\,\partial\alpha:\partial L_0$ .... =	0·14756	0·09164	9·99045	0.04308	0·18081	0·18425
	0·15037	0·06806	0·13562	0·13929	0·14032	0·14450
$\cos\delta\,\partial\alpha:\partial\mu$ ..... =	3_n41958	3_n36589	3 26186	3_n00899	0·99182	0_n90543
	1_n15747	3·04174	3·28479	3·28798	3·28881	3·29194
$\cos\delta\,\partial\alpha:\partial\Phi$ ... =	0·38036	0·33137	0·25085	0_n36329	0·44781	0·45340
	0·42243	0_n28362	0·26996	0·27296	0·27375	0·27661
$\cos\delta\,\partial\alpha:\partial\Psi$ .... =	0·14084	0·08964	9·93462	8.95329	9_n85489	9_n84169
	9_n81234	0·19168	0·29976	0·30409	0·30525	0·31137
$\cos\delta\,\partial\alpha:\sin i\,\partial\Omega$ =	9·54252	9·50891	9·47897	9·62062	9·56794	9·57627
	9·54837	7_n75826	9·03894	9·03699	9·03623	9·02655
$\cos\delta\,\partial\alpha:\partial i$ .... =	9.48320	9·25486	8·83126	9_n37078	9_n40813	9_n57125
	9_n61770	9_n67391	9·69557	9·68818	9·68568	9·66460

[1] Ich mache hier darauf aufmerksam, dass sich im II. Theil meiner Abhandlung für die Beobachtung des Jahres 1882 eine differirende Angabe findet. — Diese Differenz hat ihren Grund darin, dass im Anfügen der Störungsbeträge an die Elemente φ und Ω für diesen Ort, dieselben irrthümlicherweise vertauscht wurden. — Bei Beginn der weiteren Rechnung den Fehler bemerkend, konnte ich ihn nicht mehr richtig stellen, da die Drucklegung des II. Theiles bereits vollendet war.

$\partial\delta : \partial L_0$ .... =	9_n93316	9_n87128	9_n79436	9·87061	9_n96226	0_n00560
	9_n99447	9·73527	9_n86063	9_n85799	9_n85699	9_n84695
$\partial\delta : \partial\mu$ ..... =	3·20433	3·13980	3·05731	2_n82220	1_n31772	1_n44553
	1_n44045	2·73102	3_n00223	2_n99970	2_n99875	2_n98910
$\partial\delta : \partial\Phi$ ..... =	0_n16744	0_n12107	0_n06251	0_n18938	0_n22400	0_n25910
	0_n24479	9_n90453	9_n96304	9_n96263	9_n96237	9_n95784
$\partial\delta : \partial\Psi$ ..... =	9_n92040	9_n80427	9_n61992	9·25200	9·71577	9·81240
	9·82084	9·91884	0_n05315	0_n04922	0_n04780	0_n03448
$\partial\delta : \sin i\, \partial\Omega$ =	0·17568	0·14725	0·07134	0_n16034	0·18044	0·17142
	0·13676	0_n02848	0·08295	0·08882	0·09047	0·10034
$\partial\delta : \partial i$...... =	9·69847	9·49506	9·06489	9·54493	9_n62136	9_n75881
	9_n79662	0·00649	9·96968	9·96748	9·96661	9·95816

Im zweiten Theil meiner Abhandlung war es schon erwähnt worden, dass in einer der beobachteten Declinationen des Jahres 1880 ein grösserer Fehler ersichtlich erscheine. — Weil die Beobachtungen vom April 13 und April 30 (1880) Fehler in gleichem Sinne zeigen, liegt die Vermuthung nahe, dass die Beobachtung vom März 15 (1880) es sei, an der ein Fehler haftet. — Von dieser Annahme ausgehend schloss ich sie bei der weiteren Rechnung aus. Ein Unterschied in Betreff des Gewichtes der übrigen Beobachtungen wurde nicht gemacht.

Macht man, um möglichst Homogenität zu erreichen, folgende Substitutionen:

$$\begin{aligned} x &= 0\cdot18425\ \partial L' \\ y &= 3\cdot41958\ \partial\mu \\ z &= 0\cdot45340\ \partial\Phi \\ t &= 0\cdot31137\ \partial\Psi \\ u &= 0\cdot17568\ \sin i'\ \partial\Omega' \\ w &= 0\cdot00649\ \partial i' \\ v &= 1\cdot69358, \end{aligned}$$

so ergeben sich folgende 22 Gleichungen, in welchem Systeme die ersten 11 Gleichungen den Rectascensionen, die übrigen 11 den Declinationen angehören:

$9\cdot96331x$	$+0_n00000y$	$+9\cdot92696z$	$+9\cdot82947t$	$+9\cdot36684u$	$+9\cdot47671w$	$= 7_n87354$
9·90739	9_n94631	9·87797	9·77827	9·33323	9·24837	8_n88100
9·80620	9_n84228	9·79745	9·62325	9·30329	8·82477	7_n20108
9·85883	9_n58941	9_n90989	8·64192	9·44494	9_n36429	7·50351
0·00000	7_n48585	0·00000	9_n53032	9·40059	9_n56476	6·28832
9·96612	7_n73789	9·96903	9_n50097	9·37269	9_n61121	8·99707

9·88381x	+9·62216y	+9_n83022z	+9·88031t	+7_n58258u	+9_n66742w	= 9_n96883
9·95137	9·86521	9·81656	9·98839	8·86326	9·68908	9_n85629
9·95504	9·86840	9·81956	9·99272	8·86131	9·68169	9_n99546
9·95607	9·86923	9·82035	9·99388	8·86055	9·67919	9_n87249
9·96025	9·87236	9·82321	0·00000	8·85087	9·65811	0_n00000
9_n74891	9·78475	9_n71404	9_n60903	0·00000	9·69198	8_n24594
9_n68703	9·72022	9_n66767	9_n49290	9·97157	9·48857	7·99662
9_n61011	9·63773	9_n60911	9_n30855	9.89566	9·05840	8_n59198
9·68636	9_n40262	9_n73598	8·94063	9_n98466	9·53844	8_n83662
9_n82135	8_n02595	9_n80570	9·50103	9·99574	9_n75232	9_n18494
9_n81022	8_n02087	9_n79139	9·50947	9·96108	9_n79013	9_n10230
9·55102	9·31144	9_n45113	9·60747	9_n85280	0·00000	9_n58035
9_n67638	9_n58265	9_n50964	9_n74178	9·90727	9·96319	9·70782
9_n67374	9_n58012	9_n50923	9_n73785	9·91314	9·96099	9·71296
9_n67274	9_n57917	9_n50897	9_n73643	9·91479	9·96012	9·69203
9_n66270	9_n56952	9_n50444	9_n72311	9·92466	9·95167	9·75821

Für die Coëfficienten der Normalformen fanden sich die Werthe:

[aa] = +10·94923			
[ab] = + 0·52426	[bb] = +6·29142		
[ac] = + 6·67634	[bc] = −0·12664	[cc] = + 8·64093	
[ad] = + 6·16482	[bd] = +2·09805	[cd] = + 3·28206	[dd] = + 7·53333
[ae] = − 3·40363	[be] = −0·18488	[ce] = − 1·88055	[de] = − 1.90195
[af] = + 0·02660	[bf] = +0·06554	[cf] = + 0·09544	[df] = − 0·13731
[an] = − 4·75355	[bn] = −3·74155	[cn] = − 1·95990	[dn] = − 5·56948
[as] = +16·18401	[bs] = +4·92620	[cs] = +14·72766	[ds] = +11·46955

[ee] = +8·81513		
[ef] = +1·70064	[ff] = +7·08390	
[en] = +1·51228	[fn] = +0·39047	[nn] = +5·22153
[es] = +4·65707	[fs] = +9·22529	[ns] = −8·90022

Löst man die Eliminationsgleichungen auf, so erhält man endlich folgende Verbesserungen der Eclipticalelemente:

$$\partial L = -5''16$$
$$\partial \pi = -2'\,10''88$$
$$\partial \Omega = +0\cdot 84$$
$$\partial i = +2\cdot 43$$
$$\partial \varphi = +8\cdot 26$$
$$\partial \mu = -0''0076008$$

welche an die obigen Elemente angebracht die verbesserten Elemente ergeben:

Adria (143)

Epoche 1880 März 29·0

$$\left.\begin{aligned} L &= 197°14'34''46 \\ \pi &= 221\ 23\ \ 0·56 \\ \Omega &= 333\ 40\ 33·15 \\ i &= 11\ 28\ 58·14 \\ \varphi &= 4\ \ 9\ 21·43 \end{aligned}\right\} \text{mittl. Äq. 1880}$$

$$\mu = 773''0287112.$$

Diese Elemente zur Darstellung der Beobachtungen benützt, lassen folgende Fehler übrig:

	ΔAR cos D	ΔD		ΔAR cos D	ΔD
1875 Febr. 25	—1″03	—0″83	1882 Nov. 3	—7″89	—2″88
März 28	—3·42	+1·41			
Mai 2	—0·76	+0·54	1884 Jan. 22	+4·77	+0·42
			Jan. 25	—8·19	+1·28
1877 Oct. 9	+4·72	—0·99	Jan. 26	+3·87	+0·11
			Feber 2	—7·52	+4·00
1880 April 13	—4·71	+0·48			
„ 30	—0·72	+1·86			

Rechnet man aber die Position des Planeten für 1880 März 15 und vergleicht sie mit der ausgeschlossenen Beobachtung, so finden sich die Differenzen:

	ΔAR cos D	ΔD
1880 März 15.	—4″74	+15″21

Nachdem so verbesserte Elemente gewonnen waren, welche die Beobachtungen des Planeten Adria innerhalb 9 Jahre mit geringen Fehlern darstellen, schien es mir rathsam neue Normalorte zu bilden und erst mit Zugrundelegung derselben eine nochmalige Verbesserung der Elemente nach der Methode der kleinsten Quadrate vorzunehmen, umsomehr als die Normalorte aus dem Jahre 1875 und 1877 nicht von mir berechnet sind, sondern der Rechnung entnommen waren, welche zur Ableitung der ersten Elemente gedient hatte.

Die Anzahl sämmtlicher Beobachtungen beträgt vierzig, wovon neunundzwanzig auf das Jahr 1875, das Entdeckungsjahr des Planeten Adria entfallen, je vier Beobachtungen auf die Jahre 1877 und 1884, drei auf das Jahr 1880. Aus dem Jahre 1882 steht mir endlich nur eine Beobachtung zur Verfügung.

Vor allem war es nöthig für die Opposition des Jahres 1875 eine neue Ephemeride zu rechnen. — Mit den für Februar 25.5, März 8.5, April 13.5 des Jahres 1875 geltenden Elementen berechnete ich drei Ephemeridenstücke, welche zusammen den ganzen Zeitraum der Beobachtungen umfassten.

Bei dem nahen Anschlusse der Ephemeride an die Beobachtungen und aus dem Umstande, dass bei dieser Wahl der, den Ephemeridenstücken zu Grunde gelegten Elemente der Abstand der äussersten Beobachtungen nur wenige Tage beträgt, konnte ich ohne Bedenken die Ephemeridencorrectionen für das ganze Intervall constant annehmen. — Die Vergleichung der Beobachtungen mit der Ephemeride ergab endlich nach Anbringung der Aberrations- und Parallaxen-Reduction folgende Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung:

				ΔAR	ΔD
1875	Febr.	23	Pola	+1″12	+5″06
	„	24	Wien	—0·60	+3·18
	„	24	Wien	+3·05	—3·59
	„	24	Berlin	—2·83	—3·53
	„	26	Berlin	—3.21	—3·41
	„	26	Pola	—5·82	+0·18
	.	28	Leipzig	+0·63	—4·38
	„	28	Berlin	—3·18	—2·92
	„	29	Berlin	—1·16	—0·04
			Mittel...	—1·35	—1·05

				ΔAR	ΔD
1875	März	3	Berlin	—1·29	+0·78
	„	3	Wien	—5·12	—2·21
	„	3	Leipzig	—1·95	—0·12
	„	4	Pola	+3·20	—1·22
	„	4	Wien	+1·72	—6·72
	„	5	Wien	—5.26	—0·45
	„	6	Leipzig	—6·10	+3·27
	„	6	Berlin	—0·23	—1·79

				ΔAR	ΔD
1875	März	7	Wien	—0″39	—0″23
	„	10	Leiden	—3·95	—0·15
	„	11	Pola	+1·09	+3·57
	„	12	Leiden	—2·12	+0·27
	„	13	Leiden	—3.22	+3·40
	„	14	Berlin	—1·79	—0·08
			Mittel...	—1·81	—0·12

				ΔRA	ΔD
1875	März	27	Pola	+3·88	+3·27
	„	29	Berlin	—4·33	+0·04
	April	10	Berlin	—4·22	—2·62
	„	11	Berlin	—1·46	—0·23
	Mai	1	Berlin	—0·45	+3·42
	„	3	Berlin	—0·64	—3·34
			Mittel...	—1·20	+0·09

Die Mittel der Zeiten aus jeder der drei Gruppen entsprechen den Daten:

1875 Febr. 25·5, 1875 März 8·5, 1875 April 13·5.

Da die Ephemeriden für diese Daten folgende auf das mittlere Äquinoctium 1880 bezogene Positionen ergeben:

		AR	D
1875	Febr. 25·5	149° 1′ 15″12	+13° 46′ 0″62
	März 8·5	146 30 4·40	+13 48 13·90
	April 13·5	143 2 48·84	+12 38 33·42

so erhält man durch Anfügen der Mitteldifferenzen an diese Positionen folgende drei Normalorte für das Jahr 1875:

	12h mittl. Berl. Zeit		AR^h	AR°	D
1.	1875	Febr. 25	9h 56m 4·918	149° 1′13″77	+13°45′59″57
2.		März 8	9 46 0·173	146 30 2·59	+13 48 13 78
3.		April 13	9 32 11·176	143 2 47·64	+12 38 33·51

Die vier Beobachtungen aus dem Jahre 1877 differiren mit den Positionen, welche die ebenfalls neu berechnete Ephemeride ergab, um die Beträge:

			ΔAR	ΔD
1877 Oct.	8	Berlin	—4″85	+8″25
„	9	Berlin	—1·42	—0·42
„	10	Leipzig	—0·03	—0·93
„	10	Berlin	+5·15	—5·38

Ich habe von diesen vier Beobachtungen nur die beiden inneren Beobachtungen berücksichtigt, da ich der Ansicht bin, dass durch Zuziehung der im entgegengesetzten Sinne stark differirenden äusseren Beobachtungen die Positionsangabe nicht an Sicherheit gewinnt.

Bringt man die aus den mittleren Beobachtungen resultirenden Mittelwerthe:

$$\Delta AR = -0''73 \qquad \Delta D = -0''68$$

an dem ebenfalls auf das mittlere Aequinoctium 1880.0 bezogenen Ephemeridenort:

	AR	D
1877 Oct. 9·5:	359° 6′ 26″14	+ 10° 17′ 1″50

an, so erhält man den 4. Normalort:

4. 1877 Oct. 9. 12ʰ mittl. Berliner Zeit:

AR^h	AR^o	D
23ʰ 56ᵐ 25ˢ694	359°6′25″41	+ 10°17′0″82.

Aus den bereits oben mitgetheilten Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung für die drei Beobachtungen des Jahres 1880 ergibt sich die an dem Ephemeridenort:

	AR	D
1880 April 13·5:	185°46′18″55	— 16°25′31″66

anzubringende Verbesserung mit: $\Delta AR = -3''23$, $\Delta D = +1''17$ Der Normalort selbst lautet daher:

5. 1880 April 13 12ʰ mittl. Berliner Zeit:

AR^h	AR^o	D
12ʰ 23ᵐ 5ˢ021	185°46′15″32	— 16°25′30″49.

Da im Jahre 1882 nur eine Beobachtung angestellt worden war, und zwar November 3. 41856 mittl. Berliner Zeit, welche gegen die obigen Elemente die Differenzen finden lässt:

$$\Delta AR = -9''10 \qquad \Delta D = -2''88,$$

so erhält man unmittelbar durch Übertragung dieser Differenzen auf die für Mitternacht desselben Datums geltende, aber bereits auf das mittlere Äquinoctium 1880·0 bezogene Position:

	AR	*D*
1882 Nov. 3.5	32°25'33"47	+29°57'27"49

als sechsten der Rechnung zu Grunde gelegten Ort:

6. 1882 Nov. 3 12^h mittl. Berliner Zeit:

AR^h	AR°	*D*
$2^h 9^m 14^s 625$	32°25'24"37	+29°57'24"61.

Einige Schwierigkeit bereitet aber die Bildung des Normalortes aus den vier Wiener Beobachtungen des Jahres 1884. — Ich setze die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung nochmals hier an:

		Δ*AR*	Δ*D*
1884 Jan.	22.	+5"22	+0"42
„	25.	−8·97	+1·28
„	26.	+4·24	+0·11
Febr.	2.	−8·25	+4·00.

Nimmt man das Mittel aus allen vier Differenzen dieser Beobachtungen, so ergibt sich die Übertragung auf den Ephemeridenort (mittl. Äquinoctium 1880.0)

	AR	*D*
1884 Jan. 29.5	135°44'59"41	+24°12'44"30
mit	Δ*AR* = −1"94	Δ*D* = +1"45

hingegen mit Rücksicht blos auf die Beobachtungen von Jan. 25 und Febr. 2 mit:

Δ*AR* = −8"61   Δ*D* = +2"64.

Ich hatte schon oben auf die grossen Differenzen von je zwei aufeinanderfolgenden Rectascensionsfehlern aufmerksam gemacht. Einerseits die Grösse dieser Differenz (sie beträgt fast eine Zeitsecunde) anderseits auch der Umstand, dass dieselbe sich zweimal wiederholt, legte mir die Vermuthung nahe, dass diese Differenzen nicht in Beobachtungsfehlern ihren Grund hätten, sondern dass ein Fehler entweder in der Reduction oder in der Positionsangabe der Cataloge, denen die Vergleichsterne entnommen waren, liege. — Sowohl die Revision der Reduction als auch die an der Sternwarte Wien durch Herrn Dr. Oppen-

heim zu diesem Zwecke angestellten Beobachtungen der Vergleichsterne ergaben aber keinen Aufschluss. Da ich daher eines Grundes entbehrte entweder die eine oder die andere Gruppe bei der Bildung des Normalortes für das Jahr 1884 zu übergehen, nahm ich das Mittel aus allen vier Beobachtungen als denjenigen Fehler an, den die Elemente in den Beobachtungen des Jahres 1884 übrig lassen und erhielt so den siebenten Normalort:

7. Jan 29. 12^h mittl. Berliner Zeit:

AR^h	AR°	D
$9^h 2^m 59^s 831$	135°44′57″47	+24°12′45″75.

Um die bisherigen Rechnungen zu controliren, habe ich die sieben Normalorte nochmals dargestellt und setze hier die aus der directen Darstellung resultirende Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung neben den Differenzen an, welche die Ephemeriden ergaben:

	Ephemeride		Directe Darstellung	
	ΔAR	ΔD	ΔAR	ΔD
1.	−1″35	−1″05	−1″35	−1″06
2.	−1·81	−0·12	−1·76	−0·11
3.	−1·20	+0·09	−1·10	+0·04
4.	−0·73	−0·68	−0·73	−0·61
5.	−3·23	+1·17	−3·37	+1·17
6.	−9·10	−2·88	−9·08	−2·88
7.	−1·94	+1·45	−1·94	+1·47

Bevor ich zur Verbesserung der Elemente schreiten konnte, war es noch nöthig für drei Normalorte neue Differentialquotienten abzuleiten und zwar für: 1875 März 8·5, 1875 April 13·5, 1884 Jan. 29·5.

Die Differentialquotienten für 1875 Februar 25.5, 1877 October 9.5 sind vollkommen strenge, die von 1880 April 13·5 und 1882 November 3.5 gelten eigentlich für die Beobachtungszeiten: 1880 April 13.452 und 1882 November 3.418; es ist aber klar, dass ihre Anwendung auf Mitternacht desselben Datums vollkommen zulässig ist.

Ich stelle im Folgenden die Normalorte, die rechtwinkligen Sonnencoordinaten, die Störungsbeträge, endlich die Differentialquotienten übersichtlich zusammen:

Nr.	Datum	Anzahl der vereinigten Beobachtungen	t	AR^h	AR^o	D
				Äquinoctium 1880.0		
1	1875 Febr. 25·5	9	—1858.5	9ʰ 56ᵐ 4·918	149° 1′ 13″77	+13° 45′ 59″57
2	März 8·5	14	—1847·5	9 46 0·173	146 30 2 59	+13 48 13·78
3	April 13·5	6	—1811·5	9 32 11·176	143 2 47·64	+12 38 33·51
4	1877 Oct. 9·5	2	— 901·5	23 56 25·694	359 6 25·41	+10 17 0·82
5	1880 April 13·5	3	+ 15·5	12 23 5·021	185 46 15·32	—16 25 30·49
6	1882 Nov. 3·5	1	+ 949·5	2 9 41·625	32 25 24·37	+29 57 24·61
7	1884 Jan. 29·5	4	+1401·5	9 2 59·831	135 44 57·47	+24 12 45·75

Nr.	X	Y	Z	$\Delta\mu$	ΔL	$\Delta\pi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\Omega$	Δi
	Äquinoctium 1880								
1	+0·9120953	—0·3542392	—0.1537005	+0·5010300	—4′ 2″59	+1°17′ 58″74	+2′ 37″43	+5′ 37″42	+17″92
2	+0·9718623	—0·1882820	—0·0816934	+0·4826900	—3 55·90	+1 17 22·53	+2 39·21	+5 37·53	+17 59
3	+0·9189821	+0·3696344	+0·1603842	+0·4132050	—3 36·82	+1 15 9·17	+2 45·93	+5 37·19	+16·15
4	—0·9554853	—0·2644275	—0·1147354	+0·6296800	—1 37·59	+0 16 7·46	+2 20·51	+0 33·63	+ 4·27
5	+0·9141447	+0·3800547	+0·1648959	+0·0100500	—0 3 55	—0 0 14·63	—0 2·25	—0 0·89	— 0·19
6	—0·7434014	—0·6015899	—0·2610134	+0·2326100	+7 51 97	—0 19 29·09	—3 6·85	—1 32·16	— 5·47
7	+0·6261932	—0·6978046	—0·3027514	—0·8351900	—2 2 88	—0 26 6·81	—8 36·75	—7 33·71	+27·80

Nr.							
1	0_n11767	$=0\cdot14756\,\partial L'$	$+3_n41958\,\partial\mu$	$+0\cdot38036\,\partial\Phi$	$+0\cdot14084\,\partial\Psi$	$+9\cdot54252\sin i'\partial\Omega'$	$+9\cdot48320\,\partial i'$
2	0_n23278	$=0\cdot13585$	3_n40903	$0\cdot36951$	$0\cdot13431$	$9\cdot53265$	$9\cdot41480$
3	0_n03073	$=0\cdot04479$	3_n31856	$0\cdot29293$	$0\cdot02854$	$9\cdot49277$	$9\cdot09261$
4	9_n85629	$=0\cdot04308$	3_n00899	0_n36329	$8\cdot95329$	$9\cdot62062$	9_n37078
5	0_n50953	$=0\cdot18425$	0_n90543	$0\cdot45340$	9_n84169	$9\cdot57627$	9_n57125
6	0_n89581	$=0\cdot06806$	$3\cdot04174$	0_n28362	$0\cdot19168$	7_n75826	9_n67391
7	0_n24797	$=0\cdot14285$	$3\cdot29085$	$0\cdot27539$	$0\cdot30886$	$9\cdot03030$	9.67669
8	0_n06446	$=9_n93316$	$3\cdot20433$	0_n16744	9_n92040	$0\cdot17568$	$9\cdot69847$
9	9_n04139	$=9_n91573$	$3\cdot18633$	0_n15516	9_n88694	$0\cdot17271$	$9\cdot64099$
10	$8\cdot60206$	$=9_n83378$	$3\cdot09999$	0_n09224	9_n72463	$0\cdot11512$	$9\cdot33468$
11	9_n83251	$=9\cdot87061$	2_n82220	0_n18938	$9\cdot25200$	0_n16034	$9\cdot54493$
12	$0\cdot06819$	$=0_n00560$	1_n44553	0_n25910	$9\cdot81240$	$0\cdot17142$	9_n75881
13	0_n45939	$=9\cdot73527$	$2\cdot73102$	9_n90453	$0\cdot91884$	0_n02848	$0\cdot00649$
14	$0\cdot16137$	$=9_n85274$	2_n99461	9_n96024	0_n04232	$0\cdot09529$	$9\cdot96353$

Macht man die Substitutionen:

$$x = 0\cdot18425\,\partial L'$$
$$y = 3\cdot41958\,\partial\mu$$
$$z = 0\cdot45340\,\partial\Phi$$
$$t = 0\cdot30886\,\partial\Psi$$
$$u = 0\cdot17568\sin i'\,\partial\Omega'$$
$$w = 0\cdot00649\,\partial i'$$
$$\nu = 0\cdot89581$$

und berechnet die Coëfficienten der Normalgleichungen, so ergibt sich:

$[aa] = +6\cdot92789$			
$[ab] = -2\cdot39221$	$[bb] = +4\cdot64924$		
$[ac] = +3\cdot47831$	$[bc] = -2\cdot28547$	$[cc] = +6\cdot02890$	
$[ad] = +3\cdot56521$	$[bd] = -1\cdot03417$	$[cd] = +1\cdot58107$	$[dd] = +3\cdot83170$
$[ae] = -2\cdot16729$	$[be] = +0\cdot70490$	$[ce] = -0\cdot96634$	$[de] = -1\cdot10620$
$[af] = +0\cdot00096$	$[bf] = +0\cdot03459$	$[cf] = +0\cdot03017$	$[df] = +0\cdot01407$
$[an] = -2\cdot16179$	$[bn] = -0\cdot28224$	$[cn] = -0\cdot14647$	$[dn] = -1\cdot32731$
$[as] = +7\cdot25108$	$[bs] = -0\cdot60536$	$[cs] = +7\cdot72017$	$[ds] = +5\cdot52437$

$[ee] = +6\cdot14866$			
$[ef] = +0\cdot28398$	$[ff] = +3\cdot52639$		
$[en] = +0\cdot23022$	$[fn] = +0\cdot01885$		
$[es] = +3\cdot12793$	$[fs] = +3\cdot90901$	$[nn] = +1\cdot54092$	$[ns] = -2\cdot12782.$

Die zur Probe direct gerechneten Summenglieder geben in guter Übereinstimmung:

$[as] = +7\cdot25106$	$[cs] = +7\cdot72013$	$[es] = +3\cdot12793$	
$[bs] = -0\cdot60540$	$[ds] = +5\cdot52435$	$[fs] = +3\cdot90896$	$[ns] = -2\cdot12784.$

Aus den zum Zwecke der Auflösung der Eliminationsgleichungen berechneten Hilfsgrössen, setze ich nur den Werth:

$$[nn6] = +0.43291$$

hier an.

Für die Unbekannten: x, y, z, t, u, w ergab die Rechnung die Werthe:

$$x = 9_n66453 \qquad t = 8_n83581$$
$$y = 9_n34358 \qquad u = 8_n94200$$
$$z = 9\cdot21068 \qquad w = 8\cdot13241$$

welchen die Werthe entsprechen:

$$\partial L' = 0_n37609 \qquad \partial\Psi \ldots\ldots = 9_n42276$$
$$\partial\mu = 6_n81981 \qquad \partial\Omega' \sin i' = 9_n66213$$
$$\partial\Phi = 9\cdot65309 \qquad \partial i' \ldots\ldots = 9\cdot02173.$$

Mit Hilfe dieser Grössen leitet man leicht folgende Verbesserungen der Elemente ab, wobei ich aber bemerke, dass dieselben auf den Äquator als Fundamentalebene bezogen sind:

$$\partial L' = -2''377$$
$$\partial\pi' = -7\cdot072$$
$$\partial\Omega' = -0\cdot819$$

$$\partial i' = +0''105$$
$$\partial \varphi = -0 \cdot 099$$
$$\partial \mu = -0 \cdot 0006604.$$

Überträgt man diese Correcturen endlich auf die Ekliptik, so ergibt sich:

$$\partial L = -2''28$$
$$\partial \pi = -6 \cdot 97$$
$$\partial \Omega = -2 \cdot 02$$
$$\partial i = +0 \cdot 24$$
$$\partial \varphi = -0 \cdot 10$$
$$\partial \mu = -0 \cdot 0006604$$

Aus folgendem Schema, in welchem in der zweiten und neunten Zeile jene Fehler stehen, welche die Ausgangselemente übrig liessen, in den folgenden Zeilen aber die Producte aus den mit umgekehrten Zeichen genommenen Grössen:

$\partial L' = 0_n 37609$ $\quad \partial \mu = 6_n 81981$ $\quad \partial \Phi = 9 \cdot 65309$

$\partial \Psi = 9_n 42276$ $\quad \partial \Omega' \sin i' = 9_n 66213$ $\quad \partial i' = 9 \cdot 02173$

in die Coëfficienten der oben mitgetheilten Bedingungsgleichungen, erhält man durch Summirung der übereinandstehenden Beträge diejenigen Fehler, welche die verbesserten Elemente in den Beobachtungen übrig lassen. (Siehe pag. 771.)

Bildet man die Quadrate der Fehler und summirt dieselben, so erhält man:

$$[vv] = 26''76,$$

während das Product aus $[nn6] = 9 \cdot 63640$ in $\nu^2 = 1 \cdot 79162$ in guter Übereinstimmung: $[vv] = 26''79$ finden lässt.

Ich habe aber von den letzterhaltenen Verbesserungen der Elemente keinen Gebrauch gemacht, sondern mit Beibehaltung der sechs ersten Normalorte und Zugrundelegung folgenden siebenten Normalortes:

7. 1884 Jan. 29. 12^h mittl. Berliner Zeit:

AR^h	AR^o	D
$9^h 2^m 59^s 386$	$135°44' 50''80$	$+24°12' 46''94$

nochmals obige Gleichungen aufgelöst, also diejenigen Verbesserungen der Elemente ermittelt, welche aus der Berücksichtigung

Datum	1875 Febr. 25·5	1875 März 8·5	1875 April 13·5	1877 Oct. 9·5	1880 April 13·5	1882 Nov. 3·5	1884 Jänn. 29·5
n	−1″31	−1″71	−1″07	−0″72	−3″23	−7″87	−1″77
Corr. von $\partial L'$	+3·34	+3·25	+2 64	+2.63	+3·63	+2·78	+3·30
„ $\partial \mu$	−1·74	−1·69	−1·38	−0·67	−0·01	+0·73	+1·29
„ $\partial \Phi$	−1·08	−1·05	−0·88	+1·04	−1·28	+0.86	−0·85
„ $\partial \Psi$	+0·37	+0·36	+0·28	+0·02	−0·18	+0 41	+0·54
„ $\partial \Omega' \sin i'$	+0·16	+0·16	+0·14	+0·19	+0·17	0	+0·05
„ $\partial i'$	−0·03	−0·03	−0·01	+0·02	+0·04	+0·05	- 0·05
n	−1·05	−0·12	+0·09	−0·68	+1·17	−2·88	+1·45
Corr. von $\partial L'$	−2·04	−1·96	−1·62	+1·76	−2·41	+1·29	−1·69
„ $\partial \mu$	+1·06	+1·01	+0·83	−0·44	−0·02	+0·36	−0·65
„ $\partial \Phi$	+0·66	+0·64	+0·56	+0·70	+0·82	+0·36	+0·41
„ $\partial \Psi$	−0·22	−0·20	−0·14	+0·05	+0·17	+0·22	−0·29
„ $\partial \Omega' \sin i'$	+0·69	+0·68	+0·60	−0·66	+0·68	−0·49	+0·57
„ $\partial i'$	−0·05	−0·05	−0·02	−0·04	+0 06	−0·11	−0·10
$\Delta AR \cos D$	−0″29	−0″71	−0″28	+2″51	−0″86	−3″04	+2″51
ΔD	−0·95	+0·30	+0·30	+0·69	+0·47	−1·25	−0·30

blos zweier Beobachtungen (Jan. 25 u. Febr. 2) des Jahres 1884 resultiren.

Zu diesem Zwecke war es nur nöthig, diejenigen Producte und Summen neu zu bilden, in welchen die Differenz, Beobachtung weniger Rechnung, des siebenten Normalortes vorkommen. Ich lasse daher auch nur diese Zahlen hier folgen.

Da der zu Grund gelegte neue Normalort die Fehler übrig lässt:

$$\log \Delta AR \cos D = 0_n89501 \qquad \log \Delta D = 0\cdot 42160$$

ergeben sich aus der Summirung der mit a, b, c, d, e und multiplicirten n und s Grössen folgende Werthe:

$$[an] = -2\cdot 93521 \quad [bn] = -0\cdot 91392 \quad [cn] = -0\cdot 70824 \quad [dn] = -2\cdot 18237$$
$$[en] = +0\cdot 30060 \quad [fn] = -0\cdot 20595$$
$$[as] = +6\cdot 47766 \quad [bs] = -1\cdot 23704 \quad [cs] = +7\cdot 15840 \quad [ds] = +4\cdot 66931$$
$$[es] = +3\cdot 19831 \quad [fs] = +3\cdot 68421$$

endlich erhält man für die Summe der Producte $[nn]$ und $[ns]$ die Werthe:

$$[nn] = +2\cdot 56526, \qquad [ns] = -4\cdot 07983.$$

Rechnet man mit diesen Grössen die zur Auflösung der Eliminationsgleichungen nöthigen Hilfsgrössen, aus denen ich wieder die Grösse:

$$[nn6] = +0\cdot 09538$$

hier anführe, und löst endlich die Eliminationsgleichungen selbst auf, so ergeben sich für die Unbekannten folgende Werthe:

$$\begin{aligned}
\partial L' &= 0_n41256\\
\partial \mu &= 7_n15467\\
\partial \Phi &= 9\cdot 12104\\
\partial \Psi &= 0_n03966\\
\partial \Omega' \sin i' &= 9_n78088\\
\partial i' &= 9_n52883.
\end{aligned}$$

Da die Fehlereinheit: $\nu = 0\cdot 89581$ beibehalten worden war, ergibt sich die Summe der restirenden Fehlerquadrate mit: $[vv] = 5''90$ gegen $[vv] = 26''79$ der früheren Auflösung, was eine wesentlich bessere Darstellung der Beobachtungen voraussehen liess.

Aus den neuen Werthen der Unbekannten resultiren folgende Verbesserungen der Eklipticalelemente:

$$\begin{aligned}
\partial L &= -\ 2''47\\
\partial \pi &= -11\cdot 24\\
\partial \Omega &= -\ 3\cdot 41\\
\partial i &= -\ 0\cdot 13\\
\partial \varphi &= +\ 0\cdot 73\\
\partial \mu &= -\ 0\cdot 0014278.
\end{aligned}$$

Bringt man diese Beträge an die Ausgangselemente an, so erhält man schliesslich die verbesserten Elemente:

Adria (143)

Epoche 1880 März 29·0.

$$\begin{aligned}
L &= 197^\circ\ 14'\ 31''99\\
\pi &= 221\ \ 22\ \ 49\cdot 32\\
\Omega &= 333\ \ 40\ \ 29\cdot 74\\
i &= 11\ \ 28\ \ 58\cdot 01\\
\varphi &= 4\ \ 9\ \ 22\cdot 16\\
\mu &= 773''0272834
\end{aligned}$$

(L, π, Ω, i: mittl. Äq. 1880)

Rechnet man mit diesen Elementen die Darstellung obiger sieben Normalorte, so erübrigen folgende Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung:

		$\Delta AR \cos D$	ΔD
1875	Febr. 25·5	+0"10	—0"71
	März 8·5	—0·37	+0·41
	April 13·5	—0·05	+0·54
1877	Oct. 9·5	+1·20	+0·04
1880	April 13·5	—0·40	+0·24
1882	Nov. 3·5	—1·61	+0.10
1884	Jan. 29·5	+0·66	—0·63

Durch Rücksubstitution der Werthe der Unbekannten in die Normalgleichungen ergeben sich die übrig bleibenden Fehler in naher Übereinstimmung mit:

		$\Delta AR \cos D$	ΔD
1875	Febr. 25·5	+0"09	—0"74
	März 8·5	—0·35	+0·35
	April 13·5	—0·03	+0·54

		$\Delta AR \cos D$	ΔD
1877	Oct. 9·5	+1″25	−0″06
1880	April 13·5	−0·33	+0·17
1882	Nov. 3·5	−1·49	+0·02
1884	Jan. 29·5	+0·62	−0·64

welche quadrirt und summirt für die Summe der Fehlerquadrate $[vv] = 5''81$ ergeben.

Wie man sieht, ist jetzt die Darstellung eine sehr befriedigende. Die etwas grösseren Differenzen in den Rectascensionen der Normalorte der Jahre 1877 und 1882 sind nicht von Belang, da diesen Normalorten beziehungsweise nur zwei und eine Beobachtung zu Grunde liegen.

Stellt man mit obigen Elementen die vier Beobachtungen des Jahres 1884 einzeln dar, so ergeben sich folgende Fehler:

		ΔAR	ΔD
1884	Jan. 22	+14″48	−2″96
	„ 25	+ 0·35	−2·06
	„ 26	+13·60	−3·22
	Feb. 2	+ 1·21	+0·79

Eine Erklärung für die Nichtübereinstimmung der Beobachtungen zu finden, ist mir nicht gelungen, umsomehr als zu berücksichtigen ist, dass die Beobachtungen von verschiedenen Beobachtern und an verschiedenen Instrumenten gemacht wurden. Dass aber ein Fehler und zwar in den Beobachtungen vom Jan. 22 und Jan. 26 vorliegt — vielleicht liegt derselbe in der Angabe der Beobachtungszeit — das scheint mir das Resultat der zweiten Ausgleichung zu bestätigen. (Siehe Nachtrag p. 779.)

So weit das vorhandene Beobachtungsmaterial reicht, glaube ich es thunlichst zur Ableitung und Verbesserung der Elemente verwerthet zu haben.

Meine erste Absicht ging wohl dahin, noch die Opposition 1885 Mai 22 vor Abschluss dieser Abhandlung abzuwarten. Der Umstand aber, dass die Position des Planeten eine sehr ungünstige ist, seine Declination beträgt −39°, bietet wenig Aussicht, dass ich von dieser Opposition Beobachtungen erhalten werde. Sollte dieses aber dennoch der Fall sein, so glaube ich, dass sie eine nochmalige Verbesserung der Elemente als überflüssige Arbeit erscheinen lassen werden.

Anschliessend an die im II. Theil meiner Abhandlung mitgetheilten Störungswerthe, lasse ich hier noch die Resultate folgen, welche die Fortsetzung der Störungsrechnung (Methode der Variation der Constanten) für die Jahre 1886 u. 1887 ergab.

Datum	$w^2\left(\frac{d\mu}{dt}\right)$	$w\left(\frac{dL}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\pi}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)$	$w\left(\frac{di}{dt}\right)$
1885 Dec. 28	—1″6558	—1″591	+3″082	+1′33″275	+0″989	—0″253
1886 Febr. 6	—1·6050	—2·758	+2·598	+1 34·600	+0·960	—0·345
März 18	—1·5168	—3·834	+2·095	+1 33·670	+0·815	—0·439
April 27	—1·3997	—4·805	+1·628	+1 30″847	+0·554	—0·531
Juni 6	—1·2610	—5·662	+1·229	+1 26·594	+0·184	—0·615
Juli 16	—1·1070	—6·403	+0·924	+1 21·435	—0·288	—0·685
Aug. 25	—0·9429	—7·028	+0·719	+1 15·879	—0·845	—0·739
Oct. 4	—0·7728	—7·538	+0·613	+1 10·409	—1·468	—0·771
Nov. 13	—0·6002	—7·934	+0·597	+1 5·427	—2·136	—0·781
Dec. 23	—0·4281	—8·222	+0·653	+1 1·225	—2·825	—0 767
1887 Febr. 1	—0·2583	—8·407	+0·763	+ 58·093	—3·512	—0·727
März 13	—0·0925	—8·496	+0·908	+ 56·145	—4·171	—0·663

Da vom Jahre 1885 angefangen das Berliner Jahrbuch die Coordinaten der störenden Planeten auf das Äquinoctium 1890·0 bezogen mittheilt, hat man, um auch die Elemente des Planeten Adria auf dieses Äquinoctium bezogen zu haben, folgende Übertragungen anzubringen:

$$\pi_1 - \pi_0 = +8' \, 22''26 \qquad i_1 - i_0 = + \quad 4''51$$
$$\Omega_1 - \Omega_0 = +8 \quad 30·37 \qquad \omega_1 - \omega_0 = - \quad 8·11.$$

Die letzt erhaltenen Elemente auf das Äquinoctium 1890·0 bezogen, lauten also:

Adria (143)

Epoche 1880 März 29·0.

$$\left.\begin{aligned} L &= 197° \; 22' \; 54''25 \\ M &= 335 \;\; 51 \;\; 42·67 \\ \omega &= 247 \;\; 42 \;\; 11·47 \\ \Omega &= 333 \;\; 49 \;\; 0·11 \\ i &= 11 \;\; 29 \;\; 2·52 \end{aligned}\right\} \text{mittl. Äq. } 1890·0 \qquad \begin{aligned} \varphi &= 4° \;\; 9' \, 22''16 \\ \mu &= 773''0272834 \\ a &= 0·4412079 \end{aligned}$$

Schliesslich theile ich die Ephemeriden für die zwei nächst bevorstehenden Oppositionen, Mai 22 (1885) und Sept. 10 (1866), sowie die, für diese Jahre geltenden Jahresephemeriden hier mit.

Ephemeride für die Opposition 1885

12h mittl. Berliner Zeit	AR (148)	Diff.	Decl. (148)	Diff.	Log. Entf. (143) von ♁	Aberr.-Zeit
1885 Mai 4	16h 14m 27s·12	—52·59	—39°35' 7"8	—1'50"1	0·218517	13m 43s
5	16 13 34·53	—53·95	—39 36 57 9	—1 37·1	0·217255	13 41
6	16 12 40·58	—55·23	—39 38 35·0	—1 23·9	0·216048	13 39
7	16 11 45·35	—56·44	—39 39 58·9	—1 10·4	0·214896	13 37
8	16 10 48·91	—57·59	—39 41 9·3	—0 56·8	0·213804	13 35
9	16 9 51·32	—58·65	—39 42 6·1	—0 42·9	0·212770	13 33
10	16 8 52·67	—59·65	—39 42 49·0	—0 28·9	0·211797	13 31
11	16 7 53 02	—60·58	—39 43 17·9	—0 14·9	0·210885	13 29
12	16 6 52·44	—61·38	—39 43 32·8	—0 0·6	0·210035	13 27
13	16 5 51·06	—62·12	—39 43 33·4	+0 13·7	0·209248	13 26
14	16 4 48·94	—62·77	—39 43 19·7	+0 28·0	0·208525	13 25
15	16 3 46·17	—63·33	—39 42 51·7	+0 42·3	0·207868	13 24
16	16 2 42·84	—63·80	—39 42 9·4	+0 56·7	0·207275	13 22
17	16 1 39·04	—64·16	—39 41 12·7	+1 10·9	0·206748	43 21
18	16 0 34·88	—64·46	—39 40 1·8	+1 25·2	0·206288	13 21
19	15 59 30·42	—64·65	—39 38 36·6	+1 39·3	0·205895	13 20
20	15 58 25·77	—64·64	—39 36 57·3	+1 53·2	0·205569	13 19
21	15 57 21·03	—64·75	—39 35 4·1	+2 7·0	0·205310	13 19
☍ 22	15 56 16·28	—64·68	—39 32 57·1	+2 20·6	0·205119	13 19
23	15 55 11·60	—64·51	—29 30 36·5	+2 34·0	0·204995	13 18
24	15 54 7·09	—64·25	—39 28 2·5	+2 47·2	0·204939	13 18
25	15 53 2·84	—63·92	—39 25 15·3	+3 0·2	0·204951	13 18
26	15 51 58·92	—63·50	—39 22 15·1	+3 12·9	0·205031	13 18
27	15 50 55·42	—62·99	—39 19 2·2	+3 25·2	0·205178	13 19
28	15 49 52·43	—62·41	—39 15 37·0	+3 37·4	0·205391	13 19
29	15 48 50·02	—61·74	—39 11 59·6	+3 49·2	0·205672	13 19
30	15 47 48·28	—61·00	—39 8 10·4	+4 0·6	5·206020	13 20
31	15 46 47·28	—60·19	—39 4 9·8	+4 11·7	0·206435	13 21
Juni 1	15 45 47·09	—59·29	—38 59 58·1	+4 22·4	0·206916	13 22
2	15 44 47·80	—58·34	—38 55 35·7	+4 32·8	0·207462	13 23
3	15 43 49·46	—57·31	—38 51 2·9	+4 42·8	0·208073	13 24
4	15 42 52·15	—56·22	—38 46 20·1	+4 52·3	0·208749	13 25
5	15 41 55·93	—55·06	—38 41 27·8	+5 1·4	0·209489	13 26
6	15 41 0·87	—53·84	—38 36 26·4	+5 10·0	0·210292	13 28
7	15 40 7·03	—52·57	—38 31 16·4	+5 18·3	0·211158	13 29
8	15 39 14·46	—51·23	—38 25 58·1	+5 26·0	0·212086	13 31
9	15 38 23·23		—38 20 32·1		0·213074	13 33

Opp. in *AR* Mai 22 Grösse = 12·09

Ephemeride für die Opposition 1886

12ʰ mittl. Berliner Zeit	AR (143)	Diff.	Decl. (143)	Diff.	Log. Entf. (143) von ♁	Aberr.-Zeit
1886 Aug. 24	23ʰ 31ᵐ 9ˢ36	—48·24	+1° 0′ 32″1	—0′ 45″9	0·279134	15ᵐ 47ˢ
25	23 30 21·12	—49·07	+0 59 46·2	—0 52·4	0·278189	15 45
26	23 29 32·05	—49·86	+0 58 53·8	—0 58·7	0·277300	15 43
27	23 28 42·19	—50·59	+0 57 55·1	—1 4·7	0·276470	15 41
28	23 27 51·60	—51 27	+0 56 50·4	—1 10·6	0·275698	15 39
29	23 27 0·33	—51·90	+0 55 39·8	—1 16·2	0·274988	15 37
30	23 26 8·43	—52·47	+0 54 23·6	—1 21·6	0·274339	15 36
31	23 25 15·96	—53·00	+0 53 2·0	—1 26·8	0·273751	15 35
Sept. 1	23 24 22·96	—53·46	+0 51 35·2	—1 31·8	0 273226	15 34
2	23 23 29·50	—53·87	+0 50 3·4	—1 36·5	0·272766	15 33
3	23 22 35·63	—54·24	+0 48 26·9	—1 40·9	0·272369	15 32
4	23 21 41·39	—54·53	+0 46 46·0	—1 45·3	0·272037	15 31
5	23 20 46·86	—54·78	+0 45 0·7	—1 49·2	0·271770	15 31
6	23 19 52·08	—54·97	+0 43 11·5	—1 53·0	0·271569	15 30
7	23 18 57·11	—55·00	+0 41 18·5	—1 56·6	0·271433	15 30
8	23 18 2·01	—55·18	+0 39 21·9	—1 59·8	0·271363	15 30
9	23 17 6·83	—55·21	+0 37 22·1	—2 2·9	0·271359	15 30
☍ 10	23 16 11·62	—55·18	+0 35 19·2	—2 5·7	0·271421	15 30
11	23 15 16·44	—55·09	+0 33 13 5	—2 8·2	0·271549	15 30
12	23 14 21·35	—54·96	+0 31 5·3	—2 10·5	0·271743	15 30
13	23 13 26·39	—54·76	+0 28 54·8	—2 12·5	0·272003	15 31
14	23 12 31·63	—54·51	+0 26 42·3	—2 14·3	0·272329	15 32
15	23 11 37·12	—54·20	+0 24 28·0	—2 15·7	0·272721	15 33
16	23 10 42·92	—53·85	+0 22 12·3	—2 17·0	0·273178	15 34
17	23 9 49·07	—53·43	+0 19 55·3	—2 17·9	0·273701	15 35
18	23 8 55·64	—52·97	+0 17 37·4	—2 18·6	0·274288	15 36
19	23 8 2·67	—52·46	+0 15 18·8	. 2 19·1	0·274940	15 37
20	23 7 10·21	—51·89	+0 12 59·7	—2 19·1	0·275656	15 39
21	23 6 18·32	—51·26	+0 10 40·6	—2 19·1	0·276435	15 41
22	23 5 27·06	—50·59	+0 8 21·5	—2 18·7	0·277276	15 43
23	23 4 36·47	—49·87	+0 6 2·8	—2 18·1	0 278180	15 45
24	23 3 46·60	—49·10	+0 3 44·7	—2 17·1	0·279144	15 47
25	23 2 57·50	—48·28	+0 1 27·6	—2 15·9	0·280169	15 49
26	23 2 9·22	—47·40	—0 0 48·3	—2 14·4	0·281256	15 51
27	23 1 21·82	—46·47	—0 3 2·7	—2 12·7	5·282399	15 53
28	23 0 35·35	—45·52	—0 5 15·4	—2 10·7	0·283594	15 56
29	22 59 49·83		—0 7 26·1		0·284856	15 59

Opp. in *AR* Sept. 10 Grösse = 12·65

Jahresephemeriden 1885 und 1886 des Planeten (143) „Adria".

0h mittlere Zeit			*AR*		Decl.		log Δ		log *r*
1885	Jan.	2	14h 48m5	+30m9	−24°43′	−3°13′	0·477	−35	0·411
		22	15 19 4	+27·7	−27 56	−2 56	442	−41	411
	Febr.	11	15 47·1	+22·3	−30 52	−2 41	401	−45	410
	März	3	16 9·4	+14·3	−33.33	−2 26	356	−50	410
		23	16 23·7	+ 2·1	−35 59	−2 4	306	−46	410
	April	12	16 25·8	− 9·3	−38 3	−1 27	260	−38	410
	Mai	2	16 16·5	−20·8	−39 30	−0 4	222	−14	411
		22	15 55·7	−18·6	−39 34	+1 22	208	+ 7	412
	Juni	11	15 37·1	−10·2	−38 12	+1 51	215	+30	413
	Juli	1	15 26·9	+ 2·3	−36 21	+2 6	245	+47	414
		21	15 29·2	+12·6	−34 15	+1 23	292	+49	415
	Aug.	10	15 41·8	+22·7	−32 52	+0 39	341	+49	416
		30	16 4·5	+28·1	−32 13	+0 28	390	+45	418
	Sept.	19	16 32·6	+32·6	−31 45	+0 20	435	+36	420
	Oct.	9	17 5·2	+35·7	−31 25	+0 32	471	+33	422
		29	17 40·9	+37·5	−30 53	+0 53	504	+24	424
	Nov	18	18 18·4	+38·3	−30 0	+1 17	528	+19	427
	Dec.	8	18 56·7	+38·3	−28 43	+1 47	547	+13	429
		28	19 35·0		−26 56		560		431
1886	Jan.	17	20 12·4	+35·7	−24 43	+2 37	567	− 0	433
	Febr.	6	20 48·1	+33·9	−22 6	+2 52	567	− 6	435
		26	21 22·0	+31·5	−19 14	+3 9	561	−12	437
	März	18	21 53·5	+29·0	−16 5	+3 11	549	−21	439
	April	7	22 22·5	+26·1	−12 54	+3 8	528	−24	441
		27	22 48·6	+22·6	− 9 46	+2 59	504	−31	444
	Mai	17	23 11·2	+18·2	− 6 47	+2 43	473	−38	446
	Juni	6	23 29·4	+12·3	− 4 4	+2 17	435	−41	449
		26	23 41·7	+ 5·3	− 1 47	+1 42	394	−46	451
	Juli	16	23 47·0	− 4·0	− 0 5	+0 55	348	−39	453
	Aug.	5	23 43·0	−12·2	+ 0 50	+0 10	309	−30	455
		25	23 30·8	−17·8	+ 1 0	−0 32	279	− 4	457
	Sept.	14	23 13·0	−16·4	+ 0 28	−0 45	275	+16	458
	Oct.	4	22 56·6	− 9·1	− 0 17	−0 23	291	+34	460
		24	22 47·5	+ 0·6	− 0 40	+0 14	325	+52	462
	Nov.	13	22 48·1	+ 8·3	− 0 26	+0 51	377	+50	463
	Dec.	3	22 56·4	+16·2	+ 0 25	+1 46	427	+44	464
		23	23 12·6		+ 2 11		471		466
1887	Jan.	12	23 32·7		+ 5 13		509		467

NACHTRAG.[1]

Während der Drucklegung dieser Abhandlung erhielt ich durch die „Astronomische Nachrichten" Kenntniss von drei Washingtoner Beobachtungen der Adria aus dem Jahre 1884. —

Da ein näheres Eingehen auf dieselben in der Abhandlung selbst eine Umarbeitung des über den Normalort 1884 Gesagten erfordert hätte, dieses aber nicht mehr thunlich war, will ich hier nur das Nöthige bemerken.

Die Washingtoner Beobachtungen zeigen mit den Elementen von pag. 773 dargestellt, die Fehler:

	$\Delta AR \cos D$	ΔD
1.	+3″79	+1″87
2.	+0·81	+1·65
3.	−1·06	+2·25

Vereinigt man diese Beobachtungen mit den nahe übereinstimmenden zwei Wiener von Januar 25 und Februar 2 (1884) zu einem Normalort, so lassen die Elemente in diesem die Differenzen übrig:

$$\Delta AR \cos D = +1''02 \qquad \Delta D = +0''90$$

Durch die Washingtoner Beobachtungen wird daher meine Vermuthung bestätigt, dass die Beobachtungen vom Januar 22 und 26 es seien, an denen grössere Fehler haften. —

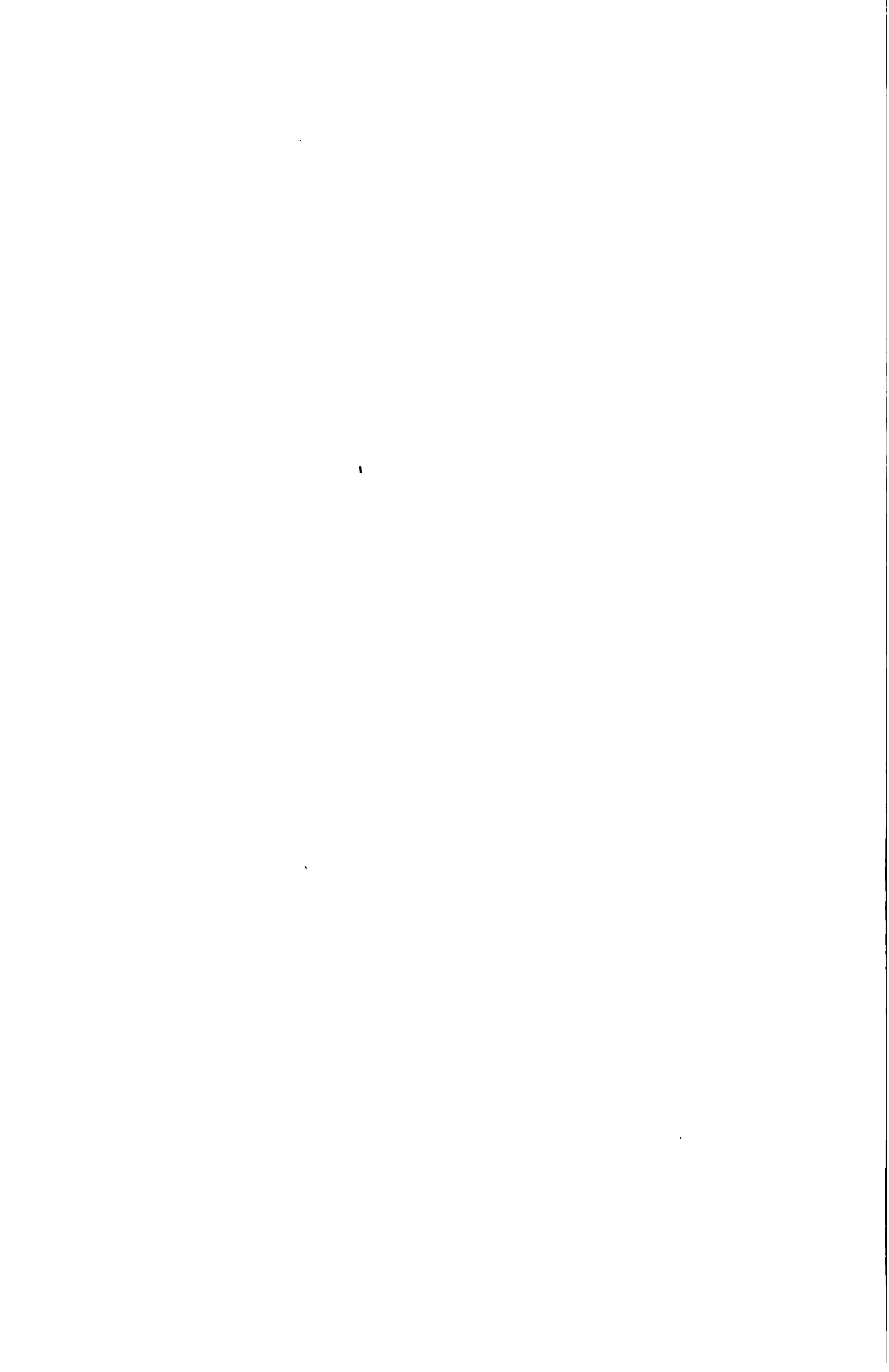
Ich lasse schliesslich die Washingtoner Beobachtungen selbst, corrigirt von Parallaxe und Aberration hier folgen:

				AR	D
1.	1884 Jan. 26	15h 41m 10s	mittl.	9h 6m 13s55	+24° 9′ 22″9
2.	Jan. 29	15 48 0	Berl.	9 3 4·08	+24 11 48·6
3.	Febr. 2	16 8 52	Zeit	8 58 47·95	+24 13 47·8

[1] Eingelangt am 5. Jänner 1885.







Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden **drei** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

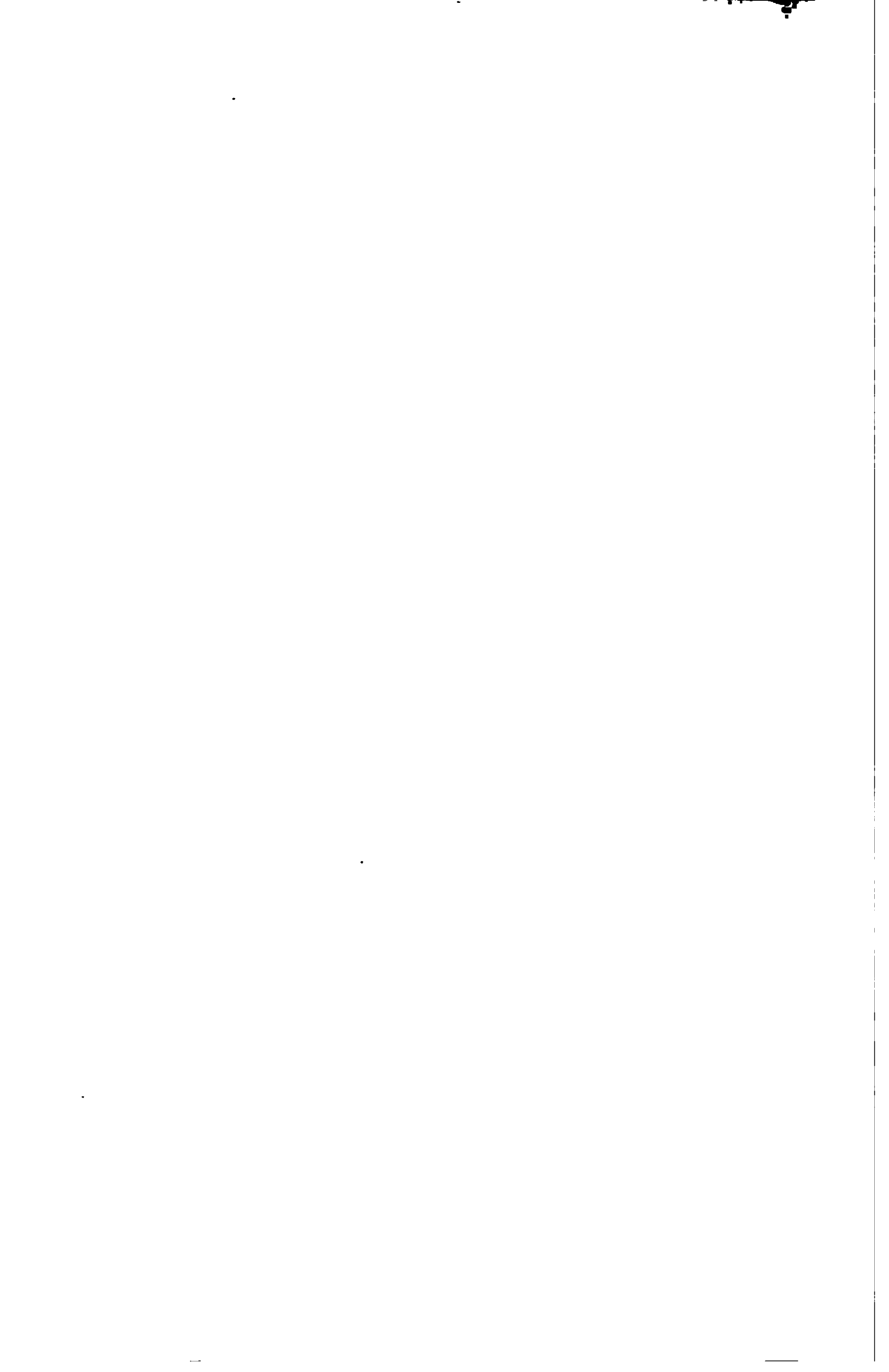
III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften" herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XC. BAND. V. HEFT.

Jahrgang 1884. — December.

(Mit 2 Tafeln und 27 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1885.

INHALT

des 5. Heftes December 1884 des XC. Bandes II. Abtheilung der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XC. Band. V. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

XXVI. SITZUNG VOM 4. DECEMBER 1884.

Herr Prof. F. Edward Frankland in London dankt für seine Wahl zum ausländischen correspondirenden Mitgliede dieser Classe.

Die Direction des k. k. Obergymnasiums in Cattaro dankt für die Betheilung dieser Lehranstalt mit akademischen Schriften.

Rector und Senat der königlichen technischen Hochschule zu Berlin übermitteln die aus Anlass der feierlichen Einweihung des neuen Gebäudes dieser Hochschule am 2. November 1884 erschienene Festschrift.

Das w. M. Herr Director E. Weiss übersendet seine in der Sitzung am 20. November l. J. besprochene und für die Denkschriften bestimmte Abhandlung: „Entwickelungen zum Lagrange'schen Reversionstheorem und Anwendung derselben auf die Lösung der Keppler'schen Gleichung", nebst einem Auszuge unter diesem Titel zur Publication in den Sitzungsberichten.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometer", von Herrn Prof. C. Pelz an der technischen Hochschule zu Graz.
2. Über die complexe Multiplication der elliptischen Functionen", von Herrn Dr. G. Pick, Privatdocent an der deutschen Universität in Prag.
3. „Zur mechanischen Theorie der Elektricität", von Herrn Prof. H. Januschke an der Staatsoberrealschule in Troppau.

4. „Über die Energie und den Zwangszustand im elektrostatischen Felde II.“, von Herrn Dr. Gottlieb Adler in Wien.
5. „Über die Ausnützung einiger Nahrungsmittel im Darmkanal des Menschen“, von Herrn H. Malfatti, stud. med. an der Universität zu Innsbruck.

Hierauf legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Prof. J. V. Janovsky an der Staatsgewerbeschule in Reichenberg vor, welches die Aufschrift trägt: „Über eine neue Classe von Nitrolen, beziehungsweise den Nitrolen nahestehenden Verbindungen.“

Ferner macht der Secretär die Mittheilung, dass Herr Prof. Dr. E. Lippmann in Wien das in der Sitzung dieser Classe vom 20. December 1883 hinterlegte versiegelte Schreiben mit der Aufschrift: „Über die Einwirkung organischer Hyperoxyde auf organische Verbindungen“ zurückgezogen habe.

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit der Herren Dr. H. Weidel und K. Hazura unter dem Titel: „Zur Kenntniss einiger Hydroproducte der Cinchoninsäure“.

Herr Prof. Dr. Josef Maria Eder an der Staatsgewerbeschule in Wien überreicht eine Abhandlung: „Über das Verhalten der Haloïdverbindungen des Silbers gegen das Sonnenspectrum und die Steigerung der Empfindlichkeit derselben gegen einzelne Theile des Spectrums durch Farbstoffe und andere Substanzen“.

Herr Dr. N. Herz in Wien überreicht eine zweite Abhandlung, betitelt: „Die Bahnbestimmung des Planeten (232) Russia.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften, ungarische in Budapest: Almanach, 1884. Budapest, 1884; 8°. — Emlékbeszédek. 1-sö kötet, No. VI—10; 2-ik kötet No. 1—2. Budapest, 1883 und 1884; 8°. — Értesitö. 17. Jahrg. No. 1—7. Budapest, 1883; 8°. — 18. Jahrg. No. 1—2. Budapest, 1884; 8°. — Értekezések a nemzetgazdaságtan és statisztika

köréből. 1. Bd. No. 6—10. Budapest, 1883; 8°. — II. Bd. No. 1—5. Budapest, 1883, 1884; 8°. — Évkönyvei. 17. Bd. 1. Theil. Budapest, 1883; 4°. — Nemzetgazdasági és statisztikai évkönyv. 1. Jahrg. 1883. Budapest, 1883; 8°. — Revue, ungarische. 1883. Heft 4—10. Budapest, 1883 und 1884; 8°. — 1884. Heft 1—5. 7. Budapest, 1884; 8°. — Ipolyi, A., Gróf Károlyi István emlékezete. Budapest, 1883; 4°. — Értekezések a mathematikai tudományok köréből. IX. Bd. No. 11—13. Budapest, 1882, 8°. — (Vergriffen ist Bd. X. Heft 1—11). Értekezések a természettudományok köréből. XII. Bd. Nr. 8—10. Budapest, 1882; 8°. — (Vergriffen ist: XIII. Bd. Nr. 1—12. XIV. Bd. Nr. 1). — Mathematikai és természettudományi Értesitö. I. Bd., Heft 1—2—9. Budapest, 1882 und 1883; 8°. 2. Bd., Heft 1—8—9. Budapest, 1883 und 1884; 8°.

Akademie, königliche, gemeinnütziger Wissenschaften zu Erfurt; Jahrbücher. N. F. Heft XII. Erfurt, 1884; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3ᵉ période. Tome XII. Nos. 3—10. Genève, Lausanne, Paris, 1884; 8°.

— Résumé météorologique de l'année 1883 pour Genève et le Grand Saint-Bernard, par A. Kammermann. Genève, 1884; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VIII. Nr. 88—92. Cöthen, 1884; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. 2ᵉ semestre, tome XCIX. Nos. 19 & 20. Paris, 1884; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. V. Jahrgang. 1884. Heft. XI; November. Berlin, 1884; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVII. Jahrgang. Nr. 16. Berlin, 1884; 4°.

— naturforschende, in Bern: Mittheilungen aus dem Jahre 1883. II. Heft, Nro. 1064—1072 und aus dem Jahre 1884. I. Heft, Nro. 1073—1082. Bern, 1884; 8°.

— naturforschende in Danzig: Schriften N. F. VI. Band, I. Heft. Danzig, 1884; 8°.

Gesellschaft, naturwissenschaftliche Isis in Dresden: Sitzungsberichte und Abhandlungen. Jahrg. 1884. Januar bis Juni. Dresden, 1884; 8⁰.

— Senckenbergische naturforschende: Abhandlungen. XIII. Band, 4. Heft. Frankfurt a. M., 1884; 4⁰.

— Oberhessische für Natur und Heilkunde: XXIII. Bericht. Giessen, 1884; 8⁰.

— Oberlausitzische der Wissenschaften: Neues Lausitzisches Magazin. LX. Band, I. Heft. Görlitz, 1884; 8⁰.

Hamburg, Stadtbibliothek: Gelegenheitsschriften pro 1882—1884. 70 Stücke. 4⁰.

Institut national genévois: Mémoires. Tome XV. 1880—1883. Genève, 1883; 4⁰.

Journal für praktische Chemie. N. F. Band XXX. 3. Heft. Nr. 14. Leipzig, 1884; 8⁰.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann. XXX. Band, 1884. XI. Gotha; 4⁰.

Museum of comparative Zoölogy at Harvard College. Memoirs. Vol. VIII. Nr. 3. Frankfort. 1883, 4⁰.

Nature, Vol. XXI, Nos 786 & 787. London, 1884; 8⁰.

Observatory, the of Harvard College: Annals. Vol. XIV. Part I. Cambridge, 1884; 4⁰.

Repertorium der Physik. XX. Band. 11. Heft. München und Leipzig, 1884; 8⁰.

Société des Ingénieurs civils: Mémoires et Compte rendu des travaux. 4ᵉ série, 37ᵉ année, 8ᵉ cahier. Paris, 1884; 8⁰.

Entwickelungen zum Lagrange'schen Reversionstheorem und Anwendung derselben auf die Lösung der Keppler'schen Gleichung.

Prof. Dr. E. Weiss.

(Auszug aus einer für die Denkschriften bestimmten Abhandlung.)

Sobald z durch eine Gleichung gegeben ist von der Form

$$z = x + \alpha f(z)$$

lautet bekanntlich der Lagrange'sche Reversionssatz:

$$\varphi(z) = \varphi + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} D^n[\varphi' f^{n+1}] \qquad 1)$$

wobei zur Vereinfachung $\varphi, \varphi', \varphi'' \ldots f, f' \ldots$ statt $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x) \ldots f(x), f'(x) \ldots$ geschrieben wurde, und $D^n F$ die allgemein übliche Bedeutung: $\dfrac{d^n[F(x)]}{dx^n}$ hat.

Man kann nun, wie eine successive Ausführung der betreffenden Operationen sofort erkennen lässt, $D^r f^p$ auf die Form bringen:

$$D^r f^p = p(p-1)(p-2)\ldots(p-r+1) f^{p-r} f'^r + \binom{r}{2}(p-1)(p-2)\ldots$$
$$\ldots(p-r+2) F_2^{(p-r+1)} f'^{r-2} +$$
$$+ \binom{r}{3}(p-1)(p-2)\ldots(p-r+3) F_3^{(p-r+2)} f'^{r-3} + \ldots$$
$$+ \binom{r}{m}(p-1)(p-2)\ldots(p-r+m) F_m^{(p-r+m-1)} f'^{r-m} + \ldots$$

wenn man die F-Functionen nach folgender Recursionsformel berechnet:

$$F_m^{(k)} = D F_{m-1}^{(k)} - k f F_{m-1}^{(k-1)} + (m-1) k f'' F_{m-2}^{(k-1)} \qquad \text{I)}$$

und als Anfangswerthe annimmt:

$$F_2^{(k)} = f^k f''$$
$$F_3^{(k)} = f^k f'''$$

Substituirt man dies in die Gleichung:

$$D^n(\varphi' f^{n+1}) = \varphi' D^n f^{n+1} + \binom{n}{1} \varphi'' D^{n-1} f^{n+1} + \binom{n}{2} \varphi''' D^{n-2} f^{n+1} + \ldots$$

und führt man weiter zur Abkürzung ein:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= f\varphi' \\ X_2 &= \frac{1}{2!} f^2 \varphi'' \\ X_3 &= \frac{1}{3!} f^3 \varphi''' + \frac{1}{2!} F_2^{(2)} \varphi' \\ &\vdots \\ X_m &= \frac{1}{m!} f^m \varphi^{(m)} + \frac{1}{(m-1)!} \Big[\binom{m-1}{2} F_2^{(m-1)} \varphi^{(m-2)} + \\ &\quad + \binom{m-1}{3} F_3^{(m-1)} \varphi^{(m-3)} + \binom{m-1}{4} F_4^{(m-1)} \varphi^{(m-4)} + \ldots \\ &\quad \ldots + \binom{m-1}{m-2} F_{m-2}^{(m-1)} \varphi'' + F_{m-1}^{(m-1)} \varphi' \Big] \end{aligned}\right\} \text{II)}$$

so erhält man:

$$\frac{D^n(\varphi' f^{n+1})}{(n+1)!} = X_1 f'^n + \binom{n}{1} X_2 f'^{n-1} + \binom{n}{2} X_3 f'^{n-2} + \binom{n}{3} X_4 f'^{n-3} + \ldots$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit α^{n+1} und summirt man dann das so gewonnene Resultat im Sinne der Gleichung 1) von $n = 0$ bis $n = \infty$, so bekommt man:

$$\varphi(z) = \varphi + \frac{\alpha}{1-\alpha f'} X_1 + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^2 X_2 + \ldots \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^m X_m + \ldots \quad 2)$$

Ist nicht irgend eine Function von z, sondern z selbst zu entwickeln, so ist $\varphi = x$, $\varphi' = 1$, $\varphi'' = \varphi''' = \varphi^{iv} \ldots\ldots = 0$ zu setzen; die X schrumpfen dadurch auf ihr letztes Glied zusammen und werden einfach:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= f \\ X_2 &= 0 \\ X_3 &= \frac{1}{2!} F_2^{(2)} \\ &\vdots \\ X_m &= \frac{1}{(m-1)!} F_{m-1}^{(m-1)} \end{aligned}\right\} \text{II*)}$$

Es ist also:

$$z = x + \frac{\alpha f}{1-\alpha f'} + \frac{1}{2!} F_2^{(2)} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^3 + \frac{1}{3!} F_3^{(3)} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^4 + \dots \quad 2^*)$$

Durch die Berechnung der Formelsysteme I und II ergeben sich für die F- und X-Functionen nachstehende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} F_2^{(k)} &= f^k f'' \\ F_3^{(k)} &= f^k f''' \\ F_4^{(k)} &= f^k f^{iv} + 3 k f^{k-1} f''^2 \\ F_5^{(k)} &= f^k f^{v} + 10 k f^{k-1} f'' f''' \\ F_6^{(k)} &= f^k f^{vi} + 5 k f^{k-1} (3 f'' f^{iv} + 2 f'''^2) + 15 k(k-1) f^{k-2} f''^3 \\ F_7^{(k)} &= f^k f^{vii} + 7 k f^{k-1} (3 f'' f^{v} + 5 f''' f^{iv}) + \\ &\qquad + 105 k (k-1) f^{k-2} f''^2 f''' \\ F_8^{(k)} &= f^k f^{viii} + 7 k f^{k-1} (4 f'' f^{vi} + 8 f''' f^{v} + 5 f^{iv 2}) + \\ &\qquad + 70 k (k-1) f^{k-2} (3 f''^2 f^{iv} + 4 f'' f'''^2) + \\ &\qquad + 105 k (k-1)(k-2) f^{k-3} f''^4 \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \text{I*)}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{1!} f \varphi' \\ X_2 &= \frac{1}{2!} f^2 \varphi'' \\ X_3 &= \frac{1}{3!} f^3 \varphi''' + \frac{1}{2} f^2 f'' \varphi' \\ X_4 &= \frac{1}{4!} f^4 \varphi^{iv} + \frac{1}{2.1!} f^3 f'' \varphi'' + \frac{1}{6} f^3 f''' \varphi' \end{aligned}\right\} \text{II**)}$$

$$
\left.\begin{aligned}
X_5 &= \frac{1}{5!}f^5\varphi^{v} + \frac{1}{2.2!}f^4f''\varphi''' + \frac{1}{6.1!}f^4f'''\varphi'' + \\
&\qquad + \frac{1}{24}f^3(ff^{iv} + 12f''^2)\varphi' \\
X_6 &= \frac{1}{6!}f^6\varphi^{vi} + \frac{1}{2.3!}f^5f''\varphi^{iv} + \frac{1}{6.2!}f^5f'''\varphi''' + \\
&\quad + \frac{1}{24.1!}f^4(ff^{iv} + 15f''^2)\varphi'' + \frac{1}{120}f^4(ff^{v} + 50f''f''')\varphi' \\
X_7 &= \frac{1}{7!}f^7\varphi^{vii} + \frac{1}{2.4!}f^6f''\varphi^{v} + \frac{1}{6.3!}f^6f'''\varphi^{iv} + \\
&\quad + \frac{1}{24.2!}f^5(ff^{iv} + 18f''^2)\varphi''' + \frac{1}{120.1!}f^5(ff^{v} + 60f''f''')\varphi'' + \\
&\qquad + \frac{1}{720}f^4[f^2f^{vi} + 30f(3f''f^{iv} + 2f'''^2) + 450f''^3]\varphi' \\
X_8 &= \frac{1}{8!}f^8\varphi^{viii} + \frac{1}{2.5!}f^7f''\varphi^{VI} + \frac{1}{6.4!}f^7f'''\varphi^{v} + \\
&\quad + \frac{1}{24.3!}f^6(ff^{iv} + 21f''^2)\varphi^{iv} + \frac{1}{120.2!}f^6(ff^{v} + 70f''f''')\varphi''' + \\
&\quad + \frac{1}{720}f^5[f^2f^{vi} + 35f(3f''f^{iv} + 2f'''^2) + 630f''^3]\varphi'' + \\
&\quad + \frac{1}{5040}f^5[f^2f^{vii} + 49f(3f''f^{v} + 5f'''f^{iv}) + 4410f''^2f''']\varphi' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \text{II**)}
$$

Wendet man diese Formeln auf die **Keppler**'sche Gleichung:

$$E = M + \varepsilon \sin E \tag{3}$$

an, so hat man zu setzen: $f = \sin M$, $f' = \cos M$, $f'' = -\sin M \ldots$ und es nimmt die Relation zur Berechnung der F-Functionen die Gestalt an:

$$
\left.\begin{aligned}
F_2^{(k)} &= -\sin M^{k+1} \\
F_3^{(k)} &= -\sin M^k \cos M \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F_m^{(k)} &= DF_{m-1}^{(k)} - k\cos M F_{m-1}^{(k-1)} - (m-1)k\sin M F_{m-2}^{(k-1)}
\end{aligned}\right\} \text{IV)}
$$

Die successive Berechnung der F nach dieser Formel liefert:

$$\left.\begin{aligned}
F_2^{(k)} &= -\sin M^{k+1}\\
F_3^{(k)} &= -\sin M^{k+1}.\operatorname{ctg} M\\
F_4^{(k)} &= +(3k+1)\sin M^{k+1}\\
F_5^{(k)} &= +(10k+1)\sin M^{k+1}.\operatorname{ctg} M\\
F_6^{(k)} &= -\sin M^{k+1}[(15k^2+1)-10k\operatorname{ctg} M^2]\\
F_7^{(k)} &= -\sin M^{k+1}.\operatorname{ctg} M(105k^2-49k+1)\\
F_8^{(k)} &= +\sin M^{k+1}[(105k^3-105k^2+63k+1)-\\
&\qquad -56k(5k-4)\operatorname{ctg} M^2]\\
F_9^{(k)} &= +\sin M^{k+1}[(1260k^3-2142k^2+1128k+1)\operatorname{ctg} M-\\
&\qquad -280k(k-1)\operatorname{ctg} M^3]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \text{IV*)}$$

Durch Substitution dieser Werthe in das Gleichungssystem II gewinnt man:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= \sin M.\varphi'\\
X_2 &= \sin M^2.\frac{1}{2}\varphi''\\
X_3 &= \sin M^3\left(\frac{1}{6}\varphi'''-\frac{1}{2}\varphi'\right)\\
X_4 &= \sin M^4\left(\frac{1}{4!}\varphi^{IV}-\frac{1}{2}\varphi''-\frac{1}{6}\operatorname{ctg} M\varphi'\right)\\
X_5 &= \sin M^5\left(\frac{1}{5!}\varphi^{V}-\frac{1}{4}\varphi'''-\frac{1}{6}\operatorname{ctg} M\varphi''+\frac{13}{24}\varphi'\right)\\
X_6 &= \sin M^6\left(\frac{1}{6!}\varphi^{VI}-\frac{1}{12}\varphi^{IV}-\frac{1}{12}\operatorname{ctg} M\varphi'''+\frac{2}{3}\varphi''+\right.\\
&\qquad \left.+\frac{17}{40}\operatorname{ctg} M\varphi'\right)\\
X_7 &= \sin M^7\left(\frac{1}{7!}\varphi^{VII}-\frac{1}{48}\varphi^{V}-\frac{1}{36}\operatorname{ctg} M\varphi^{IV}+\frac{19}{48}\varphi'''+\right.\\
&\qquad \left.+\frac{61}{120}\operatorname{ctg} M\varphi''-\frac{1}{720}[541-60\operatorname{ctg} M^2]\varphi'\right)\\
X_8 &= \sin M^8\left(\frac{1}{8!}\varphi^{VIII}-\frac{1}{240}\varphi^{VI}-\frac{1}{144}\operatorname{ctg} M\varphi^{V}+\frac{11}{72}\varphi^{IV}+\right.\\
&\left.+\frac{71}{240}\operatorname{ctg} M\varphi'''-\frac{1}{360}(368-35\operatorname{ctg} M^2)\varphi''-\frac{1601}{1680}\operatorname{ctg} M\varphi'\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \text{V)}$$

Nach diesen Vorbereitungen kann man nicht nur die excentrische Anomalie, sondern auch fast ebenso leicht jede andere Function derselben durch M ausdrücken. So ist, wenn man abkürzungsweise setzt:

$$\xi = \frac{\varepsilon \sin M}{1-\varepsilon \cos M}$$

Für $\frac{r}{a} = 1-\varepsilon \cos E$:

$$\varphi = 1-\varepsilon \cos M \qquad \varepsilon \sin M = +\varphi' = -\varphi''' = +\varphi^{v} = -\varphi^{vii} = \ldots$$
$$\varepsilon \cos M = +\varphi'' = -\varphi^{iv} = +\varphi^{vi} = -\varphi^{viii} = \ldots$$

Die Gleichungen V) liefern daher unmittelbar:

$$X_1 = +\varepsilon \sin^2 M$$

$$X_2 = +\varepsilon \sin^3 M.\frac{1}{2} \operatorname{ctg} M$$

$$X_3 = -\varepsilon \sin^4 M.\frac{2}{3}$$

$$X_4 = -\varepsilon \sin^5 M.\frac{17}{24} \operatorname{ctg} M$$

$$X_5 = +\varepsilon \sin^6 M.\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{6} \operatorname{ctg} M^2\right)$$

$$X_6 = +\varepsilon \sin^7 M.\frac{907}{720} \operatorname{ctg} M$$

$$X_7 = -\varepsilon \sin^8 M \left(\frac{368}{315} - \frac{223}{360} \operatorname{ctg} M^2\right)$$

. . . .

Ebenso erhält man für $\log\left(\frac{r}{a}\right) = \log(1-\varepsilon \cos E)$

$$\varphi = \log(1-\varepsilon \cos M)$$
$$\varphi' = +\xi$$
$$\varphi'' = +\xi \operatorname{ctg} M - \xi^2$$
$$\varphi''' = -\xi - 3\xi^2 \operatorname{ctg} M + 2\xi^3$$
$$\varphi^{iv} = -\xi \operatorname{ctg} M + \xi^2(4-3 \operatorname{ctg} M^2) + 12\xi^3 \operatorname{ctg} M - 6\xi^4$$

$$\varphi^{V} = +\xi + 15\xi^2 \operatorname{ctg} M - \xi^3(20 - 30\operatorname{ctg} M^2) - 60\xi^4 \operatorname{ctg} M + 24\xi^5$$

$$\varphi^{VI} = +\xi\operatorname{ctg} M - \xi^2(16 - 15\operatorname{ctg} M^2) - 30\xi^3(5\operatorname{ctg} M - \operatorname{ctg} M^3) + \\ + 30\xi^4(4 - 9\operatorname{ctg} M^2) + 360\xi^5 \operatorname{ctg} M - 120\xi^6$$

. . . .

und damit

$$X_1 = +\sin M.\xi$$

$$X_2 = +\sin M^2\left[\frac{1}{2}\xi\operatorname{ctg} M - \frac{1}{2}\xi^2\right]$$

$$X_3 = -\sin M^3\left[\frac{2}{3}\xi + \frac{1}{2}\xi^2\operatorname{ctg} M - \frac{1}{3}\xi^3\right]$$

$$X_4 = -\sin M^4\left[\frac{17}{24}\xi\operatorname{ctg} M - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{8}\operatorname{ctg} M^2\right)\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^3\operatorname{ctg} M + \frac{1}{4}\xi^4\right]$$

$$X_5 = +\sin M^5\left[\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{6}\operatorname{ctg}^2 M\right)\xi + \frac{25}{24}\xi^2\operatorname{ctg} M - \\ - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\operatorname{ctg} M^2\right)\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^4\operatorname{ctg} M + \frac{1}{5}\xi^5\right]$$

$$X_6 = +\sin M^6\left[\frac{907}{720}\xi\operatorname{ctg} M - \left(\frac{46}{45} - \frac{25}{48}\operatorname{ctg}^2 M\right)\xi^2 - \\ - \left(\frac{11}{8}\operatorname{ctg} M - \frac{1}{24}\operatorname{ctg} M^3\right)\xi^3 + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{8}\operatorname{ctg} M^2\right)\xi^4 + \\ + \frac{1}{2}\xi^5\operatorname{ctg} M - \frac{1}{6}\xi^6\right]$$

$$X_7 = -\sin M^7\left[\left(\frac{368}{315} - \frac{223}{360}\operatorname{ctg} M^2\right)\xi + \left(\frac{307}{144}\operatorname{ctg} M - \frac{1}{12}\operatorname{ctg} M^3\right)\xi^2 - \\ - \left(\frac{56}{45} - \frac{25}{24}\operatorname{ctg} M^2\right)\xi^3 - \left(\frac{41}{24}\operatorname{ctg} M - \frac{1}{8}\operatorname{ctg} M^3\right)\xi^4 + \\ + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} M^2\right)\xi^5 + \frac{1}{2}\xi^6\operatorname{ctg} M - \frac{1}{7}\xi^7\right]$$

. . . .

In gleicher Weise hat man für $v = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin E}{\cos E - \varepsilon}$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin M}{\cos M - \varepsilon}$$

$$\varphi' = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1 - \varepsilon\cos M}$$

$$\varphi'' = -\varphi'\xi$$
$$\varphi''' = -\varphi'[\xi \operatorname{ctg} M - 2\xi^2]$$
$$\varphi^{IV} = +\varphi'[\xi + 6\xi^2 \operatorname{ctg} M - 3!\,\xi^3]$$
$$\varphi^{V} = +\varphi'[\xi \operatorname{ctg} M - (8 - 6\operatorname{ctg}^2 M)\xi^2 - 36\xi^3 \operatorname{ctg} M + 4!\,\xi^4]$$
$$\varphi^{VI} = -\varphi'[\xi + 30\xi^2 \operatorname{ctg} M - 30(2 - 3\operatorname{ctg}^2 M)\xi^3 - 240\xi^4 \operatorname{ctg} M + 5!\,\xi^5]$$
$$\varphi^{VII} = -\varphi'[\xi \operatorname{ctg} M - 2(16 - 15\operatorname{ctg}^2 M)\xi^2 - 90(5\operatorname{ctg} M - \operatorname{ctg} M^3)\xi^3 + \\ + 120(4 - 9\operatorname{ctg} M^2)\xi^4 + 1800 \operatorname{ctg} M \xi^5 - 6!\,\xi^6]$$

. . . .

Die X lauten jetzt:

$$X_1 = +\varphi' \sin M$$
$$X_2 = -\varphi' \sin M^2 \,.\, \frac{1}{2}\xi$$
$$X_3 = -\varphi' \sin M^3 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\xi \operatorname{ctg} M - \frac{1}{3}\xi^2\right]$$
$$X_4 = -\varphi' \sin M^4 \left[\frac{1}{6}\operatorname{ctg} M - \frac{13}{24}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 \operatorname{ctg} M + \frac{1}{4}\xi^3\right]$$
$$X_5 = +\varphi' \sin M^5 \left[\frac{13}{24} + \frac{17}{40}\xi \operatorname{ctg} M - \left(\frac{17}{30} - \frac{1}{20}\operatorname{ctg} M^2\right)\xi^2 - \\ - \frac{3}{10}\xi^3 \operatorname{ctg} M + \frac{1}{5}\xi^4\right]$$
$$X_6 = +\varphi' \sin M^6 \left[\frac{17}{40}\operatorname{ctg} M - \left(\frac{541}{720} - \frac{1}{12}\operatorname{ctg} M^2\right)\xi - \\ - \frac{17}{24}\xi^2 \operatorname{ctg} M + \left(\frac{7}{12} - \frac{1}{8}\operatorname{ctg} M^2\right)\xi^3 + \frac{1}{3}\xi^4 \operatorname{ctg} M - \frac{1}{6}\xi^5\right]$$
$$X_7 = -\phi' \sin M^7 \left[\left(\frac{541}{720} - \frac{1}{12}\operatorname{ctg} M^2\right) + \frac{1601}{1680}\xi \operatorname{ctg} M - \\ - \left(\frac{2431}{2520} - \frac{25}{84}\operatorname{ctg}^2 M\right)\xi^2 - \left(\frac{169}{168}\operatorname{ctg} M - \frac{1}{56}\operatorname{ctg} M^3\right)\xi^3 + \\ + \left(\frac{25}{42} - \frac{3}{14}\operatorname{ctg} M^2\right)\xi^4 + \frac{5}{14}\xi^5 \operatorname{ctg} M - \frac{1}{7}\xi^6\right]$$

. . . .

Durch Einführung der Grösse ξ nimmt die Gleichung 2) für unser Problem die Gestalt an:

$$\varphi(E)=\varphi+\left(\frac{X_1}{\sin M}\right)\xi+\left(\frac{X_2}{\sin M^2}\right)\xi^2+\left(\frac{X_3}{\sin M^3}\right)\xi^3+\left(\frac{X_4}{\sin M^4}\right)\xi_4+\ldots 2^{**})$$

und man erhält daher nach den obigen Vorarbeiten, wenn man berücksichtiget, dass $\varepsilon\sin M=\xi(1-\varepsilon\cos M)$ ist, und mit m den Modul des Logarithmensystemes bezeichnet ohne Weiteres:

$$\left.\begin{aligned}E=M&+\left(\xi-\frac{1}{2}\xi^3+\frac{13}{24}\xi^5-\frac{541}{720}\xi^7+\frac{9509}{8064}\xi^9-\ldots\right)-\\&-\operatorname{ctg}M\left(\frac{1}{6}\xi^4-\frac{17}{40}\xi^6+\frac{1601}{1680}\xi^8-\frac{75591}{362880}\xi^{10}+\ldots\right)+\\&+\operatorname{ctg}M^2\left(\frac{1}{12}\xi^7-\frac{2}{5}\xi^9+\ldots\right)-\\&-\operatorname{ctg}M^3\left(\frac{1}{18}\xi^{10}-\ldots\right)+\ldots\end{aligned}\right\}\quad 5)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{r}{a}=(1-\varepsilon\cos M)\Bigg[&\left(1+\xi^2-\frac{2}{3}\xi^4+\frac{4}{5}\xi^6-\frac{368}{315}\xi^8+\ldots\right)+\\&+\operatorname{ctg}M\left(\frac{1}{2}\xi^3-\frac{17}{24}\xi^5+\frac{907}{720}\xi^7-\frac{98177}{40320}\xi^9+\ldots\right)-\\&-\operatorname{ctg}M^2\left(\frac{1}{6}\xi^6-\frac{223}{360}\xi^8+\ldots\right)+\\&+\operatorname{ctg}M^3\left(\frac{7}{72}\xi^9-\ldots\right)-\ldots\Bigg]\end{aligned}\right\}\quad 6)$$

$$\left.\begin{aligned}\log\left(\frac{r}{a}\right)=\log(1-\varepsilon\cos M)&+\\+m\Bigg[&\left(\xi^2-\frac{7}{6}\xi^4+\frac{9}{5}\xi^6-\frac{87}{28}\xi^8+\frac{16169}{2835}\xi^{10}-\ldots\right)+\\&+\operatorname{ctg}M\left(\frac{1}{2}\xi^3-\frac{29}{24}\xi^5+\frac{2017}{720}\xi^7-\frac{86579}{13440}\xi^9+\ldots\right)-\\&-\operatorname{ctg}M^2\left(\frac{7}{24}\xi^6-\frac{1001}{720}\xi^8+\frac{195679}{40320}\xi^{10}-\ldots\right)+\\&+\operatorname{ctg}M^3\left(\frac{2}{9}\xi^9-\frac{2279}{1440}\xi^{11}\ldots+\right)-\ldots\Bigg]\end{aligned}\right\}\quad 7)$$

$$
\left.\begin{aligned}
v = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin M}{\cos M-\varepsilon} + \\
+ \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos M}\Big[\Big(\xi-\xi^3+\frac{17}{12}\xi^5-\frac{167}{72}\xi^7+\frac{5519}{1344}\xi^9-\ldots\Big)- \\
-\operatorname{ctg} M\Big(\frac{1}{3}\xi^4-\frac{11}{10}\xi^6+\frac{102}{35}\xi^8-\frac{130519}{18144}\xi^{10}+\ldots\Big)+ \\
+\operatorname{ctg} M^2\Big(\frac{13}{60}\xi^7-\frac{1027}{840}\xi^9+\ldots\Big)- \\
-\operatorname{ctg} M^3\Big(\frac{43}{252}\xi^{10}-\ldots\Big)+\ldots\Big]
\end{aligned}\right\} \quad 8)
$$

Diese sämmtlichen vier Reihen haben dasselbe Bildungsgesetz. Bei jeder höheren Potenz von $\operatorname{ctg} M$ steigt der Potenzexponent des ersten Gliedes stets um drei Einheiten, oder, da ξ von der Ordnung der Excentricität ist, um drei Ordnungen, wenn man die Excentricität als eine Grösse erster Ordnung ansieht. Es werden daher in allen Reihen die einzelnen Gliedergruppen sehr rasch an Grösse abnehmen. Ausserdem ist die erste, also Hauptreihe, nur von der Grösse ξ abhängig, kann also mit diesem Argumente leicht tabulirt werden. Die übrigen Reihen fordern zwar eine Tafel mit doppeltem Eingange: ξ und M oder einfacher ε und M; allein da sie, wie eben gezeigt wurde, nur eine geringe Grösse besitzen, wird die Ausdehnung dieser Tafel ebenfalls nur eine geringe zu sein brauchen. So steigt beispielsweise bei der excentrischen Anomalie der Betrag aller auf die erste Gliedergruppe folgenden Reihen, selbst bei den stärkst excentrischen Asteroidenbahnen: Eva, Istria, Andromache u. s. w. mit etwa $\varepsilon = 0\cdot35$ im Maximum bei $M = 47°$ nicht einmal ganz auf 6′.

Die Reihe für die wahre Anomalie eignet sich aber in der hier gegebenen Form noch nicht zur Berechnung derselben. Zunächst ist die Berechnung des ersten Gliedes ziemlich zeitraubend; es ist aber dann überdies die ganze folgende Reihe mit dem Faktor $\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos M}$ multiplicirt, was neue Weitläufigkeiten mit sich führt. Es wird sich daher empfehlen, den ganzen Ausdruck vor allem nach steigenden Potenzen von ξ zu entwickeln. Zu diesem Ende haben wir:

$$\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos M}=\sqrt{1+2\xi\operatorname{ctg}M-\xi^2}$$

$$\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,.\sin M}{\cos M-\varepsilon}=\sqrt{1+2\xi\operatorname{ctg}M-\xi^2}:(\operatorname{ctg}M-\xi)$$

woraus sich bei Ausführung der Entwicklung dieser Ausdrücke nach steigenden Potenzen von ξ und nach einigen ziemlich zeitraubenden Reductionen schliesslich ergibt:

$$\left.\begin{aligned}
v-M= & \left(2\xi-\frac{4}{3}\xi^3+\frac{28}{15}\xi^5-\frac{184}{63}\xi^7+\ldots\right)+\\
& +\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{29}{24}\xi^4+\frac{539}{240}\xi^6-\frac{43301}{8064}\xi^8+\ldots\right)\operatorname{ctg}M+\\
& +\left(\frac{1}{6}\xi^5+\frac{16}{15}\xi^7+\ldots\right)\operatorname{ctg}^2M-\\
& -\left(\frac{1}{8}\xi^4+\frac{13}{24}\xi^6+\frac{99}{128}\xi^8+\ldots\right)\operatorname{ctg}M^3+\\
& +\left(\frac{1}{4}\xi^5+\frac{5}{6}\xi^7+\ldots\right)\operatorname{ctg}M^4-\\
& -\left(\frac{7}{16}\xi^6+\frac{727}{384}\xi^8+\ldots\right)\operatorname{ctg}M^5+\ldots
\end{aligned}\right\}\quad 9)$$

Setzt man nun in dieser Gleichung:

$$v_0\cos V=2\xi-\frac{4}{3}\xi^3+\frac{28}{15}\xi^5-\frac{184}{63}\xi^7+\ldots$$

$$v_0\sin V=\frac{1}{2}\xi^2-\frac{19}{24}\xi^4+\frac{539}{240}\xi^6-\frac{43301}{8064}\xi^8+\ldots$$

und den Inbegriff der übrigen Glieder v_1, so wird:

$$v-M=v_0\frac{\sin(M+V)}{\sin M}+v_1.$$

Die Grössen $\log v_0$ und V können ebenfalls mit dem Argumente ξ tabulirt werden. Die Grösse v_1 fordert wohl eine Tafel mit zwei Eingängen, allein auch diese Tafel wird wieder nur von einer sehr mässigen Ausdehnung sein dürfen, da auch hier das Maximum von v_1 bei den stärksten Excentricitäten, die wir unter den Asteroidenbahnen kennen, 9′ nur um ein ganz geringes übersteigt.

Die Gleichungen 5, 6, 7 und 9 liefern daher, das Vorhandensein entsprechender Hilfstafeln vorausgesetzt, eine, und zwar, wie ich glaube, die erste praktisch brauchbare Lösung der Aufgabe, in einer mässig excentrischen elliptischen Bahn durch ein direktes Verfahren aus der Epoche nicht nur die excentrische Anomalie, sondern auch mit Umgehung derselben unmittelbar den Radius Vektor und die wahre Anomalie zu finden. Die obigen Reihen haben nur den Nachtheil, dass sie für grössere ξ sehr langsam convergiren und dadurch die Berechnung von Tafeln nach denselben eine ziemlich mühsame Arbeit wird; doch werden wir weiter unten auch diesen Übelstand noch beseitigen.

Die Summation, welche auf die Gleichung 2 führte, kann man genau ebenso wieder auf diese Gleichung selbst anwenden. Schreibt man nämlich Kürze halber:

$$\zeta = \frac{\alpha}{1 - \alpha f'}; \; y = f f'' \xi^2,$$

so lautet die Gleichung 2)

$$\varphi(z) = \varphi + X_1 \zeta + X_2 \zeta^2 + X_3 \zeta^3 + \ldots \qquad 10)$$

und man kann sie nach Einsetzen der Werthe von X aus dem Gleichungssysteme II*) auch ordnen wie folgt:

$$\varphi(z) = \varphi + f \zeta \varphi' \left[1 + \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} y^2 + \frac{5}{8} y^3 + \frac{7}{8} y^4 + \ldots\right] +$$

$$+ \frac{1}{2!} f^2 \zeta^2 \varphi'' \left[1 + y + \frac{5}{4} y^2 + \frac{7}{4} y^3 + \frac{21}{8} y^4 + \ldots\right] +$$

$$+ \frac{1}{3!} f^3 \zeta^3 \varphi''' \left[1 + \frac{3}{2} y + \frac{9}{4} y^2 + \frac{7}{2} y^3 + \ldots\right] +$$

$$+ \frac{1}{4!} f^4 \zeta^4 \varphi^{IV} \left[1 + 2y + \frac{7}{2} y^2 + 6 y^3 + \ldots\right] +$$

$$+ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{3!} f^3 f''' \varphi' \zeta^4 \left[1 + \frac{5}{2} y + \frac{21}{4} y^2 + \frac{21}{2} y^3 + \ldots\right] +$$

$$+ \frac{1}{4!} f^4 (f^{IV} \varphi' + 4 f''' \varphi'') \zeta^5 [1 + 3y + 7y^2 + 15 y^3 + \ldots] +$$

$$+ \frac{1}{5!} f^5 (f^{V} \varphi' + 5 f^{IV} \varphi'' + 10 f''' \varphi''') \zeta^6 \left[1 + \frac{7}{2} y + 9 y^2 + \ldots\right] +$$

$$+\frac{1}{6!}f^6(f^{VI}\varphi'+6f^V\varphi''+15f^{IV}\varphi'''+20f'''\varphi^{IV})\zeta^7\left[1+4y+\frac{45}{4}y^2+\dots\right]+$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\frac{1}{72}f^5f'''^2\varphi'\zeta^7[6+28y+90y^2+\dots]+$$

$$+\frac{1}{144}f^6(f'''f^{IV}\varphi'+2f'''^2\varphi'')\zeta^8\left[7+36y+\frac{495}{4}y^2+\dots\right]+$$

$$+\frac{1}{5760}f^7(\{8f'''f^V+5f^{IV2}\}\varphi'+40f'''f^{IV}\varphi''+$$
$$+40f'''^2\varphi''')\zeta^9[8+45y+\dots]+$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

was wir für den Augenblick so schreiben wollen:

$$\varphi(z)=\varphi+f\zeta\varphi'.p_1+\frac{1}{2!}f^2\zeta^2\varphi''.p_2+\frac{1}{3!}f^3\zeta^3\varphi'''.p_3+$$
$$+\frac{1}{4!}f^4\zeta^4\varphi^{IV}.p_4+\dots+$$

$$+\frac{1}{3!}f^3f'''\varphi'\zeta^4.q_4+\frac{1}{4!}f^4(f^{IV}\varphi'+4f'''\varphi'')\zeta^5.q_5+$$
$$+\frac{1}{5!}f^5(f^V\varphi'+5f^{IV}\varphi''+10f'''\varphi''')\zeta^6.q_6+\dots+$$

$$+\frac{1}{72}f^5f'''^2\varphi'\zeta^7.r_7+\frac{1}{144}f^6(f'''f^{IV}\varphi'+2f'''^2\varphi'')\zeta^8r_8+\dots+$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Die mit $p_1, p_2, p_3\dots; q_4, q_5, q_6\dots; r_7, r_8, r_9\dots$ bezeichneten Reihen sind, wie leicht ersichtlich, wieder Potenzreihen und können demgemäss summirt werden. So ist:

$$p_1=1+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2+\frac{5}{8}y^3+\frac{7}{8}y^4+\dots=$$
$$=\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}=\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}$$

$$p_2=1+y+\frac{5}{4}y^2+\frac{7}{4}y^3+\dots=\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^2$$

$$p_3=1+\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}y^2+\frac{7}{2}y^3+\dots=\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

53*

$$q_4 = 1 + \frac{5}{2}y + \frac{21}{4}y^2 + \frac{21}{2}y^3 + \ldots = \frac{1}{\sqrt{1-2y}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^3$$

$$q_5 = 1 + 3y + 7y^2 + 15y^3 + \ldots = \frac{1}{\sqrt{1-2y}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^4$$

$$q_6 = 1 + \frac{7}{2}y + 9y^2 + \ldots = \frac{1}{\sqrt{1-2y}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^5$$

. . . .

$$r_7 = 6 + 28y + 90y^2 + \ldots = \frac{1+5\sqrt{1-2y}}{(1-2y)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^5$$

$$r_8 = 7 + 36y + \frac{495}{4}y^2 + \ldots = \frac{1+6\sqrt{1-2y}}{(1-2y)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^6$$

$$r_9 = 8 + 45y + \ldots = \frac{1+7\sqrt{1-2y}}{(1-2y)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^7$$

. . . .

Die ,p_n, q_n, r_n . . . genannten Functionen stehen daher in folgendem einfachen Zusammenhange:

$$p_n = p_1^n = \left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^n$$

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{1-2y}}\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^{n-1} = \frac{1}{ny^{n-1}} \cdot \frac{d(y^n p_n)}{dy}$$

$$r_n = \frac{1+(n-2)\sqrt{1-2y}}{(\sqrt{1-2y})^3} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^{n-2} = \frac{1}{y^{n-2}} \cdot \frac{d(y^{n-1}q_n)}{dy}$$

Der Analogie nach lässt sich vermuthen, dass die nächste Gliedergruppe mit Funktionen multiplicirt sein werde, deren allgemeiner Ausdruck gegeben ist durch:

$$s_n = \frac{1}{y^{n-3}} \cdot \frac{d(y^{n-2}r_n)}{dy} =$$

$$= \frac{3+3(n-3)\sqrt{1-2y}+(n-2)(n-4)(1-2y)}{(1-2y)^{\frac{5}{2}}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^{n-3}$$

Dies bestätiget auch in der That eine Weiterführung der Rechnung bis auf Glieder höherer Ordnung.

Das Eintragen dieser Ausdrücke in die frühere Gleichung liefert, wenn man statt y wieder seinen Werth $ff''\zeta^2$ restituirt und p_1 ersetzt durch:

$$p = p_1 f\zeta = \frac{1-\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}{f''\zeta} = \frac{2f\zeta}{1+\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(z) &= \varphi + p\varphi' + \frac{1}{2!}p^2\varphi'' + \frac{1}{3!}p^3\varphi''' + \frac{1}{4!}p^4\varphi^{IV} + \ldots + \\
&+ \frac{p^3\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\cdot\Big[\frac{1}{3!}f'''\varphi' + \frac{1}{4!}(f^{IV}\varphi' + 4f'''\varphi'')p + \\
&+ \frac{1}{5!}(f^{V}\varphi' + 5f^{IV}\varphi'' + 10f'''\varphi''')p^2 + \\
&+ \frac{1}{6!}(f^{VI}\varphi' + 6f^{V}\varphi'' + 15f^{IV}\varphi''' + 20f'''\varphi^{IV})p^3 + \ldots\Big] + \\
&+ \frac{1}{72}\cdot\frac{p^5\zeta^2}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\Big[(1+5\sqrt{1-2ff''\zeta^2})f'''^2\varphi' + \\
&+ \frac{1}{2}(1+6\sqrt{1-2ff''\zeta^2})(f'''f^{IV}\varphi' + 2f'''^2\varphi'')p + \\
&+ \frac{1}{80}(1+7\sqrt{1-2ff''\zeta^2})(\{8f'''f^{V} + 5f^{IV2}\}\varphi' + \\
&+ 40f'''f^{IV}\varphi'' + 40f'''^2\varphi''')p^2 + \ldots\Big] + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad 11)$$

Die Relation:

$$p = \frac{2f\zeta}{1+\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}$$

zieht die folgenden nach sich:

$$\zeta = \frac{2p}{2f+f''p^2}\,;\ \sqrt{1-2ff''\zeta^2} = \frac{2f-f''p^2}{2f+f''p^2}$$

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}} = \frac{2p}{2f-f''p^2}.$$

Mit Hilfe derselben kann man die Gleichung 11) bloss durch p ausdrücken und erhält dann:

$$\varphi(z) = \varphi + P_1 p + P_2 p^2 + P_3 p^3 + P_4 p^4 + \ldots \qquad 11^*)$$

wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= \varphi' \\
P_2 &= \frac{1}{2}\varphi'' \\
P_3 &= \frac{1}{3!}\varphi''' \\
P_4 &= \frac{1}{4!}\varphi^{IV} + \cdot\frac{1}{f-\frac{1}{2}f''p^2}\cdot\frac{1}{3!}f'''\varphi' \\
P_5 &= \frac{1}{5!}\varphi^{V} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{f-\frac{1}{2}f''p^2}(f^{IV}\varphi' + 4f'''\varphi'') \\
P_6 &= \frac{1}{6!}\varphi^{VI} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{\left(f-\frac{1}{2}f''p^2\right)}(f^{V}\varphi' + 5f^{IV}\varphi'' + 10f'''\varphi''') \\
P_7 &= \frac{1}{7!}\varphi^{VII} + \frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{\left(f-\frac{1}{2}f''p^2\right)}(f^{VI}\varphi' + 6f^{V}\varphi'' + 15f^{IV}\varphi''' + \\
&\qquad + 20f'''\varphi^{IV}) + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\left(f-\frac{1}{2}f''p^2\right)^2}\cdot ff'''^2\varphi' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \text{VI)}$$

Die Gleichung 11*) unterscheidet sich von der Gleichung 2) nur dadurch, dass hier im Allgemeinen nach steigenden Potenzen von p, dort nach solchen von ζ entwickelt ist. Vergleicht man aber die hier auftretenden P-Functionen mit den analogen X-Functionen (Gleichungssystem II**), so fällt sofort auf, dass der Bau der P bedeutend einfacher ist, und dass hier die numerischen Coëfficienten erheblich kleiner sind als dort. Es rührt diess daher, dass durch die neuerliche Summirung wieder ein Theil der Gieder höherer Ordnung aus den späteren Gliedern herausgezogen worden ist. Die Anwendung der Gleichung 11*) wird aber dadurch erschwert, dass p viel complicirter gebaut ist, als ζ. Vergleicht man indess p mit einer anderen Function η, die definirt ist durch die Gleichung:

$$\eta = \frac{f\zeta}{\sqrt{1-ff''\zeta^2}}: \qquad \zeta = \frac{\eta}{\sqrt{f^2+ff''\eta^2}}$$

so findet man, dass η von p nur um eine Grösse fünfter Ordnung abweicht, sobald man α als eine Grösse erster Ordnung gelten lässt. Es ist nämlich

$$p=\frac{2f\,\zeta}{1+\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}=\frac{2f\eta}{\sqrt{f^2+ff''\eta^2}+\sqrt{f^2-ff''\eta^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{f^2+ff''\eta^2}-\sqrt{f^2-ff''\eta^2}}{f''\eta}$$

$$p=\eta\left(1+\frac{1}{8}\cdot\frac{f''^2}{f^2}\eta^4+\frac{7}{128}\frac{f''^4}{f^4}\eta^8+\ldots\right).$$

Man erreicht daher ebenfalls fast alle Vortheile der zweiten Summirung, wenn man p durch das viel einfachere η ersetzt; der ganze Unterschied läuft darauf hinaus, dass dann in 11*) die P von P_5 angefangen etwas complicirter ausfallen.

Schon die zwischen p_n, q_n, $r_n\ldots.$ stattfindende Relation, noch deutlicher aber der Bau der P (Gleichungssystem VI) lässt erkennen, dass man mit der Summation auf dem hier eingeschlagenen Wege schrittweise immer weiter fortfahren könnte. Doch kann ich aus Zeitmangel diese Untersuchungen nicht weiter fortführen, so verlockend es auch ist und so interessante Resultate sich voraussichtlich daraus auch ergeben würden.

Die obigen Erörterungen haben gezeigt, dass, wenn man die Entwickelung von $\varphi(z)$ statt nach Potenzen von $\zeta=\frac{\alpha}{1-\alpha f'}$ nach solchen von $p=\frac{2f\zeta}{1+\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}$ oder auch $\eta=\frac{f\zeta}{\sqrt{1-ff''\zeta^2}}$ vornimmt die so entstehenden Reihen rascher convergiren. Von welcher Tragweite diess sei, können wir leicht an dem Keppler'schen Probleme prüfen. In diesem speciellen Falle ist:

$$\eta=\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}};\qquad \xi=\frac{\varepsilon\sin M}{1-\varepsilon\cos M}=\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}.$$

Führen wir daher in die Gleichungen 5, 6, 7 und 9 η statt ξ ein, so bekommen wir:

$$\left.\begin{aligned}E=M+&\left(\eta+\frac{1}{6}\eta^5-\frac{1}{45}\eta^7+\frac{83}{840}\eta^9\ldots\right)-\\&-\operatorname{ctg}M\left(\frac{1}{6}\eta^4-\frac{11}{120}\eta^6+\frac{299}{1680}\eta^8-\frac{55351}{362880}\eta^{10}\ldots\right)+\\&+\operatorname{ctg}M^2\left(\frac{1}{12}\eta^7-\frac{13}{120}\eta^9+\ldots\right)-\\&-\operatorname{ctg}M^3\left(\frac{1}{18}\eta^{10}-\ldots.\right)+\ldots.\end{aligned}\right\}5^*)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{r}{a}=(1-\varepsilon\cos M)\Big[&\left(1+\eta^2+\frac{1}{3}\eta^4+\frac{7}{15}\eta^6+\frac{73}{315}\eta^8+\ldots\right)+\\&+\operatorname{ctg}M\left(\frac{1}{2}\eta^3+\frac{1}{24}\eta^5+\frac{307}{720}\eta^7-\frac{251}{8064}\eta^9+\ldots\right)-\\&-\operatorname{ctg}M^2\left(\frac{1}{6}\eta^6-\frac{43}{360}\eta^8+\ldots\right)+\\&+\operatorname{ctg}M^3\left(\frac{7}{72}\eta^9-\ldots\right)-\ldots\Big]\end{aligned}\right\}6^*)$$

$$\left.\begin{aligned}\log\left(\frac{r}{a}\right)=&\log(1-\varepsilon\cos M)+\\&+m\Big[\left(\eta^2-\frac{1}{6}\eta^4+\frac{7}{15}\eta^6-\frac{29}{140}\eta^8+\frac{1157}{2835}\eta^{10}\ldots\right)+\\&+\operatorname{ctg}M\left(\frac{1}{2}\eta^3-\frac{11}{24}\eta^5+\frac{517}{720}\eta^7-\frac{6691}{8064}\eta^9+\ldots\right)-\\&-\operatorname{ctg}M^2\left(\frac{7}{24}\eta^6-\frac{371}{720}\eta^8+\frac{2801}{2688}\eta^{10}-\ldots\right)+\\&+\operatorname{ctg}M^3\left(\frac{2}{9}\eta^9-\frac{839}{1440}\eta^{11}+\ldots\right)-\ldots\Big]\end{aligned}\right\}7^*)$$

$$\left.\begin{aligned}&v=M+\left(2\eta-\frac{1}{3}\eta^3+\frac{37}{60}\eta^5-\frac{65}{504}\eta^7+\ldots\right)+\\&+\operatorname{ctg}M\left(\frac{1}{2}\eta^2-\frac{17}{24}\eta^4+\frac{79}{240}\eta^6-\frac{70849}{40320}\eta^8+\ldots\right)+\\&+\operatorname{ctg}M^2\left(\frac{1}{6}\eta^5+\frac{89}{60}\eta^7+\ldots\right)-\operatorname{ctg}M^3\left(\frac{1}{8}\eta^4+\frac{19}{24}\eta^6+\ldots\right)+\ldots\end{aligned}\right\}9^*)$$

Die Convergenz dieser Reihen ist thatsächlich eine weitaus stärkere als die der früheren, nicht nur weil die Coëfficienten, und zwar hauptsächlich die der späteren Glieder jeder Gruppe, viel kleiner geworden sind, sondern weil überdiess auch $\eta < \xi$

ist. Es werden daher Tafeln nach diesen Formeln mit viel weniger Mühe und Zeitaufwand berechnet werden können.

Nach dem Einsetzen der Werthe von $X_1, X_2, \ldots\ldots$ in die Gleichung 2) oder die ihr gleichgeltende 10) lassen sich übrigens die Glieder noch auf verschiedene andere Arten so gruppiren, dass damit erhebliche Vereinfachungen erzielt werden. In theoretischer Beziehung die interessanteste dürfte aber die folgende sein, bei welcher die schon früher eingeführten Bezeichnungen:

$$\zeta = \frac{\alpha}{1-\alpha f'}; \quad \xi = \frac{\alpha f}{1-\alpha f'}$$

beibehalten sind.

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = & \left(\varphi + \frac{\xi}{1}\varphi' + \frac{\xi^2}{2!}\varphi'' + \frac{\xi^3}{3!}\varphi''' + \frac{\xi^4}{4!}\varphi^{iv} + \ldots\right) + \\
& + \xi^2\zeta\left(\frac{1}{2!}f'' + \frac{\xi}{3!}f''' + \frac{\xi^2}{4!}f^{iv} + \ldots\right)\left(\varphi' + \frac{\xi}{1!}\varphi'' + \frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + \ldots\right) + \\
& + \frac{3}{4!}f''^2\xi^3\zeta^2\left(4\varphi' + 5\xi\varphi'' + 6\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + 7\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + \ldots\right) + \\
& + \frac{10}{5!}f''f'''\xi^4\zeta^2\left(5\varphi' + 6\xi\varphi'' + 7\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \ldots\right) + \\
& + \frac{5}{6!}(3f''f^{iv} + 2f'''^2)\xi^5\zeta^2(6\varphi' + 7\xi\varphi'' + \ldots) + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{1}{4!}f''^3\xi^4\zeta^3\left(15\varphi' + 21\xi\varphi'' + 28\frac{\xi^2}{1.2}\varphi''' + 36.\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + \ldots\right) + \\
& + \frac{1}{4!}f''^2f'''\xi^5\zeta^3(21\varphi' + 28\xi\varphi'' + \ldots) + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$\varphi(x+\xi) = \varphi + \frac{\xi}{1}\varphi' + \frac{\xi^2}{1.2}\varphi'' + \frac{\xi^3}{3!}\varphi''' + \ldots$$

$$\varphi'(x+\xi) = \varphi' + \frac{\xi}{1}\varphi'' + \frac{\xi^2}{1.2}\varphi''' + \frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + \ldots$$

und ausserdem:

$$\left.\begin{aligned}
&m\varphi'+(m+1)\xi\varphi''+(m+2)\frac{\xi^2}{2!}\varphi'''+(m+3)\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{IV}+\ldots+\\
&\qquad+(m+r)\frac{\xi^r}{r!}\varphi^{(r+1)}+\ldots=m\varphi'(x+\xi)+\frac{\xi}{1}\varphi''(x+\xi)\\
&m\varphi'+(m+n)\xi\varphi''+(m+2n+1)\frac{\xi^2}{1.2}\varphi'''+\\
&\qquad+(m+3n+3)\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{IV}+\ldots+\left(m+rn+\binom{r}{2}\right)\frac{\xi^r}{r!}\varphi^{(r+1)}+\ldots=\\
&\qquad=m\varphi'(x+\xi)+n\frac{\xi}{1}\varphi''(x+\xi)+\frac{\xi^2}{1.2}\varphi'''(x+\xi)\\
&m\varphi'+(m+n)\frac{\xi}{1}\varphi''+(m+2n+p)\frac{\xi^2}{1.2}\varphi'''+\\
&\qquad+(m+3n+3p+1)\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{IV}+\ldots+\\
&\quad+\left(m+rn+\binom{r}{2}p+\binom{r}{3}\right)\frac{\xi^r}{3!}\varphi^{(r+1)}+\ldots=\\
&\quad=m\varphi'(x+\xi)+n\frac{\xi}{1}\varphi''(x+\xi)+p\frac{\xi^2}{1.2}\varphi'''(x+\xi)+\frac{\xi^4}{3!}\varphi^{IV}(x+\xi)
\end{aligned}\right\}\text{VII)}$$

u. s. w.

Führt man also zur Abkürzung ein:

$$\begin{aligned}
L_1=&\frac{\xi^3}{f}\left(\frac{1}{2!}f''+\frac{\xi}{3!}f'''+\frac{\xi^2}{4!}f^{IV}+\ldots\right)+\\
&+\frac{\xi^5}{f^2}\left[\frac{1}{2}f''^2+\frac{5}{12}f''f'''\xi+\frac{1}{24}(3f''f^{IV}+2f'''^2)\xi^2+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{7}{6!}(3f''f^{V}+5f'''f^{IV})\xi^3+\ldots\right]+\\
&+\frac{\xi^7}{f^3}\left[\frac{5}{8}f''^3+\frac{7}{8}f''^2f'''\xi+\ldots\right]+\ldots\\
L_2=&\frac{\xi^6}{f^2}\left[\frac{1}{8}f''^2+\frac{1}{12}f''f'''\xi+\frac{1}{144}(3f''f^{IV}+2f'''^2)\xi^2+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{6!}(3f''f^{V}+5f'''f^{IV})\xi^3+\ldots\right]+\\
&+\frac{\xi^8}{f^3}\left[\frac{1}{4}f''^3+\frac{7}{24}f''^2f'''\xi+\ldots\right]+\ldots\\
L_3=&\frac{\xi^9}{f^3}\left[\frac{1}{48}f''^3+\frac{1}{48}f''^2f'''\xi+\ldots\right]+\ldots
\end{aligned}$$

so gewinnt man die interessante Formel:

$$\varphi(z) = \varphi(x+\xi) + L_1\varphi'(x+\xi) + L_2\varphi''(x+\xi) + L_3\varphi'''(x+\xi) + \dots \quad 12)$$

Zwischen den einzelnen Gliedergruppen der L bestehen sehr merkwürdige einfache Relationen, nämlich:

$$\frac{1}{8}f''^2 + \frac{1}{12}f''f'''\xi + \frac{1}{144}(3f''f^{IV} + 2f'''^2)\xi^2 + \frac{1}{6!}(3f''f^{V} + 5f'''f^{IV})\xi^3 + \dots =$$
$$= \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2!}f'' + \frac{\xi}{3!}f''' + \frac{\xi^2}{4!}f^{IV} + \dots\right)^2$$

$$\frac{1}{48}f''^3 + \frac{1}{48}f''^2 f'''\xi + \dots = \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2!}f'' + \frac{\xi}{3!}f''' + \frac{\xi^2}{4!}f^{IV} + \dots\right)^3$$

. . . .

$$\frac{1}{2}f''^2 + \frac{5}{12}f''f'''\xi + \frac{1}{24}(3f''f^{IV} + 2f'''^2)\xi^2 + \frac{7}{6!}(3f''f^{V} + 5f'''f^{IV})\xi^3 + \dots =$$
$$= \left(\frac{1}{2}f'' + \frac{\xi}{3!}f''' + \frac{\xi^2}{4!}f^{IV} + \dots\right)\left(f'' + \frac{\xi}{2}f''' + \frac{\xi^2}{3!}f^{IV} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{4}f''^3 + \frac{7}{24}f''^2 f'''\xi + \dots =$$
$$= \left(\frac{1}{2}f'' + \frac{\xi}{3!}f''' + \frac{\xi^2}{4!}f^{IV} + \dots\right)^2\left(f'' + \frac{\xi}{2}f''' + \frac{\xi^2}{3!}f^{IV} + \dots\right)$$

. . . .

Schreiben wir daher:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= \frac{\xi^3}{f}\left[\frac{1}{2!}f''' + \frac{\xi}{3!}f^{IV} + \frac{\xi^2}{4!}f^{V} + \frac{\xi^3}{6!}f^{VI} + \dots\right] = \\ &\qquad = \zeta[f(x+\xi) - f - \xi f'] \\ \lambda &= \frac{\xi^2}{f}\left[f'' + \frac{\xi}{2!}f''' + \frac{\xi^2}{3!}f^{IV} + \dots\right] = \zeta[f'(x+\xi) - f'] \end{aligned}\right\} \text{VIII)}$$

. . . .

so stellen sich die L in der Form dar:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \varkappa + \varkappa\lambda + \dots \\ L_2 &= \frac{1}{2!}\varkappa^2 + \varkappa^2\lambda + \dots \\ L_3 &= \frac{1}{3!}\varkappa^3 + \dots \end{aligned}\right\} \text{VIII*)}$$

und die Gleichung 12 vereinfacht sich abermals. Denn wir haben jetzt:

$$\varphi(z)=\Big[\varphi(x+\xi)+\varkappa\varphi'(x+\xi)+\frac{\varkappa^2}{1.2}\varphi''(x+\xi)+\frac{\varkappa^3}{3!}\varphi'''(x+\xi)+\ldots\Big]+$$
$$+\lambda\varkappa\Big[\varphi'(x+\xi)+\frac{\varkappa}{1}\varphi''(x+\xi)+\ldots\Big]+\ldots$$

d. h.

$$\varphi(z)=\varphi(x+\xi+\varkappa)+\varkappa\lambda\varphi'(x+\xi+\varkappa)+\ldots \qquad 13)$$
$$\xi+\varkappa=\frac{\xi}{f}[f(x+\xi)-\xi f']$$

Gehen wir, von den soeben gemachten Erfahrungen geleitet, jetzt nochmals auf die Gleichung 11) zurück, um an ihr eine ähnliche Umstellung vorzunehmen, so erkennen wir in der ersten Horizontalreihe dieser Gleichung sofort $\varphi(x+p)$. Die zweite Gliedergruppe verwandelt sich, wenn man sie nach den Functionen φ', φ'' $\varphi'''\ldots$ ordnet, unmittelbar in den Ausdruck:

$$\frac{p^3\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\Big(\frac{1}{3!}f'''+\frac{1}{4!}f^{IV}p+\frac{1}{5!}f^{V}p^2+\ldots\Big)\varphi'(x+p)$$

Die nächste mit $\frac{1}{72}\frac{p^5\zeta^2}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$ multiplicirte Gruppe lautet bis auf die 12. Ordnung vervollständigt und wieder nach φ', φ'', $\varphi'''\ldots$ geordnet:

$$\varphi'\Big[(1+5\sqrt{1-2ff''\zeta^2})f'''^2+\frac{1}{2}(1+6\sqrt{1-2ff''\zeta^2})f'''f^{IV}p+$$
$$+\frac{1}{80}(1+7\sqrt{1-2ff''\zeta^2})(8f'''f^{V}+5f^{IV2})p^2+$$
$$+\frac{1}{120}(1+8\sqrt{1-2ff''\zeta^2})(2f'''f^{VI}+3f^{IV}f^{V})p^3+$$
$$+\frac{1}{8400}(1+9\sqrt{1-2ff''\zeta^2})(20f'''f^{VII}+35f^{IV}f^{VI}+21f^{V2})p^4+$$
$$+\frac{1}{16800}(1+10\sqrt{1-2ff''\zeta^2})(5f'''f^{VIII}+10f^{IV}f^{VII}+$$
$$+14f^{V}f^{VI})p^5+\ldots\Big]+$$

$$+\varphi''p\Big[(1+6\sqrt{1-2ff''\zeta^2})f'''^2+\frac{1}{2}(1+7\sqrt{1-2ff''\zeta^2})f'''f^{iv}p+$$
$$+\frac{1}{80}(1+8\sqrt{1-2ff''\zeta^2})(8f'''f^{v}+5f^{iv2})p^2+$$
$$+\frac{1}{120}(1+9\sqrt{1-2ff''\zeta^2})(2f'''f^{vi}+3f^{iv}f^{v})p^3+\ldots\Big]+$$
$$+\frac{1}{2}\varphi'''p^2\Big[(1+7\sqrt{1-2ff''\zeta^2})f'''^2+\frac{1}{2}(1+8\sqrt{1-2ff''\zeta^2})f'''f^{iv}p+$$
$$+\frac{1}{80}(1+9\sqrt{1-2ff''\zeta^2})(8f'''f^{v}+5f^{iv2})p^2+\ldots\Big]+$$
$$+\frac{1}{3!}\varphi^{iv}p^3\Big[(1+8\sqrt{1-2ff''\zeta^2})f'''^2+$$
$$+\frac{1}{2}(1+9\sqrt{1-2ff''\zeta^2})f'''f^{iv}p+\ldots\Big]+$$
$$+\frac{1}{4!}\varphi^{v}p^4\Big[(1+9\sqrt{1-2ff''\zeta^2})f'''^2+$$
$$+\frac{1}{2}(1+9\sqrt{1-2ff''\zeta^2})f'''f^{iv}p+\ldots\Big]+\ldots=$$
$$=\Big[(1+5\sqrt{1-2ff''\zeta^2})f'''^2+\frac{1}{2}(1+6\sqrt{1-2ff''\zeta^2})f'''f^{iv}p+$$
$$+\frac{1}{80}(1+7\sqrt{1-2ff''\zeta^2})(8f'''f^{v}+5f^{iv2})p^2+$$
$$+\frac{1}{120}(1+8\sqrt{1-2ff''\zeta^2})(2f'''f^{vi}+3f^{iv}f^{v})p^3+$$
$$+\frac{1}{8400}(1+9\sqrt{1-2ff''\zeta^2})(20f'''f^{vii}+$$
$$+35f^{iv}f^{vi}+21f^{v2})p^4+\ldots\Big]\varphi'(x+\xi)+$$
$$+\sqrt{1-2ff''\zeta^2}\Big[f'''^2+\frac{1}{2}f'''f^{iv}p+\frac{1}{80}(8f'''f^{v}+5f^{iv2})p^2+$$
$$+\frac{1}{120}(2f'''f^{vi}+3f^{iv}f^{v})p^3+\ldots\Big]p\varphi''(x+\xi)+\ldots$$

wo bei der Reduction von dem Formelsysteme VII) Gebrauch gemacht wurde.

Der erste Theil dieses Ausdruckes ist nun noch theilweise nach Potenzen von p umzusetzen. Dazu dient die Reductionsformel:

$$1+m\sqrt{1-2ff''\zeta^2}=1+\frac{2f-f''p^2}{2f+f''p^2}m=\frac{2(m+1)f-(m-1)f''p^2}{2f+f''p^2}=$$
$$=\frac{\zeta}{p}\left[(m+1)f-\frac{m-1}{2}f''p^2\right].$$

Führt man diese einfache Operation aus, behandelt man ferner die auf diesen Gliedercomplex folgende, Kürze halber bisher weggelassene, Gliedergruppe 10. Ordnung, deren einzelne Theile, wie oben erwähnt wurde, mit Functionen von der Form

$$\sigma_n=(n-2)(n-4)(1-2ff''\zeta^2)+3(n-3)\sqrt{1-2ff''\zeta^2}+3$$

multiplicirt sind, genau auf dieselbe Weise, und bedient man sich schliesslich der Abkürzungen:

$$K_1=\frac{p^3\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\left[\frac{1}{3!}f'''+\frac{1}{4!}f^{IV}p+\frac{1}{5!}f^{V}p^2+\frac{1}{6!}f^{VI}p^3+\ldots\right]+$$
$$+\frac{1}{12}\cdot\frac{p^4\zeta^3}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\left[ff'''^2+\frac{7}{12}ff'''f^{IV}p+\right.$$
$$+\frac{1}{60}(8ff'''f^{V}+5ff^{IV2}-20f''f'''^2)p^2+\frac{1}{240}(6ff'''f^{VI}+$$
$$+9ff^{IV}f^{V}-50f''f'''f^{IV})p^3+\frac{1}{10080}(40ff'''f^{VII}+70ff^{IV}f^{VI}+$$
$$+42ff^{V2}-504f''f'''f^{V}-315f''f^{IV2})p^4+\frac{1}{50400}(55ff'''f^{VIII}+$$
$$\left.+110ff^{IV}f^{VII}+154ff^{V}f^{VI}-980f''f'''f^{VI}-1470f''f^{IV}f^{V})p^5+\ldots\right]+$$
$$+\frac{1}{18}\cdot\frac{p^5\zeta^3}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{5}{2}}}\left[f^2f'''^3+\frac{15}{16}f^2f'''^2f^{IV}p+\frac{1}{192}(44f^2f'''^2f^{V}+\right.$$
$$\left.+55f^2f'''f^{IV2}-120ff''f'''^3)p^2+\ldots\right]+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K_2=\frac{1}{72}\cdot\frac{p^6\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\left[f'''^2+\frac{1}{2}f'''f^{IV}p+\frac{1}{80}(8f'''f^{V}+5f^{IV2})p^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{120}(2f'''f^{VI}+3f^{IV}f^{V})p^3+\ldots\right]+$$
$$+\frac{1}{72}\cdot\frac{p^7\zeta^4}{(1-2ff''\zeta^2)^2}\left[ff'''^3+\frac{5}{6}ff'''^2f^{IV}p+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{240}(44ff'''^2f^{V}+55ff'''f^{IV2}-80f''f'''^3)p^2+\ldots\right]+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K_3 = \frac{1}{1296} \cdot \frac{p^9 \zeta^3}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \Big[f'''^3 + \frac{3}{4} f'''^2 f^{IV} p + \\ + \frac{3}{80}(4f'''^2 f^V + 5f'''f^{IV2})p^2 + \ldots \Big] + \ldots$$

so gewinnt die Gleichung 11) ebenfalls die Gestalt:

$$\varphi(z) = \varphi(x+p) + K_1\varphi'(x+p) + K_2\varphi''(x+p) + K_3\varphi'''(x+p) + \ldots \quad 14)$$

Zwischen den einzelnen Gliedergruppen der K bestehen auch ganz gleiche Relationen wie zwischen den Gliedergruppen der L. Es verwandeln sich nämlich die K in:

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= k + kl + km + \ldots \\ K_2 &= \frac{1}{2!}k^2 + k^2 l + \ldots \\ K_3 &= \frac{1}{3!}k^3 + \ldots \end{aligned}\right\} \text{IX)}$$

wenn man mit k, l, $m\ldots$ bezeichnet die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{p^3\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\Big[\frac{1}{3!}f''' + \frac{1}{4!}f^{IV}p + \frac{1}{5!}f^V p^2 + \ldots\Big] = \\ &= \frac{\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\Big[f(x+p) - f - pf' - \frac{p^2}{2}f''\Big]. \\ l &= \frac{p\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\Big[f\Big(\frac{1}{2}f''' + \frac{1}{3!}f^{IV}p + \frac{1}{4!}f^V p^2 + \ldots\Big) - \\ &\quad - f''p^2\Big(\frac{1}{6}f''' + \frac{1}{16}f^{IV}p + \frac{1}{60}f^V p^2 + \ldots\Big)\Big] = \\ &= \frac{f}{p}\cdot\frac{\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}[f'(x+p) - f' - pf''] - \\ &\quad - \frac{1}{6}\cdot\frac{f''p^3\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\Big[f''' + \frac{3}{8}f^{IV}p + \frac{1}{10}f^V p^2 + \\ &\quad + \frac{1}{48}f^{VI}p^3 + \ldots\Big]. \\ m &= \frac{1}{3}\cdot\frac{p^2\zeta^4}{(1-2ff''\zeta^2)^2}\Big[f^2 f'''^2 + \frac{11}{16}f^2 f''' f^{IV} p + \\ &\quad + \frac{1}{480}(86f^2 f''' f^V + 55f^2 f^{IV2} - 300ff''f'''^2)p^2 + \ldots\Big]. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{IX*)}$$

Dies in die Gleichung 14) eingetragen, vereinfacht sie neuerdings.

Es ist jetzt:

$$\varphi(z) = \Big[\varphi(x+p) + k\varphi'(x+p) + \frac{k^2}{2!}\varphi''(x+p) + \\ + \frac{k^3}{3!}\varphi'''(x+p) + \ldots\Big] \\ + kl[\varphi'(x+p) + k\varphi''(x+p) + \ldots] + \\ + km\varphi'(x+p) + \ldots$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi(x+p+k) + kl\varphi'(x+p+k) + \ldots \\ &\quad + km\varphi'(x+p) + \ldots \\ \varphi(z) &= \varphi(x+p+k+kl) + km\varphi'(x+p) + \ldots \\ p+k &= \frac{\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}[f(x+p) - pf' - p^2 f''] \end{aligned}\right\} 15)$$

Die Vergleichung der Formeln 12) und 14) ist sehr lehrreich: sie lässt deutlicher als alles Frühere den Gewinn erkennen, der durch die zweite Summirung erzielt wurde. Fasst man nämlich α wieder als eine Grösse erster Ordnung auf, so ist die Ordnung der Grössen $L_1, L_2, L_3 \ldots$ der Reihe nach 3, 6, 9 ...; die von $K_1, K_2, K_3 \ldots$ hingegen 4, 8, 12 .... Es ist also bereits K_1 um eine Ordnung kleiner als L_1, und es steigt überdiess jedes folgende K um vier, jedes folgende L aber nur um drei Ordnungen. Allein noch mehr: bei ein und demselben L steigt jede spätere Gliedergruppe um zwei, bei den K aber (wenigstens in den Anfangsgruppen) um drei Ordnungen. Es convergirt daher die frühere Entwickelung nicht nur im Ganzen, sondern auch in ihren einzelnen Theilen erheblich langsamer.

Wenn übrigens, wie an dem Keppler'schen Probleme nachgewiesen wurde, sich einerseits die Gleichungen 10) und 11*), und namentlich die letztere besonders zur Entwickelung der hierhergehörigen Functionen in Reihen eignen, sind andererseits die Formeln 13) und 15), und auch hier wieder, namentlich

die letztere, sehr geschickt zum Aufsuchen von Näherungswerthen für dieselben. So ist, immer unter der Voraussetzung, dass α eine Grösse erster Ordnung sei:

$\varphi(z) = \varphi(x+p)$ genau bis einschliesslich der Glieder dritter Ordnung,

$\varphi(z) = \varphi(x+p+k)$ genau bis einschliesslich der Glieder sechster Ordnung,

$\varphi(z) = \varphi(x+p+k+kl)$ genau bis einschliesslich der Glieder neunter Ordnung,

wobei noch zu bemerken kommt, dass, wenn man beispielsweise bei $\varphi(x+p)$ stehen bleibt, ausser allen Gliedern bis einschliesslich dritter Ordnung noch ein Theil der Glieder höherer Ordnungen mitgenommen wird. Dadurch unterscheiden sich auch diese Formeln sehr vortheilhaft von den meisten Formeln, deren man sich zur näherungsweisen Berechnung der Functionen bedient, bei denen in der Regel blos eine bestimmte Anzahl von Anfangsgliedern genau wiedergegeben wird, während der Gang der Glieder höherer Ordnung ein ganz verschiedener ist.

Für das Keppler'sche Problem fliessen aus den obigen Gleichungen die nachstehenden Näherungsformeln:

1. Wenn man sich mit einer Näherung bis einschliesslich der dritten Potenz der Excentricität begnügt.

$$E = M+p$$

$$\frac{r}{a} = 1-\varepsilon\cos(M+p)$$

$$\log\left(\frac{r}{a}\right) = \log[1-\varepsilon\cos(M+p)]$$

$$v = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,.\sin(M+p)}{\cos(M+p)-\varepsilon} = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(M+p)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon\sin(M+p)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$p = \frac{2\,\xi}{1+\sqrt{1+2\xi^2}}; \quad \xi = \frac{\varepsilon\sin M}{1-\varepsilon\cos M}$$

2. Genauer, und zwar bis einschliesslich der sechsten Potenz der Excentricität sind:

$$E = M+p+k$$

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \cos(M+p+k)$$

$$\log\frac{r}{a} = \log[1 - \varepsilon \cos(M+p+k)]$$

u. s. w

$$p+k = \frac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}}\left[\frac{\sin(M+p)}{\sin M} - p \operatorname{ctg} M + p^2\right]$$

In diesen Gleichungen kann man, ohne die hier beibehaltene Ordnung der Genauigkeit zu beeinträchtigen, wie oben nachgewiesen wurde, p ersetzen durch: $\eta = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}$.

Über Functionaldeterminanten.

Von Dr. **Ludwig Kraus**,

Privatdocent für Mathematik an der böhmischen Universität zu Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. October 1884.)

Im Folgenden behandle ich folgende Aufgabe:

Es werde von zwei, ganzen rationalen Functionen $F(xy)$ und $G(xy)$ der Variabeln x, y vorausgesetzt, dass ihre Functionaldeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F(xy)}{\partial x}, & \frac{\partial F(xy)}{\partial y} \\ \frac{\partial G(xy)}{\partial x}, & \frac{\partial G(xy)}{\partial y} \end{vmatrix}$$

von den Variablen unabhängig, also eine Constante sei. Es sind die nothwendigen und hinreichenden Merkmale anzugeben, welche die algebraischen Ausdrücke der beiden Functionen unter jener Voraussetzung besitzen.

Es sei vorerst $\Delta = 0$, dann lässt sich aus den Jacobi'schen Sätzen über Functionaldeterminanten leicht herleiten, dass zwischen den beiden Functionen $F(xy)$ und $G(xy)$ eine algebraische Identität besteht; d. h. es gibt eine ganze, rationale irreducible Function zweier Variablen ξ, η,

$$g(\xi\eta),$$

in welcher die Coëfficienten der einzelnen Potenzen der Veränderlichen blosse Constante sind und die die Eigenschaft hat, identisch zu verschwinden, sobald für ξ die Function $G(xy)$, für η die Function $F(xy)$ hierin eingesetzt wird. Die Function $g(\xi\eta)$ kann man direct folgendermassen sich herstellen.

Man setze

$$F(xy) - \eta = 0$$

und bezeichne mit $x_1, x_2, .. x_p$ die p Wurzeln dieser Gleichung, welche offenbar algebraische Functionen der Grössen y, η sind. Man kann voraussetzen, dass der Coëfficient des Gliedes x^p von y unabhängig ist, da man dies im entgegengesetzten Falle leicht durch eine lineare Transformation (bei welcher Δ Null bleibt) herbeiführen kann. Dann wird

$$\prod_{\lambda=1}^{p} (G(x_\lambda y)-\xi) = a_0+a_1y+a_2y^2+..$$

wo rechts eine ganze Function in y steht, deren Coëfficienten a_0, $a_1, ..$ offenbar ganze, rationale Functionen der Grössen ξ, η allein sind. Differenzirt man diese Gleichung nach y, so kommt:

$$\Sigma \frac{\Delta(x,y)}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x_1}} (G(x_2y)-\xi)...(G(x_py)-\xi) = a_1+2a_2y+..,$$

wo links in die Summe alle diejenigen Ausdrücke einfach aufzunehmen sind, welche aus dem hingeschriebenen durch cyklische Permutation der Indices 1, 2,.. p der Grösse x, hervorgehen. Da nun Δ Null ist, so verschwindet der Ausdruck auf der rechten Seite identisch und es ist

$$\prod_{\lambda=1}^{p} (G(x_\lambda y)-\xi) = a_0$$

Sei nun $g(\xi\eta)$ ein irreducibler Factor von a_0 und setzt man in denselben für ξ die Function $G(xy)$, für η die Function $F(xy)$ ein, so muss der so entstehende Ausdruck offenbar identisch verschwinden; denn er muss Null sein für einige der Werthepaare (x_λ, y), also mindestens für ein Werthepaar x_μ, y etwa. Bei festgehaltenem Werthe der Grösse y und variablem η ergeben sich somit beliebig viele, verschiedene Werthe von x, für welche jener Ausdruck verschwinden müsste, d. h. er muss identisch verschwinden. Da Ähnliches von jedem anderen irreduciblen Factor von a_0 gilt, ein solcher also für beliebig viele Werthepaare $(\xi\,\eta)$ gleichzeitig mit $g(\xi\eta)$ verschwinden müsste, so folgt

$$a_0 = g^\lambda(\xi\eta),$$

wo λ ein Theiler von p ist.

Es sei

$$\Delta(xy) = c \qquad 1)$$

wo c eine von Null verschiedene Constante. Es soll nun zunächst Folgendes nachgewiesen werden: Besteht die Gleichung 1), so kann man stets Werthe der Grösse η derart finden, dass

$$F(xy) - \eta$$

als Function der Variablen x, y irreducibel ist. (Selbstverständlich gilt Ähnliches auch von der andern Function $G(xy)$.)

Wir beginnen damit die Form einer solchen Function $\Phi(xy)$ aufzustellen, welche die Eigenschaft hat, dass

$$\Phi(xy) - \eta$$

als (ganze, rationale) Function von x, y für jeden Werth der Grösse η reducibel ist.

Wenn dies der Fall ist, diese Function also stets ein Product von r ganzen, rationalen Functionen der Variablen x, y ist, so werden die Coëfficienten in diesen Factoren algebraische Functionen von η sein; und da man bei mehreren, gegebenen algebraischen Functionen einer Grösse η stets eine weitere, algebraische Function von η, die wir mit ζ bezeichnen wollen, derart angeben kann, dass die gegebenen Grössen sich sämmtlich durch η und ζ in rationaler Weise ausdrücken lassen, so ist man berechtigt, folgende Form der Zerlegung vorauszusetzen

$$\Phi(xy) - \eta = \prod_{k=1}^{k} H(x, y, \zeta_k),$$

wobei die Grössen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_r$ Wurzelwerthe der Grösse ζ in einer gewissen, irreduciblen, algebraischen Gleichung

$$\psi(\eta, \zeta) = 0$$

sind. Die Function $H(x, y, \zeta_k)$ ist ganz und rational in den Grössen x, y, ζ_k. Die Grösse η mag darin explicite auftreten oder nicht, jedenfalls haben die beiden Gleichungen

$$H(x', y', \zeta) = 0$$
$$\psi(\eta', \zeta) = 0$$

einen und nur einen Werth der Grösse ζ gemeinsam, sobald x', y'. η' so gewählt sind, dass

$$\Phi(x' y') - \eta' = 0 \quad \text{ist.}$$

Denn hätten sie mehr als einen Werth gemein, so würde auch mehr als ein Factor des obigen Productes an der Stelle x', y, verschwinden, d. h.

$$\Phi(xy) - \eta'$$

hätte an der Stelle x', y' eine Singularität, was doch im Allgemeinen nicht der Fall sein kann.

Es haben also die beiden Gleichungen nur einen Werth der Grösse ζ gemein und es lässt sich daher dieser Werth in rationaler Weise in den Grössen x' y', η' ausdrücken, oder weil die Gleichung gilt

$$\eta' = \Phi(x' y')$$

lässt sich jener Werth rational in den Grössen x', y' allein ausdrücken. Dieser Werth ist aber als Wurzelwerth der Grösse ζ in der Gleichung

$$\psi(\eta' \zeta) = 0$$

einer der Grössen ζ_k, sagen wir ζ_μ. Es ist somit

$$\zeta_\mu = R(x' y').$$

Ferner ist klar, dass

$$\prod_{k=1}^{r} [\zeta_k - R(xy)]$$

mit dem Ausdruck

$$\eta - \Phi(xy)$$

bis auf einen von x, y, η unabhängigen, also constanten Factor übereinstimmen muss. Es ist somit $R(xy)$ eine **ganze**, rationale Function von x, y, die wir mit

$$\varphi(xy)$$

bezeichnen wollen. Die Gleichung

$$\psi(\eta \zeta) = 0$$

hat daher die Form

$$a_0\zeta^r + a_1\zeta^{r-1} \ldots + a_{r-1}\zeta + a_r - \eta = 0,$$

wo a_λ für jedes λ von 0 bis r eine Constante bedeutet und a_0 von Null verschieden ist. Wir haben daher den Satz:

Ist die ganze, rationale Function

$$\Phi(xy) - \eta$$

von $x\,y$ für jeden Werth von η reducibel, so hat $\Phi(xy)$ die Form

$$\sum_{\lambda=0}^{r} a_\lambda \varphi^{r-\lambda}(xy)$$

wo sowohl die Grössen a_λ, wie auch die Coëfficienten in der ganzen, rationalen Function $\varphi(xy)$ der Grössen x, y von den Variablen unabhängig, also blosse Constante sind.

Da $r > 1$, so kann man η stets so wählen, dass die Gleichung

$$\psi(\eta\,\zeta) = 0$$

eine mehrfache Wurzel von ζ enthält; dann haben

$$\frac{\partial\Phi(xy)}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial\Phi(xy)}{\partial y}$$

den gemeinsamen Theiler $\varphi(x\,y) - a$, wo a eine Constante.

Offenbar lässt sich aus dem Bisherigen sofort auf die Richtigkeit des im Eingange dieses Paragraphen aufgestellten Satzes schliessen und wir sind somit berechtigt anzunehmen, dass jede der Functionen

$$F(xy),\ G(xy)$$

entweder selbst als Function der Grössen x, y irreducibel ist, oder doch Werthe b_1, b_2 derart existiren, dass

$$F(xy) - b_1,\ G(xy) - b_2$$

irreducible Functionen der Grössen x, y sind.

Dies festgesetzt, wollen wir nun folgenden Satz beweisen:

Dem Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} F(xy)-\eta &= 0 \\ G(xy)-\xi &= 0 \end{aligned} \qquad 2)$$

genügt bei beliebig festgesetzten Werthen der Grössen ξ, η stets ein und nur ein Werthsystem der Grössen x, y.

Beweis: Es sei x_0 y_0 ein beliebiges endliches Werthsystem der Grössen x, y, das der Gleichung

$$F(xy)-b_1 = 0 \qquad 3)$$

genügt. In Folge der Gleichung 1) kann keine endliche Stelle dieses Gebildes eine mehrfache Stelle derselben sein. Entwickelt man daher x, y in der Umgebung der Stelle x_0, y_0 in eine nach einer Veränderlichen τ fortschreitende Reihe

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \tau\mathfrak{P}_1(\tau) \\ y &= y_0 + \tau\mathfrak{P}_2(\tau) \end{aligned}$$

und setzt dieselben in

$$-\frac{\frac{dx}{d\tau}}{\frac{\partial F(xy)}{\partial y}} = \frac{\frac{dy}{d\tau}}{\frac{\partial F(xy)}{\partial x}}$$

ein, so erhält man eine Reihe

$$\mathfrak{P}_3(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1\tau + \ldots$$

in welcher offenbar α_0 von Null verschieden ist. Setzt man

$$u = \alpha_0\tau + \alpha_1\frac{\tau^2}{2} + \ldots,$$

so dass also

$$\frac{du}{d\tau} = \mathfrak{P}_3(\tau)$$

ist, so wird

$$\frac{\partial G(xy)}{\partial u} = \frac{\partial G(xy)}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial G(xy)}{\partial y}\frac{dy}{du}$$

oder

$$\frac{\partial G(xy)}{\partial u} = \Delta(xy) = c.$$

Oder indem man integrirt und berücksichtigt, dass für $u = 0$, $\tau = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$ wird, erhält man

$$G(xy) = cu + G(x_0 y_0)$$

Bezeichnen wir für einen Augenblick den speciellen Werth $G(x_0 y_0)$ mit β, so haben wir also

$$G(xy) = cu + \beta$$

x ist hiebei eine Reihe, die nach u fortschreitet und der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{du} = -\frac{\partial F(xy)}{\partial y} \qquad 4)$$

genügt. Wir bezeichnen sie mit

$$x = x_0 + u\mathfrak{P}_4(u) \qquad 5)$$

Bildet man anderseits die Resultante der Functionen

$$F(xy) - b_1, \quad G(xy) - \xi,$$

indem man die Grösse y eliminirt, d. h. also, bildet man

$$\prod_{\lambda=1}^{p} [G(xy_\lambda) - \xi]$$

das Product ausgedehnt über alle Wurzelwerthe der Grösse y in der Gleichung 3), so ist das Resultat bekanntlich die ν^{te} Potenz einer irreduciblen, ganzen Function der Grössen x, ξ; wir bezeichnen sie mit $h(x, \xi)$, so dass also

$$\prod_{\lambda=1}^{p} [G(xy_\lambda) - \xi] = h^\nu(x\xi) \qquad \text{ist.}$$

Offenbar muss die Reihe 5) die Gleichung

$$h(x, cu + \beta) = 0 \qquad 6)$$

identisch befriedigen. Also ist die aus der Differentialgleichung 4) sich ergebende Reihe 5) das Element einer algebraischen Function von u; und zwar findet man durch Fortsetzung dieses Elementes in der Umgebung eines beliebigen Werthes von u, k allgemein zu reden, verschiedene Elemente, wenn die höchste

Potenz von x in der Function $h(x\xi)$ eben die k^{te} ist. Daraus folgt zunächst, dass $\nu = 1$ sein muss, dass also die Resultante selbst in den Grössen x, ξ irreducibel ist. Denn wäre $\nu > 1$, so würde zu einem beliebigen Werthe von u mehr als k Stellen des Gebildes 3) gehören. Diese Stellen sind aber sämmtlich von einander verschieden; denn die beiden Gleichungen

$$G(xy) = cu + \beta$$
$$F(xy) = b_1$$

können keine Stelle mehrfach gemein haben, weil sonst die Gleichung 1) ihre Giltigkeit verlöre. Nennen wir jenen beliebig angenommenen Werth von u, u', so erhalten wir aus der Differentialgleichung 4) für x mehr als k Reihen, welche nach ganzen, positiven Potenzen von $(u - u')$ fortschreiten. Diese Reihen sind wieder sämmtlich von einander verschieden, weil, wie aus der Differentialgleichung sich leicht ersehen lässt, an verschiedenen Stellen auch x verschiedene Entwicklungen in u haben muss.

Dennoch müsste man aber von der Reihe 5) ausgehend, zu jeder der soeben erwähnten Reihen durch Fortsetzung gelangen, weil das Gebilde 3) irreducibel ist. Da man aber nur zu k Reihen in $(u - u')$ gelangen kann, so muss $\nu = 1$ sein.

Es ergibt sich aus dieser Betrachtung aber auch, dass für jeden Werth u' von u, für welchen die Wurzelwerthe der Grösse x in der Gleichung

$$h(x, cu' + \beta = 0$$

sämmtlich endlich sind, denn aus der Gleichung 6) sich k verschiedene Reihen für x ergeben, welche nach ganzen, positiven Potenzen von $(u - u')$ fortschreiten.

Untersuchen wir nun, wie sich x verhält, wenn es für einen endlichen Werth u_0 von u unendlich wird. Dann ergeben sich aus der Gleichung 6) eine oder mehrere, sagen wir, s Entwicklungen für die Grösse $\frac{1}{x}$, welche nach positiven Potenzen von $(u - u_0)$ fortschreiten. Diese Potenzen können ganz oder gebrochen sein. Sind sie in jeder der s Reihen ganz, so ist klar, dass

an der Stelle $u = u_0$ k verschiedene Entwicklungen der Grösse x in $(u-u_0)$ existiren.

Wir wollen nun beweisen, dass in der That die Potenzen in den s Reihen stets ganz sind.

Zu diesem Behufe entwickeln wir in dem durch die Gleichung 3) definirten, algebraischen Gebilde an der Unendlichkeitsstelle die Grösse y in eine Reihe nach x. Wir erhalten t solcher Entwicklungen, wo

$$t \leqq p$$

ist. Eine solche Entwicklung hat die Form

$$Cy = x[1+x^{\frac{1}{\mu}}\mathfrak{P}(x^{\frac{1}{\mu}})].$$

Setzt man jede dieser Entwicklungen in die Gleichung

$$G(xy) = cu+\beta,$$

so erhält man t Gleichungen, in welchen jedesmal links des Gleichheitszeichens eine Reihe in x steht, die nur eine endliche Anzahl positiver Potenzen von x enthält. Nun muss jede der obigen s Reihen eine dieser t Gleichungen identisch befriedigen. Die Gleichung, welche sie identisch befriedigt, darf offenbar positive Potenzen von x nicht enthalten; sie muss also die Form haben

$$\gamma x^{-\frac{1}{\rho}} + \gamma_1 x^{-\frac{2}{\rho}} + \ldots \qquad = c(u-u_0)$$

Wäre γ von Null verschieden, so ergibt sich aus dieser Gleichung sofort für die Grösse $\frac{1}{x}$ eine Reihe, die nur ganze, positive Potenzen von $(u-u_0)$ enthält. γ ist aber in der That von Null verschieden; denn setzen wir

$$x = \frac{1}{\tau^\rho},$$

so wird auch y eine Entwicklung in ganzen Potenzen von τ. Diese Reihen in τ eingesetzt, für x respective y in die Gleichung 3) müssen diese identisch befriedigen. Es ist also

$$\frac{\partial F(xy)}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial F(xy)}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} = 0.$$

Dieselben Reihen in $G(xy)$ eingesetzt, liefern aber die Entwicklung

$$cu_0 + \beta + \gamma\tau + \gamma_1\tau^2 + \ldots$$

Wäre also $\gamma = 0$, so würde für $\tau = 0$ die Gleichung gelten

$$\frac{\partial G(xy)}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial G(xy)}{\partial y}\frac{dy}{\partial \tau} = 0$$

Aus dieser und der vorhergehenden Gleichung folgt aber

$$\Delta(xy)\frac{dx}{d\tau} = 0 = c\frac{dx}{d\tau},$$

wobei $\tau = 0$ in $\frac{dx}{d\tau}$ einzusetzen ist. Das ist aber ein Widerspruch, da

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{-\rho}{\tau^{\rho+1}}$$

ist.

Wir haben daher das Resultat erlangt:

Aus der Gleichung

$$h(x\xi) = 0$$

ergeben sich für jeden endlichen Werth von ξ, k verschiedene Entwicklungen von x in ξ.

Hat die Function $h(x\xi)$ die Form

$$h(x\xi) = f(\xi)x^{\iota} + f_1(\xi)x^{\iota-1} + \ldots$$

so ist offenbar

$$f(\xi)x$$

eine für jeden endlichen Werth von ξ endliche Function.

Von dieser Function können wir nach dem Bisherigen behaupten, dass sie an jeder Stelle ξ_0 von ξ k verschiedene Reihen besitzt, die nach ganzen, positiven Potenzen von $(\xi-\xi_0)$ fortschreiten. Daraus schliessen wir, dass $k = 1$ sein muss. Denn entwickeln wir $f(\xi)x$ in $(\xi-\xi_0)$, so erhalten wir

$$f(\xi)x = \mathfrak{P}(\xi-\xi_0).$$

Die Reihe $\mathfrak{P}$ kann keinen endlichen Convergenzbezirk haben. Denn hätte sie einen solchen, so müsste an der Grenze

derselben, nach einem Satze des Herrn Weierstrass eine Stelle ξ_1 von ξ derart zu finden sein, dass keine Reihe

$$\overline{\mathfrak{P}}(\xi-\xi_1)$$

existirte, welche mit der früheren

$$\mathfrak{P}(\xi-\xi_0)$$

in der Umgebung von ξ_1 in ihren Werthen für die Variable ξ übereinstimmte. Nun existirt aber eine solche Reihe

$$\overline{\mathfrak{P}}(\xi-\xi_1)$$

denn es gibt k Reihen in $(\xi-\xi_1)$ und eine davon muss also sicher eine Fortsetzung der Reihe

$$\mathfrak{P}(\xi-\xi_0)$$

sein. Daraus folgt, dass letztere Reihe eine beständig convergirende sein muss, und da sie im Unendlichen (für unendlich grosse Werthe von ξ) sich algebraisch verhalten muss, so ist sie rational ganz, also auch

$$f(\xi)x$$

eine ganze rationale Function von ξ.

Die Function $h(x\xi)$ hat also die Form

$$f(\xi)x+f_1(\xi).$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

Wir können aber noch schliessen, dass der Coëfficient $f(\xi)$ eine von Null verschiedene Constante ist, also die Grösse ξ gar nicht enthält.

Zu diesem Behufe führen wir statt der Grösse b_1, die in $f(\xi)$ und $f_1(\xi)$ offenbar in ganzer, rationaler Weise auftritt, wieder die Variable η ein, so dass also

$$f(\xi\eta)x+f_1(\xi\eta) \qquad 7)$$

die Resultante des Gleichungssystems 2) ist.

$f(\xi\eta)$ kann nicht identisch Null sein, weil dann die Resultante von x unabhängig, also Δ gleich Null wäre. Enthält aber

$f(\xi\eta)$ wirklich wenigstens eine der Variablen ξ, η, so kann nach Einführung von $G(xy)$ für ξ, und $F(xy)$ für η in den Ausdruck $f(\xi\eta)$ der nun entstehende Ausdruck nicht eine Constante sein; denn das würde heissen, dass zwischen den Functionen

$$F(xy), \quad G(xy)$$

eine algebraische Identität besteht, Δ also Null ist.

Es muss also der nach jener Einführung aus $f(\xi\eta)$ entstehende Ausdruck die Variablen x, y wirklich enthalten. Macht man aber jene Einführung in dem Ausdruck 7), so muss derselbe dann, der Bedeutung der Resultante zufolge, identisch verschwinden. Unter der Voraussetzung, dass $f(\xi\eta)$ keine Constante sei, würden also Werthsysteme x, y also auch Werthsysteme der Grössen ξ, η sagen wir ξ', η' existiren, derart, dass

$$f(\xi'\eta') = f_1(\xi'\eta') = 0$$

ist. Das würde aber heissen, dass die Functionen

$$F(xy) - \eta', \quad G(xy) - \xi'$$

für unendlich viele Werthsysteme der Grössen x, y gleichzeitig verschwinden, was, wegen der Gleichung 1) unmöglich ist. Das Schlussresultat ist also folgendes:

Haben zwei ganze, rationale Functionen der Grössen x, y

$$F(xy), \quad G(xy),$$

die Eigenschaft, dass ihre Functionaldeterminante

$$\Delta(xy) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F(xy)}{\partial x}, & \frac{\partial F(xy)}{\partial y} \\ \frac{\partial G(xy)}{\partial x}, & \frac{\partial G(xy)}{dy} \end{vmatrix}$$

eine von Null verschiedene Constante ist, so ergeben sich aus dem Gleichungssysteme

$$F(xy) - \eta = 0$$
$$G(xy) - \xi = 0$$

die Grössen x, y als ganze rationale Functionen der Variablen ξ, η.

Und umgekehrt: Ergeben sich aus jenem Gleichungssystem die Grössen x, y als ganze, rationale Functionen der Variablen ξ. η, so ist $\Delta(xy)$ eine von Null verschiedene Constante.

Aus den angeführten Sätzen lässt sich aber die algebraische Form der Functionen $F(xy)$, $G(xy)$ vollständig angeben. Es sei

$$x = g_1(\xi\eta)$$
$$y = g_2(\xi\eta)$$

Sowohl in $g_1(\xi\eta)$, wie auch $g_2(\xi\eta)$ erscheint das Glied ξ^p, und das Glied η^q, wenn q die Dimension der Function $G(xy)$ ist. Sei $q < p$. Entwickelt man x und y des Gebildes

$$F(xy) - \eta = 0$$

im Unendlichen nach τ und setzt die Entwicklungen in $G(xy)$ ein, so wird man erhalten müssen (bis auf constanten Factor)

$$\frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau).$$

Setzt man also für ξ diese Reihe in $g_1(\xi\eta)$, $g_2(\xi\eta)$, so erhalten x, y Entwicklungen, welche mit $\frac{1}{\tau^p}$ anfangen. Daraus folgt, dass das Aggregat der Glieder höchster (p^{ter}) Dimension in $F(xy)$ gleich ist der p^{ten} Potenz einer homogenen, linearen Form von x, y. Ähnliches gilt von $G(xy)$. Nun lässt sich weiter beweisen, dass q ein ganzzahliges Multiplum von p ist, also

$$q = \lambda p,$$

wo λ eine ganze Zahl. Den Beweis will ich, um nicht weitläufig zu werden, übergehen. Dies nun angenommen, sieht man sofort, dass die Identität gilt,

$$G(xy) = c_0 F^{\lambda}(xy) + c F^{\lambda-1}(xy) + \ldots + c_{\lambda} F(xy) + H(xy),$$

wo c_μ blosse Constante und die Coëfficienten der Grössen x, y in $H(xy)$ ebenfalls. Die Dimension von $H(xy)$ ist kleiner als p;

sie sei p_1. Dann gilt wieder

$$p = \lambda_1 p_1,$$

wo λ_1 eine ganze Zahl und

$$F(xy) = c_0'' H^{\lambda_1'}(xy) + \ldots + c'_{\lambda_1} H(xy) + H_1(xy).$$

Die c_μ und Coëfficienten in H_1 sind wieder blosse Constante und die Dimension von H_1 kleiner als p_1. So kann man nun fortfahren, bis schliesslich kommt:

$$H_{\nu-2}(xy) = \alpha_0 H^{\lambda_\nu}_{\nu-1}(xy) + \ldots + \alpha_{\lambda_\nu} H_{\nu-1}(xy) + H_\nu(xy)$$

und $H_\nu(xy)$ linear in x, y. Dann ist

$$H_{\nu-1}(xy) = \beta_0 H_\nu^m(xy) + \ldots + \beta_m H_\nu(xy) + L_\nu(xy),$$

wo $L_\nu(xy)$ ebenfalls linear in x, y). Es gilt dann

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial H_\nu(xy)}{\partial x} & \frac{\partial H_\nu(xy)}{\partial y} \\ \frac{\partial L_\nu(xy)}{\partial x} & \frac{\partial L_\nu(xy)}{\partial y} \end{vmatrix} = \pm c$$

Geht man rückwärts von den Functionen $H_\nu(xy)$ $L_\nu(xy)$ aus und construirt sich in der Weise, wie die hingeschriebenen Gleichungen es zeigen, die Function $G(xy)$, $F(xy)$, so ist klar, dass ihre Functionaldeterminante $\Delta(xy) = c$ ist.

Dass aber auch das Umgekehrte gilt, ist eben ein Resultat, durch welches die in der Vorrede gestellte Aufgabe vollständig erledigt ist.

Über die durch zahlreiche, unregelmässig vertheilte Körperchen hervorgebrachten Beugungserscheinungen.

Von Dr. **Carl Exner.**

(Mit 8 Holzschnitten.)

In einer früheren Abhandlung[1] habe ich Formeln entwickelt, welche sich auf die Beugungserscheinungen beziehen, welche durch die Combination eines Spiegels und einer räumlichen Bestäubung hervorgebracht werden.

Im Folgenden veröffentliche ich eine experimentelle Verification dieser Formeln und verbinde damit eine zusammenhängende Darstellung des ganzen Gegenstandes und seiner Literatur.

Die Erscheinungen, um welche es sich hier handelt, zerfallen in zwei Classen: solche, welche durch Beugung an zahlreichen unregelmässig vertheilten Körperchen entstehen, und solche, welche durch doppelte Beugung an dem System der Körperchen entstehen, indem die Strahlen nach der ersten Beugung von einem Spiegel reflectirt werden und ein zweites Mal an denselben Körperchen Beugung erleiden, so dass eine Interferenz der beim ersten und der beim zweiten Durchgange gebeugten Strahlen eintritt. Zu den Erscheinungen der ersten Art gehören die „kleinen Höfe", zu jenen der zweiten Art die Ringe des Newton'schen Hohlspiegelversuches.

Wenn das Gegentheil nicht besonders bemerkt ist, so wird im Folgenden stets die Fraunhofer'sche Beobachtungsmethode vorausgesetzt, bei welcher sowohl die punktförmige Lichtquelle als der Projectionsschirm sich in unendlicher Entfernung befinden.

---

[1] K. Exner, Wied. Ann. Bd. XX, S. 63, 1883.

Man genügt diesen beiden Bedingungen, wenn man das von der punktförmigen Spalte des Spaltfernrohres eines Spectralapparates kommende parallele Strahlenbündel, nachdem es Beugung erlitten hat, mittelst des auf unendlich gestellten Beobachtungsfernrohres untersucht. Diese Methode wurde zuerst von Fraunhofer [1] auf die Beugungserscheinungen der ersten Art angewendet, später von E. Lommel [2] auf jene der zweiten Art.

Ehe ich auf den Gegenstand dieser Abhandlung eingehe, erinnere ich an den folgenden, für sehr kleine Öffnungen giltigen Satz. [3]

Projicirt man eine schief gegen die directen Strahlen stehende Beugungsöffnung auf eine Ebene, welche durch einen beliebigen Punkt der Öffnung geht und auf den directen Strahlen senkrecht steht, so ist der in irgend einer Richtung durch die gegebene Öffnung resultirende gebeugte Strahl identisch mit jenem, welchen eine andere, mit der Projection zusammenfallende Öffnung in derselben Beugungsrichtung hervorbringen würde.

1. Beugung durch eine Doppelöffnung.

Man nehme an, es finde die Beugung statt an zwei gleichen und gleichliegenden Öffnungen, oder, in Rücksicht auf den in der Einleitung erwähnten Satz, an zwei sehr kleinen Öffnungen, deren Projectionen gleich und gleichliegend sind.

Um das Beugungsbild zu erhalten, setze man die von einer der Öffnungen in ein und derselben Richtung gehenden gebeugten Strahlen zu einem resultirenden gebeugten Strahle S_1 zusammen und die derselben Richtung entsprechenden Strahlen der anderen Öffnung zu einem resultirenden Strahle S_2.

Sind nun: $2e$ die gegenseitige Entfernung zweier homologer Punkte der beiden Öffnungen, beziehungsweise ihrer Projectionen, γ und φ die Winkel der directen und der gebeugten Strahlen mit der Richtung der Linie $2e$, so findet man leicht für die Wegdifferenz der Strahlen S_1 und S_2:

$$\Delta = 2e(\cos\gamma - \cos\varphi) \qquad \text{I)}$$

[1] Fraunhofer, Schumacher Astron. Abh., Bd. III, 1824.
[2] E. Lommel, Pogg. Ergbd. VIII. 1878.
[3] K. Exner, Wied. Ann. Bd. IX. 1880.

Bedeutet also i die dem Strahle S_1 entsprechende Intensität, so hat man für die aus der gegenseitigen Interferenz der Strahlen S_1 und S_2 hervorgehende Intensität:

$$J = 2i(1 + \cos 2\pi \frac{2e(\cos\gamma - \cos\varphi)}{\lambda}),$$

oder, wenn man mit Lommel

$$\frac{2\pi}{\lambda}(\cos\gamma - \cos\varphi) = s \qquad \text{(II)}$$

setzt, also dass s eine Function der Beugungsrichtung ist,

$$J = 2i(1 + \cos 2es). \qquad \text{(III)}$$

Man erhält demnach zwei Systeme Interferenzfransen. Eines entspricht den Maximis und Minimis des Factors i und ist identisch mit dem durch eine einzige der Öffnungen hervorgebrachten Fransensysteme. Das zweite entspricht den Maximis und Minimis des Factors $(1 + \cos 2es)$ und entsteht durch die Interferenz der von der einen Öffnung kommenden gebeugten Strahlen mit den von der anderen Öffnung kommenden. Das erste Fransensystem hängt lediglich von der Gestalt der Öffnungen oder ihrer Projectionen ab, das zweite lediglich von ihrer Lage, d. i. von der Lage und Länge der Linie $2e$.

Die Maxima und Minima des zweiten Fransensystems sind der Lage nach durch die Gleichung

$$\cos\varphi = \cos\gamma - k\frac{\lambda}{4e} \qquad \text{(IV)}$$

gegeben, wenn k alle ganzen Zahlen mit Einschluss der Null und der negativen Zahlen bedeutet.

Diese Gleichung lehrt:

Die Interferenzlinien sind concentrische Kreise, deren gemeinsamer Mittelpunkt in der Richtung der Linie $2e$ liegt.

Da das Bild der Lichtquelle im Allgemeinen nicht in dieser Richtung liegt, möge dieses Ringsystem das excentrische Ringsystem heissen.

Unter den hellen Ringen, welche den geraden Werthen von k entsprechen, während die dunkeln den ungeraden, ist der 0te Ring ausgezeichnet, für welchen $k = 0$ und $\varphi = \gamma$. Da sein Radius φ von der Wellenlänge unabhängig ist, ist er ein achro-

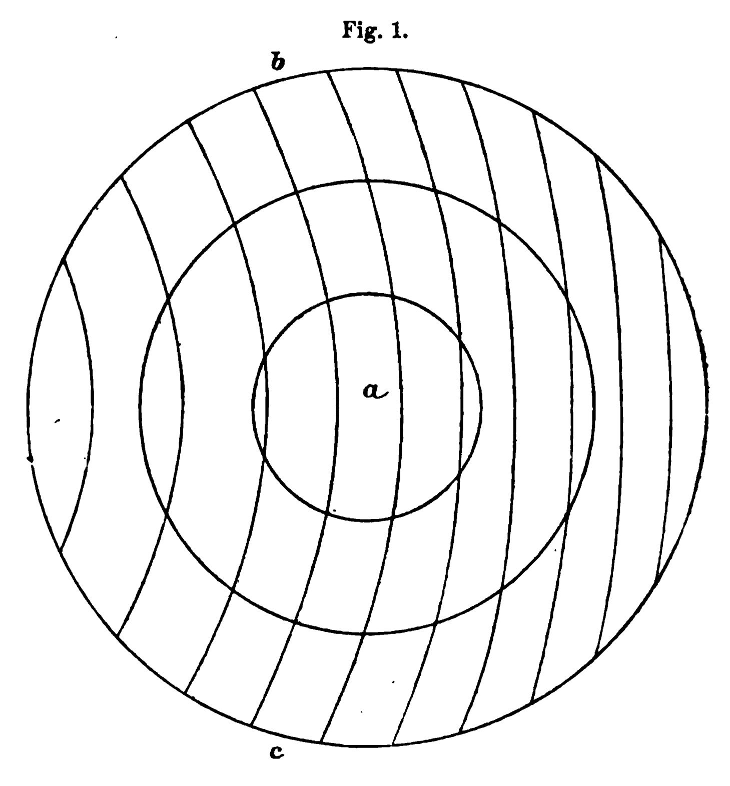
matischer Ring. Er geht durch das Bild der Lichtquelle und ist bei Anwendung weissen Lichtes zu beiden Seiten roth gesäumt. Er scheidet die übrigen Ringe in äussere und innere. Die äusseren entsprechen den positiven Werthen von k, ihre Radien sind grösser als der des achromatischen Ringes und sie erscheinen aussen roth gesäumt. Die inneren Ringe entsprechen den negativen Werthen von k, ihre Radien sind kleiner als der des achromatischen Ringes und sie sind innen roth gesäumt.

Die Ringe befolgen dasselbe Gesetz wie jene des Newton'schen Farbenglases: die Ringfläche ist constant.

Fig. 1 stellt die beiden Ringsysteme für kreisförmige Öffnungen dar.

a ist das Bild der Lichtquelle, *bc* der achromatische Ring.

Fig. 1.



Die mit *a* concentrischen Ringe bilden die Beugungserscheinung einer einzigen Öffnung. Von den excentrischen Ringen sind

nur Fragmente zu sehen, da die Beugungserscheinungen immer nur in der Nähe des Bildes der Lichtquelle sichtbar sind. In der Figur ist vorausgesetzt, dass der Winkel der Linie $2e$ mit der Richtung der directen Strahlen einen von 0 und $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Werth habe. Wäre dieser Winkel gleich 0, so würden die beiden Ringsysteme concentrisch, wäre er gleich $\frac{\pi}{2}$, so würde das excentrische Ringsystem in eine Schaar paralleler Streifen degeneriren.

Wenn, wie dies bei den folgenden Anwendungen stets vorausgesetzt sein wird, die Entfernung $2e$ sehr gross ist im Vergleiche mit den Dimensionen einer Öffnung, so werden die excentrischen Ringe so schmal, dass sie der Wahrnehmung entgehen. Eine Ausnahme findet nur in dem Falle statt, wo die Linie $2e$ ganz oder nahe mit der Richtung der directen Strahlen parallel ist. Da dieser Fall bei den folgenden Anwendungen ausschliesslich in Betracht kommt, möge darauf hingewiesen sein, dass in diesem Falle die Streifenbreite der beiden Ringsysteme von derselben Grössenordnung wird, wenn die Entfernung $2e$ im Vergleiche mit den Dimensionen einer Öffnung sehr gross ist. So reducirt sich, wenn die Öffnungen hinter einander liegen, die Breite des ersten Ringes des excentrischen Systems erst bei einer gegenseitigen Entfernung $2e = 4$ Met. auf eine Winkelminute. Ist b die Breite des $k$ten Streifens dieses Ringsystems, wenn die Öffnungen neben einander liegen, und B die Breite desselben Streifens, wenn sie hinter einander liegen, so findet man aus (4):

$$b : B = \sqrt{\frac{\lambda}{2e}} : (\sqrt{k+2} - \sqrt{k}).$$

2. Beugung durch zahlreiche, unregelmässig vertheilte Öffnungen.

Man setze nun voraus, dass die Beugung durch zahlreiche, unregelmässig vertheilte Öffnungen stattfinde, mögen dieselben in einer Ebene liegen oder nicht. Der letztere Fall wäre wohl schwer experimentell darzustellen, er erhält aber seine experimentelle Bedeutung dadurch, dass es nach dem Babinet'schen

Principe gestattet ist, an Stelle der Öffnungen gleichgestaltete Schirmchen oder Körperchen zu setzen.

Nun gehen in jeder Beugungsrichtung, wenn n Öffnungen vorhanden sind, ebenso viele, diesen Öffnungen entsprechende parallele Bündel gebeugter Strahlen, deren jedes einen resultirenden Strahl S gibt, welchem eine Intensität i entsprechen möge. Es handelt sich darum, die Strahlen $S_1 \ldots S_n$ zu einem resultirenden Strahle zusammenzusetzen.

Um dies zu bewerkstelligen, kann man von jenem Satze[1] Gebrauch machen, nach welchem Schwingungen wie Kräfte zusammengesetzt und zerlegt werden können.

Sind also S_p, S_q zwei beliebige der Strahlen S, ferner a_p, a_q die Amplituden und α_p, α_q die Phasenwinkel dieser Strahlen, so resultirt aus der gegenseitigen Interferenz sämmtlicher Strahlen S eine Intensität:

$$J = [\Sigma(a \cos \alpha)]^2 + [\Sigma(a \sin \alpha)]^2$$

oder

$$J = \Sigma(a^2) + 2\Sigma[a_p a_q \cos(\alpha_p - \alpha_q)], \tag{V}$$

wo im letzten Gliede sich das Zeichen Σ auf alle Combinationen zweier der n Öffnungen erstreckt.

Die Intensität setzt sich also aus zwei Theilen zusammen. Der erste, $\Sigma(a^2)$, stellt die Summe der von den einzelnen Öffnungen gelieferten Intensitäten vor, der zweite, $2\Sigma[a_p a_q \cos(\alpha_p - \alpha_q)]$ ist von der Vertheilung der Öffnungen abhängig und kann positiv oder negativ sein.

Es möge nun angenommen werden, dass die gegenseitigen Entfernungen je zweier beliebigen der Öffnungen im Vergleiche mit den gegenseitigen Entfernungen zweier Punkte ein und derselben Öffnung sehr gross seien.

Es ergibt sich hieraus, dass in dem für die Intensität gefundenen Ausdrücke (V) das erste Glied verhältnissmässig sehr langsam, und das zweite Glied verhältnissmässig sehr rasch mit der Beugungsrichtung variirt.

---

[1] Verdet-Exner, Optik, I, S. 118.

Nimmt man ferner an, dass das Beugungsbild unter einer Vergrösserung beobachtet werde, welche die den langsamen Variationen des ersten Gliedes des Ausdruckes (V) entsprechenden Maxima und Minima der Helligkeit deutlich wahrnehmen lässt, so wird man die dem zweiten Gliede entsprechenden Maxima und Minima der Helligkeit ihrer Gedrängtheit wegen nicht mehr unterscheiden, sondern nur eine mittlere Intensität wahrnehmen.

Verstehen wir nunmehr, und im Folgenden stets, unter J diese mittlere Intensität, so haben wir, um dieselbe auf einem Flächenstücke σ des Beugungsbildes zu berechnen, welches als klein angenommen wird in Bezug auf die langsamen Variationen von $\Sigma(a^2)$, so dass diese Grösse auf σ als constant angesehen werden kann, jedoch als gross in Bezug auf die raschen Variationen von $2\Sigma[a_p a_q \cos(\alpha_p - \alpha_q)]$, so dass viele Maxima und Minima dieser Grösse auf σ fallen, für die mittlere Intensität auf σ:

$$J = \Sigma(a^2) + \frac{2}{\sigma}\Sigma[a_p a_q \int\int \cos(\alpha_p - \alpha_q) d\sigma],$$

wo sich die Integrale über das Flächenstückchen σ erstrecken, das erste Summenzeichen auf sämmtliche Öffnungen und das zweite Summenzeichen auf alle Combinationen je zweier Öffnungen. Man sieht nun leicht,[1] dasjedes der Integrale $\int\int \cos(\alpha_p - \alpha_q) d\sigma$ in eine grosse Zahl abwechselnd positiver und negativer Integrale zerfällt, von welchen jedes dem Folgenden numerisch gleich ist.

Es folgt:

$$\int\int \cos(\alpha_p - \alpha_q) d\sigma = 0$$

und

$$J = \Sigma(a^2)$$

oder

$$J = \Sigma(i). \tag{VI}$$

Das heisst:

Für eine grosse Zahl unregelmässig vertheilter Öffnungen ist die Intensität an jeder Stelle des

[1] K. Exner, Wied. Ann. XI, 1880.

Beugungsbildes gleich der Summen der Intensitäten, welche von den einzelnen Öffnungen für sich an dieser Stelle hervorgebracht würden.

Es findet also, kurz gesagt, eine Summation der elementaren Helligkeiten statt.

Es wurde angenommen, dass die vom zweiten Gliede des für die Intensität gefundenen Ausdruckes (V) herrührenden, durch die gegenseitige Interferenz der von verschiedenen Öffnungen kommenden resultirenden gebeugten Strahlen entstehenden Maxima und Minima der Helligkeit ihrer Gedrängtheit wegen der Beobachtung entgehen. Dies war in der That der Fall, ehe das Vorhandensein dieser Maxima und Minima sich theoretisch ergeben hatte.[1] Später wurden dieselben durch hinreichende Reducirung der Ausdehnung der Lichtquelle wahrnehmbar gemacht (l. c.). Es zeigt sich eine feine Granulation des Beugungsbildes.

Sind insbesondere sämmtliche Öffnungen gleich gestaltet, gleich gross und gleich orientirt, so ergibt sich aus (VI):

$$J = ni. \qquad \text{(VII)}$$

Das heisst: Das durch zahlreiche (n) unregelmässig vertheilte Öffnungen von gleicher Gestalt, Grösse und Orientirung hervorgebrachte Beugungsbild unterscheidet sich von jenem einer einzigen der Öffnungen (abgesehen von der Granulation) nur durch eine n-mal grössere Intensität, mögen die Öffnungen in einer Ebene liegen oder nicht.

Dieser letztere Satz wurde unter Voraussetzung kreisförmiger Öffnungen zuerst von Verdet[2] abgeleitet. Indem aber Verdet bei der Ableitung nicht correct verfuhr (l. c.), entging ihm das Vorhandensein der Granulation. Bis dahin hatten alle Physiker ohne Ausnahme das Princip der Summation der elementaren Helligkeiten ihren theoretischen Betrachtungen stillschweigend zu Grunde gelegt, und die Experimente hatten nicht widersprochen. Verdet war der Erste, welcher bemerkte, dass dieses Princip durchaus nicht selbstverständlich sei und daran ging, die

---

[1] Karl Exner, Wien. Akad. Ber. LXXVI, 1877.

[2] E. Verdet, Ann. d. chim. e. d. phys., (3), XXXIV, 1852.

Rechnung auf strengerer Grundlage durchzuführen, eine Intensitätsformel aufzustellen, und zu erklären, wie es möglich sei, dass völlig unregelmässig vertheilte Öffnungen vollkommen regelmässige Beugungsringe geben. Verdet verificirte sein theoretisches Resultat, indem er vor das Objectiv des Fernrohres einen Schirm mit vielen kreisförmigen Öffnungen von gleichem Radius, aber unregelmässiger Vertheilung brachte.

3. Beugung durch zahlreiche, unregelmässig vertheilte Doppelöffnungen.

Es ist leicht, die Erscheinung einer Doppelöffnung, welche unter 1) berechnet wurde, experimentell hervorzubringen. Ein Staniolblatt, an welchem mittelst einer Stecknadel zwei Öffnungen angebracht worden sind, zeigt vor dem Objectiv des Fernrohres die bekannten Ringe und geradlinigen Streifen. Zerschneidet man hierauf das Staniolblatt in zwei Theile, deren jeder eine der Öffnungen enthält, belässt einen der beiden Theile in seiner Lage und verschiebt den anderen Theil in der Richtung der Lichtstrahlen, beispielsweise um 25 Ctm., so bleiben die Ringe unverändert, während sich die Streifen kreisförmig krümmen, so dass das in Fig. 1 versinnlichte Bild entsteht.[1]

Dasselbe Beugungsbild erhält man nach dem Babinet'schen Principe, wenn man an die Stelle der Öffnungen Körperchen setzt. Auch kann man ein solches Doppelkörperchen durch ein einziges Körperchen ersetzen, wenn man einen ebenen Spiegel so anbringt, dass die Strahlen, welche an dem Körperchen Beugung erlitten haben, nach der Reflexion von dem Spiegel an demselben Körperchen eine zweite Beugung erleiden.

Combinirt man schliesslich in gleicher Weise ein System zahlreicher, unregelmässig vertheilter Körperchen mit einem ebenen Spiegel, so dass die Strahlen zweimal, vor und nach der Reflexion, an demselben System der Körperchen Beugung erleiden, so ist die Wirkung äquivalent einer Beugung durch ein System zahlreicher, unregelmässig vertheilter Doppelöffnungen, welche so liegen, dass die Verbindungslinien ($2e$) homologer Punkte der

[1] K. Exner. Wien. Akad. Ber. LXXII. 1875.

Öffnungen einer Doppelöffnung in dem ganzen Systeme dieselbe Richtung (parallel der Spiegelnormale) haben.

Es möge also ein System sehr vieler, unregelmässig vertheilter Doppelöffnungen vorausgesetzt werden und möge angenommen werden, dass die Linie $2e$ für alle Doppelöffnungen dieselbe Richtung habe. Eine einzige der Doppelöffnungen gibt die beiden Interferenzsysteme, welche unter 1) beschrieben worden sind. Da bei den Versuchen die gegenseitige Entfernung der beiden Öffnungen einer Doppelöffnung sehr gross ist im Vergleiche mit den Dimensionen einer Öffnung, so muss, wenn beide Interferenzsysteme deutlich sichtbar sein sollen, nach 1) die weitere Bedingung erfüllt sein, dass die Linien $2e$ ganz oder nahezu mit den directen Strahlen parallel seien, oder dass, wenn ein Spiegel angewendet wird, die directen Strahlen nahe mit der Spiegelnormale zusammenfallen. Was die gegenseitige Interferenz der resultirenden gebeugten Strahlen betrifft, welche von verschiedenen Doppelöffnungen kommen, so lässt sich genau dieselbe Betrachtung anstellen, welche unter 2) für zahlreiche, unregelmässig vertheilte Öffnungen angestellt worden ist, nur dass jetzt immer an die Stelle der Öffnung das Öffnungspaar tritt.[1] Das durch das System der Doppelöffnungen hervorgebrachte Beugungsbild entspricht demnach der Übereinanderlagerung der elementaren, durch die einzelnen Öffnungspaare hervorgebrachten Beugungsbilder, nur dass auch dieses Phänomen die oben besprochene Granulation zeigt.

Bedeutet also j die einer einzigen der Doppelöffnungen entsprechende Intensität, so hat man:

$$J = \Sigma(j).$$

Bezeichnet man ferner durch i die von einer einzigen Öffnung einer der Doppelöffnungen herrührende Intensität, so erhält man nach (III):

$$J = \Sigma[2i(1+\cos 2es)]. \qquad \text{(VIII)}$$

---

[1] K. Exner, Wied. Ann., XI, 1880.

4. Das Babinet'sche Princip.

Indem Fraunhofer (l. c.) daran ging, die Erscheinung der kleinen Höfe zu erklären, machte er die Bemerkung, dass ein schmaler, undurchsichtiger Schirm dieselbe Beugungserscheinung zeigt, wie eine gleich breite Spaltöffnung. Hiedurch wurde es ihm wahrscheinlich, dass durch die Beugung des Lichtes an den Dunstkügelchen dieselben Farbenringe hervorgebracht würden, wie durch die Beugung bei einer runden Öffnung von demselben Durchmesser. Um hierüber Gewissheit zu erlangen, brachte er zunächst ein kleines, rundes Blättchen vor das Objectiv des Fernrohres, und richtete dieses nach einem entfernten Lichtpunkte in der Erwartung, die Beugungserscheinung einer kreisrunden Öffnung zu erhalten. Indem er jedoch keine Farbenringe erhielt, schrieb er dies der grossen Menge und Intensität des ungebeugten Lichtes zu. Indessen dürfte die wahre Ursache in der grossen Menge des unregelmässig gebeugten Lichtes zu suchen sein. An anderer Stelle[1] habe ich gezeigt, wie man den Apparat einzurichten habe, um die Beugungserscheinungen einzelner, beliebig gestalteter, opaker Schirmchen zu erhalten. Fraunhofer half sich damit, dass er sehr viele, kreisrunde Staniolblättchen von gleichem Radius unregelmässig zwischen zwei Plangläser brachte, um die Intensität der Erscheinung zu steigern. Man sieht, dass Fraunhofer instinctiv von dem Principe der Summation der elementaren Helligkeiten Gebrauch machte. Er nahm nun in der That jene Ringe wahr, welche auch eine kreisrunde Öffnung vom Radius eines der Schirmchen gegeben haben würde. Denselben Versuch und mit gleich gutem Erfolge machte er mit Glaskügelchen. Man sieht, wie Fraunhofer durch seine Beobachtungen auf die Spur des Babinet'schen Princips kam, ohne jedoch seine Resultate zu verallgemeinern und als Princip auszusprechen.

War Fraunhofer bei seinen experimentellen Studien an jenes Princip herangelangt, nach welchem, ebene Wellen vorausgesetzt, Schirmchen dieselben Beugungsbilder geben, wie gleichgestaltete Öffnungen, so erkannte im Gegentheile Babinet,[2]

---

[1] K. Exner, Wien. Akad. Ber., LXXVI, 1877.

[2] Babinet, C. R., 1837.

ebenfalls bei seinen Studien über die kleinen Höfe, sofort dieses Princip a priori, und sprach es als solches aus. Ich lasse die betreffende Stelle folgen:

„Den Schlüssel zu diesen Erscheinungen gibt ein scheinbar paradoxes Princip der Optik, welches sich folgendermassen aussprechen lässt: Entsteht auf der Netzhaut des Auges ein Bild eines leuchtendes Punktes, und befindet sich im Gange der Strahlen ein kleines, undurchsichtiges Körperchen, so ist die Wirkung genau dieselbe wie die einer Beugungsöffnung von der Gestalt des Körperchens, so dass dieses nicht, wie man glauben möchte, Verdunkelung, sondern im Gegentheile Erhellung hervorbringt. Dieses Paradoxon findet seine einfache Erklärung in der Wellentheorie. Aus der Interferenzlehre ist bekannt, dass der wirksame Theil einer Welle sich auf einen kleinen Kreis von solchem Radius reducirt, dass zwischen den beiden Strahlen, welche von der Mitte des Kreises und seiner Peripherie kommen, ein Gangunterschied gleich $\frac{\lambda}{4}$ besteht, während der ganze übrige Theil der Welle sich selbst durch Interferenz zerstört. Unterdrückt man nun durch die Interposition des Körperchens einen Theil der Welle, welcher nöthig ist zur Zerstörung benachbarter Wellentheile, so werden diese selbst wieder wirksam, und man gelangt zu dem Theorem, dass das Körperchen in Wirklichkeit so viel Licht erzeugt, als es unterdrücken zu sollen scheint."

Dieses Babinet'sche Princip wurde später auch von Verdet (l. c.) seiner Berechnung der kleinen Höfe und von mir selbst der Berechnung des Newton'schen Hohlspiegelversuches zu Grunde gelegt. Ich habe an anderem Orte[1] dieses Princip in sehr allgemeiner Weise ausgesprochen und begründet, derart, dass sich der Satz aussprechen lässt: Alle in dieser Abhandlung bisher für Öffnungen erhaltenen Resultate bleiben giltig, wenn an Stelle der Öffnungen gleichgestaltete Körperchen gedacht werden. Unter gleichgestalteten Körperchen ist aber Folgendes zu verstehen: Denkt man durch einen Punkt einer sehr kleinen Öffnung eine Ebene

---

[1] K. Exner, Wied. Ann., XVII, 1882.

senkrecht zur Richtung der directen Strahlen gelegt, und die Öffnung auf diese Ebene projicirt, so ist nöthig, dass die Projection des Körperchens auf diese Ebene mit der Projection der Öffnung zusammenfalle, und dass das Körperchen von der Ebene geschnitten werde.

Man gelangt also insbesondere zu den folgenden Resultaten.

Zwei identische und gleichliegende Körperchen liefern in einer gegebenen Beugungsrichtung zwei resultirende gebeugte Strahlen, deren Wegdifferenz durch Gleichung (I) gegeben ist. Sind die Körperchen sehr klein, so ist nur nöthig, dass ihre Projectionen die gedachten Bedingungen erfüllen. In Gleichung (I) bedeutet nun $2e$ den Abstand zweier homologer Punkte der beiden Projectionen. Ein solches Paar von Körperchen möge ein Doppelkörperchen heissen.

Das durch ein Doppelkörperchen hervorgebrachte Beugungsbild ist gegeben durch die Gleichungen (II) und (III), wo i die durch eines der Körperchen für sich hervorgebrachte Intensität bedeutet. Man erhält demnach die beiden unter 1) beschriebenen Systeme von Interferenzfransen.

Das durch zahlreiche, unregelmässig vertheilte Körperchen oder Doppelkörperchen hervorgebrachte Beugungsbild zeigt eine Granulation. Die (mittlere) Intensität dieser Beugungsbilder ist für jede Stelle des Beugungsbildes gegeben durch die Gleichungen (VI) und (VIII).

5. Die kleinen Höfe.

Die Beugungsbilder, welche durch zahlreiche, unregelmässig längs einer Ebene oder räumlich vertheilte, Schirmchen oder Körperchen hervorgebracht werden, unterliegen einer sehr einfachen Theorie. Nach dem Principe der Summation der elementaren Helligkeiten hat man an jeder Stelle des Beugungsbildes die Summe der durch die einzelnen Körperchen für sich hervorgebrachten Intensitäten, und diese Intensitäten sind wieder nach dem Babinet'schen Principe identisch mit den durch gleichgestaltete Öffnungen hervorgebrachten.

Man hat demnach, wie schon bemerkt, die Intensitätsgleichung (VI):

$$J = \Sigma(i).$$

Sind die Körperchen unregelmässig gestaltet, so besteht das Beugungsbild einfach aus einem hellen Felde.

Sind sämmtliche Körperchen gleich gestaltet, gleich gross und gleich orientirt, so kommt die Intensitätsgleichung (VII) in Anwendung:

$$J = ni.$$

Experimentell studirt ist nur der Fall gleich grosser Kügelchen oder kreisförmiger Schirmchen (kleine Höfe). In diesem Falle hat man demnach das Beugungsbild einer kreisförmigen Öffnung vom Durchmesser eines der Kügelchen, doch erscheint die Intensität des durch die Öffnung hervorgebrachten Beugungsbildes mit der Zahl der Kügelchen multiplicirt.

In seiner Optik beschreibt Newton[1] die meteorologische Erscheinung der kleinen Höfe und gibt eine Erklärung nach der Emanationstheorie.

Die ersten genaueren Messungen verdanken wir Jordan.[2] Dieser beobachtete 1792 einen Mondhof und bestimmte die Durchmesser der Farbenringe mit einem Sextanten. Er fand den Durchmesser des nach aussen liegenden rothen Randes des ersten Ringes im Mittel gleich 2° 1′, den des zweiten gleich 3° 20′. Im Jahre 1797 machte er eine ähnliche Beobachtung und fand den Durchmesser des ersten Ringes gleich 5° 36′, den des zweiten gleich 9° 52′.

Die kleinen Mondhöfe entstehen durch Lichtbeugung an gleich grossen Wassertröpfchen. Die von Jordan gemessenen Ringe sollen demnach jenen einer kreisförmigen Öffnung entsprechen.

Ringe	$\frac{R \sin\theta}{\lambda}$	Intens.
1. hell. Centrum	0	1
1. dunkl. R.....	0·610	0
2. hell. R.	0·819	0·01745
2. dunkl. R.....	1·116	0
3. hell. R.	1·333	0·00415

[1] Newton, Optik, 1704.

[2] Jordan, Gilbert, Ann., 1804.

Ringe	$\frac{R \sin \theta}{\lambda}$	Intens.
3. dunkl. R.	1·619	0
4. hell. R.	1·847	0·00165
4. dunkl. R.	2·120	0
5. hell. R.	2·361	0·00078
5. dunkl. R.	2·621	0

Diese letzteren Ringe sind aber bekanntlich gegeben durch das beigesetzte Tableau, in welchem R und θ den Radius der Öffnung und den Beugungswinkel bedeuten.

Um die obigen Zahlen Jordan's mit den Zahlen dieser Tabelle zu vergleichen, hat man zunächst von sämmtlichen Zahlen Jordan's den Durchmesser des Mondes abzuziehen, und sodann zu beachten, dass Jordan's Messungen sich auf das sichtbare Roth des weissen Lichtes beziehen, und dass folglich, wie man annimmt, die hellen Ringe Jordan's mit den dunklen der obigen Tabelle nahezu zusammenfallen müssen, wenn für λ eine dem rothen Lichte entsprechende Wellenlänge eingeführt wird.

Was die erste Messung Jordan's anbelangt, so erhält man aus dem gemessenen Durchmesser des ersten Ringes, welcher dem ersten dunklen Ringe der Tabelle entspricht, mittelst der Zahlen der Tabelle für den zweiten hellen Ring Jordan's, welcher dem zweiten dunkeln Ringe der Tabelle entspricht, 3° 17′, während Jordan 3° 20′ fand. In Bezug auf die zweite Messung erhält man aus dem Durchmesser des ersten Ringes für jenen des zweiten Ringes 9° 50′, während Jordan 9° 52′ fand. Eine genauere Übereinstimmung lässt sich bei Beobachtungen dieser Art nicht erwarten. Allein nicht nur die ersten Messungen verdanken wir Jordan, er war es auch, welcher zuerst die Entstehung der kleinen Höfe der Beugung des Lichtes beim Durchgange der Strahlen durch die Räume zwischen den Wassertropfen der Atmosphäre zuschrieb.

Sehr zahlreiche Vermessungen kleiner Höfe rühren von Kämtz[1] her.

---

[1] Kämtz, Meteorologie.

Th. Joung[1] erkannte die Abhängigkeit der Ringdurchmesser von der Grösse der Tröpfchen und erinnerte an die Beobachtung Jordan's, nach welcher diese Durchmesser sehr variabel sind und sich nicht selten während der Zeit der Beobachtung merklich verändern.

Indessen kann man auch dies oft beobachten, dass die Ringe der Mondhöfe nicht genau kreisförmig erscheinen, was nicht einer zeitlichen, sondern einer räumlichen Variation der Grösse der Wassertropfen entspricht; ferner, dass eine Übereinanderlagerung zweier Ringsysteme sichtbar wird, eines solchen mit breiten und eines solchen mit schmalen Ringen, wenn nämlich die Lichtstrahlen nacheinander durch zwei Schichten von verschiedener Tropfengrösse gehen.

Fraunhofer (l. c.) beschäftigte sich eingehend mit diesen Ringen, welche er „Höfe kleiner Art" nannte, und welche auch Fraunhofer's Namen tragen. Er nannte diese, oftmals Sonne und Mond umgebenden Farbenringe, welche sich unmittelbar an das Bild der Lichtquelle anschliessen, kleine Höfe im Gegensatze zu den grossen Sonnen- und Mondhöfen, deren Durchmesser 45 und 90 Grade betragen.

In der historischen Einleitung sagt Fraunhofer: „Unvollkommene Höfe kleiner Art sieht man auch durch Fenster, welche leicht mit Dünsten beschlagen oder gefroren sind."

Was jedoch diese letzteren Ringe anlangt, so unterscheiden sich dieselben von den eigentlichen kleinen Höfen einigermassen. Die Erscheinung der kleinen Höfe zeigt nämlich zunächst dem Bilde der Lichtquelle ein kreisförmig begrenztes helles Feld, auf welches der erste dunkle Ring folgt, während die leicht mit Dünsten beschlagenen Fenster im Gegentheile zunächst dem Bilde der Lichtquelle ein kreisförmig begrenztes dunkles Feld zeigen. Ich habe nun nachgewiesen,[2] dass diese Modification der Erscheinung dadurch herbeigeführt wird, dass eine der wesentlichen Bedingung des Entstehens der kleinen Höfe, die völlig unregelmässige Vertheilung der lichtbeugenden Körperchen, in diesem Falle nur unvollkommen erfüllt ist.

---

[1] Th. Young, Phil. Tr. 1802.

[2] K. Exner, Wiener Akad. Bericht 1877.

Indem Fraunhofer, wie erwähnt, bei seinen Studien über diesen Gegenstand experimentell an das Babinet'sche Princip herankam, und indem er stillschweigend von dem Principe der Summation der elementaren Helligkeiten Gebrauch machte, gelangte er zu einer, wenn auch noch unvollkommenen Erklärung der kleinen Höfe.

Vollkommener, doch wie erwähnt, noch immer nicht völlig correct, behandelte Verdet (l. c.) den Gegenstand. Im experimentellen Theile seiner Arbeit fand er bei Anwendung von Lycopodiumstaub den Satz bestätigt, nach welchem zahlreiche unregelmässig vertheilte Kügelchen dieselben Ringe geben, wie eine kreisförmige Öffnung vom Durchmesser eines der Körperchen.

Die correcte Theorie der Erscheinung der kleinen Höfe ist oben dargestellt worden. Ausführlicheres habe ich in einer früheren Abhandlung mitgetheilt (l. c.).

6. Die Newton'schen Beugungsringe.

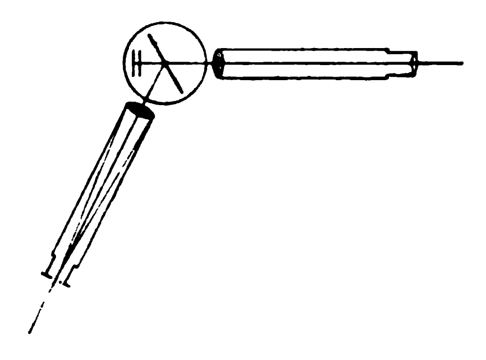
Die folgende, wie erwähnt im Wesentlichen von E. Lommel herrührende, Versuchsanordnung ist wohl die beste zur Hervorbringung jener Beugungsringe, welche ich die Newton'schen Beugungsringe nennen werde.

Die vom Heliostaten kommenden Sonnenstrahlen treten durch eine Sammellinse, kreuzen sich in der punktförmigen Spalte des Spaltfernrohres eines Spectralapparates, treten unter einander parallel aus dem Objective dieses Fernrohres, werden von einem Planglase reflectirt, Fig. 2, treten durch einen Bestäubungsraum, wobei sie Beugung erfahren, werden von einem ebenen Silberspiegel ganz oder nahezu normal reflectirt, treten neuerdings durch denselben Bestäubungsraum, wobei sie wieder Beugung erleiden, gehen sodann durch das Planglas und vereinigen sich in der Focalebene des Beobachtungsfernrohres zu einem punktförmigen Bilde der Öffnung des Spaltfernrohres. Dieses Bild erscheint von Beugungsringen umgeben, zu deren Beobachtung man sich eines Fresnel'schen rothen Glases Kupferoxydulglas) bedienen kann. Das Planglas hat den Zweck, die normale Reflexion zu ermöglichen. Den Bestäubungsraum

erfülle man spärlich und gleichmässig mit zahlreichen, unregelmässig vertheilten, sehr kleinen Körperchen (Stäubchen). Die Abstände der Körperchen vom Spiegel werden durchschnittlich sehr gross sein im Vergleiche mit den Dimensionen der Körperchen selbst. Hiebei ist eine flächenhafte Vertheilung der Körperchen nicht ausgeschlossen. So bringt ein mit Reismehl an der zweiten Fläche bestäubtes, dem Spiegel paralleles Glasblättchen (siehe die Figur) ausserordentlich schöne Ringe hervor.

Es ist evident, dass das entstehende Beugungsbild identisch ist mit jenem Beugungsbilde, welches wahrgenommen würde, wenn der Spiegel nicht vorhanden wäre, hingegen die Spiegelbilder der Körperchen wirkliche Körperchen wären und die directen Strahlen nach ihrem Durchgange durch die beiden Bestäubungsräume in das Beobachtungsfernrohr gelangen würden.

Fig. 2.



Sind die Körperchen sehr klein und fallen die Strahlen nahe senkrecht auf den Spiegel, so stellt jedes Körperchen mit seinem Spiegelbilde ein Doppelkörperchen dar. Stehen ferner die Strahlen nahe oder völlig senkrecht auf dem Spiegel, so wird das durch ein solches Doppelkörperchen hervorgebrachte excentrische Ringsystem hinreichend breite Ringe zeigen, um deutlich wahrgenommen zu werden. Da die Geraden $2e$ für sämmtliche Doppelkörperchen genau parallel sind, fallen die Centra sämmtlicher, durch die einzelnen Doppelkörperchen hervorgebrachten, excentrischen Ringsysteme zusammen. Sind überdies sämmtliche Geraden $2e$ gleich lang, oder stehen sämmtliche Körperchen vom Spiegel gleich weit ab, so sind die excentrischen Ring-

systeme durchaus identisch. Doch soll die letztere Bedingung im Allgemeinen nicht vorausgesetzt werden.

Das entstehende Beugungsbild zeigt die Granulation, und die Intensität an jeder Stelle desselben ist gegeben durch die Gleichungen (VIII) und (II):

$$J = \Sigma\,[2\,i\,(1 + \cos 2\,es)]$$

$$s = \frac{2\pi}{\lambda}\,(\cos\gamma - \cos\varphi).$$

e ist jetzt die Entfernung eines Körperchens vom Spiegel, welche im Vergleiche mit den Dimensionen des Körperchens als sehr gross vorausgesetzt wird, γ und φ sind jetzt die Winkel der directen und der gebeugten Strahlen mit der Spiegelnormale.

Legt man ein Coordinatensystem so in die Figur, dass die yz-Ebene auf den Spiegel fällt, zerlegt man den Bestäubungsraum R, also etwa einen begrenzten Luftraum, in welchem Stäubchen, in spärlicher, unregelmässiger und gleichmässiger Vertheilung schweben, in sehr kleine Parallelepipede $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, bezeichnet man mit W jene Intensität, welche in der betrachteten Beugungsrichtung entsprechend einer nur einmaligen Beugung vom ganzen Bestäubungsraum geliefert würde, setzt man ferner für $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ die Differentiale dx, dy, dz, für Σ das Zeichen $\int\int\int$, und ersetzt man nunmehr e durch x, so erhält man statt der letzten Gleichung:

$$J = \frac{2\,W}{R}\iiint (1 + \cos 2\,x\,s)\;dx\;dy\;dz, \qquad \text{(IX)}$$

wo sich die Integration über den ganzen Bestäubungsraum erstreckt, als Intensitätsgleichung für das Phänomen der Newton'schen Beugungsringe unter der Voraussetzung einer flächenhaften oder aber einer räumlichen Bestäubung.

Man muss nun unterscheiden: Sind die Körperchen sämmtlich gleich gestaltet, gleich gross und gleich orientirt, sind sie beispielsweise Kugeln von gleichen Radien, so hat der Factor W seine eigenen Maxima und Minima, und kann, wie gezeigt worden ist, berechnet werden.

Sind hingegen die Körperchen unregelmässig gestaltet, was im Folgenden, wo nicht das Gegentheil bemerkt ist, stets voraus-

gesetzt wird, so nimmt W mit wachsendem Beugungswinkel verhältnissmässig langsam ab, ohne Maxima und Minima zu zeigen; die Maxima und Minima des Beugungsbildes fallen dann sehr nahe mit jenen des dreifachen Integrals zusammen.

Die Gleichung (IX), welche nichts anders ausdrückt, als dass sich die Wirkungen der einzelnen Körperchen summiren, lässt zunächst unmittelbar den folgenden, für jede beliebige Bestäubung giltigen Satz erkennen:

Das Beugungsbild besteht, welche Gestalt immer der Bestäubungsraum habe, aus kreisförmigen Ringen, deren gemeinsamer Mittelpunkt in die Richtung der Spiegelnormale fällt.

Bei normaler Incidenz fällt diese Richtung mit jener Richtung zusammen, in welcher das Bild der Lichtquelle gesehen wird; die Ringe sind mit dem Bilde der Lichtquelle concentrisch. Bei (etwas) schiefer Incidenz werden die Ringe excentrisch.

Sind sämmtliche Körperchen vom Spiegel gleich weit entfernt, so befolgen die Ringe das Gesetz der Ringe des Farbenglases. Ist jedoch diese Bedingung nicht erfüllt, so hängt das Gesetz der Ringe, oder die Maxima und Minima des dreifachen Integrals, von der Gestalt des Bestäubungsraumes, oder den Grenzen dieses Integrals ab, das Gesetz der Ringdurchmesser muss in jedem besonderen Falle für sich gerechnet werden.

Im Folgenden sollen einige solche besondere Fälle betrachtet werden.

7. Prismatische Bestäubung.

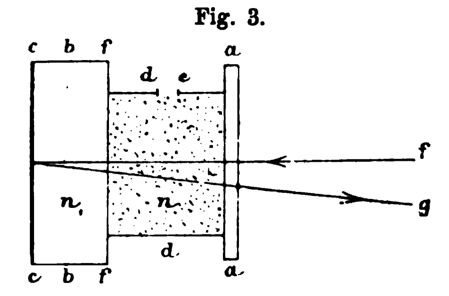
Hat der Bestäubungsraum die Gestalt eines Prismas, dessen Grundflächen mit dem Spiegel parallel sind, so ergibt sich aus (IX) durch Ausführung der Integration:

$$J = 2\,W\left(1 + \frac{\sin as}{as}\cos 2\,es\right), \tag{X}$$

wenn a die zum Spiegel senkrechte Seite des Prismas und e hier wie im folgenden stets die Entfernung des Mittelpunktes des Bestäubungsraumes vom Spiegel sind.

Um eine räumlich ausgedehnte Bestäubung von gleichmässiger Vertheilung und bestimmter Gestalt zu erhalten, kann man eine Flüssigkeit benützen, in welcher kleine Körpertheilchen suspendirt sind. Es ergibt sich so der in Fig. 3 abgebildete, auf das Tischchen des Spectrometers zu stellende, Reflexionsapparat. *a* und *b* sind Plangläser, *b* an der zweiten Fläche *c* versilbert. *d* ist ein prismatisches Gefäss, z. B. ein gläserner Hohlcylinder mit

Fig. 3.



horizontaler Achse, welcher bei *e* mit der die Theilchen enthaltenden Flüssigkeit gefüllt werden kann. Die von *f* (Spaltfernrohr) kommenden parallelen Strahlen werden vom Silberspiegel *c* in der Richtung *g* zurückgeworfen, um nach der Reflexion von der früher angeführten Glasplatte in das Beobachtungsfernrohr zu gelangen.

Da die optischen Längen in der Flüssigkeit und im Glase andere sind, als in der Luft, erfährt die Formel (X) eine Veränderung und wird, wie man leicht sieht,

$$J = 2W\left[1 + \frac{\sin\frac{a}{n}s}{\frac{a}{n}s} \cdot \cos\left(\frac{a}{n} + \frac{2b}{n_1}\right)s\right], \qquad \text{(XI)}$$

wenn b die Dicke des versilberten Glases und n, n_1 die Brechungsexponenten der Flüssigkeit und dieses Glases sind.

Die Formel vereinfacht sich wesentlich, wenn $b = 0$ ist, oder die Versilberung an der ersten Fläche f des Glases angebracht wird. In diesem Falle hat man:

$$J = 2W\left(1 + \frac{\sin\frac{4es}{n}}{\frac{4es}{n}}\right) \qquad \text{(XII)}$$

Was das durch diese letztere Gleichung (XII) gegebene Beugungsbild anlangt, so entsprechen die Maxima und Minima der Intensität den Maximis und Minimis der Grösse $\frac{\sin\frac{4\,es}{n}}{\frac{4\,es}{n}}$, also der Gleichung

$$\operatorname{tang}\frac{4\,es}{n}=\frac{4\,es}{n}.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung wurden schon von Schwerd berechnet, und sind:

$$\frac{4\,es}{n\pi}\begin{array}{l}=\underline{0}\\ \pm 1\cdot 4303\\ \pm\underline{2\cdot 4590}\\ \pm 3\cdot 4709\\ \pm\underline{4\cdot 4774}\\ \pm 5\cdot 4818\\ \pm\underline{6\cdot 4844}\\ \pm 7\cdot 4865\\ \pm\underline{8\cdot 4881}\\ \cdot\;\cdot\cdot\cdot\cdot\end{array}\qquad\qquad \text{(XIII)}$$

Die Maxima von $\frac{\sin\frac{4\,es}{n}}{\frac{4\,es}{n}}$ sind sämmtlich grösser als 0, die Minima kleiner als 0, beide nähern sich rasch der Limite 0. Folglich nähert sich die Intensität rasch der Limite $2W$ und es *ist nur eine geringe Zahl Ringe wahrnehmbar.*

Für die Lage der Maxima und Minima hat man demnach:

$$\frac{4\,es}{n\pi}=h,$$

wenn h eine der Zahlen (XIII) ist, und zwar entsprechen die unterstrichenen Zahlen den Maximis, die andern den Minimis der Intensität.

Setzt man für s seinen Werth (II), so hat man für die hellen und dunkeln Ringe:

$$\cos\varphi = \cos\gamma - \frac{hn}{8} \cdot \frac{\lambda}{e}, \qquad \text{(XIV)}$$

und zwar bedeuten: φ den Winkel der gebeugten Strahlen mit der Spiegelnormale, γ den Winkel der directen Strahlen mit der Spiegelnormale, n den Brechungsexponenten der Flüssigkeit und $2e$ die Dicke der Flüssigkeitsschichte.

Der achromatische Ring entspricht $h = 0$ und $\varphi = \gamma$, die positiven Werthe von h entsprechen den äusseren, die negativen den inneren Ringen.

Die Formel (XII) wurde experimentell geprüft. Als getrübte Flüssigkeit diente Milchwasser. Der Brechungsexponent dieser Flüssigkeit, bezogen auf die mittlere Wellenlänge $\lambda = 0{\cdot}0006$ Mm. des benützten rothen Glases war $n = 1{\cdot}3343$. Die Dicke der Flüssigkeitsschicht war $2e = 5{\cdot}285$ Mm. Dieselbe reichte bis an den Spiegel, welcher durch Versilberung der in Fig. 3 mit f bezeichneten Glasfläche hergestellt war. Der Incidenzwinkel der directen Strahlen war $\gamma = 1°3'$. Bei der angewendeten Flüssigkeit waren die lichtbeugenden Körperchen unregelmässig gestaltet.

Unter diesen Voraussetzungen hat man nach Gleichung (XIV) für den Radius φ eines hellen oder dunkeln Ringes:

$$\cos\varphi = 0{\cdot}9998321 - 0{\cdot}0000379 \,.\, h.$$

Es ergab sich das folgende Tableau:

	Gerechnet		Gemessen	
1. innerer heller Ring............		42'		43'
Achromatischer Ring	1°	3	1°	3
1. äusserer heller Ring	1	18	1	18
2. äusserer heller Ring	1	29	1	30

Bei einer zweiten Messung war der Incidenzwinkel $\gamma = 1°\ 31^1/_2{}'$. Es ergab sich:

	Gerechnet		Gemessen	
2. innerer heller Ring	1°	6'	1°	6'
1. „ „ „	1	19	1	20
Achromatischer Ring	1	$31^1/_2$	1	$31^1/_2$
1. äusserer heller Ring	1	43	1	43
2. „ „ „	1	51	1	51

8. Ebene Bestäubung.

Degenerirt der Bestäubungsraum in eine beliebig begrenzte und beliebig gegen den Spiegel geneigte Ebene, lässt man z. B. die Strahlen durch eine an der zweiten Fläche gleichmässig mit Reismehl bestäubte Glasplatte treten, so erhält man aus (IX) durch Ausführung der Integration:

$$J = \frac{2W}{f \sin \psi} \int_{x_1}^{x_2} (1 + \cos 2xs) \, F(x) \, dx, \qquad \text{(XV)}$$

und zwar bedeuten hier f die Grösse der Bestäubungsebene, ψ den Winkel derselben mit dem Spiegel, x_1 und x_2 die kleinste und die grösste Entfernung der Bestäubungsebene vom Spiegel, $F(x)$ die Länge einer auf der Bestäubungsebene parallel dem Spiegel gezogenen Geraden, ausgedrückt als Function ihrer Entfernung vom Spiegel.

Eine gleichmässige, d. i. überall gleich dichte Bestäubung erhält man dadurch, dass man die als Träger der Bestäubung dienende Glasplatte sehr oft, beispielsweise 100 Mal, durch leichte Staubwölkchen führt.

Ist insbesondere die Bestäubungsebene ein Rechteck, dessen eine Seite dem Spiegel parallel liegt, so ergibt sich aus (XV):

$$J = 2W\left(1 + \frac{\sin (x_2 - x_1)s}{(x_2 - x_1)s} \cos 2es\right). \qquad \text{(XVI)}$$

Vergleicht man diese Formel mit der Formel (X), so gelangt man zu dem, auch ohne Rechnung zu begreifenden Satze:

Ein prismatischer Bestäubungsraum, dessen Grundflächen mit dem Spiegel parallel liegen, bringt dasselbe Beugungsbild hervor, wie eine rechteckige Bestäubungsebene, wenn zwei Seiten dieser letzteren auf die beiden Grundflächen des Prismas fallen.

Liegt insbesondere die rechteckige Bestäubungsebene dem Spiegel parallel, so erhält man aus (XVI):

$$J = 2W(1 + \cos 2es), \qquad \text{(XVII)}$$

und man sieht leicht, dass diese Gleichung auch dann noch besteht, wenn die Bestäubungsebene beliebig

begrenzt ist. Auch kann diese Gleichung sehr leicht selbstständig abgeleitet werden.[1] Sind in diesem Falle, wie vorausgesetzt wird, die Stäubchen unregelmässig gestaltet, so hat man einzig das schon durch Formel (III) gegebene excentrische Ringsystem. Die Lage der hellen und dunkeln Ringe ist gegeben durch:

$$2\,es = \pm\,0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \ldots \qquad \text{(XVIII)}$$

Sämmtliche Maxima der Intensität sind gleich $2W$, sämmtliche Minima gleich 0. Der Umstand, dass die Minima gleich 0 sind, und dass folglich die Ringe brillant und zahlreich erscheinen, hat seinen Grund in der Gleichheit der Spiegelabstände sämmtlicher Theilchen, wo dann sämmtliche elementaren Ringsysteme congruiren. Sind diese Abstände ungleich, wie wenn die Bestäubungsebene schief gegen den Spiegel steht, so congruiren die elementaren Ringsysteme nicht mehr, die Minima sind nicht mehr gleich 0, die Zahl der sichtbaren Ringe vermindert sich und es kann zum gänzlichen Verschwinden derselben kommen.

Der zuletzt besprochene Fall, wo die Bestäubungsebene dem Spiegel parallel ist, wurde von vielen Physikern behandelt, und ist einfach experimentell herzustellen. Es genügt, einen aus einer planparallelen Glasplatte hergestellten, an der zweiten Fläche belegten Spiegel an der ersten Fläche zu bestäuben, und in der beschriebenen Weise am Spectrometer anzubringen. Die Intensitätsgleichung ist indessen bei Anwendung eines Glasspiegels nicht die Gleichung XVII, sondern sie wird wegen der Brechung im Glase, welches sich zwischen Bestäubung und Spiegel befindet,

$$J = 2\,W\left(1 + \cos\frac{2\,es}{n}\right) \qquad \text{(XIX)},$$

wo nun e die Glasdicke ist. Das Glas bewirkt demnach eine Erweiterung der Ringe.

Eine experimentelle Verification der Gleichung (XIX), welche sich auf einen bestäubten, ebenen Glasspiegel bezieht, wurde von Lommel[2] für die senkrechte Incidenz durchgeführt.

---

[1] Verdet-Exner, Optik, I, 214.

[2] E. Lommel, Über die Interferenz des gebeugten Lichtes, Erlangen 1875.

Wir wollen nun zu dem Falle zurückkehren, auf welchen sich Gleichung (XVII) bezieht, wo eine rechteckige Bestäubungsebene dem Spiegel parallel steht, und sich zwischen beiden Luft befindet. Dreht man das an der zweiten Fläche bestäubte Glasplättchen, welches den Abstand e vom Spiegel hat, um seinen Mittelpunkt, so dass beständig zwei Seiten des Rechteckes dem Spiegel parallel bleiben, so tritt die Formel (XVI) in Anwendung, das Gesetz der Ringe wird ein complicirtes, die Erscheinung wird eigenthümlich unregelmässig. Einfach wird das Gesetz der Ringe erst wieder, wenn das Bestäubungsblättchen so weit gedreht worden ist, dass eine Seite ihres rechteckigen Umrisses auf die Ebene des Spiegels fällt. In diesem Falle wird die Intensitätsformel:

$$J = 2\,W\left(1 + \frac{\sin 4\,es}{4\,es}\right) \qquad \text{(XX)}$$

und unterscheidet sich von Formel XII nur durch die Abwesenheit des Brechungsexponenten n. Die Maxima und Minima der Grösse $\frac{\sin 4\,es}{4\,es}$ sind daher durch Gleichung (XIII) gegeben, sobald in dieser Gleichung $n = 1$ gesetzt wird, und die Discussion der Formel (XX) ist jener der Formel (XII) durchaus analog.

Es ergibt sich hieraus das folgende, bemerkenswerthe Resultat:

Denkt man sich eine zur Spiegelebene parallele, rechteckige Bestäubungsebene um ihren Mittelpunkt gedreht, bis eine ihrer Seiten auf die Ebene des Spiegels fällt, so verändert sich das Beugungsbild in folgender Weise:

1. Da, wie aus den Formeln (XVII) und (XX) hervorgeht, bei der Parallellage des Bestäubungsblättchens die dunkeln Ringe vollkommen dunkel sind, hingegen bei der schiefsten Lage des Blättchens die dunkeln Ringe mit wachsender Ordnungszahl rasch den benachbarten hellen Ringen an Helligkeit fast gleich werden, muss die Drehung des Blättchens zur Folge haben, dass die Ringe von grösserer Ordnungszahl verschwinden, und dass auch die sichtbar bleibenden Ringe in vermindertem Glanze erscheinen.

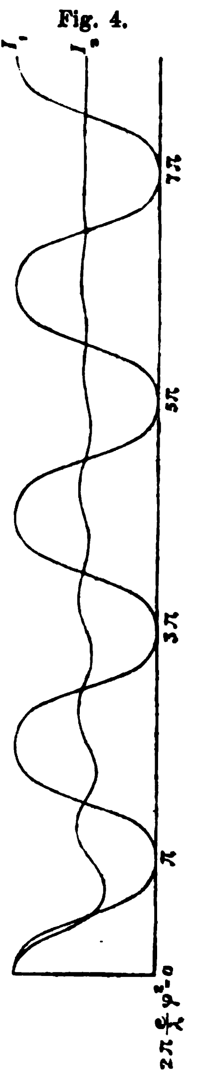
2. Wie aus dem Vergleiche der Gleichungen (XIII) und (XVIII) hervorgeht, müssen die Radien der bei der schiefsten

Lage noch wahrnehmbaren Ringe reducirt erscheinen, so dass nahezu doppelt so viel Ringe als früher denselben Raum einnehmen.

3. Diese Veränderungen treten genau in derselben Weise ein, wie gross immer der ursprüngliche Abstand der Bestäubungsebene vom Spiegel genommen wird.

4. Ungeändert bleibt nur die Lage des 0ten oder achromatischen Ringes.

Fig. 4.



Die Curven I_1 und I_2 in Fig. 4 zeigen den Verlauf der Intensität für die Anfangslage (Parallelstellung) und die Endlage (schiefste Stellung) des Bestäubungsblättchens bei normaler Incidenz, wo der achromatische Ring mit dem Bilde der Lichtquelle zusammenfällt und die übrigen Ringe mit diesem Bilde concentrisch sind. Vorausgesetzt ist hiebei, dass $2\,W$ als constant angesehen werde.

Alle diese Consequenzen der Theorie werden durch den Versuch bestätigt.

Ich habe indessen die Formel XX, welche sich auf den Fall bezieht, wo eine Seite der rechteckigen Bestäubung auf die Ebene des Spiegels fällt, auch direct durch messende Versuche geprüft.

Eine rechteckige Glasplatte wurde mit Reismehl gleichmässig bestäubt und in solche fixe Lage gegen einen ebenen Silberspiegel gebracht, dass eine Seite der rechteckigen Bestäubungsebene auf die Ebene des Spiegels fiel und die gegenüberliegende Seite der Bestäubungsebene vom Spiegel einen Abstand gleich 10·57 Mm. hatte. Dieser Reflexionsapparat wurde in angegebener Weise auf dem Tischchen eines Spectrometers angebracht, und die Messungen mittelst eines rothen Glases von der mittleren Wellenlänge 0·0006 Mm. bei einem Incidenzwinkel gleich 1° 17′ angestellt.

Man hat in diesem Falle nach Formel XIV, wo $n = 1$ zu setzen ist, für den Radius φ eines hellen oder dunkeln Ringes:

$$\cos \varphi = 0{\cdot}9997492 - 0{\cdot}00001419\, h,$$

wenn h eine der Zahlen (XIII) ist.

Es ergab sich:

	Gerechnet		Gemessen	
1. innerer heller Ring	1°	11′	1°	11′
Achromatischer Ring..........	1	17	1	17
1. äusserer heller Ring	1	22	1	22
2. äusserer heller Ring	1	26	1	27

9. Zusammenhang zwischen den kleinen Höfen und den Newton'schen Beugungsringen.

Eine kreisrunde Öffnung bringt Ringe hervor, deren Centrum auf die Richtung der directen Strahlen fällt, also mit dem Bilde der Lichtquelle congruirt. Ebenso ein kugelförmiges Körperchen. Zwei solche Öffnungen oder Körperchen, welche zusammen eine Doppelöffnung oder ein Doppelkörperchen bilden, bringen ausser diesem Ringsystem noch ein zweites excentrisches Ringsystem hervor, dessen Mittelpunkt auf die Richtung der Linie $2e$ fällt. Eine grosse Zahl unregelmässig vertheilter solcher Doppelkörperchen bringt ein Beugungsbild hervor, welches das Resultat der Übereinanderlagerung sämmtlicher, den einzelnen Doppelkörperchen entsprechender, elementarer Beugungsbilder ist. Das durch eines der Doppelkörperchen hervorgebrachte, mit der Lichtquelle concentrische Ringsystem hängt nur von der Grösse der Körperchen ab, das excentrische Ringsystem nur von der Grösse und Richtung der Linie $2e$. Sind also sämmtliche Körperchen gleich gross und sämmtliche Gerade $2e$ gleich gross und parallel, so congruiren sämmtliche elementare Beugungsbilder, das resultirende Beugungsbild zeigt ebenfalls die beiden Ringsysteme und kein weiteres. Man hat nun das combinirte Phänomen der kleinen Höfe und der Newton'schen Beugungsringe.

Man kann den letzteren Fall experimentell verwirklichen, wenn man einen ebenen Glasspiegel mit Lycopodium (gleich grosse Kügelchen) bestäubt.

Man sieht hieraus, dass die kleinen Höfe und die Newton'schen Beugungsringe im Wesentlichen identisch sind mit den beiden Systemen von Interferenzlinien, welche durch eine Doppelöffnung hervorgebracht werden, also sehr nahe verwandte Erscheinungen sind.

Bestäubt man die Glasplatte mit Reismehl, so hören die elementaren Beugungsbilder auf congruent zu sein, nur die excentrischen Ringsysteme haben überall dieselbe Lage. Demnach zeigt das resultirende Beugungsbild nur das excentrische Ringsystem, die Newton'schen Beugungsringe.

Lässt man das Licht durch eine auf beiden Seiten mit Lycopodium bestäubte Glasplatte treten, so kann man je ein Körperchen auf der einen Seite der Platte mit einem solchen auf der andern Seite zu einem Doppelkörperchen vereinigt denken. Da aber nun die Richtung der Linie $2e$ von einem Doppelkörperchen zum anderen unregelmässig wechselt, sind die elementaren Beugungsbilder wieder nicht congruent, nur die mit der Lichtquelle concentrischen Ringsysteme haben überall die gleiche Lage. Demnach zeigt das resultirende Beugungsbild nur das Phänomen der kleinen Höfe.

Bestäubt man endlich die Glasplatte auf beiden Seiten mit Reismehl, so bleiben beide Ringsysteme aus, man erhält nichts als ein helles Feld gebeugten Lichtes.

Was diesen letzteren Fall anlangt, so ist ein kleiner historischer Rückblick nicht uninteressant.

Obgleich Babinet das Princip aufgestellt hatte, welches der Schlüssel nicht nur zur Erklärung der kleinen Höfe, sondern auch zu jener der Newton'schen Beugungsringe wurde, so kam Babinet doch nicht auf die Idee, dieses sein Princip auch auf die Erklärung dieses letzteren Phänomens anzuwenden, und seine Arbeiten in dieser Richtung lieferten ebenso viele Irrthümer als Wahrheiten. Er hatte den richtigen Gedanken,[1] dass bei der experimentellen Darstellung der Newton'schen Beugungsringe nicht nur, was schon der Herzog von Chaulnes erkannt hatte, die Bestäubung der Vorderfläche des Spiegels wesentlich und das Glas des

[1] Babinet, C. R. 1838.

Spiegels unwesentlich sei, sondern dass auch der Spiegel hinweggelassen werden könne, sobald nur an die Stelle der Spiegelbilder der Stäubchen wirkliche Stäubchen gesetzt würden, dass also das Wesentliche und theoretisch Einfachste der Durchgang des Lichtes durch eine doppelte Bestäubung sei. Auf dieser Erkenntniss beruht der folgende Versuch Babinet's:

Er brachte eine planparallele Glasplatte in den Gang der nach dem Brennpunkte einer Sammellinse convergirenden Strahlen. War die Platte auf beiden Seiten bestäubt, so zeigte sich nach der Angabe Babinet's auf einem durch den Brennpunkt der Linse gehenden Schirme das Phänomen der Newton'schen Beugungsringe. Er gab eine so genaue Beschreibung, dass kein Zweifel darüber bestehen kann, dass er wirklich das Phänomen der Newton'schen Beugungsringe wahrgenommen hatte, und versprach eine Berechnung, welche jedoch nie erschienen ist.

Babinet hatte übersehen, dass seine beiden Bestäubungen sich nicht wie Bild und Spiegelbild verhielten, und aus den oben angestellten Betrachtungen erhellt, dass Babinet unter den gegebenen experimentellen Bedingungen durchaus keine Newton'schen Beugungsringe erhalten haben konnte. Es hat auch nicht an Wiederholungen des Babinet'schen Versuches gefehlt, doch kein Physiker nach Babinet hat eine Spur von Ringen wahrnehmen können.

Das Räthsel, wie es zuging, dass Babinet Newton'sche Beugungsringe erhielt, wo er keine erhalten konnte, hat E. Lommel[1] in geistreicher Weise gelöst.

Man kann indessen das Experiment Babinet's wiederholen unter Erfüllung der nöthigen Bedingungen, indem man dafür sorgt, dass die beiden Bestäubungen von derselben geometrischen Zusammensetzung sind. So habe ich[2] ein Experiment beschrieben, wo die Newton'schen Beugungsringe dadurch erhalten wurden, dass die Strahlen successive durch zwei Glasplatten traten, welche zwei, auf photographischem Wege hergestellten,

---

[1] E. Lommel, Über die Interferenz des gebeugten Lichtes, III. Erlangen 1876.

[2] K. Exner, Wiener Akad. Ber. 1875.

ihrer geometrischen Zusammensetzung nach identischen, Bestäubungen als Träger dienten.

Solche photographische Bestäubungen sind jedoch schwer herzustellen, und man kann die beiden Platten in weit einfacherer Weise erhalten, indem man eine Glasplatte mit Ölfarbe punktirt und durch Auflegen einer zweiten Platte auf der letzteren einen Abdruck hervorbringt.

10. Beugungs-, Diffusions- und Reflexionstheorie.

Dass die kleinen Höfe durch das gebeugte Licht entstehen, stand seit jeher fest. Es folgt dies auch einfach aus der Übereinstimmung der Messungen mit der Rechnung. Anders verhält es sich mit den Newton'schen Beugungsringen.

Der Herzog von Chaulnes[1] war der Erste, welcher Newton's Anwandlungstheorie verliess, und behauptete, dass die Newton'schen Beugungsringe durch das an den Staubtheilchen gebeugte Licht hervorgebracht würden. Diese richtige Anschauung ging durch Th. Young[2] auf lange Zeit verloren, welcher die Erscheinungen auf die gegenseitige Interferenz des beim Hingange und des beim Rückgange der directen Strahlen durch die Bestäubung diffus zerstreuten Lichtes zurückführte. Unter den interferirenden zerstreuten Strahlen verstand er jenes Licht, durch welches die Staubtheilchen sichtbar werden. Der Irrthum Young's, welcher das Entstehen der Newton'schen Beugungsringe diesem zerstreuten Lichte zuschreibt, erhielt sich bis in die jüngste Zeit; durch ihn ging auch der schon von Newton vorausgesetzte Zusammenhang zwischen den Ringen seines Hohlspiegelversuches und der Erscheinung der kleinen Höfe verloren.

Auch der folgende Versuch Pouillet's[3] vermochte nicht die acceptirte Diffusionstheorie zu beseitigen.

---

[1] Herzog von Chaulnes, Mém. de l'anc. Akad. des sc. 1755.
[2] Th. Joung, Phil. Tr. 1802.
[3] Pouillet, Ann. de chim. et de phys. 1816.

Verwendet man statt des Bestäubungsblättchens einen undurchsichtigen, dem Spiegel parallelen Schirm, in welchem sich eine Beugungsöffnung befindet, so erhält man ebenfalls die Newton'schen Beugungsringe. Die Gestalt der Öffnung kann eine beliebige sein. Pouillet erzeugte so ein elementares System Newton'scher Beugungsringe. Selbstverständlich erhält man gleichzeitig die Beugungsfigur der Öffnung.

Der einzige Erfolg dieses Versuches war, dass man die durch eine solche Öffnung hervorgebrachten Ringe dem gebeugten, und die durch Staub hervorgebrachten, nach wie vor dem diffusen Lichte zuschrieb.

Der Versuch Pouillet's lässt sich leicht in instructiver Weise erweitern. Vermehrt man nämlich die Zahl der Öffnungen, und sorgt dafür, dass dieselben verschiedene Gestalt haben, so nimmt der Glanz der Newton'schen Beugungsringe zu, während die den einzelnen Öffnungen entsprechenden Beugungsbilder sich gegenseitig stören; zugleich treten sehr feine, sich gegenseitig durchkreuzende Interferenzsysteme auf. Wird die Zahl der Öffnungen sehr gross, so bilden diese letzten Streifensysteme eine feine Granulation des nunmehr durch die Beugungsbilder der einzelnen Öffnungen hervorgebrachten hellen Feldes, auf welchem sich mit ausserordentlicher Schärfe die dunkeln Newton'schen Beugungsringe abzeichnen.

Vor Pouillet hatte schon der Herzog von Chaulnes das elementare Phänomen der Newton'schen Beugungsringe mittelst der Combination einer Messerschneide und eines Spiegels hervorgebracht. Zu demselben Zwecke dienten später Babinet zwei polirte, parallel gespannte Drähte. Man sieht, wie Babinet auch hier den Spiegel vermeidet, indem er an die Stelle des Spiegelbildes des einen Drahtes einen wirklichen zweiten Draht setzt. Man sieht ferner, dass durch Babinet's Versuch zu der schon vorhandenen Beugungstheorie und der Diffusionstheorie eine dritte Theorie tritt, die Reflexionstheorie. Babinet sagt ausdrücklich, dass seine Drähte spiegelnd gewesen seien, und schreibt das entstehende Interferenzbild den reflectirten Strahlen zu. Die Reflexionstheorie gewinnt an Bedeutung, wenn man bedenkt, dass die in Rede stehenden Erscheinungen nur in unmittelbarer Nähe der directen Strahlen auftreten, und dass die

streifende Reflexion auch an rauhen Körpern stets eine regelmässige Reflexion ist.

Der erste, welcher mit Nachdruck und an der Hand des Experiments die Beugungstheorie lehrte und seit Newton die kleinen Höfe und die Newton'schen Beugungsringe zum ersten Male wieder in ihrem Zusammenhange behandelte, war G. G. Stokes.[1]

Er gab den folgenden Beweis für die Beugungstheorie der Newton'schen Beugungsringe:

„Die Polarisationsphänomene scheinen ein experimentum crucis an die Hand zu geben, um zu entscheiden, ob die Ablenkung des Lichtes aus seiner regelmässigen Bahn, welche die Bildung der Ringe veranlasst, eine Diffractionserscheinung oder ein Zerstreuen im eigentlichen Sinne des Wortes sei. Wo polarisirtes Licht zerstreut wird, entweder durch Reflexion an weissem Papier oder durch Transmission durch dasselbe, so verliert es seine Polarisation; allein wenn polarisirtes Licht eine regelmässige Diffraction erleidet, so behält es seine Polarisation. Ich stellte eine kleine Flamme nahe an den Krümmungsmittelpunkt eines Hohlspiegels, dessen Oberfläche mit Milch und Wasser zubereitet worden, und brachte nun ein Nicol'sches Prisma dicht an die Flamme, damit das auf den Spiegel fallende Licht polarisirt sei. Bei Untersuchung mit einem zweiten Nicol erwiesen sich die Ringe vollkommen polarisirt."

Man sieht, dass dieser Versuch, so schön er ist, doch keineswegs strenge beweist; denn er widerlegt zwar die Diffusionstheorie, nicht aber die Reflexionstheorie. Dasselbe lässt sich von einigen Beweisen sagen, welche E. Lommel gebracht hat.

Indessen lässt sich allerdings ein strenger Beweis für die Richtigkeit der Beugungstheorie geben.

Wenn man die Newton'schen Beugungsringe für sich erzeugt, so gelangt man allerdings zu demselben Beugungsbild, mag man annehmen, dass die directen Strahlen an einer bestimmten Stelle der Bestäubung zweimal gebeugt, oder dass sie zweimal diffundirt oder reflectirt worden sind, denn der Gangunterschied der interferirenden Strahlen ist in allen Fällen

---

[1] G. G. Stokes, Pogg. 1853.

derselbe. Anders verhält es sich, wenn man die Newton'schen Beugungsringe mit den kleinen Höfen combinirt, welche letzteren unzweifelhaft eine Beugungserscheinung sind.

Man erzeuge das combinirte Phänomen der kleinen Höfe und der Newton'schen Beugungsringe mittelst einer mit Lycopodium bestäubten Glasplatte unter Anwendung homogenen Lichtes und bei schiefer Incidenz. Ist die Incidenz beträchtlich schief, so erscheinen nur Fragmente der Newton'schen Beugungsringe in Gestalt nahe geradliniger Streifen, welche die mit dem Bilde der Lichtquelle concentrischen Beugungsringe durchschneiden. Man beachte nun die Art, wie dies geschieht. Nach der Beugungstheorie werden durch die doppelte Beugung die Beugungsringe an derselben Stelle, und congruirend übereinander liegend, doppelt erzeugt; durch die gegenseitige Interferenz der den beiden congruirenden Beugungsbildern entsprechenden Vibrationsbewegungen entstehen sodann die dunkeln Streifen. Nach der Beugungstheorie entsteht demnach ein Netz dunkler Linien auf hellem Grunde. Nach jeder anderen, als der Beugungstheorie entstehen die Ringe durch das gebeugte Licht, hingegen die Streifen durch Licht anderer Provenienz. Hiernach ist es nicht möglich, dass ein dunkler Streifen, indem er einen hellen Ring durchschneidet, das Licht des Ringes an der Durchschnittsstelle auslöscht. Man muss daher ein Netz heller Linien auf dunklem Grunde wahrnehmen.

Der Versuch zeigt nun, dass man ein Netz dunkler Linien auf hellem Grunde erhält. Dies zeigt sich namentlich schön in dem mittleren, intensiven, hellen Felde der kleinen Höfe, welches von vollkommen schwarzen Linien durchschnitten erscheint.

11. Der Newton'sche Hohlspiegelversuch.

Von den älteren Versuchen möge zunächst der Newton'sche[1] Hohlspiegelversuch Erwähnung finden.

Dieser bekannte Versuch, mit welchem Newton die nach ihm benannten Beugungsringe entdeckte, ist folgender.

---

[1] Newton, Optik, 2. Buch, 4. Theil.

Sonnenstrahlen treten durch eine Öffnung im Fensterladen in ein verfinstertes Zimmer, fallen auf einen Schirm mit kleiner Öffnung, treten schwach divergent aus, werden von einem, an der Rückseite belegten gläsernen Hohlspiegel reflectirt und vereinigen sich genau wieder in der kleinen Öffnung des Schirmes, welcher durch den Krümmungsmittelpunkt des Spiegels geht. Man gewahrt auf dem Schirm einige lichtschwache, kreisförmige Farbenringe, deren Mittelpunkt auf die Öffnung fällt. Wird die Distanz zwischen Spiegel und Schirm verändert, so werden die Ringe zunehmend undeutlich.

Es ist leicht, diese von Newton zum erstenmale beobachtete Erscheinung auf die schon besprochenen, experimentell einfacheren, Erscheinungen zurückzuführen. Dieselbe entsteht durch die Beugung des Lichtes an den Unreinigkeiten der Vorderfläche des Spiegels in Verbindung mit der Reflexion an der belegten Hinterfläche. Man hat das schon durch Gleichung (XIX) dargestellte Beugungsbild. Die sammelnde Wirkung der Linsen des Spaltfernrohres und des Beobachtungsfernrohres sind hier ersetzt durch die sammelnde Wirkung des Spiegels und an die Stelle der subjectiven Beobachtung tritt der Schirm, auf welchen sich die Erscheinung projicirt.

Die hellen und dunklen Ringe sind demnach gegeben durch die der Gleichung (IV) analoge Gleichung

$$\cos\varphi = \cos\gamma - nk\frac{\lambda}{4e}, \tag{XXI}$$

welche sich unmittelbar aus (XIX) ergibt. φ ist der Winkel der gebeugten, γ jener der einfallenden Strahlen mit der Achse des Spiegels, n der Brechungsexponent des Glases, k die Ordnungszahl des Ringes, e die Dicke des Spiegels. Da bei Newton's Versuch die Incidenz die normale war, ist $\cos\gamma = 1$.

Bezeichnet man nun durch E die Entfernung des Spiegels vom Schirme und durch r den auf dem Schirm gemessenen Radius eines hellen oder dunklen Ringes, so hat man für die normale Incidenz

$$\cos\varphi = 1 - \frac{r^2}{2E^2}$$

und

$$r^2 = k\frac{\lambda n E^2}{2e}, \qquad \text{(XXII)}$$

durch welche Gleichung die Lage der Ringe für die normale Incidenz gegeben ist.

Dass Newton die Ringe nur bei einer bestimmten Entfernung des Spiegels vom Schirme deutlich sah, hat seinen Grund darin, dass nur bei dieser Entfernung die elementaren Ringsysteme coïncidiren.

Newton fand die Farbenfolge der Ringe übereinstimmend mit jener der durchgelassenen Ringe des Farbenglases. Dies folgt in der That unmittelbar aus (XXII).

Die Durchmesser der vier ersten hellen Ringe waren bei Newton's Versuch gleich

$$1\frac{11''}{16} \quad 2\frac{3''}{8} \quad 2\frac{11''}{12} \quad 3\frac{3''}{8},$$

die Durchmesser der vier ersten dunkeln Ringe:

$$1\frac{1''}{16} \quad 2\frac{1''}{16} \quad 2\frac{2''}{3} \quad 3\frac{3''}{20}.$$

Wurde der Spiegel dem Schirm genähert, oder von ihm entfernt, so wurden die Radien der Ringe kleiner oder grösser, behielten aber dieselben Grössenverhältnisse.

Es ist nicht uninteressant, die Messungen Newton's gegen die Formel (XXII) zu halten.

Was zunächst die Veränderungen der Ringdurchmesser mit der Entfernung des Spiegels anlangt, so ergibt sich Newton's Resultat unmittelber aus (XXII). Um die für die Ringdurchmesser erhaltenen numerischen Resultate mit der Formel zu vergleichen, entnehmen wir den Mittheilungen Newton's, dass die Glasdicke $e = \frac{1''}{4}$, der Brechungsexponent des Glases $n = 1\cdot545$ und die Entfernung des Spiegels vom Schirme $E = 5'\,11''$ war. Da Newton weisses Licht benützte, sind wir genöthigt, eine mittlere Wellenlänge $\lambda = 0\cdot0006$ anzunehmen und können eine genaue

Übereinstimmung nicht erwarten. Unter Zugrundelegung dieser Zahlen wird die Formel für den k^{ten} hellen oder dunklen Ring

$$r^2 = k . 0\cdot366''$$

und es gehören die geraden Werthe von k den hellen, die ungeraden den dunklen Ringen an. Es ergibt sich das folgende Tableau:

Durchmesser der Ringe in $^1/_{10}$ Zoll.

	Newton's Messung	Rechnung
1. dunkler Ring	12	11
1. heller „	17	17
2. dunkler „	21	21
2. heller „	24	24
3. dunkler „	27	27
3. heller „	30	29
4. dunkler „	32	32
4. heller „	34	34

Newton stellte den Versuch auch im homogenen Lichte mittelst eines Prismas an. Die Ringdurchmesser erschienen im brechbareren Lichte kleiner. In der That steht in Formel XXII die Grösse λ im Zähler.

Newton constatirte die Ähnlichkeit der Erscheinung mit jener des Farbenglases. In der That geht aus XXII hervor, dass in beiden Fällen dasselbe Gesetz für die Ringdurchmesser gilt.

Indem Newton die Belegung des Spiegels entfernte, fand er den Glanz der Erscheinung vermindert, indem er den Glasspiegel durch einen Metallspiegel ersetzte, verschwand die Erscheinung völlig. In der That sind die Beugung an der Vorderfläche und die Reflexion an der Hinterfläche wesentlich.

Newton unterwarf den von ihm angestellten Versuch einer Berechnung nach der Anwandlungstheorie. Da diese Berechnung eine Abhängigkeit der Ringdurchmesser von der Glasdicke ergeben hatte, beschäftigte er sich mit der experimentellen Feststellung dieser Abhängigkeit, und es ergab sich, dass die Durchmesser der Ringe der Wurzel aus der Glasdicke verkehrt proportional waren, wie sich dies auch aus der Formel XXII ergibt.

Newton entdeckte auch die charakteristischen Veränderungen, welche das Beugungsbild beim Übergange zur schiefen Incidenz erfährt.

Als die Sonnenstrahlen vom Spiegel nicht mehr genau nach der Öffnung des Schirms reflectirt wurden, sondern nach einem nahe benachbarten Punkte, fiel das Centrum des centralen kreisförmigen hellen Feldes und sämmtlicher Ringe nicht mehr auf die Öffnung, sondern mitten zwischen diese und ihr Bild auf den Schirm, also auf den Krümmungsmittelpunkt des Spiegels. Bei fortgesetzter Drehung des Spiegels verdunkelte sich das Centrum des hellen Feldes, aus welchem sich ein beiderseits roth gesäumter achromatischer, durch die Öffnung und ihr Bild gehender Ring entwickelte. In dem Centrum entstanden neue Ringe. Diese waren nun innere, mit den übrigen concentrische Ringe, während die schon ursprünglich vorhandenen nun das System der äusseren Ringe bildeten. Die inneren Ringe erschienen innen, die äusseren aussen roth gesäumt.

Man erkennt leicht in der Beschreibung Newton's jenes excentrische Ringsystem wieder, welches eine Doppelöffnung oder ein Doppelkörperchen hervorbringt, wenn die Strahlen mit der Linie $2e$ einen Winkel bilden. Die Richtung $2e$ ist bei Newton's Versuch ersetzt durch die Achse des Hohlspiegels, welche den Schirm in der Mitte zwischen der Öffnung und seinem Bilde trifft.

Für die Lage der hellen und dunklen Ringe hat man in Gleichung (XXI)

$$\varphi = \frac{r}{E} \quad \gamma = \frac{r_0}{E} \qquad \cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \qquad \cos\gamma = 1 - \frac{\gamma^2}{2}$$

zu setzen, so dass r_0 die halbe, auf dem Schirme gemessene Entfernung zwischen der Öffnung und ihrem Bilde ist. Der Radius des k^{ten} Ringes ist demnach

$$r^2 = r_0^2 + \frac{k\lambda n E^2}{2e}. \qquad \text{(XXIII)}$$

Der Nullwerth von k entspricht dem Radius des achromatischen Ringes, $r = r_0$, die positiven Werthe von k entsprechen den äusseren, die negativen den inneren Ringen.

Newton fügte der Beschreibung des letzteren Versuches, bei welchem die schiefe Incidenz angewendet wurde, noch eine Bemerkung bei:

Als die gegenseitige Entfernung der Öffnung und ihres Bildes $2\frac{3''}{8}$ betrug, war das Centrum eben wieder ein Maximum der Helligkeit und die Durchmesser der vier ersten hellen Ringe waren

$$1\frac{11''}{16},\quad 1\frac{3''}{8},\quad 2\frac{11''}{12},\quad 3\frac{3''}{8},$$

genau so wie bei der normalen Incidenz, doch war nicht wie dort das Centrum, sondern der zweite Ring achromatisch. Die Discussion der Formel (XXIII) ergibt dasselbe Resultat ohne weiters. Nehmen wir an, es sei

$$r^2_{-q} = r^2_0 - \frac{qn\lambda E^2}{2e} = 0$$

oder es falle der q^{te} innere Ring mit dem Centrum zusammen, so ist der Radius des, vom Centrum des Ringsystems aus gezählten, p^{ten} Ringes:

$$r^2_{(p)} = r^2_{p-q} = r^2_0 + \frac{(p-q)\lambda n E^2}{2e} = \frac{p\lambda n E^2}{2e},$$

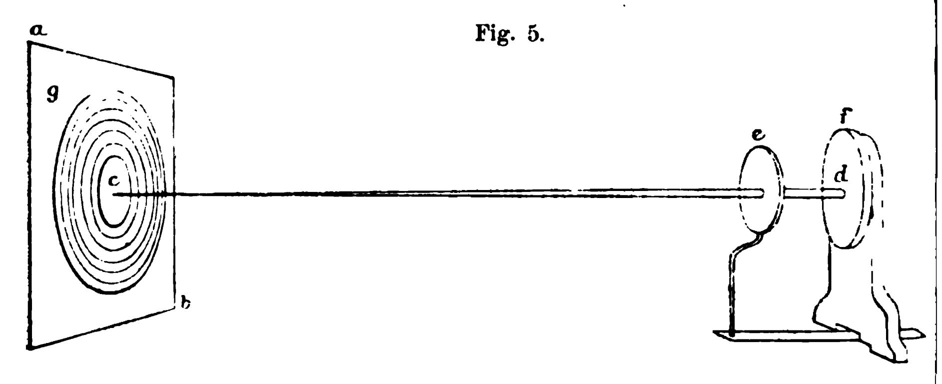
also nach (XXII) der Radius des, vom Centrum aus gezählten, p^{ten} Ringes bei schiefer Incidenz gleich dem Radius des p^{ten} Ringes bei normaler Incidenz, in Übereinstimmung mit Newton's Beobachtung.

Newton wiederhohlte auch den der schiefen Incidenz entsprechenden Versuch mit homogenem Lichte, und fand, wie dies der Formel (XXII) entspricht, die Lage des achromatischen Ringes für alle Farben constant, hingegen die Radien der äusseren Ringe für Roth grösser als für Violett, und die Radien der inneren Ringe für Roth kleiner als für Violett.

Obgleich Newton der Beschreibung der mit der Neigung des Spiegels gegen die einfallenden Strahlen verbundenen Veränderungen des Ringsystems volle vier Quartseiten widmet, hat er doch seine Berechnung nach der Anwandlungstheorie auf die schiefe Incidenz nicht ausgedehnt.

Nach Newton beschäftigte sich zurächst der Herzog von Chaulnes (l. c.) mit dem von Newton entdeckten Phänomen. Obgleich er dieses Phänomen, welches Newton richtig beschrieben hatte, unrichtig beschrieb, erkannte er doch, was Newton verborgen geblieben war, dass dasselbe wesentlich durch die auf der Vorderfläche des Spiegels befindlichen Staubtheilchen und sonstigen Verunreinigungen entsteht. Er vermehrte die Wahrnehmbarkeit und den Glanz der Erscheinung ungemein durch künstliche Vermehrung der lichtbeugenden Körperchen. Er bewirkte dies zuerst durch Behauchen, später durch einen dünnen Überzug eingetrockneten Milchwassers. Er beseitigte das überflüssige Glas des Spiegels und gab seinem Apparate die in Fig. 5 versinnlichte Form. *ab* ist der Schirm, *c* die Öffnung in demselben, *cd* das von der Öffnung kommende, schwach divergente Strahlenbüschel, welches durch den, einem katoptrischen Fernrohre entnommenen, Hohlspiegel *f* reflectirt und wieder gegen *c* hin convergent gemacht wurde. Bei *e* gingen die Strahlen zweimal durch ein mit Milchwasser behandeltes dünnes Glimmerblättchen. Letzteres wurde später auch ersetzt durch Mousselin, ferner durch ein Gitter paralleler und nicht äquidistanter Silberfäden. Im letzteren Falle entsteht ein den Newton'schen Beugungsringen analoges Phänomen. Es genügt indessen, wie ich mich überzeugt habe, für diesen Versuch ein gewöhnlicher Glasspiegel, dessen Oberfläche mit einem fettigen Tuche einmal geradlinig bestrichen worden ist.

Fig. 5.



Der Herzog von Chaulnes war der Erste, welcher ein elementares Beugungsbild dieser Art hervorbrachte, indem er an

Stelle des Glimmerblättchens eine Messerschneide setzte. Es ist klar, dass dieser Versuch auch im durchgehenden Lichte mittelst zweier Messerschneiden und ohne Spiegel gelingen muss.

Endlich brachte der Herzog von Chaulnes die Beugungsbilder auch mittelst Linsen hervor, deren eine Fläche getrübt wurde, während die andere als Spiegel diente. Indessen beschrieb er diese Versuche nicht genauer. Man sieht leicht, wie auch derlei Erscheinungen sich nach den oben entwickelten Grundsätzen berechnen lassen.

Was die Erklärung der Newton'schen Beugungsringe in der Undulationstheorie anlangt, so wirkte Th. Young (l. c.) bahnbrechend, indem er das von ihm herrührende Princip der Interferenz auf eine grosse Zahl von Erscheinungen und auch auf die in Rede stehenden anwendete ohne indessen die Berechnung eingehend durchzuführen.

Die Gleichung (XXII), welche für den Fall gilt, wo die Bestäubungsfläche dem Spiegel parallel ist und die Strahlen senkrecht auffallen, wurde zuerst von J. Herschel[1] abgeleitet, während W. Herschel[2] einen Versuch beschrieb, wo die Ringe dadurch hervorgebracht wurden, dass man Puder in die Luft vor einem Metallspiegel streute, auf welchen ein Lichtstrahl fiel, und das zurückgeworfene Licht auf einer Tafel auffing. Das Resultat dieses Versuches wurde von J. Herschel als unerklärbar nach der Theorie der Anwandlungen betrachtet. Es ist dies der erste und vor meinen Untersuchungen einzige Fall der Anwendung einer räumlichen Bestäubung.

Über 100 Seiten der Physik Biot's[3] sind dem Newton'schen Hohlspiegelversuche gewidmet. Biot stand auf dem Boden der Emanationstheorie, er arbeitete das Phänomen Newton's experimentell und theoretisch aus, und fand in der Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung die schönste Bestätigung der Richtigkeit der Emanationstheorie.

Indem er den Hohlspiegelversuch wiederholte, bemerkte er wie Newton, dass die Ringe nur dann deutlich erscheinen,

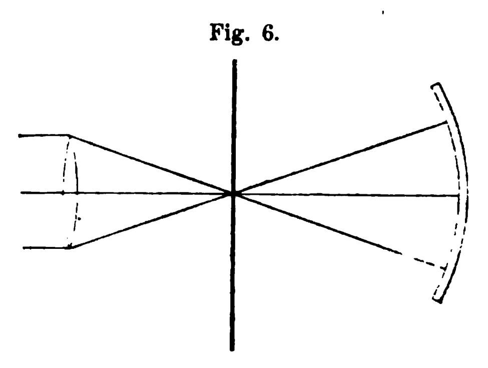
[1] J. Herschel, On the Theory of Light. London 1828.

[2] W. Herschel, Phil. Transact. 1807.

[3] Biot, Traitè de Phisique.

wenn der Schirm durch den Krümmungsmittelpunkt des Spiegels geht, und erklärte diese Thatsache richtig damit, dass nur bei dieser Entfernung des Spiegels vom Schirme die elementaren Ringsysteme congruiren. Er erkannte ferner, dass, wenn die von

Fig. 6.



der Öffnung des Schirms kommenden Strahlen stark divergiren, was durch eine Linse bewerkstelligt werden kann, Fig. 6, und wenn folglich der Spiegel in einem grösseren Theile seiner Ausdehnung in Anspruch genommen wird, die Ringe nur dann deutlich erscheinen können, wenn das Glas überall gleich dick ist, weil sonst wieder die elementaren Ringsysteme nicht congruiren.

Biot dehnte, was Newton unterlassen hatte, die Berechnung des Hohlspiegelversuches auch auf die schiefe Incidenz aus, und gelangte auch hier zu einer Übereinstimmung mit dem Experimente.

Wie dies der Herzog von Chaulnes schon früher gethan hatte, ersetzte auch Biot den Hohlspiegel durch eine Linse, deren erste Fläche als Träger der Bestäubung diente, während die zweite den Spiegel abgab. In Bezug auf derlei Experimente ist Folgendes zu bemerken.

Man zerlege das von der Öffnung kommende Lichtbüschel in viele schmale Büschel. Jedes derselben bringt für sich ein elementares Ringsystem hervor, welches leicht zu berechnen ist. Man erhält nun das resultirende Gesammtphänomen, indem man an jeder Stelle des Beugungsbildes die Summe der elementaren Helligkeiten nimmt. Dies kommt im Allgemeinen auf eine Integration hinaus. Einfacher wird die Sache, wenn die Versuchsanordnung so beschaffen ist, dass sämmtliche elementare Ring-

systeme sich decken, wo dann nur ein einziges derselben zu berechnen ist. Am einfachsten endlich, wenn das einfallende Licht ein schmales, mit der Achse der Linse zusammenfallendes Bündel bildet, wo dann der ganze Versuch als eine unwesentliche Modification des Newton'schen Hohlspiegelversuches anzusehen ist. Alle Versuche Biot's waren dieser Art. Ich verweile desshalb nicht länger bei denselben und begnüge mich damit, eine der vielen in dieser Richtung ausgeführten Messungen Biot's herauszugreifen.

Biot hatte einen concav convexen Spiegel, welcher parallel der Achse einfallendes Licht wieder parallel der Achse reflectirte. Der Brechungsexponent des Glases war $\frac{3}{2}$, die Dicke des Glases in der Mitte gleich 2·337705 Mm. Ein solcher Spiegel kann in einer beliebigen Entfernung vom Schirme angebracht werden, wenn man dafür sorgt, dass das einfallende Lichtbündel genau parallel und hinreichend schmal ist. Ein planparalleles Glas hätte indessen, wie man leicht sieht, dieselben Dienste gethan. Die Öffnung des Schirms betrug 5 Mm. und die Entfernung zwischen Schirm und Spiegel wurde arbiträr gleich 2178 Mm. genommen. Um die Strahlen genau parallel zu machen, war der Spiegel bedeckt mit einem Diaphragma von 5 Mm. Öffnung. Das Strahlenbündel fiel normal auf die Mitte des Spiegels und war durch ein rothes Glas gegangen. Es ergaben sich folgende Ringdurchmesser:

Ringe	Durchmesser in Millimetern	Quadrate der Durchmesser
1. dunkler	63	3969
1. heller	88	7744
2. dunkler	107	11449
2. heller	125	15725
3. dunkler	143	20449

Was die Berechnung der Ringe anlangt, so sieht man, dass wie beim Hohlspiegelversuche die Formel XXII anzuwenden ist:

$$r^2 = \frac{k\lambda n E^2}{2e}.$$

Diese Formel verlangt zunächst, dass die Quadrate der Ringdurchmesser sich wie die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 verhalten sollen. Da dies zutrifft, genügt es, einen einzigen der Ringe, etwa den zweiten hellen Ring nach der Formel zu berechnen. Hiezu hat man

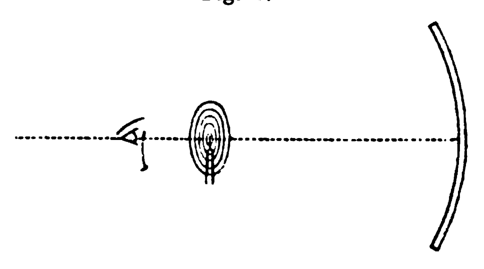
$k = 4$
$n = 1 \cdot 5$ (ungefähr)
$\lambda = 0 \cdot 00065$ (ungefähr)
$E = 2178$
$e = 2 \cdot 3377$

und es ergibt sich:

	Gerechnet	Gemessen
$d_4 =$	126 Mm.	125 Mm.

G. G. Stokes (l. c.) beschreibt in seiner 50 Seiten langen Abhandlung eine Versuchsanordnung, welche gestattet, die Erscheinung des Newton'schen Hohlspiegelversuches subjectiv wahrzunehmen; schon Newton hatte ein ähnliches Experiment anzustellen versucht. Nach Stokes kann man die Erscheinung, welche sich auf dem Schirm zeigt, auch ohne Schirm wahrnehmen, wenn man die Strahlen direct mit dem Auge auffängt und sich so stellt, dass man einen Gegenstand in der Entfernung des Schirms deutlich sieht. Es ist also hinreichend, eine kleine Flamme in solcher Stellung vor den Spiegel zu bringen, dass sie mit ihrem umgekehrten Bilde zusammenfällt; dann sieht man in der Luft ein Ringsystem die Flamme umgebend, Fig. 7. Die der schiefen Incidenz entsprechende Erscheinung kann in dieser Weise bei einer Seitenbewegung der Flamme gesehen werden.

Fig. 7.



Nachdem Stokes die schon von J. Herschel abgeleitete Gleichung neuerdings abgeleitet hatte, dehnte er die Berechnung

des Newton'schen Hohlspiegelversuches auch auf die schiefe Incidenz aus und berechnete die Zahl der inneren Ringe, welche eine beschränkte ist. Man wird zu einem Ausdrucke für diese Zahl leicht mittelst der Gleichung XXII gelangen.

Schliesslich hat E. Lommel die Erscheinung des Newton'schen Hohlspiegelversuches, wie oben mitgetheilt worden ist, in vollkommener Weise experimentell dargestellt, und ich habe oben die vollständige Berechnung dieser und analoger Erscheinungen gegeben.

12. Die Quetelet'schen Streifen.[1]

Blickt man, eine brennende Kerze in der Hand und diese nahe dem Auge haltend, aus einiger Entfernung in einem verfinsterten Zimmer nach einem gewöhnlichen Toilettenspiegel, welcher behaucht, bestäubt oder in anderer Weise, z. B. durch Berührungen mit der Hand, verunreinigt worden ist, so nimmt man eine Reihe schöner Farbenstreifen wahr; unter diesen ist ein achromatischer Streifen ausgezeichnet, welcher durch das Bild der Kerzenflamme hindurchgeht. Man bringt dieses von Quetelet beschriebene und, wie es scheint, zuerst von Whewell beobachtete Phänomen zu prachtvoller Erscheinung, wenn man sich statt des Kerzenlichtes der Sonnenstrahlen bedient, welche von dem Brennpunkte einer Linse ausgehen. Ändert entweder die Lichtquelle oder das Auge den Ort, so ändern auch die Streifen ihre Breite, Gestalt und Lage in eigenthümlicher Weise.

Quetelet hat keine Berechnung des Phänomens gegeben, doch sieht man leicht, dass es sich hier lediglich um eine subjective Wahrnehmung der Newton'schen Beugungsringe handelt. An irgend einer Stelle der bestäubten Vorderfläche des Spiegels wird ein Strahl gebeugt, um nach seiner Reflexion an der Hinterfläche des Spiegels ins Auge zu gelangen, und an derselben Stelle der Vorderfläche des Spiegels wird ein zweiter Strahl, welcher schon Reflexion an der Hinterfläche erfahren hat, gebeugt, um ebenfalls ins Auge zu gelangen. Der Gangunterschied dieser beiden Strahlen bestimmt den Grad der Helligkeit, welcher an jener Stelle des Spiegels wahrgenommen wird. Man sieht

[1] Quetelet, Corresp. phys. et mathém. 1829.

auch, dass dieser Gangunterschied sich ebenso berechnet, wie beim Newton'schen Hohlspiegelversuche, oder einem Doppelkörperchen, und dass man folglich für die Maxima und Minima der Intensität auch dieselbe Gleichung (XXI) wieder erhält:

$$\cos\varphi = \cos\gamma - \frac{nk\lambda}{4e}.$$

In dieser Gleichung bedeutet nun φ den Winkel der von irgend einer Stelle des Spiegels nach dem Auge gesendeten gebeugten Strahlen mit der Spiegelnormale, γ den Winkel der nach derselben Stelle des Spiegels von der Lichtquelle entsendeten directen Strahlen mit der Spiegelnormale, n den Brechungsexponenten des Glases des Spiegels, k die Ordnungszahl des Streifens, e die Dicke des Spiegels. Der Winkel γ ist jetzt, wie man sieht, nicht mehr constant, sondern mit der betrachteten Stelle des Spiegels variabel.

Da φ und γ stets sehr wenig von der Null verschieden sind, kann man näherungsweise

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \qquad \cos\gamma = 1 - \frac{\gamma^2}{2}$$

setzen. Bedeuten also a und b die Abstände des Auges und der Lichtquelle vom Spiegel, c die gegenseitige Entfernung der Fusspunkte dieser Abstände, u und v die Entfernungen der betrachteten Stelle des Spiegels von diesen Fusspunkten, so hat man näherungsweise

$$\varphi = \frac{u}{a} \qquad \gamma = \frac{v}{b}$$

und die obige Gleichung für die Lage der hellen und dunklen Streifen wird:

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = \frac{nk\lambda}{2e}.$$

Soll die Lage des Streifens von λ unabhängig sein, so hat man $k = 0$. Für den achromatischen Streifen erhält man demnach die Gleichung

$$\frac{u}{v}=\frac{a}{b}.$$

d. h. der achromatische Streifen ist ein Fragment eines Kreises, dessen Grösse und Lage, wie folgt, bestimmt ist: Zieht man durch das Auge zwei Gerade durch die Lichtquelle und ihr Bild, so schneiden diese beiden Geraden den Spiegel in den beiden Endpunkten eines Durchmessers des achromatischen Streifens.

Dieser Satz wurde zuerst von Schläfli[1] in einer zu wenig gewürdigten Abhandlung abgeleitet.

Transformirt man nun die für die Lage der hellen und dunkeln Ringe gefundene Gleichung auf ein Polarcoordinatensystem, dessen Centrum auf den Mittelpunkt des achromatischen Ringes fällt, so erhält man:

$$r^2=r_0^2+\frac{kn\lambda}{2e}\cdot\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}$$
$$r_0^2=\frac{a^2b^2c^2}{(a^2-b^2)^2}, \qquad \text{(XXIV)}$$

in welcher Gleichung r_0 der Radius des achromatischen und r jener eines beliebigen Ringes ist. Diese Gleichung besagt, dass sämmtliche Streifen Fragmente concentrischer Kreise sind.

Vergleicht man die Gleichungen (XXIV) und (XXIII), so ergibt sich weiter:

Die Quetelet'schen Ringe sind identisch mit den durch den Newton'schen Hohlspiegelversuch hervorgebrachten, sobald die Brechungsexponenten und Dicken der Gläser in beiden Fällen gleich sind, man dem Hohlspiegel eine solche Neigung gegeben hat, dass die Durchmesser der achromatischen Ringe in beiden Fällen gleich sind, und schliesslich die Entfernung des Hohlspiegels vom Schirm gleich

---

[1] Schläfli, Grunert XIII, 1848.

$$E^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}$$

genommen wird.

In Fig. 8 bedeutet *abcd* den Spiegel, *e* die Lichtquelle, *f* das Auge, *g* und *h* die Projectionen der beiden auf den Spiegel, *i* jenen Punkt des Spiegels, in welchem der Strahl *ei* nach dem Auge *f* reflectirt wird, *j* das Bild der Lichtquelle, *iklm* den achromatischen Ring, und sind in der Nähe von *i* die sichtbaren Fragmente der Ringe angedeutet.

Es mögen insbesondere einige specielle Fälle bezüglich der Lage des Auges und der Lichtquelle betrachtet werden.

Ist $a = b$, oder stehen Auge und Lichtquelle vom Spiegel gleich weit ab, so wird die Gleichung (XXIV) linear:

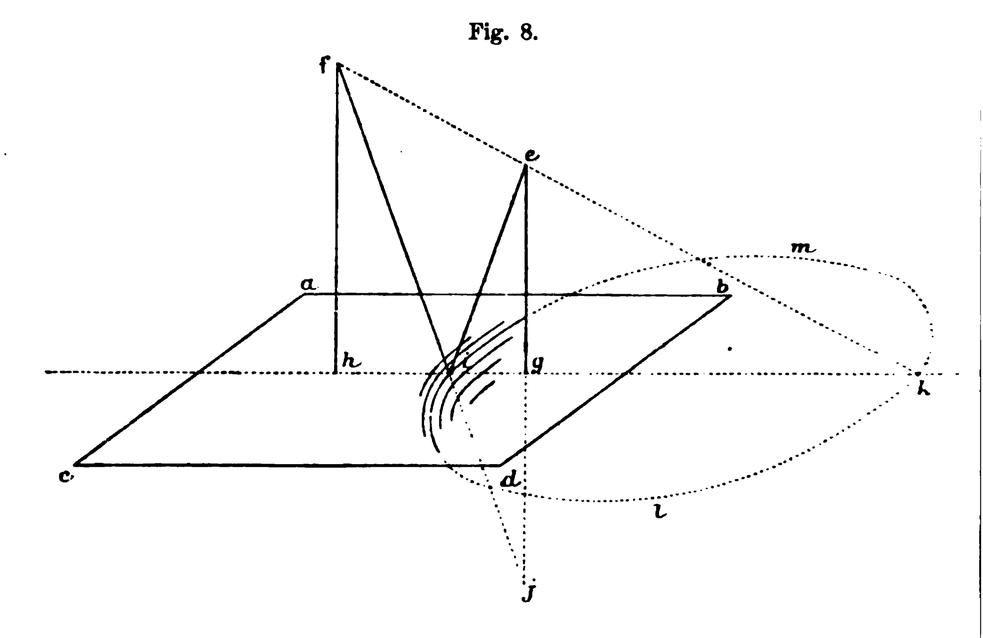
$$r = r_0 + \frac{kn\lambda}{4e} \cdot \frac{ab}{c}$$

Die Streifen bilden eine Schaar paralleler Geraden und die Streifenbreite ist

$$\beta = \frac{n\lambda}{2e} \cdot \frac{ab}{c}, \qquad \text{(XXV)}$$

also constant.

Fig. 8.



Schläfli stellte einen Versuch in der Art an, dass als Lichtquelle die Sonne benützt wurde. In diesem Falle haben wir in der Gleichung (XXIV) die Substitution

$$b = \infty \quad c = \infty \quad \frac{c}{b} = \operatorname{tang} \gamma$$

vorzunehmen, so dass γ den Winkel der Sonnenstrahlen mit der Spiegelnormale bedeutet. Wir erhalten, wie auch Schläfli,

$$r^2 = a^2 \operatorname{tang}^2 \gamma - \frac{a^2 k n \lambda}{2e}.$$

Der Radius des achromatischen Ringes ist

$$r = a \operatorname{tang} \gamma.$$

Fallen die Sonnenstrahlen senkrecht ein, so hat man

$$r^2 = \frac{a^2 k n \lambda}{2e},$$

der achromatische Ring hat sich auf einen Punkt, die Projection des Auges, reducirt, es gibt nur mehr äussere Ringe, und diese erscheinen vollständig. Die Radien der Ringe wachsen, wie man sieht, mit der Entfernung des Auges vom Spiegel.

Liegt überhaupt die Lichtquelle auf der durch das Auge gehenden und auf dem Spiegel senkrechten Geraden, so hat man nach (XXIV)

$$c = 0, \; r_0 = 0, \quad \text{und}$$

$$r^2 = \frac{kn\lambda}{2e} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2},$$

die Ringe sind concentrisch mit der Projection des Auges auf den Spiegel.

Im zweiten Abschnitte seiner Abhandlung beschäftigt sich Stokes mit der Berechnung der Quetelet'schen Streifen und gelangte zu Resultaten, zu welchen Schläfli schon früher gelangt war. Überdies fand er die folgende, sich aus der Theorie ergebende Consequenz:

Wenn der Lichtpunkt auf einer Linie gezogen durch das Auge senkrecht zum Spiegel erst vor dem Auge liegt und angenommen wird, er bewege sich rückwärts durch das Auge, bis er hinter demselben liege, so werden die Ringe sich bis ins Unendliche ausdehnen, verschwinden und wieder erscheinen, wenn der Lichtpunkt durch das Auge gegangen ist. Diese Consequenz der Theorie ergibt sich in der That unmittelbar aus der letzten Gleichung, wenn daselbst $a = b$ gesetzt wird.

Um diese Consequenz der Theorie experimentell zu prüfen, stellte Stokes den folgenden Versuch an. Er stellte zwischen die Lichtquelle und den Spiegel ein Stück Tafelglas, geneigt gegen den Spiegel unter einem Winkel von etwa 45°, so dass die Ringe durch Reflexion an der Glasplatte gesehen werden konnten, ohne das einfallende Licht abzuhalten. Das Auge wurde so gestellt, dass das durch die geneigte Platte entstehende Bild desselben in einer durch den Lichtpunkt winkelrecht auf den Planspiegel gezogenen Linie lag und sodann so bewegt, dass das Bild auf dieser Linie blieb. In der That fand ich, sagt Stokes, dass beim Zurückbewegen des Kopfes die Ringe sich ausdehnten, bis der helle centrale Fleck, welcher das Bild (der Lichtquelle) umgab, das ganze Gesichtsfeld erfüllte, und bei Fortsetzung dieses Zurückbewegens des Kopfes kamen die Ringe wieder zum Vorschein.

Im dritten Abschnitte seiner Abhandlung erweiterte Stokes die Berechnung der Quetelet'schen Streifen für den schon früher von Biot behandelten Fall, wo der Spiegel nicht mehr eben, sondern sphärisch gekrümmt ist. Mir scheint indessen diese Complication des Versuches nicht mehr ein hinreichendes Interesse zu bieten, sowie ich auch nicht auf jene Berechnung eingehe, welche ich für den Fall gegeben habe, wo die Dicke des Spiegels eine beliebige Function der betrachteten Stelle des Spiegels ist.[1] Ich begnüge mich mit der Bemerkung, dass Stokes die complicirten Resultate seiner Rechnungen durch Experimente qualitativ bestätigt gefunden hat, denn Messungen wurden nicht angestellt.

---

[1] K. Exner, Wien. Akad. Ber. 1877.

Ist die Dicke des Spiegels variabel, so sieht man leicht, dass die Quetelet'schen Streifen noch immer deutlich gesehen werden müssen, dass sie aber aufhören werden, kreisförmig zu sein. Um die Quetelet'schen Streifen in dieser Art zu beobachten, genügt es, die vom Brennpunkte der Heliostatenlinse kommenden Strahlen durch einen senkrecht gegen dieselben gestellten Metallspiegel in einer Entfernung von etwa 10 Met. zurückwerfen zu lassen, vor dem Spiegel und schief gegen denselben ein bestäubtes Glasblättchen anzubringen und das durch den Spiegel erzeugte Bild der Lichtquelle in einer unter 45° gegen die Strahlen geneigten, zwischen dem Heliostaten und dem Bestäubungsblättchen angebrachten, planparallelen Glasplatte mit freiem Auge aufzusuchen. Das Bild der Lichtquelle erscheint dann von den Ringen umgeben, welche aber nicht mehr kreisförmig sind, sondern eine ovale Gestalt zeigen.

Betrachten wir noch einmal die gewöhnliche Erscheinung der Quetelet'schen Streifen, wie sie ein überall gleich dicker, ebener Spiegel zeigt und verfolgen wir die Veränderungen des Streifensystems, wenn das Auge ruht und die Lichtquelle ihren Ort verändert.

Befindet sich die Lichtquelle seitlich vom Auge und dem Spiegel näher als dieses, so bilden die Interferenzfransen ein System concentrischer Kreise, der durch das Bild der Lichtquelle gehende ist achromatisch und wendet dem Auge seine convexe Seite zu. Die äusseren Ringe sind aussen, die inneren innen roth gerändert. Entfernt sich sodann die Lichtquelle vom Spiegel in der Richtung senkrecht zu demselben, so vergrössern sich die Durchmesser der Ringe und werden unendlich gross, wenn die Entfernung der Lichtquelle vom Spiegel gleich der des Auges geworden ist. In diesem Falle hat man ein System geradliniger Fransen, das gemeinsame Centrum ist auf der Seite der Lichtquelle in die unendliche Entfernung gerückt. Entfernt sich der Lichtpunkt noch mehr vom Spiegel, so krümmen sich die Streifen nach der entgegengesetzten Seite, der gemeinsame Mittelpunkt der Ringe rückt von der Seite des Auges aus der unendlichen Entfernung wieder heran, der achromatische Ring kehrt jetzt dem Auge seine concave Seite zu. Mit zunehmender Entfernung des Lichtpunktes rückt das Centrum immer näher an die Pro-

jection des Auges auf den Spiegel, die Zahl der inneren Ringe wird immer kleiner, zuletzt reducirt sich der achromatische Ring auf einen hellen, mit der Projection des Auges zusammenfallenden Punkt und es gibt nur mehr äussere Ringe. Geht die Gerade, auf welcher wir die Lichtquelle in Bewegung denken, durch das Auge, so sind die Ringe stets mit der Projection des Auges auf den Spiegel concentrisch. Es variirt dann während der Bewegung der Lichtquelle nur die Breite der Ringe und diese wird unendlich gross in dem Momente, wo die Lichtquelle durch das Auge geht, oder vielmehr durch das Bild des Auges, wenn man mit Stokes eine Glasplatte zu Hilfe nimmt.

Man sieht, das Phänomen ist so characteristisch, dass man sich schon durch eine qualitative Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch zufriedengestellt finden mag. In der That sind Messungen nur von Mousson[1] angestellt worden. Dieser widmete 45 Quartseiten der Vermessung der Quetelet'schen Streifen, und zwar für den Fall, wo sie ganz oder nahe geradlinig sind. Die Breite dieser Streifen ist theoretisch gegeben durch Formel (XXV):

$$\beta = \frac{n\lambda}{2e} \frac{ab}{c},$$

welche, wenn durch i der Incidenzwinkel des direct nach dem Auge reflectirten Strahles bezeichnet wird, auf die schon von Stokes gefundene Form

$$\beta = \frac{n\lambda}{2ei} \frac{ab}{a+b}$$

gebracht werden kann.

Indem Mousson zur Beobachtung der Streifen einen Theodoliten benützte, gelangte er zu den folgenden Resultaten:

1. Die Streifenbreite ist verkehrt proportional der Dicke des Spiegels.
2. Wenn die Lichtquelle oder das Auge in der unveränderten Richtung des einfallenden oder des reflectirten Strahles dem Spiegel näher oder weiter gerückt wird, so ist die Streifenbreite proportional $\frac{ab}{a+b}$.

[1] A. Mousson, Neue Denkschr. d. allg. Schweiz. Ges. f. d. gesammte Naturw. Zürich 1853.

3. Die Streifenbreite ist dem Incidenzwinkel verkehrt proportional.

Alle diese Resultate stehen in unmittelbarer Übereinstimmung mit der letzten Gleichung.

Ich glaube im Vorstehenden nicht nur eine gewisse Classe von Beugungserscheinungen durchaus befriedigend und in höchst einfacher Weise abgehandelt zu haben, man wird auch die umfangreiche Literatur des Gegenstandes vollständig berücksichtigt und alles Behaltenswerthe zusammengefasst oder wenigstens erwähnt finden.

Zur Kenntniss einiger Hydroproducte der Cinchoninsäure.

Von Dr. H. Weidel und K. Hazura.

(Aus dem Universitäts-Laboratorium des Prof. v. Barth.)

Gelegentlich der Untersuchung „Uber die Derivate der Tetrahydrocinchoninsäure", welche der Eine[1] von uns vor einiger Zeit veröffentlicht hat, wurde die Beobachtung gemacht, dass die, durch die Einwirkung von Jodmethyl auf die Tetrahydrocinchoninsäure entstehende Methyltetrahydrocinchoninsäure ($C_{10}H_{10}N(CH_3)O_2$) in eine ölige Substanz verwandelt wird, wenn sie längere Zeit auf 100° C. erhitzt wird.

Wir haben dieses Product einer näheren Untersuchung unterzogen und wollen die gesammelten Erfahrungen im Nachstehenden mittheilen.

Eine vollständige Umsetzung der Methyltetrahydrocinchoninsäure kann durch Erhitzen auf die angegebene Temperatur nicht erzielt werden. Man erhält aber das Zersetzungsproduct sehr leicht und quantitativ aus der Säure, wenn diese in einer Retorte über ihren Schmelzpunkt erhitzt wird. Hiebei tritt, sobald die Substanz geschmolzen ist und die Temperatur auf circa 190° C. gestiegen ist, ein lebhaftes Aufschäumen ein, es entweichen grosse Mengen von Wasserdämpfen, und schliesslich destillirt beim weiteren Erhitzen ein hellgelb gefärbtes schweres Öl, welches in der Wärme einen stechenden penetranten Geruch besitzt.

Das Trocknen wird durch lange fortgesetztes Einleiten von Wasserstoff in das auf 100° C. erhitzte Öl bewerkstelligt, weil

---

[1] Monatshefte für Chemie 1882, 61.

Chlorcalcium oder Ätzkali eine theilweise Zersetzung der Substanz verursachen würden. Zur vollständigen Reinigung wird das Öl ein- oder zweimal rectificirt und schliesslich in einer Wasserstoffatmosphäre umdestillirt.

Das Öl siedet bei dem Barometerstand von 744·3 Mm. bei 297—299° C. (uncorrig). Es ist anfänglich nahezu farblos, wird aber schon nach kurzer Zeit gelb und beim längeren Stehen dunkel. An feuchter Luft in einer flachen Schale stehen gelassen, färbt es sich allmälig blau. Die Verbindung ist im Wasser nahezu unlöslich. Äther und Alkohol, sowie verdünnte Säuren lösen sie leicht auf. Salpetersäure färbt die Substanz intensiv blutroth.

Die Analysen gaben folgende Werthe:

I. 0·2887 Grm. Substanz gaben 0·7626 Grm. Kohlensäure und 0·1764 Grm. Wasser.

II. 0·2416 Grm. Substanz gaben 0·6414 Grm. Kohlensäure und 0·1445 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	I.	II.
C....	72·04	72·40
H....	6·78	6·64

Aus diesen Zahlen berechnet sich die Formel $C_{22}H_{24}N_2O_3$, welche verlangt:

	Gefunden	Berechnet
C	72·22	72·52
H	6·71	6·59

Nach dieser Formel wäre die Substanz als ein Anhydrid, aufzufassen, welches nach der Gleichung

$$\underbrace{2(C_{11}H_{13}NO_2+H_2O)}_{\text{Methyltetrahydrocinchoninsäure}}=\underbrace{C_{22}H_{24}N_2O_3}_{\text{Anhydrid}}+3H_2O$$

aus der Methyltetrahydrocinchoninsäure entstanden wäre. Die Richtigkeit der angegebenen Formel konnten wir, weil beim

Erhitzen des Anhydrids über den Siedepunkt theilweise Zersetzung desselben eintritt, zwar nicht durch die Bestimmung der Dampfdichte controlliren, doch erfährt sie eine Bestätigung durch die

Einwirkung von Salzsäure.

Beim Erhitzen des Öls mit concentrirter Salzsäure auf 150° C. wird aus demselben unter Abspaltung von Chlormethyl die salzsauere Tetrahydrocinchoninsäure gebildet. Der Vorgang verläuft quantitativ, im Sinne der Gleichung:

$$C_{22}H_{24}N_2O_3 + H_2O + 4HCl = 2CH_3Cl + \underbrace{2(C_{10}H_{11}NO_2HCl)}_{\text{salzs. Tetrahydrocinchonins}}$$

Die Zersetzung des Anhydrids erfolgt schon bei anhaltendem Kochen mit concentrirter Salzsäure, doch scheint in diesem Falle ausser Tetrahydrocinchoninsäure auch noch Methyltetrahydrocinchoninsäure zu entstehen.

Die Identität des Zersetzungsproductes mit salzsaurer Tetrahydrocinchoninsäure wurde durch die Analyse und durch den krystallographischen Vergleich festgestellt.

I. 0·2878 Grm. Substanz gaben 0·5908 Grm. Kohlensäure und 0·1462 Grm. Wasser.

II. 0·2123 Grm. Substanz gaben 0·1434 Grm. Chlorsilber.

In 100 Theilen:

	I.	II.	$\underbrace{C_{10}H_{11}NO_2+HCl}$
C	55·98	—	56·20
H	5·64	—	5·62
Cl	—	16·70	16·62

Herr Dr. Březina, welcher die Güte hatte, die krystallographische Untersuchung des Productes vorzunehmen, theilt uns hierüber folgendes mit:

Formen sind dieselben, wie bei der salzsauren Tetrahydrocinchoninsäure, ebenso der Habitus.

Winkel:

	Neue Verbindung	Salzsaure Tetrahydrocinchonins.	
	Messung	Messung	Rechnung
c, *d*	45°53′	44° 9′	43°12′
c, *p*	71°22′	70°13′	70°16′
c, *q*	71°56′	71° 6′	71°13′

Die Verschiedenheit beider Verbindungen ist von der Art, wie sie durch Verunreinigungen bei einer Substanz hervorgebracht werden.

Der Zerfall der öligen Verbindung bei der Einwirkung von Salzsäure, sowie die gefundene Zusammensetzung charakterisiren dieselbe als ein nach der Formel

$$\begin{array}{l} C_9H_9N(CH_3)-CO \diagdown \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad > O \\ C_9H_9N(CH_3)-CO \diagup \end{array}$$

zusammengesetztes Anhydrid. Dieses erleidet eine bemerkenswerthe Umwandlung, wenn es mit Ätzkali erwärmt wird. Hiedurch wird eine neue Säure gebildet, welche wir als

Homohydrocinchoninsäure

bezeichnen wollen.

Diese Säure kann sehr leicht gewonnen werden, wenn man dem Anhydrid ungefähr die doppelte Menge Ätzkali zusetzt und in einem Kolben allmälig auf 150° C. erhitzt. Dabei findet eine lebhafte Reaction statt. Das Öl wird immer dickflüssiger und erstarrt endlich während des Erwärmens zu einer breiigen, lichtröthlich gefärbten krystallinischen Masse. Es ist nöthig, durch einige Zeit noch das Erhitzen bis auf 180° C. fortzusetzen, um die Umwandlung zu vervollständigen.

Das Reactionsproduct ist nach dem Erkalten leicht und vollständig in Wasser löslich und es kann die neue Säure aus dieser Lösung durch langsames Zugiessen von verdünnter Schwefelsäure bis zur schwachsauren Reaction fast vollständig in Form lichtröthlichgrau gefärbter Krystallblättchen abgeschieden werden. Da die Homohydrocinchoninsäure in Wasser kaum löslich ist, so

verbleibt nur ein kleiner Rest in dem Filtrate von der Rohausscheidung, welcher durch Ausschütteln mit Äther gewonnen werden kann.

Eine vollständige Reinigung der Säure haben wir erzielen können durch Auflösen der gut getrockneten Ausscheidung in Äther und Behandlung dieser Lösung mit Blutkohle. Nach dem Verjagen des Äthers hinterbleibt eine kaum röthlich gefärbte Masse, welche nach dem Umkrystallisiren aus Ligroïn die Substanz in vollkommen weissen Krystallen liefert, die einen constanten Schmelzpunkt besitzen.

Die Homohydrocinchoninsäure stellt ein Aggregat von weissen, perlmutterglänzenden Krystallschuppen dar, welche dem monoklinen System angehören dürften. Die Säure ist weder in kaltem, noch in warmem Wasser löslich. Alkohol, Äther, Benzol nehmen sie leicht auf. Ligroïn löst sie nur in der Kochhitze; beim Abkühlen scheidet sich der grösste Theil wieder aus. Sowohl Basen als verdünnte Säuren lösen die Substanz. Beim Liegen an der Luft, namentlich im feuchten Zustande färbt sich die Homohydrocinchoninsäure lichtblauroth und zersetzt sich nach einiger Zeit vollständig. Salpetersäure färbt sie blutroth. Der Schmelzpunkt wurde zu 125° C. (uncorrig.) gefunden. Über diese Temperatur erhitzt findet Zersetzung statt. Die Säure krystallisirt ohne Wasser. Die Analyse der im Vacuum getrockneten Substanz ergab:

I. 0·3045 Grm. Substanz gaben 0·7713 Grm. Kohlensäure und 0·1877 Grm. Wasser.

II. 0·2892 Grm. Substanz gaben 0·7338 Grm. Kohlensäure und 0·1785 Grm. Wasser.

III. 0·2552 Grm. Substanz gaben 16·6 CC Stickstoff bei 759·3 Mm. und 20·1° C.

In 100 Theilen:

	I.	II.	III.
C....	69·08	69·20	—
H....	6·84	6·85	—
N....	—	—	7·43

Aus diesen Zahlen ergibt sich die Formel $C_{11}H_{13}NO_2$, welche verlangt:

		Gefunden im Mittel
C....	69·11	69·14
H....	6·80	6·85
N....	7·33	7·43

Die Homohydrocinchoninsäure ist eine äusserst schwache Säure. Ihre Salze sind durchwegs sehr zersetzlich.

Das Kalisalz scheidet sich wie Seife bei Zugabe von concentrirter Kalilauge zur Lösung desselben ab. Es ist nicht zu reinigen, da beim Umkrystallisiren Zersetzung eintritt.

Wir haben versucht ein Kalksalz zu gewinnen und haben zu diesem Behufe die verdünnte ammoniakalische Lösung mit Chlorcalcium versetzt und unter der Luftpumpe eingedunstet. Dabei wurde die Flüssigkeit bräunlich, endlich ganz dunkel, und es fand eine Abscheidung von amorphen Häuten statt. Als diese Lösung an die Luft gebracht wurde, färbten sich zunächst die Ränder intensiv blau; späterhin war die ganze Masse in einen tief indigoblauen Farbstoff verwandelt, welchen wir, weil die Reinigung einige Schwierigkeit verursachte und die Materialmenge eine beschränkte war, nicht näher untersuchen konnten.

Die Homohydrocinchoninsäure verbindet sich aber auch mit Säuren und liefert, mit Jodmethyl behandelt, ein gut krystallisirtes Additionsproduct. Mit Hilfe dieser Verbindungen haben wir die Richtigkeit der gegebenen Formel verifizirt.

Salzsäureverbindung der Homohydrocinchoninsäure.

Diese prächtig krystallisirte Verbindung kann erhalten werden, wenn die Säure in mässig concentrirter Salzsäure gelöst wird, und die Lösung unter der Luftpumpe über Ätzkalk allmälig abdunstet. Auf diese Art erhält man die Verbindung in grossen, farblosen, glasglänzenden Krystallen, welche ein Molekül Krystallwasser enthalten. Die Verbindung ist leicht löslich in Wasser. Beim Erhitzen auf 100°C. wird sie theilweise zersetzt. Herr Dr. Březina hatte die Freundlichkeit, diese Substanz einer krystallographischen Untersuchung zu unterziehen.

Er theilt darüber Folgendes mit:
Krystallsystem prismatisch. $a:b:c = 0\cdot9314:1:2\cdot070$
Formen: *c*(001), *d*(012), *p*(111).
Spaltbarkeit: *c*(001), vollkommen.
Winkel:

Flächen		Rechnung	Messung
c, d	(001).(012)	45°59′	46° 5′
c, p	(001).(111)	71°47′	71°47′
p, p′	(111).(111)	88° 4′	88° 4′

Optische Orientirung (abc).

Um die positive Bisectrix $\rho < \nu$.

Die Analysen der lufttrockenen Substanz ergaben folgende Werthe:

I. 0·3271 Grm. Substanz gaben 0·6392 Grm. Kohlensäure und 0·1985 Grm. Wasser.

II. 0·3064 Grm. Substanz gaben 0·1810 Grm. Chlorsilber.

In 100 Theilen:

	I.	II.	$C_{10}H_{10}(CH_3)NO_2+HCl+H_2O$
C	53·29	—	53·76
H	6·74	—	6·51
Cl	—	14·61	14·46

Jodmethylverbindung.

Dieses Additionsproduct wird gewonnen, wenn die mit Methylalkohol durchfeuchtete Homohydrocinchoninsäure mit Jodmethyl im geschlossenen Rohre auf 100°C. erhitzt wird. Der Röhreninhalt hinterlässt nach dem Verdunsten des Alkohols und des überschüssigen Jodids eine lichtgrauweiss gefärbte Masse, welche in kaltem Wasser sehr leicht löslich ist. Nach dem Umkrystallisiren und dem Entfärben mit Thierkohle in der Kälte, bilden sich beim langsamen Verdunsten des Wassers grosse, wasserhelle, schwach gelblich gefärbte, stark glänzende Krystalle, deren krystallographische Bestimmung wir ebenfalls der Freund-

lichkeit des Herrn Dr. Březina verdanken. Die Resultate seiner Untersuchung sind:

Krystallsystem: monoklin. $a:b:c = 1\cdot3151:1:1\cdot1460$. $\eta = 91°2'$.

Formen: $a(100)$, $d(101)$, $c(001)$, $f(\bar{3}07)$, $e(\bar{1}01)$, $m(110)$.
Spaltbarkeit: nicht wahrgenommen.
Winkel:

Flächen		Rechnung	Messung
a, d	(100).(101)	48°21′	48°27′
a, c	(100).(001)	88°58′	88°54′
c, f	(001).($\bar{3}$07)	20°36′	20° 8′
e, d	($\bar{1}$01).($\bar{1}$00)	49°32′	49°33′
a, m	(100).(110)	52°45′	52°48′
c, m	(001) (110)	89°22′	89°14′

Optische Orientirung (100) $\mathfrak{b}\mathfrak{c} = 88°58' + ((40°0))_{Na}$
Eine optische Axe auf $c(001)$ unter $((19°45'))_{Na}$ nach vorne; $\rho < v$.

Eine Jodbestimmung, in der, unter der Luftpumpe getrockneten Substanz ergab:

0·2885 Grm. Substanz gaben 0·1954 Grm. Jodsilber.

In 100 Theilen:

	$C_{10}H_{10}(CH_3)NO_2, JCH_3 + H_2O$.
J....36·60	36·18

Dem Jodmethyladditionsproduct lässt sich das Jod durch Silberoxyd entziehen und es liefert so eine Methylhomohydrocinchoninsäure. Zur Darstellung dieser wird das Additionsproduct in Wasser gelöst und mit Silberoxyd in der Kälte so lange versetzt, bis im Filtrat kein Jod nachzuweisen ist. Die so erhaltene farblose Lösung wird durch Eindampfen in einer Wasserstoffatmosphäre concentrirt, und liefert endlich bei längerem Stehen kleine, farblose, glänzende, anscheinend prismatische Krystalle,

welche ausserordentlich leicht löslich sind und sich in der Wärme zersetzen. Die Verbindung enthält Krystallwasser.

Die Analyse der unter der Luftpumpe getrockneten Substanz ergab:

0·3225 Grm. Substanz gaben 0·7644 Grm. Kohlensäure und 0·2235 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

		$C_{10}H_9(CH_3)N.(CH_3)O_2+H_2O$
C	64·64	64·57
H	7·70	7·62

Vor einigen Jahren hat A. W. Hofmann[1] die bedeutsame Entdeckung gemacht, dass aus dem Piperidin ein Kohlenwasserstoff entsteht, wenn das Trimethylpiperylammoniumhydroxyd der trockenen Destillation unterworfen wird. Letztere Substanz ist das Product der erschöpfenden Methylirung des Piperidins. Die Zwischenproducte, welche Hofmann durch die successive Einwirkung von Jodmethyl (und entsprechende Entjodung) erhalten hat, lassen sich, wie folgt, ausdrücken.

Aus der Verbindung:

$$\underbrace{C_5H_{10}N(CH_3)}_{\text{Methylpiperidin}}$$

wird durch die weitere Methylirung die Verbindung

$$\underbrace{C_5H_9(CH_3)N.(CH_3)}_{\text{Dimethylpiperidin}},$$

aus welcher endlich die Verbindung

$$\underbrace{C_5H_9(CH_3)N.(CH_3)(CH_3)OH}_{\text{Trimethylpiperylammoniumhydroxyd}}$$

hervorgeht.

[1] Berl. Ber. XIV. pag. 659. 72.

Der Verlauf der Methylirung der Tetrahydrocinchoninsäure scheint eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Verlaufe der Methylirung des Piperidins zu besitzen.

Aus der Tetrahydrocinchoninsäure entsteht die Verbindung

$$\underbrace{C_{10}H_{10}N(CH_3)O_2}_{\text{Methyltetrahydrocinchoninsäure}}$$

welche leicht in die Verbindung

$$\underbrace{C_{10}H_9(CH_3)NHO_2}_{\text{Homohydrocinchoninsäure}}$$

übergeführt werden kann, welche endlich die Verbindung

$$C_{10}H_9(CH_3)N(CH_3)O_2 + H_2O$$

liefert.

Es muss daher auch in diesem Falle ein Eintritt, beziehungsweise eine Wanderung der Methylgruppe vom Stickstoff in den hydrirten Pyridinkern der Tetrahydrocinchoninsäure erfolgen. Bei einer Oxydation wäre in diesem Falle aus der Homohydrocinchoninsäure die Bildung einer Chinolindicarbonsäure zu erwarten.

Schon bei einer früheren Gelegenheit hat der Eine[1] von uns hervorgehoben, dass keines der gebräuchlichen Oxydationsmittel die Tetrahydrocinchoninsäure in Cinchoninsäure rückverwandelt. Leider hat auch die Anwendung der verschiedensten Oxydationsmittel auf die Homohydrocinchoninsäure nicht den erhofften Erfolg gehabt. Trotzdem aber haben wir die Wanderung der Methylgruppe, wie wir glauben, sichergestellt durch das Resultat der

Einwirkung von Schwefelsäure

auf Homohydrocinchoninsäure.

Wird eine Lösung von einem Theil dieser Säure in 6—10 Theilen concentrirter Schwefelsäure auf 170°C. erhitzt, so findet eine energische Einwirkung statt. Die Flüssigkeit geräth in's

---

[1] Monatshefte f. Chemie, 1882.

Schäumen und es entweichen grosse Mengen von schwefeliger Säure. Um die Reaction zu vollenden, wird noch ungefähr zwei Stunden auf 190° C. erwärmt. Nach dem Abkühlen wird das lichtgelb braun gefärbte Product in einer grösseren Menge Wasser gelöst. Die Schwefelsäure wird mit Bleicarbonat neutralisirt. Die Flüssigkeit wird durch Schwefelwasserstoff entbleit, und das Filtrat vom Schwefelblei, welches lichtweingelb gefärbt ist, bis zur Syrupconsistenz eingedampft. Während des Abdampfens färbt sich die Lösung röthlich. Nach einiger Zeit bilden sich Krystalle, welche, sobald keine Vermehrung derselben eintritt, durch Absaugen von der dicklichen Mutterlauge getrennt werden. Diese Rohausscheidung wird durch Entfärben mit Kohle und durch öfteres Umkrystallisiren gereinigt.

Man erhält so die Substanz in Form von dünnen, schwach gelblich gefärbten, biegsamen, fettglänzenden Krystallblättchen, die beim Erhitzen sich, ohne erst zu schmelzen total zersetzen. Die Verbindung ist in kaltem Wasser kaum, leicht aber in heissem löslich. Sie hat schwach saure Eigenschaften, ist schwefelhältig und liefert bei der Analyse Zahlen, welche zur Formel $C_{10}H_8(SHO_3)N$ führten.

Diese Sulfosäure enthält Krystallwasser, welches theilweise beim Stehen über Schwefelsäure, vollständig und leicht aber beim Erhitzen auf 100° C. abgegeben wird.

Die Analyse liefert folgende Daten:

I. 0·3364 Grm. Substanz gaben 0·6659 Grm. Kohlensäure und 0·1225 Grm. Wasser.

II. 0·4173 Grm. Substanz gaben 0·4273 Grm. schwefelsauren Baryt.

III. 0·4735 Grm. Substanz gaben 26·3 CC Stickstoff bei 760·5 Mm. und 20.5° C.

In 100 Theilen.

	I.	II.	III.	$C_{10}H_8(SHO_3)N$
C	53·98	—	—	53·81
H	4·04	—	—	4·03
S	—	14·06	—	14·34
N	—	—	6·34	6·27

Die Krystallwasserbestimmung ergab:

0 9603 Grm. Substanz verloren bei 100° C., 0·0665 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

		$C_{10}H_8(SHO_3)N + H_2O$
H_2O	6·93	7·46

Nach der gegebenen Zusammensetzung wäre die Substanz, welche durch die Einwirkung von Schwefelsäure auf Homohydrocinchoninsäure hervorgeht, deren Bildung unter Kohlensäureabspaltung, Oxydation und gleichzeitiger Sulfurirung erfolgt als eine Lepidinsulfosäure zu betrachten.

Diese Sulfosäure ist eine äusserst schwache Säure, deren Salze ungemein zersetzlich sind. In wässeriger Lösung färben sich dieselben röthlich, sind schwierig zu reinigen, aus welchem Grunde wir auf eine Untersuchung derselben verzichten mussten.

Erhitzt man die Sulfosäure mit der 4—5fachen Menge Ätzkali in einer Silberschale, um die Sulfogruppe gegen die Hydroxylgruppe auszutauschen, so entwickelt sich ein angenehm, nach Geranium richender Dampf. Hört die Bildung dieses Dampfes auf, so ist auch alles verflüchtigt, und man findet in der weiss gefärbten Kalischmelze keine organischen Zersetzungsproducte.

Wir haben den letzten Rest der Sulfosäure in einer silbernen Retorte mit Kali erhitzt und konnten durch Condensation des Dampfes ein Öl erhalten, welches hell gefärbt war, und ebenfalls den lieblichen Geruch nach Geranium besass. Das Öl hat basische Eigenschaften, löst sich in Salzsäure und ist stickstoffhältig. Die Menge, die uns zur Verfügung stand, gestattete nicht, eine Reinigung durchzuführen, so dass eine genaue Analyse ausgeführt hätte werden können. Die Resultate, welche wir bei der Verbrennung erhielten, weisen auf die Formel $C_{10}H_9NO$ hin.

Die Bildung einer Lepidinsulfosäure aus der Homohydrocinchoninsäure beweist unter allen Umständen, dass eine Methylgruppe in dieser Säure in den hydrirten Pyridinkern eingetreten ist. Conform der Hofmann'schen Reaction dürfte auch durch weitere Methylirung der Homohydrocinchoninsäure ein Product zu erhalten sein, welches, sowie das Trimethylpiperylammoniumhydroxyd unter Abspaltung von Trimethylamin das Pyperilen liefert, unter Abspaltung von Trimethylamin eine stickstofffreie aromatische Säure geben wird.

Über die Versuche, welche wir in dieser Richtung anstellen werden, werden wir seinerzeit berichten.

XXVII. SITZUNG VOM 11. DECEMBER 1884.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Bemerkungen zur Simpson'schen Methode der mechanischen Quadratur", von Herrn Prof. Dr. Fr. Hočevar in Innsbruck.
2. „Über Morin," II. Mittheilung aus dem chemischen Laboratorium der technischen Hochschule in Wien, von den Herren Dr. R. Benedikt und K. Hazura.
3. „Über die Massbestimmung extensiver Grössen", von Herrn Dr. E. Study in Leipzig.
4. „Die Stickstoffbestimmung," Mittheilung von Herrn G. Czeczetka, technischer Fabriksdirector zu St. Marx (Wien).
5. „Zur Theorie eines Systems dreier binärer cubischer Formen", von Herrn Dr. B. Igel, Docent an der technischen Hochschule in Wien.

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr überreicht eine Abhandlung des Herrn Prof. Dr. E. H. Schoute an der Universität in Gröningen, unter dem Titel: „Einige Bemerkungen über das Problem der Glanzpunkte."

Ferner überreicht Herr Prof. Weyr eine Abhandlung des Herrn K. Bobek, Docent an der deutschen technischen Hochschule zu Prag: „Über Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt". I. Mittheilung.

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreichte eine in seinem Laboratorium von Herrn Dr. H. Weidel in Gemeinschaft mit Herrn B. Pick ausgeführte Arbeit: „Studien über Verbindungen aus dem animalischen Theer. V. Collidin"

Herr Prof. Dr. Franz Toula an der technischen Hochschule in Wien, überreicht eine Abhandlung betitelt: „Über Amphicyon, Hyaemoschus und Rhinoceros *(Aceratherium)* von Göriach bei Turnau in Steiermark."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, kön. ungar. in Budapest: Jahrbücher. XI. Band, Jahrgang 1881. Budapest, 1884; 4°.

Geologische Anstalt, kön. ungar. in Budapest: Évkönyv. VII. Bd., 2. Heft. Budapest, 1884; 8°. — Catalog der Bibliothek u. allgem. Kartensammlung der kön. ungar. geolog. Anstalt. Budapest, 1884; 8°. — Jahresbericht für 1883. Budapest, 1884; 8°. — Roth u. Telegd L., Umgebungen von Kismárton (Eisenstadt). Mit 2 Karten. Budapest, 1884; 8° u. Fol. — Halaváts J., Umgebungen von Fehértemplom (Weisskirchen) und Kubin. Mit 1 Karte. Budapest, 1884; 8° und Fol.

Gesellschaft ungar. geologische in Budapest: Mittheilungen. XIV. Bd., 4—8, 9—11 Heft. Budapest, 1884; 8°.

— kön. ungar. naturwissenschaftliche in Budapest: Népszerü természettudományi elöadások gyüjteménye. Nr. 32—41. Budapest. 1882 u. 1883; 8°. — Buza J., Die Krankheiten unserer Culturpflanzen. Budapest, 1879; 8°. — Czógler A., Geschichte der Physik. I. u. II. Bd. Budapest, 1882; 8°. — Daday J., Darstellung der ungarischen zoologischen Literatur in den Jahren 1870—1880. Budapest, 1882; 8°. — Gruber L., Anleitung zu geographischen Ortsbestimmungen. Budapest, 1883; 8°. — Haszlinszky F., Die Flechtenflora des ungarischen Reiches. Budapest, 1884: 8°. — Kosutányi Th., Ungarn's Tabaksorten. Budapest, 1882; 4° — Mendlik A. u. Királyi P., Das Leben der Pflanzen von Henry Emery. Budapest, 1883; 8°. — Schenzl G., Anleitung zu erdmagnetischen Messungen. Budapest, 1884; 8°. — Török A. und Entz G., Abstammung der Menschen von Charles Darwin. I. Bd. Budapest, 1884; 8°.

— deutsche für Natur- und Völkerkunde Ostasiens: Mittheilungen. 31. Heft. September 1884; 4°.

Gesellschaft, k. k. geographische in Wien. Mittheilungen, Bd. XXVII, Nr. 9 u. 10. Wien, 1884; 8°.

— österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XIX. Band. December-Heft 1884. Wien, 1884; 8°.

— schweizerische naturforschende in Zürich: Verhandlungen 66. Jahresversammlung. Jahresbericht 1882/83. Zürich, 1883; 8°.

— schlesische für vaterländische Cultur: 61. Jahresbericht. Breslau, 1884; 8°.

Gewerbe-Verein, n. ö.: Wochenschrift. XLV. Jahrg. Nr. 45 bis 49. Wien, 1884; 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift. IX. Jahrgang Nr. 45—49. Wien, 1884; 4°.

Institute, the North of England of Mining and mechanical Engineers: Transactions. Vol. XXXIII, part VI. Newcastle-upon-Tyne, 1884; 8°.

Institution, the Royal of Great-Britain: Proceedings. Vol. X, part III. Nr. 77. London, 1884; 8°.

Jena, Universität: Akademische Schriften pro 1882—1884. 56 Stücke. 4° u. 8°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 25e année, 3e série. Tome XIV. 516e livraison. Décembre 1884. Paris; 4°.

Nature: Vol. XXXI, Nr. 788. London, 1884; 8°.

Nuovo Cimento. 3a serie, Tomo XIV. Novembre e Dicembre 1883. Pisa, 8°. — Tomo XV. Gennaio e Febbraio 1884. Pisa; 8°.

Observatoire de Moscou: Annales. Vol. X. 1re livraison. Moscou, 1884; 4°.

Radcliffe Observatory, Oxford: Results of astronomical and meteorological Observations in the year 1881. Oxford, 1884; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen, Nr. 15, Wien, 1884; 8°.

Société mathématique de France: Bulletin. Tome XII, Nr. 4. Paris, 1884; 8°.

Society, the Birmingham philosophical: Proceedings. Vol. IV, part 1 Birmingham, 1884; 8⁰.

— the Linnean of London: List of the Officers and Fellows. October 1883. London; 8⁰.

— The Journal. Botany. Vol. XX. Nrs. 130 und 131. — Vol. XXI, Nrs. 132 und 133. London, 1884; 8⁰.

— The Transactions. 2nd Ser. Vol. II. Parts 6 und 7. London. 1884; 4⁰.

— Proceedings from November 1882 to June 1883. London 1883; 8⁰.

— Zoölogy. The Journal. Vol. XVII, Nrs. 101 und 102. London, 1883; 8⁰.

— The Transactions. 2nd Ser. Vol. II. Parts 9 und 10. — Vol. III. Part 1. London, 1883—84; 4⁰.

Verein, naturwissenschaftlicher für Sachsen und Thüringen: Zeitschrift für Naturwissenschaften. IV. Folge, III. Band, 4. Heft. Halle a. d. S., 1884; 8⁰.

Vierteljahresschrift, österreichische für wissenschaftliche Veterinärkunde. LXII. Band, I. Heft (Jahrgang 1884, III). Wien, 1884; 8⁰.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXIV. Jahrgang. Nr. 45 bis 49. Wien, 1884; 4⁰.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. VI. Jahrgang. Nr. 2. Wien. 1884; 8⁰.

Über die singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Von Dr. **Otto Biermann.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. November 1884.)

Frau von Kowalevsky macht in ihrer Arbeit „Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen" (Borchardt's Journal B. 80) einige von Herrn Weierstrass herrührende Sätze über ein zur Bestimmung von n Functionen einer unabhängig Veränderlichen vorgelegtes System namhaft, und an diese will ich einige die singulären Lösungen betreffenden Bemerkungen anknüpfen.

Es sei ein System totaler algebraischer Differentialgleichungen auf ein System von n algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung reducirt:

$$f_\nu\left(z, x_1, x_2 \ldots x_n, \frac{dx_1}{dz}, \frac{dx_2}{dz} \ldots \frac{dx_n}{dz}\right) = 0 \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

und dieses so beschaffen, dass die Elimination von je $n-1$ der Differentialquotienten $\frac{dx_\nu}{dz} = y_\nu$ niemals auf eine algebraische Gleichung in den $(n+1)$ Variabeln z und x_ν allein führt, denn sonst liesse sich das System durch ein anderes mit $(n-1)$ Variabeln x_ν ersetzen. Dann kann man zu einem System der Gestalt:

$$\varphi_\nu\left(z, x_1, x_2 \ldots x_n, \frac{dx_\nu}{dz}\right) = 0, \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

übergehen, wo φ_ν wieder eine rationale Function der Grössen z, $x_1 \ldots x_n$, und y_ν bezeichnet, die in y_ν vom Grade m_ν sei. Alle Lösungen des ersten Systems genügen auch dem zweiten und dieses lässt sich wieder durch ein oder mehrere Systeme der kanonischen Form:

$$G(z, x_1 \ldots x_n, x_{n+1}) \cdot \frac{dx_\nu}{dz} = G_\nu(z, x_1 \ldots x_n, x_{n+1})$$
$$(\nu = 1, 2 \ldots n)$$

ersetzen, worin x_{n+1} eine mit z und $x_1 \ldots x_n$ durch eine irreductible algebraische Gleichung:

$$F(z, x_1 \ldots x_n, x_{n+1}) = 0$$

verbundene Hilfsgrösse ist, G_ν ganze rationale Functionen und G die partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}$ bezeichnet.

Diese Form ist in der Weise zu erreichen, wie man das bekannte Normalsystem algebraischer Gleichungen derselben Gestalt ableitet: (siehe auch l. c. §. 4). Man führe eine von $y_1, y_2 \ldots y_n$ rational abhängige Variabele x_{n+1} am besten die lineare Function:

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots a_n y_n = x_{n+1}$$

ein, worin $a_1, a_2 \ldots a_n$ willkürliche Constanten sind, bilde das Product

$$\Phi(x_{n+1}) = \Pi\{x_{n+1} - (a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots a_n y_n)\}$$

über alle Combinationen der Wurzeln $y_\nu^{(\mu_\nu)}$ ($\mu_\nu = 1, 2 \ldots m_\nu$) aus den Gleichungen $\varphi_\nu = 0$ und zerlege die ganze Function $\Phi(x_{n+1})$, deren Coëfficienten von z, den x_ν und a_ν abhängen in seine irreductiblen Factoren. Es sei F ein solcher Factor vom Grade k in x_{n+1}, und die Wurzeln desselben seien:

$$x_{n+1}^{(\varkappa)} = a_1 y_1^{(\varkappa)} + a_2 y_2^{(\varkappa)} + \ldots a_n y_n^{(\varkappa)} \quad (\varkappa = 1, 2 \ldots k).$$

Genügen dann $y_1^{(\lambda)}, y_2^{(\lambda)} \ldots y_n^{(\lambda)}$ aus einer dieser Wurzeln gleichzeitig den Gleichungen $\varphi_\nu = 0$, so genügt wegen der vorausgesetzten Irreductibilität jedes andere in einer der Wurzeln $x_{n+1}^{(\varkappa)}$ auftretende System $y_1^{(\mu)}, y_2^{(\mu)} \ldots y_n^{(\mu)}$ ebenfalls den Gleichungen $\varphi_\nu = 0$. So geht entsprechend jedem irreductiblen Factor F ein zusammengehöriges System von Werthen für $y_1, y_2 \ldots y_n$ hervor.

Beachtet man, dass aus der Gleichung:

$$F = \prod_{(\varkappa)} \{x_{n+1} - (a_1 y_1^{(\varkappa)} + a_2 y_2^{(\varkappa)} + \ldots a_n y_n^{(\varkappa)})\}$$

$$-\frac{\partial F}{\partial a_\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{F \cdot y_\nu^{(\varkappa)}}{x_{n+1} - (a_1 y_1^{(\varkappa)} + a_2 y_2^{(\varkappa)} + \ldots a_n y_n^{(\varkappa)})}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{F}{x_{n+1} - (a_1 y_1^{(\varkappa)} + a_2 y_2^{(\varkappa)} + \ldots a_n y_n^{(\varkappa)})}$$

folgen und dass man darum, weil $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}$ bei willkürlichen Werthen der Grössen a_ν für keine der Wurzeln $x_{n+1}^{(\varkappa)}$ verschwindet, die letzten Ausdrücke durcheinander dividiren kann, so resultirt:

$$y_\nu^{(\varkappa)} = -\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial a_\nu}}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}}\right)_{x_{n+1}^{(\varkappa)}} \qquad \begin{array}{l} \varkappa = 1, 2 \ldots k \\ \nu = 1, 2 \ldots n \end{array}$$

Damit ist bewiesen, dass jedes System zusammengehöriger Werthe für y_ν, das den ursprünglichen Differentialgleichungen genügt, in einem System der angegebenen Art:

$$\frac{dx_\nu}{dz} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial a_\nu}}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}} = \frac{G_\nu}{G} \qquad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

und

$$F(z, x_1, x_2 \ldots x_n, x_{n+1}) = 0$$

enthalten ist.

Mit Hilfe dieser kanonischen Form der Differentialgleichungen kann man zeigen, dass in der Umgebung irgend einer Stelle $z = a$, welcher solche endliche Anfangswerthe für $x_1, x_2 \ldots x_n$ zugeordnet seien, dass x_{n+1} zufolge $F = 0$ einen endlichen Werth erhält, für den $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}$ nicht verschwindet, $x_1, x_2 \ldots x_n$ und x_{n+1} in Potenzreihen nach $z - a$ zu entwickeln sind, die einen gemeinsamen Convergenzbezirk besitzen und das Gleichungssystem erfüllen. Aus diesen $(n+1)$ Elementen entspringen durch Fort-

setzung $(n+1)$ analytische Functionen, deren zusammengehörige Zweige die Differentialgleichungen immer noch befriedigen.

Umgekehrt, wenn ein System von $(n+1)$ analytischen Functionen dem kanonischen Gleichungssystem genügt, aber nicht die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}=0$, so lässt sich jedes System zusammengehöriger Elemente der Functionen durch Potenzreihen ausdrücken (specielle z-Werthe ausgenommen).

Darnach sind die Lösungen, welche neben dem kanonischen System noch der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}=0$$

genügen, unter den zuerst definirten Functionen nicht enthalten, und wenn irgend Lösungen hervorgehen sollen, die in den allgemeinen nicht eingeschlossen sind, können sie nur aus der Combination des kanonischen Systems und der Gleichung $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}=0$ resultiren. Diese Lösungen heissen die singulären und sind nicht dadurch zu erreichen, dass man den bei Aufstellung der Elemente nothwendig einzuführenden willkürlichen Constanten besondere Werthe ertheilt.

Wir betrachten des Nähern eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\Phi\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right)=0,$$

die in $\frac{dy}{dx}$ irreductibel und vom m^{ten} Grade ist.

Setzen wir der allgemeinen Vorschrift gemäss

$$p=c\,\frac{dy}{dx}$$

und bilden

$$\Pi\left(p-c\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mu}\right)=c^{m}\,\Phi\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right)=F(x,y,p),$$

so können wir die gegebene Differentialgleichung offenbar durch

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial p}} \quad \text{und} \quad F(x, y, p) = 0$$

ersetzen, und können wegen der vorausgesetzten Irreductibilität nachträglich dem c in F und $\frac{\partial F}{\partial c}$ wieder den Werth Eins beilegen.

Die singulären Lösungen sind in den Lösungen des von p freien Eliminationsresultates der Gleichungen

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 0,$$

d. h. in den Lösungen der Discriminante der Gleichung $F(p) = 0$ enthalten. Für den zufolge $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$ dem p zukommenden Werthe wird auch $\frac{\partial F}{\partial c}$ Null, denn die Discriminante folgt auch aus

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial c} = 0,$$

und darnach besitzt $\frac{dy}{dx}$ für die singulären Lösungen immer die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Für dieselben ist auch

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

wie aus

$$dF = 0 \ \text{und} \ \frac{\partial F}{\partial p} = 0$$

folgt, daher ist ferner

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{0}{0}.$$

Indess

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial p}},\quad \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial p}}$$

werden für die singulären Lösungen unendlich, indem $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ für die Discriminantenlösungen nicht verschwinden, ausser etwa für solche, die besondere Werthe von y und x definiren.

Diese Werthe werden jedenfalls einzelne Stellen anzeigen, wo die Entwicklung von x oder y als Function von y oder x nicht möglich ist, es werden also Unendlichkeits- oder Verzweigungsstellen sein. Darum aber werden die in Rede stehenden Discriminantenlösungen $y=c$, $x=C$ auch particuläre Lösungen des Integrales $y=f(x, \alpha)$ oder der Umkehrungsfunction $x=\varphi(y, \beta)$ sein können. Ein unter den Discriminantenlösungen erscheinendes particuläres Integral kann auch für einen besonderen Werth der Constanten α hervorgehen, den man in der Potenzentwicklung für das allgemeine Integral nicht einsetzen kann, ohne den Convergenzbereich der Reihe zum Verschwinden zu bringen.

Dieses letzten Falles wegen ist es von Wichtigkeit, zu wissen, ob eine Discriminantenlösung der Form $x=C$, $y=c$ ein particuläres Integral ist oder nicht, denn sonst zeigen solche Lösungen nur besondere Stellen für die Integralfunction an; eine Eigenheit, derentwegen es vor Untersuchung einer durch eine Differentialgleichung definirten Function wichtig erscheint, die singulären Lösungen mit Hilfe des kanonischen Systems, das jener Differentialgleichung zugehört, aufzusuchen.

Die Entscheidung lautet, die fraglichen Lösungen $x=C$, $y=c$ sind singuläre Integrale, wenn wie im allgemeinen Fall der wahre Werth von

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{0}{0} \text{ resp. } \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{0}{0}$$

unendlich ist.

Betrachten wir einige Beispiele: Die Differentialgleichung (von Raabe)

$$3x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6y\left(\frac{dy}{dx}\right) + x + 2y = 0$$

hat die Discriminante

$$3y^2 - x^2 - 2xy$$

und die singulären Lösungen

$$3y + x = 0,\ y - x = 0.$$

Die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{x}{ay}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{x}{a}\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{y}{4a} = 0$$

hat die singuläre Lösung

$$ay^2 - \left(\frac{2x}{3}\right)^3 = 0.$$

Bei der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2xy}{x^2 - a^2}\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{x^2 - a^2} = 0$$

kommen die Discriminantenlösungen

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \text{ und } x = 0$$

in Betracht, doch da nur die erste der Gleichung genügt, ist auch nur diese singuläre Lösung.

Die Differentialgleichung (s. Boole)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + 8y^2 = 0$$

hat das allgemeine Integral

$$y = c(x - c)^2$$

und die singuläre Lösung

$$y - 4\left(\frac{x}{3}\right)^3 = 0.$$

Die Discriminantenlösung $y = 0$ genügt der Differentialgleichung, ist aber insofern particuläres Integral, als $y = 0$ für

$c=0$ hervorgeht, und insofern singuläre Lösung als sie auch für $c=x$ resultirt. Dieses verschiedene Verhalten spricht sich auch darin aus, dass der wahre Werth von $\frac{\partial p}{\partial y}$ endlich oder unendlich ist, je nachdem man sich auf verschiedenen Zweigen der Stelle $p=0$ nähert. Zudem ist $y=0$ eine Stelle, in deren Umgebung $x=c\pm\sqrt{\frac{y}{c}}$ nicht nach ganzen Potenzen entwickelt werden kann.

Endlich die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+a\frac{y^2}{x^3}\frac{dy}{dx}-a\frac{y^3}{x^4}=0$$

besitzt das Integral

$$y=\frac{c^2}{a}\frac{x}{c+x},$$

und die Discriminantenlösungen sind

$$ay+4x^2=0,\ y=0.$$

Die erste ist singuläre Lösung, die zweite geht für $c=0$ hervor. Das particuläre Integral $y=0$ erscheint aber unter den Discriminantenlösungen, weil in der Umgebung der Stelle $y=0$ für x keine Potenzentwicklung anzugeben ist, in welcher man $c=0$ setzen kann, indem die Potenzreihe

$$x=\frac{a}{c^2}\frac{cy}{1-\frac{y}{\frac{c^2}{a}}}=\frac{a}{c}y\left[1+\frac{y}{\frac{c^2}{a}}+\frac{y^2}{\left(\frac{c^2}{a}\right)^2}+\dots\right]$$

nur in derjenigen Umgebung von $y=0$ convergirt, wo

$$|y|<\left|\frac{c^2}{a}\right| \text{ ist.}$$

Bei bloss reellen Variabeln sieht man übrigens die geometrische Bedeutung. Das Gebilde

$$axy+acy-c^2x=0$$

geht für $c=0$ in das Geradenpaar $x=0$, $y=0$ über, und dieses hat im Coordinatenursprung einen Doppelpunkt, an welcher Stelle die Entwicklung nach ganzen Potenzen aufhört.

Wir kehren zu unserem kanonischen System zurück, wollen demselben aber eine symmetrische Gestalt geben. Bildet man aus der Gleichung:

$$F(z, x_1 x_2 \ldots x_{n+1}) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} \frac{dx_{n+1}}{dz} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_\nu} \frac{dx_\nu}{dz} = 0$$

und

$$\frac{dx_{n+1}}{dz} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z} + \sum_\nu \frac{\partial F}{\partial x_\nu} \frac{dx_\nu}{dz}}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}} = \frac{G_{n+1}}{G},$$

so ersetzt diese Differentialgleichung in Verbindung mit den n früheren die Gleichung $F=0$, denn aus denselben folgt wieder

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

und $F=\text{const.}$ Der Werth der Constanten ist aber Null, denn wir hatten ja einem Anfangswerthe von z solche Werthe für $x_1, x_2 \ldots x_{n+1}$ zugeordnet, dass F Null war.

Für die durch Combination der $(n+1)$ Gleichungen

$$\frac{dx_\nu}{dz} = \frac{G_\nu}{G} \qquad (\nu = 1, 2 \ldots n+1)$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} = 0$$

entstehenden singulären Lösungen sind $G_1 G_2 \ldots G_n$ Null, wie aus den oben angegebenen Ausdrücken für diese Functionen zu ersehen ist, aber auch G_{n+1} verschwindet, da dF und $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}$ Null

sind. Für die singulären Lösungen nehmen daher alle Differentialquotienten die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an.

Zur Untersuchung der singulären Lösungen des Systems

$$\frac{dx_\nu}{dz}=\frac{G_\nu(z,x_1\ldots x_{n+1})}{G(z,x_1\ldots x_{n+1})}=F_\nu(z,\,x_1\ldots x_{n+1})$$
$$(\nu=1,\,2\ldots n+1)$$

können wir auch zu einem anderen übergehen, indem wir eine der Gleichungen — etwa die erste — differentiren und die dabei auftretenden Differentialquotienten $\frac{dx_2}{dz}\;\ldots\;\frac{dx_{n+1}}{dz}$ durch F_2, $F_3\ldots F_{n+1}$ ersetzen und endlich aus den $(n+1)$ Gleichungen der Form:

$$\frac{dx_\nu}{dz}=F_1\quad \frac{d^2x_1}{dz^2}=F_1^{(2)}\ldots\frac{d^{n+1}x_1}{dz^{n+1}}=F_1^{(n+1)},$$

wo $F_1, F_1^{(2)}\ldots F_1^{(n+1)}$ bloss Functionen von z und den x_ν sind, $x_2, x_3\ldots x_{n+1}$ eliminiren, auf dass wir eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\Phi\left(z,x_1,\frac{dx_1}{dz}\ldots\frac{d^{n+1}x_1}{dz^{n+1}}\right)=0$$

erhalten. Mit den singulären Lösungen dieser Gleichung sind auch die des ursprünglichen Systems gefunden. Eine irreductible algebraische Differentialgleichung m^{ten} Grades der genannten Art

$$f\left(z,x,\frac{dx}{dz}\ldots\frac{d^nx}{dz^n}\right)=0$$

ersetzen wir aber nach Einführung der neuen Variabeln

$$x=y_1,\frac{dx}{dz}=y_2\ldots\frac{d^{n-1}x}{dz^{n-1}}=y_n$$

und der Hilfsvariabeln

$$y_{n+1}=c\frac{dy_n}{dz}$$

durch das kanonische System

$$\frac{dy_1}{dz} = y_2, \; \frac{dy_2}{dz} = y_3 \ldots \frac{dy_{n-1}}{dz} = y_n, \; \frac{dy_n}{dz} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial y_{n+1}}}$$

und

$$F(z, y_1, y_2 \ldots y_{n+1}) = 0,$$

wo $F = c^m f\left(z, y_1, y_2 \ldots y_n, \frac{y_{n+1}}{c}\right)$ ist.

Die singulären Lösungen werden die Lösungen der Gleichungen

$$F = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y_{n+1}} = 0$$

also Differentialgleichungen niederer als der n^{ten} Ordnung sein, und für diese erscheint $\frac{dy_n}{dz}$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, ebenso

$$\frac{dy_{n+1}}{dz}, \frac{dy_{n+1}}{dy_1} \ldots \frac{dy_{n+1}}{dy_n},$$

aber

$$\frac{\partial y_{n+1}}{\partial z}, \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n}$$

werden für dieselben unendlich sein.

Endlich kann man das gegebene System noch durch das folgende ersetzen:

$$\frac{dz}{dt} = G(z, x_1 \ldots x_{n+1}), \; \frac{dx_\nu}{dt} = G_\nu(z, x_1 \ldots x_{n+1})$$
$$(\nu = 1, 2 \ldots n)$$

in dem die unabhängige Variable t in den Ausdrücken für die Differentialquotienten nicht mehr vorkommt.

Die singulären Lösungen eines solchen Systems oder eines Systems, dass auf ein derartiges zu transformiren ist, und dazu gehören auch gewisse transcendente Differentialgleichungen, werden nach dem Früheren in den Beziehungen enthalten sein, durch welche die rechten Seiten sämmtlich verschwinden.

Bemerkungen zur Simpson'schen Methode der mechanischen Quadratur.

Von Dr. **Fr. Hočevar** in Innsbruck.

Die nachstehenden Bemerkungen beziehen sich auf die von Schlömilch, Chevilliet, Wiecke und Mansion aufgestellten Formeln, welche zur Beurtheilung des Grades der Genauigkeit dienen sollen, der nach der bekannten Simpson'schen Methode der mechanischen Quadratur erreichbar ist. Ferner sollen die beiden extremen Fälle, in welchen nach dieser Methode vollkommen genaue oder relativ sehr ungenaue Resultate sich ergeben, hier besprochen werden.

1. Bezeichnet man mit $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve, mit a und b die Abscissen der äussersten Ordinaten, welche mit der Curve und der Abscissenaxe die gesuchte Fläche einschliessen, und ist h die Distanz zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ordinaten, so erhält man nach Schlömilch [1] die Differenz E zwischen dem wahren Werthe der Fläche und dem mittelst der Simpson'schen Formel gefundenen Näherungswerthe, d. h. also den Fehler aus der Gleichung

$$E = \frac{1}{288} \rho h^4 [f'''(b) - f'''(a)] \tag{1}$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass $f(x)$ im Intervalle von $x = a$ bis $x = b$ nach dem Taylor'schen Satze bis zum Gliede vierter Ordnung entwickelbar sei und ausserdem, dass der vierte Differentialquotient $f^{IV}(x)$ in demselben Intervalle das Zeichen nicht ändere. Die Grösse ρ ist unbestimmt, jedoch an die Bedingung gebunden

$$-4 < \rho < +1.$$

[1] Compendium der höheren Analysis. I. Bd, §. 82.

Infolge eines leicht auffindbaren Rechnungsfehlers wird am angegebenen Orte statt dieser Bedingung die nachstehende

$$-1 < \rho < +1$$

abgeleitet, von deren Unrichtigkeit man schon durch folgenden speciellen Fall sich überzeugen kann. Für $f(x) = x^4$, $a = 0$, $b = 2$, $h = 1$ findet man

$$E = \int_0^2 f(x)\,dx - \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{32}{5} - \frac{20}{3} = -0\cdot 266\ldots,$$

während die Formel 1)

$$E = \frac{1}{6}\cdot\rho = 0\cdot 166\ldots\rho$$

liefert. Diese beiden Resultate lassen sich für $-1 < \rho < +1$ nicht in Übereinstimmung bringen.

Wenn die Function $f^{IV}(x)$ im betrachteten Intervalle das Zeichen ändert, so soll man nach Schlömilch die zu quadrirende Fläche so zerlegen, dass innerhalb eines jeden Flächenstückes das Zeichen von $f^{IV}(x)$ ungeändert bleibt. Man sucht daher die im Intervalle von $x = a$ bis $x = b$ enthaltenen reellen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots$ der Gleichung $f^{IV}(x) = 0$ und wendet auf die einzelnen Flächenstücke, welche den Intervallen von $x = a$ bis $x = x_1$, von $x = x_1$ bis $x = x_2$ etc. entsprechen, das Simpson'sche Verfahren an. Dabei können jene Wurzeln der Gleichung $f^{IV}(x) = 0$ übergangen werden, für welche kein Zeichenwechsel von $f^{IV}(x)$ eintritt.

Es ist leicht zu ersehen, dass dieser Vorgang im Allgemeinen nur dann möglich ist, wenn die zur Flächenberechnung zu benützenden äquidistanten Ordinaten der Curve nicht bereits im vorhinein gegeben sind, dass ferner die Abscissen $x_1, x_2 \ldots$ in der Regel durch irrationale Zahlenwerthe bestimmt und dadurch meistens weitläufigere Rechnungen veranlasst werden.

Dieser Schwierigkeit kann man in folgender Weise ausweichen. Man gehe von der Function

$$F(x) = f(x) + cx^4$$

aus und bestimme die Constante c so, dass der Ausdruck

$$F^{IV}(x) = f^{IV}(x) + 24c$$

für alle zwischen a und b gelegenen Werthe von x das Zeichen nicht ändert. Dann folgt aus der Gleichung 1) für die Function $F(x)$ der Fehler

$$E' = \frac{\rho h^4}{288}[f'''(b)-f'''(a)] + \frac{\rho c h^4}{12}(b-a),$$

$$-4 < \rho < +1.$$

Anderseits überzeugt man sich leicht, dass durch die Anwendung der Simpson'schen Formel auf die Function cx^4 der Fehler $-\frac{2}{15}ch^4(b-a)$ gemacht wird.

Da ferner aus

$$e_1 = \int_a^b f(x)\,dx - \Sigma a_i f(x_i) \text{ und}$$

$$e_2 = \int_a^b \varphi(x)\,dx - \Sigma a_i \varphi(x_i)$$

$$E = \int_a^b [f(x)+\varphi(x)]\,dx - \Sigma a_i [f(x_i)+\varphi(x_i)] = e_1 + e_2$$

folgt, d. h. der der Summe zweier Functionen entsprechende Fehler gleich ist der Summe der Fehler, welche den einzelnen Functionen entsprechen, so ist also der auf die ursprünglich gegebene Function $f(x)$ entfallende Fehler

$$E = \frac{\rho h^4}{288}[f'''(b)-f'''(a)] + \left(\frac{\rho}{12} + \frac{2}{15}\right)c\,h^4(b-a).$$

Ist z. B. $f(x) = \sin^2 x$, so genügt es $c = \frac{1}{3}$ zu setzen, damit $F^{IV}(x) = -8\cos 2x + 24c$ das Zeichen nicht ändere. Für $a = o$, $b = 0\cdot 1$, $h = 0\cdot 1$ findet man mittelst der letzten Fehlerformel

$$-0\cdot 00000161 < E < +0\cdot 00000596.$$

2. Die von Chevilliet[1] aufgestellte Fehlerformel

$$E = -\frac{h^4}{180}[f'''(b)-f'''(a)] \tag{2}$$

[1] Comptes rendus T. 78.

kann in einem gewissen Sinne als ein specieller Fall der älteren Formel 1) angesehen werden. Denn nimmt man in dieser jenen Werth von ρ als den wahrscheinlichsten an, welcher in der Mitte zwischen den äussersten noch möglichen Werthen liegt, d. h. setzt man $\rho = \frac{-4+1}{2} = -\frac{3}{2}$, so folgt aus 1) die Gleichung

$$E = -\frac{h^4}{192}[f'''(b) - f'''(a)],$$

welche sich von der Gleichung 2) nur wenig unterscheidet.

Bezüglich der Function $f(x)$ setzt Chevilliet voraus, dass dieselbe nach dem Taylor'schen Satze bis zu den Gliedern einer nicht angegebenen, jedoch die Zahl 4 überschreitenden Ordnung entwickelbar sei. Im Resultate lässt er, um zur Gleichung 2) zu gelangen, alle Entwicklungsglieder von einer höheren als der vierten Ordnung mit der Begründung weg, dass man ihre Summe für ein hinlänglich kleines h gegen das erste noch beibehaltene vernachlässigen kann. Abgesehen von dieser Incorrectheit in der Ableitung muss als der wesentlichste Mangel der Gleichung 2) hervorgehoben werden, dass dieselbe die Grenzen nicht angibt, zwischen welchen der zu erwartende Fehler liegen muss.

Chevilliet unterlässt es auch, seiner Formel die Bedingung beizufügen, dass $f^{IV}(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ das Vorzeichen nicht ändern dürfe, weil er durch den Verlauf der Rechnung dazu nicht genöthigt wird. Diese Bedingung ist jedoch in der Natur der Sache begründet, wenn dem Fehler die aus den Gleichungen 1) und 2) ersichtliche Form gegeben wird. Man kann eben nicht behaupten, dass eine Function, für welche $f'''(b) = f'''(a)$ ist, durch das Simpson'sche Verfahren genau integrirt wird; ebenso wenig kann man beweisen, dass in diesem Falle der Fehler von einer höheren als der vierten Ordnung bezüglich h sein müsse, sobald man, wie erforderlich, den Rest der Taylor'schen Reihe beachtet.

3. Wiecke[1] findet für den auf den Doppelstreifen zwischen x_0 und x_0+2h entfallenden Fehler

[1] Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure in Berlin, XXIII. Bd. (Nach dem Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik, 1880, XII. Band, pag. 227.)

$$E = \int_{x_0}^{x_0+2h} y\,dx - \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

die Näherungsformel

$$E = -\frac{4h}{45}\Delta^4 y_0. \qquad 3)$$

Auch hier wird die Entwickelbarkeit von $y = f(x)$ in eine nach aufsteigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe vorausgesetzt und zum Schlusse die Summe aller Glieder, welche von höherer als der fünften Ordnung sind, einfach weggelassen.

Gegen die Formel 3) lässt sich ebenfalls der gewichtige Einwand erheben, dass durch dieselbe die Fehlergrenzen nicht angegeben werden. Ferner ist zu bemerken, dass $\Delta^4 y_0$ nicht etwa die vierte Differenz der zur Flächenberechnung benützten Ordinaten

$$y_0 = f(x_0), \; y_1 = f(x_0 + h), \; y_2 = f(x_0 + 2h), \ldots$$

bedeutet, sondern aus den Ordinaten

$$f(x_0), \; f(x_0 + \frac{h}{2}), \; f(x_0 + h), \; f(x_0 + \frac{3h}{2}) \ldots$$

gebildet wird. Man benöthigt also zur Berechnung des ganzen auf das Intervall von a bis b entfallenden Fehlers ausser den $2n+1$ gegebenen Functionswerthen $y_0, y_1, \ldots y_{2n}$ noch $2n$ andere. Aus diesem Grunde ist die Formel 3) auch für die Praxis nur von geringer Bedeutung.

Der zuletzt angeführte Übelstand lässt sich wohl in einfacher Weise beseitigen. Man findet nämlich durch Betrachtungen, welche den zur Ableitung der Formel 3) angestellten ganz analog sind, für den ganzen auf das Intervall von a bis b entfallenden Fehler die Gleichung

$$E = -\frac{h}{90}(2\Delta^4 y_0 + \Delta^4 y_3 + \Delta^4 y_5 + \ldots + \Delta^4 y_{2n-7} + 2\Delta^4 y_{2n-4}).$$

worin die vierten Differenzen aus den gegebenen Ordinaten

$$y_0, \; y_1, \; y_2 \ldots y_{2n}$$

gebildet sind. Doch lässt auch diese Gleichung die beiden ersten gegen die Formel 3) erhobenen Einwände zu und ist überdies, nach einigen leicht controlirbaren speciellen Fällen zu schliessen, häufig ungenauer als jene Formel, was man durch die geringere Anzahl der benützten Ordinaten erklären kann.

4. Um zu einer neuen von Mansion[1] angegebenen Formel zu gelangen, setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{2}y_0 + y_2 + y_4 + \dots \qquad + y_{2n-2} + \frac{1}{2}y_{2n} = A,$$

$$y_1 + y_3 + \dots \qquad + y_{2n-1} = B$$

und nehmen an, dass die betrachtete Curve im Intervalle von a bis b den Sinn der Concavität nicht ändert. Es bedeutet dann $T = h(A + B)$ die Summe der Flächen aller Trapeze mit der Basis h, welche man erhält, indem man die Endpunkte der Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \dots$ durch gerade Linien verbindet. Ferner bedeutet $U = 2hB$ die Summe der Flächen aller Trapeze mit der Basis $2h$, zu denen man gelangt, indem man in den Endpunkten der Ordinaten $y_1, y_3, \dots y_{2n-1}$ Tangenten an die Curve zieht.

Um die Formel von Simpson zu erhalten, nimmt man das arithmetische Mittel von T, T, U für die gesuchte Fläche F, also

$$F = \frac{1}{3}(2T + U).$$

Daraus erhält Mansion die Fehlerformel

$$E = \frac{2h\rho}{3}(B - A), \quad -1 < \rho < +1 \dots \tag{4}$$

Bei genauerer Betrachtung zeigt es sich, dass man die Grenzen, zwischen welchen der Fehler nach dieser Formel enthalten ist, etwas mehr zusammenrücken kann.

Da nämlich die betrachtete Curve im Intervall von a bis b den Sinn der Concavität nicht ändert, so ist

$$T < F < U \text{ oder } T > F > U.$$

[1] Ann. de la société scientifique de Bruxelles, T. V. (Nach dem Jahrbuch der Fortschritte der Math., 1881, XIII. Bd., pag. 224).

Im ersten Falle findet man

$$F = T + \vartheta(U - T),$$
$$F = U - (1 - \vartheta)(U - T), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man weiter

$$F = \frac{mT + nU}{m+n} + \varepsilon(U - T), \tag{5}$$
$$-\frac{n}{m+n} < \varepsilon < +\frac{m}{m+n}.$$

Zu demselben Resultate gelangt man auch im zweiten Falle. Für $m = 2$, $n = 1$ ist also

$$F = \frac{1}{3}(2T + U) + \varepsilon(U - T), \quad -\frac{1}{3} < \varepsilon < +\frac{2}{3},$$

oder, wenn

$$T = h(A + B), \quad U = 2hB, \quad \varepsilon = \frac{2\rho}{3}$$

gesetzt wird,

$$F = \frac{2h}{3}(A + 2B) + \frac{2h\rho}{3}(B - A), \quad -\frac{1}{2} < \rho < +1.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit der Gleichung 4), so sieht man, dass sich das Intervall, innerhalb dessen der Fehler zu suchen ist, um den vierten Theil verkleinert hat.

Ändert die betrachtete Curve im Intervalle von a bis b den Sinn der Concavität, so ist es oft von Vortheil, sich eines ähnlichen Kunstgriffes zu bedienen, wie bei der Benützung der Schlömilch'schen Fehlerformel, wenn $f^{IV}(x)$ sein Vorzeichen wechselt. Ist nämlich die Function $f(x)$ analytisch gegeben und besitzt dieselbe an allen Stellen des Intervalls von a bis b einen bestimmten und endlichen zweiten Differentialquotient, so wähle man in der Gleichung

$$F(x) = f(x) + cx^2$$

die Constante c so, dass

$$F''(x) = f''(x) + 2c$$

im betrachteten Intervalle keinen Zeichenwechsel erleidet.

Dann ist die von Mansion gemachte Voraussetzung erfüllt und wir finden mit Benützung der bisherigen Zeichen

$$E = \int_a^b F(x)\,dx - \Sigma a_i F(x_i) = \int_a^b f(x)\,dx - \Sigma a_i f(x_i) +$$
$$+ c\int_a^b x^2\,dx - c\Sigma a_i x_i^2 = E,$$

wo sich der Fehler E nur auf die Function $f(x)$ bezieht, da die parabolischen Curven von der Gleichungsform $y = cx^2$ nach dem Simpson'schen Verfahren genau integrirt werden. Also ist

$$E = \frac{2h\rho}{3}(B' - A') = \frac{2h\rho}{3}(B - A) - \frac{ch^2\rho}{3}(b - a),$$
$$-\frac{1}{2} < \rho < +1,$$

wovon man sich durch wirkliche Ausrechnung des auf die Function cx^2 entfallenden Betrages von $B' - A'$ überzeugt.

Es ist noch zu bemerken, dass sich zwar die Fehlerformel von Mansion durch Einfachheit auszeichnet und die zu integrirende Function nur geringen Einschränkungen unterwirft, dass sie jedoch die Methode von Simpson auf die gleiche Stufe der Genauigkeit stellt, wie die Quadratur mittelst der Grössen T und U, oder, wie man zu sagen pflegt, mittelst der eingeschriebenen oder umschriebenen Trapeze. Denn in jedem dieser drei Fälle, sowie überhaupt im allgemeinen der Gleichung 5) entsprechenden Falle ist $U - T$ die Differenz der äussersten Werthe, welche der Fehler annehmen kann.

5. Die Frage nach solchen Curven, welche mit den äussersten Ordinaten und der Abscissenaxe gleich grosse Flächen einschliessen, wie die nach dem Simpson'schen Verfahren für jene Curven substituirten Parabelbogen, oder, kürzer ausgedrückt, die Frage nach solchen Functionen, welche sich durch die Simpson'sche Formel genau integriren lassen, führt zu einer complicirten Functionalgleichung, deren allgemeine Discussion grosse Schwierigkeiten bereiten dürfte. Hier soll nur ein einfacher Fall besprochen werden, welcher sich hie und da von selbst aufdrängt.

Es sei $f(x)$ eine integrirbare Function, welche der Bedingung

$$f(c+x) = -f(c-x) \tag{6}$$

für alle Werthe von x im Intervalle von $c-\alpha$ bis $c+\alpha$, auch für $x = 0$, entspricht. Dann ist bekanntlich

$$\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(x)\,dx = 0.$$

Nun theile man das eben bezeichnete Intervall durch Einschaltung der Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$ derart in $2n$ Theile, dass die Relationen

$$x_1 + x_{2n-1} = x_2 + x_{2n-2} = \ldots = x_{n-1} + x_{n+1} = 2x_n = 2c \,.. \tag{7}$$

erfüllt werden oder, geometrisch aufgefasst, dass die Endpunkte der Abscissen x_1 und x_{2n-1}, x_2 und x_{2n-2} u. s. f. symmetrisch in Bezug auf den Endpunkt der Abscisse $c = x_n$ liegen. Dann ist

$$f(x_{2n-r}) = f(c+c-x_r) = -f(c-c+x_r) = -f(x_r),$$

also auch

$$\sum_{r=0}^{r=n} a_r[f(x_r) + f(x_{2n-r})] = 0,$$

worin mit x_0, respective x_{2n} die Grössen $c-\alpha$, respective $c+\alpha$ bezeichnet werden. Daraus folgt

$$\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(x)\,dx = \sum_{r=0}^{r=n} a_r[f(x_r) + f(x_{2n-r})],$$

d. h. die Function $f(x)$ wird zwischen den angenommenen Grenzen durch alle Summenausdrücke von obiger Form genau integrirt, wenn die Bedingungen 6) und 7) erfüllt sind. Nun lassen sich viele Formeln für die mechanische Quadratur auf die Form der obigen Summe bringen, so namentlich die Formeln für die ein- und die umgeschriebenen Trapeze, die Formeln von Cotes,[1] Gauss,[1] Simpson, Poncelet,[2] Parmentier[2] etc. — Auch

---

[1] Gauss: Methodus nova integralium valores per appr. etc. 1814.

[2] Nouvelles annales de Mathém. 1855, pag. 370; 1876, pag. 241.

bestehen für alle genannten Methoden die Relationen 7). Damit sich also eine Function $f(x)$ nach jenen Methoden zwischen beliebigen Grenzen a und b genau integriren lasse, genügt es anzunehmen, dass die Gleichung 6) für

$$a \leqq x \leqq b \text{ und } c = \frac{a+b}{2} \qquad 8)$$

bestehe.

Nun beachten wir weiter, dass aus den Gleichungen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Sigma a_r f(x_r),$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Sigma a_r \varphi(x_r)$$

die nachstehende folgt

$$\int^b [Af(x) + B\varphi(x)]dx = \Sigma a_r [Af(x_r) + B\varphi(x_r)],$$

d. h. werden die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwischen gleichen Grenzen durch dieselbe Summenformel genau integrirt, so gilt dasselbe von der Function $Af(x) + B\varphi(x)$.

Daraus folgt unter anderem:

Die Existenz der Gleichung 6) unter den Bedingungen 8) reicht hin, dass sich die Function

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + f(x)$$

zwischen den beliebigen Grenzen a und b nach dem Simpson'schen Verfahren genau integriren lässt.

Da z. B.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x,\ \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

und

$$\cos 2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\cos 2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

ist, so werden $\cos^2 x$ und $\sin^2 x$ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ durch die Formel von Simpson (aber auch nach andern vorhin bezeichneten Methoden) genau integrirt.

Zum gleichen Resultat, jedoch nur in Bezug auf die Formel von Simpson, gelangt man bei der Function

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3,$$

da man dieselbe bei beliebigen c auf die Form

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + A_3 (x-c)^3$$

bringen kann. Man hat zu diesem Zwecke

$$a_0 = A_0 + A_3 c^3$$
$$a_1 = A_1 - 3A_3 c^2$$
$$a_2 = A_2 + 3A_3 c$$

zu setzen, was stets möglich ist. Die Function $A_3(x-c)^3$ genügt nun der Bedingung 6), daher schliessen wir mit Rücksicht auf den oben abgeleiteten Satz und da $c = \frac{a+b}{2}$ gesetzt werden kann, dass sich auch die ganzen Functionen dritten Grades nach dem Simpson'schen Verfahren genau integriren lassen oder dass bei beliebigen ganzen Functionen oder Potenzreihen erst die Glieder vom vierten oder einem höheren Grade einen Fehler involviren.

Wir wollen die oben angestellte Betrachtung verallgemeinern und setzen daher zur Abkürzung

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{2n+1} x^{2n+1} = F(x),$$
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n} = \varphi(x)$$
$$A_{2n+1} (x-c)^{2n+1} = f(x).$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass es stets möglich ist' die Coëfficienten a in $\varphi(x)$ so zu bestimmen, dass für ein beliebiges c und für alle Werthe von x die Identität

$$F(x) = \varphi(x) + f(x)$$

besteht. Integrirt man beiderseits zwischen zwei beliebigen Grenzen a und b und setzt das vorhin unbestimmt gelassene $c = \frac{a+b}{2}$, so erhält man

$$\int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx \tag{8}$$

weil

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_{2n+1}\cdot\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^{2n+1}\,.\,dx = 0$$

ist. Nun zerlege man das Intervall von a bis b in $2n$ Theile durch Einschaltung der Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$, welche den Bedingungen 7) entsprechend gewählt werden. Dann ist für $0 \leqq r \leqq n$

$$f(x_r) + f(x_{2n-r}) = A_{2n+1}\cdot[(x_r - c)^{2n+1} + (x_{2n-r} - c)^{2n+1}] = 0,$$

somit auch

$$\sum_{r=0}^{r=n} a_r[f(x_r) + f(x_{2n-r})] = 0,$$

$$\sum_{r=0}^{r=n} a_r[F(x_r) + F(x_{2n-r})] = \sum_{r=0}^{r=n} a_r[\varphi(x_r) + \varphi(x_{2n-r})] \qquad 9)$$

Besteht also die Gleichung

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{r=0}^{r=n} a_r[\varphi(x_r) + \varphi(x_{2n-r})],$$

so folgt aus den Gleichungen 8) und 9)

$$\int_a^b F(x)\,dx = \sum_{r=0}^{r=n} a_r[F(x_r) + F(x_{2n-r})].$$

Daraus erklärt sich unter andern auf sehr einfache Weise die von Gauss a. a. O. bewiesene Thatsache, dass durch das Verfahren von Cotes, für welches alle hier gemachten Voraussetzungen erfüllt sind, ganze Functionen vom $(2n+1)^{\text{ten}}$ Grade genau integrirt werden, wenn das Integrationsintervall in $2n$ Theile zerlegt wird.

6. Parmentier findet a. a. O. durch Untersuchung mehrerer specieller Fälle, dass die Simpson'sche Formel im Allgemeinen bedeutend genauere Resultate liefert, als andere verwandte Formeln (z. B. jene von Euler, Poncelet und Parmentier selbst), während sich dieses Verhältniss manchmal in auffallender Weise zu Ungunsten der Simpson'schen Formel verändert. — Eine

Erklärung für diese Erscheinung wird a. a.O. nicht geliefert, daher beabsichtige ich im Folgenden auf einige Punkte aufmerksam zu machen, welche in diesem Falle zu beachten sind und überhaupt bei der Benützung der Simpson'schen Methode nicht übersehen werden sollten.

Zunächst drängt sich bei der Betrachtung der von Parmentier gefundenen numerischen Resultate die Bemerkung auf, dass die Methode von Simpson an jenen Stellen sehr ungenau wird, an welchen die Begrenzungscurve der zu quadrirenden Fläche zur Abscissenaxe senkrecht steht. Werden z. B. die den Curven $y = 3\sqrt{x}$ und $y = \sqrt{20x+x^2}$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 10$ entsprechenden Flächen nach der Methode von Simpson durch Zerlegung in je zehn Flächenstreifen berechnet, so erhält man entsprechend den fünf Doppelstreifen die folgenden Fehler

Fläche	$y = 3\sqrt{x}$	$y = \sqrt{20x+x^2}$
von $x = 0$ bis $x = 2$	$+0\cdot24264$	$+0\cdot35985$
„ $x = 2$ „ $x = 4$	$+0\cdot00073$	$+0\cdot00104$
„ $x = 4$ „ $x = 6$	$+0\cdot00012$	$+0\cdot00017$
„ $x = 6$ „ $x = 8$	$+0\cdot00005$	$+0\cdot00004$
„ $x = 8$ „ $x = 10$	$+0\cdot00001$	$+0\cdot00002$

Man sieht, dass der weitaus grösste Theil des Fehlers auf jenen Flächenstreifen entfällt, in welchem die Begrenzungscurven senkrecht zur Abscissenaxe sind oder die ersten Differentialquotienten unendlich gross werden. Zu demselben Resultate gelangt man auch in allen anderen von Parmentier betrachteten speciellen Fällen, welche zu Ungunsten der Simpson'schen Methode sprechen.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass die Fehlerformeln von Schlömilch, Chevilliet und Wiecke, aus welchen eben die Superiorität der Simpson'schen Methode gegenüber anderen verwandten Methoden ersichtlich ist, in den oben betrachteten Ausnahmsfällen nicht angewendet werden können, weil die Entwicklung von $y = f(x)$ nach dem Taylor'schen Satze oder in der Form einer Potenzreihe an den kritischen Stellen nicht möglich ist, während die Mansion'sche Fehler-

formel die Schärfe der Simpson'schen Methode überhaupt nicht zum Ausdrucke bringen kann.

Man kann versuchen die zu integrirende Curve an der betrachteten Stelle durch eine parabolische Curve mit der Gleichung

$$y = \alpha + \beta x^{\lambda} + \gamma x^{\lambda+1}, \quad o < \lambda < 1,$$

zu ersetzen, wenn nämlich $f'(o)$ unendlich gross wird. Bestimmt man die Constanten α, β, γ in ähnlicher Weise, wie bei der Ableitung der Simpson'schen Formel, so erhält man die Gleichung

$$\int_0^{2h} y dx = 2hy_0 + \frac{2h}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \cdot [2^{\lambda+1}(y_1 - y_0) + \lambda(y_2 - y_0)] + E,$$

worin

$$y_0 = \alpha, \; y_1 = \alpha + \beta h^{\lambda} + \gamma h^{\lambda+1}, \; y_2 = \alpha + \beta . (2h)^{\lambda} + \gamma (2h)^{\lambda+1}$$

ist und E den Fehler bedeutet,

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ lautet diese Gleichung

$$\int_0^{2h} y dx = 2hy_0 + \frac{4h}{15} \cdot [4\sqrt{2}(y_1 - y_0) + (y_2 - y_0)] + E. \qquad 10)$$

und liefert in den oben betrachteten speciellen Fällen für den ersten Doppelstreifen, d. i. für die Fläche von $x = 0$ bis $x = 2$ die Fehler $E = 0$, respective $E = -0 \cdot 00020$.

Man täuscht sich jedoch, wenn man nur bei Functionen, von denen bereits der erste Differentialquotient an einer Stelle unendlich gross wird, eine auffallende Unverlässlichkeit der Simpson'schen Formel erwartet. Man findet z. B. beim Quadriren der von der Curve $y = x\sqrt{x}$ begrenzten Fläche durch Eintheilung des Intervalls von $x = 0$ bis $x = 10$ in zehn gleiche Theile nach dem Verfahren von Simpson die nachstehenden Fehler:

Von $x = 0$ bis $x = 2$	E_1	$= -0 \cdot 01340$
„ $x = 2$ „ $x = 4$	E_2	$= -0 \cdot 00042$
„ $x = 4$ „ $x = 6$	E_3	$= -0 \cdot 00012$
„ $x = 6$ „ $x = 8$	E_4	$= -0 \cdot 00005$
„ $x = 8$ „ $x = 10$	E_5	$= -0 \cdot 00003.$

Daraus folgt, dass auch bei endlichem ersten Differentialquotienten das Unendlichwerden des zweiten die hier besprochene ungünstige Einwirkung auf die Simpson'sche Methode haben kann.

Die Gleichung 10) liefert im vorliegenden Falle $E = 0$, was zu erwarten war.

Ein genaueres Eingehen auf die Fragen, welche sich aus den obigen Beobachtungen ergeben, behalte ich mir auf einen anderen Zeitpunkt vor.

Über Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitte.

Von **Karl Bobek,**

Docent für Mathematik an der k. k. deutschen technischen Hochschule zu Prag.

Erste Mittheilung.

(Mit 1 Tafel und 1 Holzschnitte.)

Wenngleich die fundamentalen Abhandlungen der Herren Kummer[1] und Clebsch[2] über die Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt eine ausführliche Theorie derselben enthalten, und insbesondere in der letzteren auf die Gruppirung der Geraden und der Raumcurven der Fläche näher eingegangen wird, und auch später erschienene Arbeiten über diesen Gegenstand verschiedene Eigenschaften der Fläche darlegen; so ist mir ausser einer kurzen Bemerkung des Herrn Professor Küpper[3] nichts bekannt, was auf die Construction dieser Fläche hinzielte. Ich habe nun im Folgenden versucht, mit Rücksicht auf die Construction der Fläche ihre Erzeugung, die Darstellung der auf ihr liegenden Kegelschnitte und Geraden, der ihr umschriebenen fünf Kegel zweiter Ordnung, zu behandeln.

Durch specielle Annahme der bestimmenden Elemente der Φ^4 gelingt es dann sehr einfach die Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt und Doppelpunkten zu erhalten, und das Verhalten dieser Flächen zu der allgemeinen zu übersehen.

---

[1] Kummer, Über diejenigen Flächen 4. Ordnung auf denen Schaaren von Kegelschnitten existiren. Crelle, Bd. 64, pag. 66 u. f. f.

[2] Clebsch, Über die Flächen 4. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitte Crelle, Bd. 69, pag. 142.

[3] Küpper, Beiträge zur Theorie der Curven 3. und 4. Ordnung. Abhandlungen der kgl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften 5. Bd., VI. Folge.

Hilfssätze.

1. Sind (B^2) und $(\mathfrak{B}^2)$ zwei Flächenbüschel zweiter Ordnung, deren Basis aus einem Kegelschnitte a^2 in der Ebene A und je aus einem zweiten Kegelschnitte b^2 in der Ebene B respective $\mathfrak{b}^2$ in der Ebene $\mathfrak{B}$ besteht, so schneiden sich zwei Flächen der beiden Büschel in einem Kegelschnitte d^2, dessen Ebene durch einen festen Punkt σ geht, σ liegt auf der Schnittlinie $B\mathfrak{B}$.

Sei nämlich C^2 eine feste Fläche des Büschels (B^2), welche die Ebene $\mathfrak{B}$ in einem Kegelschnitte c^2 trifft. Denken wir uns nun alle Flächen des Büschels $(\mathfrak{B}^2)$ mit der festen Fläche C^2 geschnitten, so müssen die Ebenen aller dieser Kegelschnitte durch eine feste Gerade $\mathfrak{t}$ in der Ebene $\mathfrak{B}$ gehen, diejenige nämlich, welche die Schnittpunkte der Kegelschnitte c^2 und $\mathfrak{b}^2$ (die nicht auch a^2 liegen) verbindet; denn diese Punkte liegen immer auf dem Schnitte der beiden Flächen. Nehmen wir eine feste Fläche $\mathfrak{C}^2$ des Büschels $(\mathfrak{B}^2)$, welche den Kegelschnitt b^2 ausser auf a^2 noch in zwei Punkten trifft, deren Verbindungsgerade t sei. Denken wie uns nun die Flächen des Büschels (B^2) alle mit $\mathfrak{C}^2$ geschnitten, so müssen die Ebenen dieser Schnitte durch t gehen. Da unter den Flächen von (B^2) auch C^2 vorkömmt, so geht die Ebene des Schnittes von C^2 mit $\mathfrak{C}^2$ durch t und $\mathfrak{t}$, d. h. die beiden Geraden schneiden einander in σ auf der Schnittlinie der Ebenen $\mathfrak{B}$ und B. Nimmt man nun statt $\mathfrak{C}^2$ irgend eine (feste) Fläche $\mathfrak{C}_i^2$ des Büschels $(\mathfrak{B}^2)$, welcher die Gerade t_i in B entspricht, so muss auch t_i die Gerade $\mathfrak{t}$ schneiden, daher durch σ gehen. Hieraus folgt die obige Behauptung.

Sind B^2, C^2 zwei Flächen des Büschels (B^2) und $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{C}^2$ zwei Flächen von $(\mathfrak{B}^2)$, so bestimmen die Flächen $(B^2\,\mathfrak{B}^2)$ $(C^2\,\mathfrak{C}^2)$ zwei Büschel, welche ausser den Kegelschnitt a^2 noch die beiden Kegelschnitte d^2 respective $\mathfrak{d}^2$ zur Basis besitzen, in denen sich B^2 $\mathfrak{B}^2$ respective $C^2 . \mathfrak{C}^2$ schneiden. Die einzelnen Flächen dieser beiden Büschel schneiden einander in Kegelschnitten, deren Ebenen durch σ gehen. Denn die Ebenen von d^2 und $\mathfrak{d}^2$ sowie b^2 und $\mathfrak{b}^2$ bestimmen σ.

Je zwei Flächen des Gebüsches, welches durch die beiden Büschel (B^2) und $(\mathfrak{B}^2)$ bestimmt ist, schneiden einander daher in einem Kegelschnitte, dessen Ebene durch den festen Punkt σ geht.

2. Die Flächen des Büchsels (B^2) treffen den Kegelschnitt $\mathfrak{b}^2$ in der Ebene $\mathfrak{B}$ in Punktepaaren einer Involution, deren Pol σ ist. Die durch σ gehenden Strahlen $\mathfrak{t}$, welche die Punktepaare projiciren, sind projectivisch zu der Involution und daher auch projectivisch zu dem dieselbe ausschneidenden Flächenbüschel (B^2).

Ähnlich tritt in B eine zu $(\mathfrak{B}^2)$ projectivischer Strahlenbüschel σ (t) auf. Hieraus ergibt sich, dass in jeder Ebene C durch σ ein Kegelschnitt liegt, in dem sich zwei Flächen der Büschel schneiden; denn diese Ebene trifft B in t und $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{t}$. Es entspricht nun dem Strahle t in $(\mathfrak{B}^2)$ die Fläche $\mathfrak{B}_1^2$ und dem Strahle $\mathfrak{t}$ in (B^2) die Fläche B_1^2 dann treffen einander $\mathfrak{B}_1^2$ und B_1^2 in einem Kegelschnitte, dessen Ebene nothwendig C sein muss.

3. Die Flächen der beiden Büschel (B^2) und $(\mathfrak{B}^2)$ und daher auch des durch sie bestimmten Gebüsches treffen die Strahlen durch σ in Punktepaaren derselben Involution.

Denn sei l ein durch σ gehender Strahl und $\mathfrak{E}$ eine beliebige durch l gehende Ebene, so enthält dieselbe einen Kegelschnitt d_1^2, in dem sich zwei Flächen der Büschel schneiden und es trifft daher l diese zwei Flächen in demselben Punktepaar. Dreht man $\mathfrak{E}$ um l, so beschreibt dieses Punktepaar die Involution, in der l von (B^2) sowohl als von $(\mathfrak{B}^2)$ getroffen wird. Da zwei Punktepaare die Involution bestimmen, so folgt, dass auch der Büschel $(B^2\ \mathfrak{B}^2)$ l in derselben Involution trifft.

In den Doppelpunkten dieser Involution wird l von allen Flächen des Gebüsches berührt.

4. Der Ort der Doppelpunkte der erwähnten Involutionen auf den Strahlen durch σ ist eine Fläche zweiter Ordnung Σ^2, welche durch a^2 geht, und deren Pol von A der Punkt σ ist.

Man erhält den Ort der Doppelpunkte, wenn man an alle Flächen eines Büschels, z. B. des Büschels (B^2) Tangenten von σ zieht. Nun bilden die Polarebenen von σ in Bezug auf (B^2) einen Ebenenbüschel (s), dessen Axe s in B liegt. Der Büsch e

(B^2) ist projectivisch zum Büschel (s), wenn man jeder Fläche ihre Polarebene in Bezug auf σ zuweist. Der in die Ebenen (B, A) zerfallenden Fläche entspricht B.

Die projectivischen Büschel (B^2) und (s) erzeugen eine Fläche dritten Grades, welche in B und eine Fläche zweiten Grades Σ^2 zerfallen muss und letztere muss durch a^2 gehen, da B es nicht thut. Σ^2 ist der Ort der Doppelpunkte. Da nun dem Punkte σ in der Involution der Schnittpunkt des Strahles mit A entspricht, so sind die Punkte von Σ^2 durch σ und A harmonisch getrennt und σ ist der Pol von A für Σ^2.

5. Eine Fläche des Gebüsches ist bestimmt, sobald der Pol $\mathfrak{p}$ derselben für die Ebene A gegeben ist. Denn die Pole von A für (B^2) und $(\mathfrak{B}^2)$ bilden zwei Punktreihen g und g_1, welche zu den Büscheln projectivisch sind, wenn jeder Fläche ihr Pol zugewiesen wird. Durch $\mathfrak{p}$ geht eine gerade g', welche g und g_1 in den Punkten $\mathfrak{p}_1$ $\mathfrak{p}'_1$ treffen mag. Diesen Punkten entsprechen die Flächen B_1^2 und $\mathfrak{B}_1^2$ der beiden Büschel. Nun liegen die Pole von A für die Flächen des Büschels $(B_1^2\ \mathfrak{B}_1^2)$ auf $\overline{\mathfrak{p}_1\ \mathfrak{p}'_1} = g'$ und es ist in diesem Büschel eine bestimmte Fläche vorhanden, deren Pol $\mathfrak{p}$ ist.

6. Jede Fläche B^2 des Gebüsches trifft Σ^2 ausser in a^2 noch in einem Kegelschnitte k^2, dessen Ebene $\mathfrak{E}$ sei.

Dann ist σ der Pol von $\mathfrak{E}$ für B^2 und $\mathfrak{p}$ der Pol von $\mathfrak{E}$ für Σ^2. ($\mathfrak{p}$ ist der Pol von A für $\mathfrak{B}^2$.)

Da die Geraden, welche von σ zu den Punkten von k^2 gehen, B^2 berühren müssen, so ist σ der Pol von $\mathfrak{E}$ für B^2. Betrachten wir nun den Büschel von Flächen zweiter Ordnung, der durch B^2 und Σ^2 bestimmt wird, dessen Basis also aus k^2 und a^2 besteht. Die Pole der Flächen dieses Büschels für A und $\mathfrak{E}$ liegen auf $\overline{\sigma\,\mathfrak{p}}$ und bilden zwei einander projectivische Punktreihen, wenn die Pole derselben Fläche einander zugewiesen werden. Die Punktreihen liegen aber involutorisch. Denn fällt der Pol $\mathfrak{a}$ von A in diese Ebene selbst hinein, so besteht die Fläche des Büschels aus A und $\mathfrak{E}$ und es fällt der Pol $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{E}$. Fällt aber $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{E}$ für eine Fläche B_1^2 des Büschels, so muss der Pol $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{E}$ für diese Fläche in A liegen. Die Schnittpunkte von $\overline{\sigma\,\mathfrak{p}}$ mit A und $\mathfrak{E}$ entsprechen einander involutorisch und daher thuen dies alle Polpaare. Nun ist σ der Pol von $\mathfrak{E}$ für B^2 und $\mathfrak{p}$ der Pol von A für B^2, also sind

σ und $\mathfrak{p}$ ein Paar der Involution, da nun σ der Pol von A für Σ^2 ist, so muss $\mathfrak{p}$ der Pol von $\mathfrak{E}$ für Σ^2 sein.

Ist also $\mathfrak{p}$ gegeben, hat so man nur die Polarebene von $\mathfrak{p}$ für Σ^2 zu suchen, welche den den Kegelschnitt k^2 enthält, dann muss die Fläche B^2, welche durch a^2 und k^2 geht und welche $\mathfrak{p}$ zum Pole von A hat auch σ zum Pole von $\mathfrak{E}$ haben und dem Gebüsche angehören.

Fällt $\mathfrak{p}$ auf Σ^2, so ist $\mathfrak{E}$ Tangentialebene von Σ^2 und da σ der Pol von $\mathfrak{E}$ für B^2 ist, welche die beiden in $\mathfrak{E}$ liegenden Geraden von Σ^2 enthält, so muss B^2 ein Kegel mit den Spitzen in $\mathfrak{p}$ sein. Ist B^2 ein Kegel, so muss seine Spitze auf Σ^2 liegen. Σ^2 ist der Ort der Spitzen der Kegel des Gebüsches.

Projectivische Erzeugung der Fläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitte.

Bezieht man zwei Flächenbüschel zweiter Ordnung (B^2) und ($\mathfrak{B}^2$), deren Basis aus den Kegelschnittpaaren (a^2 b^2) und (a^2 $\mathfrak{b}^2$) in den Ebenen A, B, $\mathfrak{B}$ besteht, projectivisch auf einander, so erzeugen dieselben eine Fläche vierter Ordnung Φ^4, welche a^2 zum Doppelkegelschnitte besitzt.

Je zwei entsprechende Flächen C_i^2 und $\mathfrak{C}_i^2$ der beiden Büschel (B^2) und ($\mathfrak{B}^2$) schneiden einander in einem auf Φ^4 gelegenen Kegelschnitte c_i^2, dessen Ebene $\mathfrak{E}_i$ durch σ geht, und welche die Ebenen B respective $\mathfrak{B}$ in t_i und $\mathfrak{t}_i$ trifft, die eben nach (2) den Flächen $\mathfrak{C}^2{}_i$ und $C^2{}_i$ projectivisch zugeordnet sind. Durch die projectivische Beziehung der Büschel (B^2) und ($\mathfrak{B}^2$) werden auch die Strahlenbüschel σ ($\mathfrak{t}_i$) und σ (t_i) projectivisch auf einander bezogen, und die entsprechende Strahlen verbindenden Ebenen $\mathfrak{E}_i$ umhüllen also einen Kegel zweiter Ordnung $\mathfrak{K}^2$ mit der Spitze σ. $\mathfrak{K}^2$ wird von B und $\mathfrak{B}$ berührt. Wir können daher auch Φ^4 erzeugen, wenn wir die Tangentialebenen von $\mathfrak{K}^2$ projectivisch auf die Flächen des einen Büschels z. B. (B^2) beziehen, so zwar dass der Tangentialebene B die Fläche (B, A) des Büschels entspricht.

In jeder Tangentialebene $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{K}^2$ liegt ausser c^2 noch ein zweiter Kegelschnitt d^2 von Φ^4. Denn $\mathfrak{E}$ wird von den Tangentialebenen des $\mathfrak{K}^2$ in einem Strahlenbüschel (σ) und von

den Flächen des Büschels (B^2) in einem zu (σ) projectivischen Kegelschnittbüschel getroffen.

Die Basispunkte des Kegelschnittbüschels liegen auf c^2 und zwar in den Schnittpunkten von c^2 mit A und B, die letzteren zwei also mit σ auf einer Geraden. Da nun der Fläche $(A\,B)$ die Tangentialebene B von $\mathfrak{K}^2$ entspricht, so entspricht dem in zwei Gerade zerfallenden Kegelschnitte des Büschels in $\mathfrak{E}$ der Strahl von σ, welcher mit einem Theil des Kegelschnittes zusammenfällt. Die projectivischen Büschel in $\mathfrak{E}$ erzeugen daher einen Kegelschnitt d^2, der auf Φ^4 liegt und eine weiter nicht in Betracht kommende Gerade.

Die Strahlen durch σ bestimmen auf d^2 eine quadratische Involution; durch jedes Punktepaar geht ein Kegelschnitt c_i^2 von Φ^4, denn durch ein solches Punktepaar geht nur eine Tangentialebene $\mathfrak{E}_i$ von $\mathfrak{K}^2$, welcher die Flächen B_i^2 und $\mathfrak{B}_i^2$ entsprechen, die sich in dem Kegelschnitte c_i^2 schneiden müssen. Derselbe trifft nach früherem d^2 in einem Punktepaare.

Seien $\mathfrak{D}$ und D zwei beliebige Tangentialebenen von $\mathfrak{K}^2$ und $\mathfrak{d}^2$ respective d^2 die beiden Kegelschnitte, welche in denselben ausser $\mathfrak{c}^2$ und c^2 liegen, letztere seien die durch die entsprechenden Flächen von (B^2) und $(\mathfrak{B}^2)$ erhaltenen. Nimmt man nun $(a^2\,d^2)$ und $(\mathfrak{a}^2\,\mathfrak{d}^2)$ zur Basis der Büschel von Flächen zweiter Ordnung (D^2) und $(\mathfrak{D}^2)$, so kann man mittelst dieser beiden Büschel durch projectivische Beziehung auch Φ^4 erzeugen. Denn sei c_i^2 ein beliebiger Kegelschnitt von Φ^4 in dem sich die beiden Flächen C_i^2 und $\mathfrak{C}_i^2$ der Büschel (B^2) und $(\mathfrak{B}^2)$ schneiden, dann trifft c_i^2 sowohl d^2 als $\mathfrak{d}^2$ in einem Punktepaare und es geht daher durch c_i^2 sowohl eine Fläche D_i^2 des Büschels (D^2) als auch eine Fläche $\mathfrak{D}_i^2$ des Büschels $(\mathfrak{D}^2)$. Lässt man nun je zwei Flächen D_i^2 und $\mathfrak{D}_i^2$ einander entsprechen, welche denselben Kegelschnitt c_i^2 von Φ^4 enthalten, so sind die beiden Büschel (D^2) und $(\mathfrak{D}^2)$ auf einander projectivisch bezogen. Denn (D^2) projicirt die Punktepaare einer Involution auf $\mathfrak{d}^2$ und $(\mathfrak{D}^2)$, die Punktepaare einer Involution auf d^2 und je zwei entsprechende Punktepaare werden durch dieselbe Tangentialebene von $\mathfrak{K}^2$ ausgeschnitten. D und $\mathfrak{D}$ sind aber auch Tangentialebenen von $\mathfrak{K}^2$ und werden daher von den übrigen in zu einander projectivischen Strahlenbüscheln getroffen, die auf d^2 respective $\mathfrak{d}^2$ die Punktepaare der Involution bestimmen.

Wir ersehen hieraus, dass die Tangentialebenen B und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{K}^2$ gegenüber den anderen Tangentialebenen keine ausgezeichnete Rolle spielen. Wir suchen nun die Erzeugenden von $\mathfrak{K}^2$ zu bestimmen. Die Ebene B wird von Φ^4 ausser in dem Kegelschnitte b^2 der Basis von (B^2) noch in einem Kegelschnitte c^2 getroffen, welcher als Schnitt der Fläche $\mathfrak{C}^2$ von $(\mathfrak{B}^2)$ austritt, die der Fläche (B, A) von (B^2) entspricht. Die beiden Kegelschnitte schneiden einander ausser auf a^2 noch auf einer durch σ gehenden Geraden t. Diese Gerade t entspricht also in der projectivischen Beziehung der Strahlenbüschel σ (t) und σ $(\mathfrak{t})$ in B und $\mathfrak{B}$ dem Strahle von σ $(\mathfrak{t})$, welcher in der Schnittlinie der Ebenen B und $\mathfrak{B}$ liegt und t ist daher die Erzeugende von $\mathfrak{K}^2$.

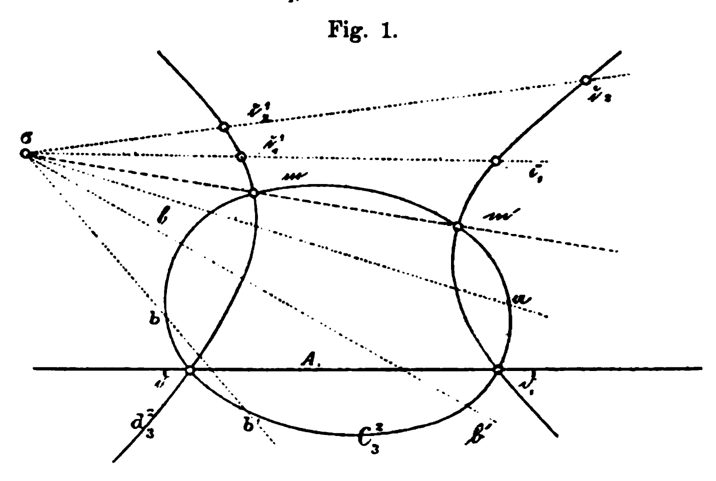
Wir ersehen also die Richtigkeit der folgenden Behauptung: Jede Tangentialebene von $\mathfrak{K}^2$ enthält zwei Kegelschnitte c^2, d^2 von Φ^4, welche sich ausser auf a^2 noch in zwei Punkten schneiden, deren Verbindungsgerade durch σ geht und Erzeugende von $\mathfrak{K}^2$ ist. $\mathfrak{K}^2$ berührt Φ^4 doppelt; jede Erzeugende in dem Punktepaare $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, in welchem sich die Kegelschnitte treffen, die in der Tangentialebene von $\mathfrak{K}^2$ längs dieser Erzeugenden liegen.

Jeder Kegelschnitt c^2 wird von jedem Kegelschnitt d^2 getroffen. Zwei Kegelschnitte c^2 können einander nicht treffen, denn da sie stets b^2 und $\mathfrak{b}^2$ treffen müssen, müssten solche zwei Kegelschnitte c^2, die einen Punkte gemeinschaftlich hätten, auf einer Fläche von (B^2) und $(\mathfrak{B}^2)$ liegen, was unmöglich ist, da zwei Flächen zweiter Ordnung sich nur noch in einem Kegelschnitte treffen können, weil sie beide durch a^2 gehen. Wir werden sogleich zeigen, dass die Kegelschnitte d^2 dieselbe Rolle spielen, wie die Kegelschnitte c^2 und daher können einander zwei Kegelschnitte d^2 auch nicht treffen.

Es seien B_1^2 B_2^2 B_3^2 drei Flächen des Büschels (B^2) und $\mathfrak{B}_1^2$ $\mathfrak{B}_2^2$ $\mathfrak{B}_3^2$ die ihnen entsprechenden Flächen des Büschels $(\mathfrak{B}^2)$, welche sie respective in den Kegelschnitten c_1^2 c_2^2 c_3^2 treffen, deren Ebenen C_1 C_2 C_3 seien. Die Kegelschnitte (a^2, c_1^2) und (a^2, c_2^2) wählen wir zur Basis zweier Büschel von Flächen zweiter Ordnung (C_1^2) und (C_2^2), welche wir projectivisch derart auf einander beziehen, dass den Flächen B_1^2, $\mathfrak{B}_1^2$ des ersten die Flächen

B_2^2 $\mathfrak{B}_2^2$ des zweiten entsprechen, und dass der Fläche C_1^2 von $(C_1^2($, welche durch den Punkt $\mathfrak{a}$ von c_3^2 geht, die Fläche C_2^2 von (C_2^2) entspricht, die durch denselben Punkt $\mathfrak{a}$ geht. Die so auf einander projectivisch bezogenen Büschel (C_1^2) und (C_2^2) erzeugen eine Fläche vierter Ordnung Φ_1^4, welche mit Φ^4 identisch ist.

Fig. 1.



Es sei Figur 1 d_3^2 der noch ausser c_3^2 in C_3 gelegene Kegelschnitt von Φ^4, dann wird c_3^2 von den Kegelschnitten b^2 und $\mathfrak{b}^2$ in denen sich B_1^2 und B_2^2 respective $\mathfrak{B}_1^2$ und $\mathfrak{B}_2^2$ treffen in den Punkepaaren $b\ b'$ und $\mathfrak{b}\ \mathfrak{b}'$ geschnitten, so zwar dass $\overline{b\ b'}$ und $\overline{\mathfrak{b}\ \mathfrak{b}'}$ durch σ gehen. c_3^2 und d_3^2 mögen einander im $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ treffen, dann geht $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'$ auch durch σ. Nun schneiden die aufeinander projectivisch bezogenen Büschel (C_1^2) und (C_2^2) die Ebene C_3 in zwei zu einander projectivischen Kegelschnittsbücheln, deren Basispunkte auf d_3^2 liegen, da sie die Schnittpunkte von (a^2, c_1^2) respective (a^2, c_2^2) mit C_3 sind. Treffen a^2, c_1^2, c_2^2 die Ebene C_3 in $\mathfrak{b}\ \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1\ \mathfrak{c}_1'$, $\mathfrak{c}\ \mathfrak{c}_2'$, so ist die Basis des ersten Büschels $(\mathfrak{b}\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{c}_1')$ die des zweiten $(\mathfrak{b}\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_2\ \mathfrak{c}'_2)$. $\overline{\mathfrak{c}_1\ \mathfrak{c}_1'}$ und $\overline{\mathfrak{c}_2\ \mathfrak{c}_2'}$ gehen durch σ.

Jeder der Kegelschnittbüchel $(\mathfrak{b}\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{c}_1')$ und $(\mathfrak{b}\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_2\ \mathfrak{c}_2')$ schneidet den Kegelschnitt c_3^2 in einer quadratischen Involution, deren Centrum σ ist. Die Strahlen von σ sind projectivisch zugeordnet den Kegelschnitten, welche dasselbe Punktepaar von c_3^2 projiciren. Da nun die Kegelschnittbüschel projectivisch aufeinander bezogen sind, so werden in σ zwei zu einander projectivische Büschel auftreten. Diese Büschel haben aber drei

Strahlen entsprechend gemein, sind also identisch. Denn die Strahlen $\overline{\sigma b b'}$ $\overline{\sigma \mathfrak{b} \mathfrak{b}'}$ und $\overline{\sigma \mathfrak{a}}$ sind der Festsetzung der Projectivität zwischen den Kegelschnittbüscheln zu Folge zusammenfallende entsprechende Strahlen der Büschel (σ). Folglich entsprechen einander je zwei Kegelschnitte der Büschel ($\mathfrak{b}_1$ $\mathfrak{b}_1$ $\mathfrak{c}_1$ $\mathfrak{c}_1'$) und ($\mathfrak{b}$ $\mathfrak{b}_1$ $\mathfrak{c}_2$ $\mathfrak{c}_2'$), die ein Paar der Involution von c_3^2 deren Pol σ ist, projiciren. Da nun $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'$ ein solches Paar ist, so entspricht der Kegelschnitt d_3^2, der beiden Büscheln angehört, sich selbst und daher entspricht die Fläche D_1^2 des Büschels (C_1^2), welche den Kegelschnitt d_3^2 enthält der Fläche D_2^2 des Büschels (C_2^2), welche denselben Kegelschnitt d_3^2 enthält.

Sei nun $\mathfrak{E}$ eine beliebige Tangentialebene von $\mathfrak{K}^2$, welche die Kegelschnitte c^2 und d^2 enthält, dann wird c^2 den Kegelschnitt d_3^2 in dem Punktepaare $\mathfrak{b}_3$ $\mathfrak{b}_3'$ treffen. Stellen wir nun in $\mathfrak{E}$ dieselbe Betrachtung an wie in C_3, nur dass wir c^2 d^2 an Stelle von c_3^2 d_3^2 und $\mathfrak{b}_3$ an Stelle von $\mathfrak{a}$ treten lassen, so erkennen wir, dass in der festgesetzten Projectivität die Flächen der beiden Büschel (C_1^2) und (C_2^2) einander entsprechen, welche den Kegelschnitt d^2 projiciren.

Die Flächenbüschel (C_1^2) und (C_2^2) erzeugen also die Fläche Φ^4 in der Art, dass je zwei Flächen einander in einem Kegelschnitte d^2 schneiden. Die Ebenen von d^2 umhüllen denselben Kegel $\mathfrak{K}^2$. Diese Kegelschnitte d^2 spielen gegenüber den Büscheln (C_1^2) und (C_2^2) dieselbe Rolle, wie die Kegelschnitte c^2 den Büscheln (B^2) und ($\mathfrak{B}^2$) gegenüber.

Hat man auf Φ^4 überhaupt einen Kegelschnitt k^2, der von a^2 verschieden ist, so scheidet jede Fläche zweiter Ordnung des Büschels (a^2, k^2) noch in je einem Kegelschnitte h^2. Legt man durch einen dieser Kegelschnitte h^2 und a^2 eine Fläche zweiter Ordnung, so trifft diese Φ^4 in dem Kegelschnitte l^2 und l^2 wird von allen Kegelschnitte h^2 in zwei Punkten getroffen. Denn l^2 schneidet k^2 nicht und da er jede Fläche des Büschels (a^2, k^2) noch in zwei Punkten treffen muss (zwei liegen auf a^2), so muss er h^2 in zwei Punkten schneiden. Daher geht durch die festen Kegelschnitte l^2 und a^2 und den Variablen h^2 je eine Fläche zweiter Ordnung und man kann durch dieselben Betrachtungen, wie eben zeigen, dass man die beiden Flächenbüschel (a^2, l^2) und (a^2 k^2), so projectivisch aufeinander beziehen kann, dass ent-

sprechende Flächen sich in den Kegelschnitten h^2 treffen und auf diese Art Φ^4 erzeugen. Die Ebenen der Kegelschnitte umhüllen dann wieder einen Kegel zweiter Ordnung und enthalten jede noch einen zweiten Kegelschnitt.

Die Pole der Ebene A für die Flächen des Büschels (B^2) und $(\mathfrak{B}^2)$ liegen auf einer Geraden g respective g_1. Da beide Büschel einander projectivisch sind, sobald sie Φ^4 erzeugen, so werden auch die Punktreihen g und g_1 in Anbetracht der Pole entsprechender Flächen einander projectivisch sein, und die Verbindungsgeraden g' entsprechender Punkte bilden die Schaar S' eines Hyperboloides H^2. Auf diese Art wird jeder Geraden g' der Schaar S' eine bestimmte Fläche von (B^2) und eine von $(\mathfrak{B}^2)$ entsprechen, welche sich in einem Kegelschnitt c^2 schneiden, den wir der Geraden g' entsprechen lassen wollen. Ist $\mathfrak{g}'$ der Durchstosspunkt von g' mit A, so ist $\mathfrak{g}'$ Pol der Trace der Ebene $\mathfrak{C}$ von c^2 in Bezug auf a^2, denn es ist g' der Ort der Pole der Ebene A für alle Flächen des Büschels, dessen Basis (a^2, c^2) ist.

Hieraus folgt: Die Trace k^2 von H^2 auf A ist die Polarfigur von $\mathfrak{K}^2$ in Bezug auf Σ^2.

Seien $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ die Pole für B_1^2, B_2^2 und $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{a}'_2$ die Pole für die entsprechenden Flächen $\mathfrak{B}_1^2$, $\mathfrak{B}_2^2$ der Ebene A, dann werden die Geraden $\overline{\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}'_1} = g'_1$ und $\overline{\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}'_2} = g_2'$ die Pole der Ebene A für die Flächen der Büschel $(B_1^2\, \mathfrak{B}_1^2)$ respective $(B_2^2\, \mathfrak{B}_2^2)$ enthalten, und da früher gezeigt wurde, dass man diese Büschel so projectivisch aufeinander beziehen kann, dass entsprechende Flächen sich in Kegelschnitten d^2 von Φ^4 treffen, so werden die Verbindungslinien entsprechender Pole auf g_1' und g_2' die Schaar S eines Hyperboloides bilden, das mit H^2 identisch ist. Denn dieses letztere muss A in demselben Kegelschnitte k^2 treffen und die Geraden g, g_1 liegen auf demselben. Den Geraden der Schaar S von H^2 entsprechen daher die Kegelschnitte d^2.

Sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Punkt von H^2, in welchem sich die Erzeugenden g und g' der beiden Schaaren schneiden. Es seien c^2 und d^2 die ihnen entsprechenden Kegelschnitte in den Ebenen C und D. Die beiden Schnittpunkte $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ der Kegelschnitte c^2, d^2 mögen dem Punkte $\mathfrak{p}$ entsprechen. Trifft nun $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'$ (welches durch σ geht)

die Ebene A in t, so ist dieser Punkt der Pol der Trace der Ebene der Erzeugenden g, g'. Denn sind die Punkte, in denen g, g', die Ebene A trifft g, g', so ist die Ebene C respective D die Polarebene von g und g' in Bezug auf Σ^2, und also ist der Schnittpunkt t der Ebenen C, D, A der Pol der Geraden $\overline{\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}'}$ in Bezug auf a^2.

Nun ist die Fläche P^2 des Gebüsches, welche p zum Pol A besitzt, vollständig bestimmt, und da p auf g liegt, so gehört P^2 einen der Büschel an, durch welche Φ^4 projectivisch erzeugt wird und dessen Basis (d^2, a^2) ist. Da aber p auch auf g' liegt, so gehört P^2 dem Büschel an, welches (c^2, a^2) zur Basis hat, also liegen die beiden Kegelschnitte c^2, d^2 auf P^2, welche auch a^2 enthält.

Man erhält also das dem Punkte p von H^2 entsprechende Punktepaar q, q', wenn man zu der Trace der Tangentialebene $\mathfrak{P}$ von H^2 des Punktes p die conjungirte Polare in Bezug auf Σ^2 sucht und diese mit der Fläche P^2 des Gebüsches schneidet, welche p zum Pol von A besitzt. Diese Verwandtschaft lässt sich auf alle Ebenen des Raumes ausdehnen, indem man der Ebene $\mathfrak{P}$ das Punktepaar g, g' zuordnet, durch welches alle Flächen des Netzes gehen, deren Pole für A in $\mathfrak{E}$ liegen. Dieses Netz ist in dem Gebüsch von Flächen zweiter Ordnung enthalten. Beschreibt die Ebene $\mathfrak{P}$ ein Bündel [p] mit dem Scheitel p, so beschreibt das Punktepaar g, g' die Fläche zweiter Ordnung P^2, deren Pol für a^2 der Punkt p ist. Beschreibt $\mathfrak{P}$ ein Ebenenbüschel (g) in [p], so beschreibt das Punktepaar einen Kegelschnitt d^2 auf P^2.

Man ersieht hieraus, dass wenn $\mathfrak{P}$ die Fläche zweiter Classe H^2 beschreibt, dann das entsprechende Punktepaar g, g' unsere Fläche Φ^4 vierter Ordnung durchläuft.[1]

Da die Fläche P^2, deren Pol p ein Punkt von H^2 ist, die Kegelschnitte c^2, d^2 enthält, die auf Φ^4 liegen, so berührt P^2 die Φ^4 in den Punkten q, q', in denen sich c^2, d^2 schneiden, daher ist: Φ^4 die Enveloppe der Flächen zweiter Ordnung des Gebüsches, deren Pole für A auf H^2 liegen.

---

[1] Diese Verwandtschaft wurde schon von Prof. K. Küpper in den „Beiträgen zur Theorie der Curven 3. und 4. Ordnung" (Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften VI. Folge, 5. Bd.) betrachtet. Es sind q, q' die zwei Punkte, in denen sich das Netz konischer Polaren der Punkte der Ebene $\mathfrak{E}$ für die aus A und Σ^2 bestehende Fläche dritter Ordnung schneiden, da die Polaren alle durch a^2 gehen.

Untersuchen wir, was den Punkten $\mathfrak{p}$ eines Kegelschnittes h^2 von H^2 entspricht. Die Tangentialebenen $\mathfrak{P}$ der Punkte $\mathfrak{p}$ beschreiben einen Kegel zweiter Ordnung mit der Spitze in π, dessen Trace auf A der Kegelschnitt η^2 sein soll. Seine Polarfigur in Bezug auf Σ^2 ist ein Kegel H^2 zweiter Classe, welcher die Punktepaare enthalten muss, die den Punkten $\mathfrak{p}$ entsprechen. Da aber die Ebenen $\mathfrak{P}$ durch π gehen, so müssen diese Punktepaare auch auf der Fläche P^2 zweiter Ordnung liegen, welche π zum Pol von A besitzt; daher liegen die den Punkten eines Kegelschnittes h^2 von H^2 entsprechenden Punktepaare auf einer Raumcurve vierter Ordnung c^4. Der Kegel H^2, welcher c^4 enthält, schneidet Φ^4 noch in einer zweiten Raumcurve c_1^4. Dieser entspricht ein Kegelschnitt h_1^2 auf H^2, welcher zu h^2 in einfacher Beziehung steht. Sei nämlich $\mathfrak{a}$ der Pol von A in Bezug auf H^2 und sei π_1 der Punkt, welcher auf $\overline{\mathfrak{a}\,\pi}$ dem Punkte π harmonisch zugeordnet ist in Bezug auf $\mathfrak{a}$ und dem Schnittpunkt mit A, so ersieht man sogleich, dass der von π_1 an H^2 gelegte Tangentialkegel dieselbe Trace η^2 auf A besitzen wird, wie der von π, dass also den Punkten des Kegelschnittes h_1^2, in welchen die Ebenen durch π_1, die Fläche H^2 berühren, Punktepaare entsprechen werden, welche auf demselben Kegel H^2 und auf Φ^4 liegen, sowie auch auf der Fläche P_1^2, deren Pol für A π_1 ist.

Wir erhalten mithin den Satz: Jede Fläche des Gebüsches schneidet Φ^4 in einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species, welche auf einem Kegel zweiter Ordnung liegt, dessen Spitze σ ist. Liegt der Pol dieser Fläche für A auf H^2, so zerfällt die Raumcurve in zwei Kegelschnitte c^2, d^2 und der Kegel in zwei durch σ gehende Ebenen, welche diese Kegelschnitte enthalten.

Da die Kegelschnitte η^2 stets den Kegelschnitt k^2 doppelt berühren, so werden auch die Kegel H^2 und $\mathfrak{K}^2$ sich doppelt berühren. Umgekehrt, jeder Kegel H^2, der den Kegel $\mathfrak{K}^2$ doppelt berührt, trifft Φ^4 in zwei Curven vierter Ordnung erster Species, welche zwei Kegelschnitten von H^2 entsprechen.

Ist c^4 die dem Kegelschnitte h^2 entsprechende Curve und π der Pol von A für die Fläche P^2, welche c^4 enthält, so ist σ der Pol der Ebene $\mathfrak{E}$ für P^2, welche den Kegelschnitt enthält, in den sich Σ^2 und P^2 schneiden (nach 6). $\mathfrak{E}$ trifft daher c^4 in vier

Hyperosculationspunkten, in denen sie von den Erzeugenden des Kegels H^2 berührt wird. Diese vier Punkte sind zusammengefallene Punktepaare, die im Allgemeinen einem Punkte $\mathfrak{p}$ von H^2 oder seiner Tangentialebene entsprechen.

Suchen wir den Ort aller dieser zusammenfallenden Punktenpaare auf Φ^4, respective die diesem Orte entsprechende Curve auf H^2.

Sollen auf einem Strahle t durch σ die beiden Punkte $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}$ zusammenfallen, so muss t die zugehörige Fläche des Gebüsches berühren, d. h. der Punkte $\mathfrak{q}$ liegt auf Σ^2. Hieraus ersehen wir schon, dass der Ort der Punkte auf Φ^4 die Curve r^4 vierter Ordnung ist, in welcher Σ^2 die Φ^4 trifft. Ist $\mathfrak{P}$ die Tangentialebene eines Punktes $\mathfrak{q}$ von Σ^2 und $\mathfrak{p}$ ein in ihr beliebig gelegener Punkt, so wird die Fläche P^2, welche $\mathfrak{p}$ zum Pol von A besitzt, durch $\mathfrak{q}$ gehen müssen und $\overline{\sigma\mathfrak{q}}$ berühren, da nach (6.) P^2 die Fläche Σ^2 in einem Kegelschnitte treffen muss, dessen Pol für Σ^2 eben $\mathfrak{p}$ für P^2 aber σ ist. Mithin entsprechen den Tangentialebenen von Σ^2 zusammenfallende Punktepaare nämlich ihr Berührungspunkt.

Sei nun D die beiden Flächen H^2 und Σ^2 gemeinschaftlich umschriebene Developable, welche H^2 längs einer Raumcurve vierter Ordnung h^4 und Σ^2 längs einer Raumcurve vierter Ordnung r_1^4 berührt. Dann entsprechen den Punkten von h^4 zusammenfallende Punktepaare auf den Strahlen durch σ, und da diese mit den Berührungspunkten der jedesmaligen Tangentialebene von Σ^2 zusammenfallen, so liegen diese Punkte auf r_1^4, welche daher mit der obigen r^4 identisch und erster Species ist.

D trifft A in einer Curve vierter Klasse η^4, welcher als Polarfigur für Σ^2 ein Kegel vierter Ordnung H^4 mit der Spitze in σ entspricht, der durch r^4 geht. Dieser Kegel vierter Ordnung trifft Φ^4 noch in einer Curve achter Ordnung, welche der Curve vierter Ordnung auf H^2 entspricht, in der der Kegel von $\mathfrak{a}$, welcher h^4 projicirt, H^2 noch schneidet.

Die Erzeugenden von H^4, welche in den Ebenen von $\mathfrak{K}^2$ liegen, sind die von σ an die beiden Kegelschnitte gehenden vier Tangenten.

Die Curven h^4 und r^4 werden aus den Ecken des beiden Flächen H^2 und Σ^2 gemeinschaftlich conjungirten Tetraëders durch Kegel zweiter Ordnung projicirt. Entspricht dem Punkte

$\mathfrak{p}$ von h^4 der Punkt $\mathfrak{q}$ von r^4, so ist $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}}$ Erzeugende von D und die Tangenten von h^4 respective r^4 sind conjungirt zu $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}}$ in Bezug auf H^2 respective Σ^2.

Die zwei von σ an einen Kegelschnitt c^2 gehenden Tangenten berühren in den Punkten, welche den Schnittpunkten der entsprechenden Geraden g' mit h^4 entsprechen.

Wenn die Ebene $\mathfrak{E}$ eines Kegelschnittes h^2 von H^2 die Tangente t eines Punktes $\mathfrak{p}$ von h^4 enthält, so hat die entsprechende Curve c^4 in dem Punkte $\mathfrak{q}$ einen Doppelpunkt.

Die Spitze π des H^2 längs h^2 umschriebenen Kegels muss auf $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}}$ liegen, da diese Gerade zu t für H^2 conjungirt ist. Ferner gehen die Polarebenen aller Punkte von $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}}$ für Σ^2 durch die Tangente t' von r^4 in $\mathfrak{q}$. Ist nun $\mathfrak{d}$ der Durchstosspunkt von $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ mit A und $\mathfrak{D}$ seine Polarebene für Σ^2, so ist diese Tangentialebene des Kegels H^2, welcher die c^4 enthält, längs der Erzeugenden $\overline{\sigma\mathfrak{q}}$ dieses Kegels. Ist ferner P^2 die Fläche zweiten Grades, welche auch c^4 enthält, und deren Pol für A daher π ist, so geht dieselbe durch $\mathfrak{q}$, da die Polarebene $\mathfrak{P}$ von π für Σ^2 durch t' geht und es ist nach (6) σ der Pol von $\mathfrak{P}$ für P^2. Hieraus folgt aber, dass die Ebene $\mathfrak{D} = \overline{\sigma\, t'}$, welche Tangentialebene von H^2 war, auch P^2 in $\mathfrak{q}$ berührt; und es hat daher c^4 in $\mathfrak{q}$ einen Doppelpunkt.

Berührt der Kegelschnitt h^2 die Curve h^4 doppelt in den Punkten $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1$, deren Tangenten t, t_1 seien, so wird der Kegel H^2 die Fläche P^2 in den Punkten $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1$ berühren, die mit $\mathfrak{p}$ respective $\mathfrak{p}_1$ auf denselben Erzeugenden von D liegen. Die c^4 zerfällt daher in zwei Kegelschnitte l^2 und l'^2, deren Ebenen durch $\overline{\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_1}$ gehen müssen.

Die Ebenen der Kegelschnitte von H^2, welche h^4 doppelt berühren, sind Tangentialebenen der Kegel zweiter Ordnung, welche h^4 projiciren.

Es seien $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ die Ecken $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ die Ebenen des beiden Flächen $H^2\Sigma^2$ gemeinschaftlich conjungirten Tetraëders. h^4 sowohl als r^4 werden aus den Ecken durch Kegel zweiter Ordnung projicirt und die Ebenen der erwähnten Kegelschnitte h^2 gehen daher durch einen dieser Punkte.

Es sie $\mathfrak{E}$ die Ebene von h^2, welche durch σ_1 geht und den Kegel, der h^4 projicirt längs $\overline{\sigma_1\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1}$ berührt. Die Tangentialebenen

von H^2 in $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ berühren Σ^2 in $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1$ und schneiden sich auf Σ_1 in der Geraden d. Die Gerade $\overline{\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_1}$ ist zu d conjungirt für Σ^2 und es geht daher $\overline{\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_1}$ das σ_1 d. h. die Ebenen der Kegelschnitte l^2 l'^2, welche dem Kegelschnitte h^2 von Σ^2 entsprechen, gehen durch denselben Punkt σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, durch welchen die Ebene des Kegelschnittes h^2 geht.

Durchlauft $\mathfrak{x}$ den Kegelschnitt h^2, welcher h^4 doppelt berührt, so durchlaufen die entsprechenden Punkte $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$ die Kegelschnitte l^2, l'^2, und zwar liegt $\mathfrak{y}$ immer auf l^2, $\mathfrak{y}'$ auf l'^2. Die Punktreihe $\mathfrak{y}$ auf l^2 sowohl als $\mathfrak{y}'$ auf l'^2 ist zur Punktreihe $\mathfrak{x}$ auf h^2 projectivisch. Denn die Tangentialebenen des Kegels, der H^2 längs h^2 umschrieben ist, sind projectivisch zur Punktreihe $\mathfrak{x}$ und daher diese auch projectivisch zu den Erzeugenden des Kegel H^2, dessen Kanten conjungirte Geraden für Σ^2 der Trace η^2 des obigen Kegels sind. Die Kanten von H^2 aber bestimmen auf l^2 und l'^2 die erwähnten Punktreihen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}'$.

Hat man auf h^2 eine quadratische Involution mit dem Pole in σ_1 [die Ebene von h^2 gehe durch σ_1], so entspricht dieser projectivisch je eine quadratische Involution auf l^2 als auf l'^2 mit dem Pole σ_1. Dem Paare $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_1$ auf h^2 entspricht das Paar $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}_1$ auf l^2 und $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{y}'_1$ auf l'^2. Die Geraden $\overline{\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_1}$ und $\overline{\mathfrak{y}'\,\mathfrak{y}_1'}$ liegen mit $\overline{\sigma\,\sigma_1}$ in einer Ebene, beschreiben daher perspectivisch liegende Strahlenbüschel in den Ebenen L, L' der Kegelschnitte l^2, l'^2. Da nämlich σ_1 Pol der Involution $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1)$ auf h^2 sein soll, so wird die Involution der Tangentialebenen $(X X_1)$ von H^2 die Ebene Σ_1 zur Polarebene haben, indem sich auf Σ_1 je ein Paar Ebenen der Involution treffen. Also hat die Tangenteninvolution des Kegelschnittes η^2 in A die Trace s_1 der Ebene Σ_1 auf A zur Axe, mithin werden die Erzeugenden von H^2, welche Paare der Involution bilden mit $\overline{\sigma\,\sigma_1}$ in einer Ebene liegen, da diese Gerade zu s_1 für Σ^2 conjungirt ist. Diese Ebenen schneiden l^2 und l'^2 in den Punktepaaren der Involution, die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_1$ entsprechen. Auf diese Art treten in L und L' zwei perspectivisch liegende Strahlenbüschel $\sigma_1\,(\overline{\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_1})$ und $\sigma_1\,(\overline{\mathfrak{y}'\,\mathfrak{y}'_1})$ auf, welche projectivisch sind zum Strahlenbüschel $\sigma_1\,(\overline{\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1})$ der Ebene H von h^2.

Es seien nun H, H zwei Tangentialebenen des Kegels, welcher aus σ_1 die h^4 projicirt und welche die Kegelschnitte h^2, η^2 von H^2 enthalten, die h^4 in den Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$ respective π, π_1

berühren. Diesen Kegelschnitten mögen die Kegelschnittpaare l^2, l'^2 und λ^2, λ'^2 in den Ebenen L, L'; Λ, Λ' entsprechen. Da h^2 und η^2 einander in den Punkten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_1$ schneiden, so werden auch die entsprechenden Kegelschnitte auf Φ^4 es thun. Es mögen den Punkten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_1$ die Punkte $\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{f}_1\,\mathfrak{f}_1'$ entsprechen und $\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}_1$ mögen auf l^2, $\mathfrak{f}'\,\mathfrak{f}'_1$ auf l'^2 liegen, dann soll λ^2 derjenige Kegelschnitt sein, welcher $\mathfrak{f}'\,\mathfrak{f}_1'$ enthält, also l'^2 schneidet und λ'^2 derjenige, welcher $\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}_1$ enthält, also l^2 trifft.

Es sei ferner X eine beliebige variable Tangentialebene des Kegels, der aus σ_1 die h^4 projicirt, welche h^2 in dem Punktepaare $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_1$ und η^2 in ξ, ξ_1 trifft. Die Strahlenbüschel σ_1 $(\mathfrak{x})$ und σ_1 (ξ) in H und H werden durch die Tangentialebenen X zu einander projectivisch bezogen sein. Es werden daher auch die Strahlenbüschel σ_1 $(\mathfrak{y})$ und σ_1 (η) in den Ebenen L und Λ aufeinander projectivisch bezogen sein, wenn den Punkten $\mathfrak{x}$, ξ die Punkte $\mathfrak{y}$, η auf l^2, λ^2 ($\mathfrak{y}'$ η' liegen auf l'^2 λ'^2) entsprechen. Die Ebene durch $\overline{\sigma_1\,\mathfrak{y}}$ und $\overline{\sigma_1\,\eta}$ enthält aber einen der Kegelschnitte y'^2, welche dem Kegelschnitte x^2 von H^2 in X entsprechen (y^2 liegt in der Ebene durch $\overline{\sigma_1\,\mathfrak{y}'}$ und $\overline{\sigma_1\,\eta'}$). Hieraus folgt, dass die Ebenen der Kegelschnitte y'^2, welche dem Kegelschnitte x^2 von H^2 entsprechen einen Kegel $\mathfrak{K}_1^2$ zweiter Ordnung umhüllen, dessen Spitze σ_1 ist. Derselbe besitzt L, Λ, L' Λ' und Y' die Ebene von y'^2, aber auch Y die Ebene von y^2, zu Tangentialebenen. Denn ihre Schnittlinien sind auch entsprechende Strahlen der Ebenen L und Λ, da sie entsprechende Punktepaare von l^2 und λ^2 enthalten. Die Ebenen der Kegelschnitte y^2 umhüllen auch einen Kegel zweiter Ordnung, der mit $\mathfrak{K}_1^2$ identisch ist, da er die Tangentialebenen L Λ L' Λ' Y Y' mit ihm gemeinschaftlich hat. Wir folgern daher:

Die vier Eckpunkte σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 des Σ^2 und H^2 gemeinschaftlich conjungirten Tetraëders sind Spitzen von Kegeln zweiter Ordnung $\mathfrak{K}_1^2$, $\mathfrak{K}_2^2$, $\mathfrak{K}_3^2$, $\mathfrak{K}_4^2$, deren Tangentialebenen Φ^4 in je zwei Kegelschnitten treffen. Die Kegelschnitte gehören zwei conjungirten Schaaren (für jeden Kegel) an, indem zwei Kegelschnitte derselben Schaar einander nicht schneiden, jeder Kegelschnitt der einen Schaar aber alle Kegelschnitte der anderen Schaar in je einem Punktepaare trifft.

Diese vier Doppelschaaren von Kegelschnitten gestatten gerade so wie die Doppelschaar, deren Ebenen durch σ gehen eine analoge projectivische Erzeugung von Φ^4.

Weitere Kegelschnitte gibt es auf Φ^4 nicht. Denn einer beliebigen Curve c^n auf H^2 entspricht, wie man leicht sieht eine c^{2n} auf Φ^4. Soll c_1^{2n} einen Doppelpunkt besitzen, ohne dass c^n einen solchen hat, so muss c^n die h^4 berühren. Nun kann c^n die h^4 höchstens in n Punkten berühren. Soll aber von c_1^{2n} ein Kegelschnitt c^2 ein Theil sein, so müsste c_1^{2n} $2n-2$ Doppelpunkte aufweisen, da aber

$$2n-2 > n \text{ ist, sobald } n > 2 \text{ ist,}$$

so kann keiner Curve c^n von H^2 ohne Doppelpunkt auf Φ^4 eine c_1^{2n} entsprechen, die als Theil einen Kegelschnitt enthielte.

Hat aber c^n Doppelpunkte, welche ein Zerfallen derselben in niedrige Curven nicht bewirken, so werden die entsprechenden Punkte Doppelpunkte von c_1^{2n} sein, welche ein Zerfallen dieser auch nicht bewirken können.

Nimmt man σ_1 zum Pol von a^2, so existirt eine Fläche Σ_1^2, für welche σ, σ_2, σ_3, σ_4 ein Poltetraëder ist. Nimmt man für Σ_1^2 die Polarfigur k_1^2 von $\mathfrak{K}_1^2$ so ist eine Fläche zweiter Ordnung H_1^2 bestimmt, welche durch k_1^2 geht und für die σ, σ_2, σ_3, σ_4 ein Poltetraëder ist. Σ_1^2 und H_1^2 stehen in derselben Beziehung zu einander und zu Φ^4, wie Σ^2 und H^2.

Die Kegelschnitte k^2, k_1^2, k_2^2, k_3^2, k_4^2, in welchen die fünf Flächen zweiter Ordnung H^2, H_1^2, H_2^2, H_3^2, H_4^2 die Ebene A schneiden gehören mit a^2 zu einer Kegelschnittschaar; die Polarfiguren dieser Kegelschnitte für die zugehörigen Flächen Σ^2, Σ_1^2, Σ_2^2, Σ_3^2, Σ_4^2 sind Kegel, welche durch vier feste Punkte von a^2 gehen. Diese vier Punkte $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$, $\mathfrak{t}_4$ sind die R ü c k k e h r p u n k t e der Doppellinie a^2, in denen die beiden Tangentialebenen zusammenfallen.

Die Tangentialbenen von Φ^4 längs a^2 werden nämlich von den Ebenen der Developablen Δ gebildet, welche a^2 und H^2 gemeinschaftlich umschrieben ist. Sei t die Tangente von a^2 im Punkte $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{p}$ der Berührungspunkt einer durch t an H^2 gelegten Tangentialebene, dann wird die Fläche P^2 des Gebüsches, welche $\mathfrak{p}$ zum Pol von A besitzt Φ^4 in zwei Punkten berühren, in denen ämlich sich die beiden Kegelschnitte treffen, welche den Geraden

g, g' der Ebene $\overline{t\mathfrak{p}}$ entsprechen. Diese müssen sich nach Früherem auf der Geraden $\overline{\sigma\mathfrak{t}}$ schneiden und ein Punkt fällt in $\mathfrak{t}$, der andere in $\mathfrak{t}'$. Da nun P^2 die Φ^4 in $\mathfrak{t}$ berührt, so ist die Ebene, welche eine Tangente von P^2 also z. B. t mit $\mathfrak{p}$ verbindet, Tangentialbene von Φ^4 in diesem Punkte.

Ist $\mathfrak{a}$ der Pol von A für H^2 und trifft $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}$ H^2 noch in $\mathfrak{p}'$, so ersieht man, dass die Ebene $\overline{\mathfrak{p}'t}$ auch Tangentialebene von Φ^4 in $\mathfrak{t}$ ist.

Δ berührt H^2 längs einer Raumcurve vierter Ordnung a^4, die aus a durch einen Kegel zweiter Ordnung projicirt wird. Einem Punkte $\mathfrak{t}$ von a^2 entsprechen zwei Punkte von a^4, die auf einem Strahl durch $\mathfrak{a}$ liegen. Da, wenn Φ^4 gegeben, auch Δ fest ist, so ersieht man, dass die Flächen zweiter Ordnung H_1^2 H_2^2 H_3^2 H_4^2 ebenfalls Δ eingeschrieben sein müssen; ihre Tracen auf A, der Ebene eines Doppelkegelschnittes von Δ, also derselben Schaar angehören müssen, die k^2 und a^2 bestimmen. Die gemeinschaftlichen Tangenten der Schaar sind die in A liegenden vier Erzeugenden von Δ.

Die Curve a^4 trifft A in vier Punkten, die auf k^2 liegen und deren Tangenten auch a^2 berühren in den Punkten $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$, $\mathfrak{t}_4$ von a^2, in denen Φ^4 blos eine Tangentialebene besitzt, dieselbe nämlich, die H^2 in den Schnittpunkten von a^4 mit A hat. Hieraus ersieht man, dass die Kegel $\mathfrak{K}^2$, $\mathfrak{K}_1^2$, $\mathfrak{K}_2^2$, $\mathfrak{K}_3^2$, $\mathfrak{K}_4^2$ durch $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$, $\mathfrak{t}_4$ gehen müssen.

$\mathfrak{a}$ als Pol der Ebene A, welche den Doppelkegelschnitt a^2 von Δ enthält, für H^2; bleibt Pol für alle Flächen der Schaar, die Δ eingeschrieben sind. Hieraus folgt wieder, dass die Kegelschnitte k^2, k_1^2, k_2^2, k_3^2, k_4^2 die Tracen der vier durch $\mathfrak{a}$ gehenden Ebenen von Δ berühren.

Das a^2 und k^2 gemeinschaftlich conjungirte Dreiseit $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ bestimmt mit $\mathfrak{a}$ die weiteren Ebenen der Doppelkegelschnitte von Δ.

Unter den Erzeugenden von H^2 gibt es acht, welche k^4 berühren, daher Erzeugende der Developablen D sind und also auch Σ^2 tangiren. Von denselben gehören vier: a, b, c, d der Schaar S und vier a', b', c', d' der Schaar S' von H^2 an.

Diesen Geraden entsprechen auf Φ^4 in Geradenpaare zerfallende Kegelschnitte. Es möge a die Σ^2 in q berühren. Die Flächen des Gebüsches, deren Pole auf a liegen, bilden einen Büschel, dessen Basis aus dem Kegelschnitte a^2 und einem zweiten in der Polarebene $\mathfrak{P}$ des Durchstosspunktes $\mathfrak{p}$ von a mit A für Σ^2 liegenden Kegelschnitte besteht. $\mathfrak{P}$ geht durch q. Die Fläche, deren Pol von A der Punkt q von Σ^2 ist, ist der Kegel, welcher a^2 aus q projicirt und dieser bestimmt auf $\mathfrak{P}$ den zweiten Basiskegelschnitt, der auf Φ^4 liegen muss, und der daher aus den zwei von q nach den Schnittpunkten von $\mathfrak{P}$ mit a^2 gehenden Geraden beteht.

Wir erhalten auf diese Art 16 Gerade auf Φ^4, welche den acht Geraden von H^2 paarweise entsprechen.

Es mögen den Geraden:

$$a \quad b \quad c \quad d \qquad a' \quad b' \quad c' \quad d'$$

die Geradenpaare:

$$a_1\, a_2, \quad b_1\, b_2, \quad c_1\, c_2, \quad d_1\, d_2, \qquad a'_1\, a'_2, \quad b'_1\, b'_2, \quad c'_1\, c'_2, \quad d'_1\, d'_2$$

entsprechen. Wir bemerken, dass der Schnittpunkt eines jeden dieser Geradenpaare auf Σ^2, und zwar auf r^4 liegt.

Auf Φ^4 existiren ausser diesen keine Geraden mehr. Denn sei l eine auf Φ^4 gelegene Gerade, dann wird dieselbe den Doppelkegelschnitt a^2 treffen müssen und die Flächen des Gebüsches, welche durch dieselbe gehen, bilden einen Büschel, dessen Basis aus a^2, l und einer in der Ebene $\overline{\sigma\, l}$ gelegenen zweiten Geraden besteht. Jede Fläche des Gebüsches schneidet nach Früherem Φ^4 in einer Curve vierter Ordnung, die auf einem Kegel zweiter Ordnung mit der Spitze σ liegt. Von dieser Curve ist l ein Bestandtheil, sie kann nicht durch σ gehen, also muss der Rest, die Curve dritter Ordnung, wie man leicht sieht, zerfallen in einen Kegelschnitt m^2, dessen Ebene durch σ geht und eine Gerade m, die mit l in einer durch σ gehenden Ebene liegt. Die Ebenen von (l, m) und m^2 bilden den Kegel zweiter Ordnung. Hieraus sieht man, dass in der durch l und σ gehenden Ebene stets noch eine Gerade m liegen muss, die Ebene berührt $\mathfrak{K}^2$ und das Geradenpaar l, m schneidet sich auf Σ^2, bildet die Basis des obigen Flächenbüschels zweiter Ordnung (mit Hinzunahme

von a^2) und entspricht der Geraden von H^2, welche im Schnittpunkte von l, m mit Σ^2 diese berührt.

Die 16 Geraden von Φ^4 treten in verschiedenen Combinationen zu Paaren in den fünf Doppelschaaren der Kegelschnitte von Φ^4 auf.[1]

Wir wollen diese Schaaren mit $\mathfrak{S}\ \mathfrak{S}'$; $\mathfrak{S}_1\ \mathfrak{S}_1'$; $\mathfrak{S}_2\ \mathfrak{S}_2'$; $\mathfrak{S}_3\ \mathfrak{S}_3'$; $\mathfrak{S}_4\ \mathfrak{S}_4'$ bezeichnen, je nachdem die Ebenen der Kegelschnitte durch σ, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 gehen.

Dann gehören: $a_1\ a_2 \quad b_1\ b_2 \quad c_1\ c_2 \quad d_1\ d_2$ zu $\mathfrak{S}$
$a_1'\ a_2' \quad b_1'\ b_2' \quad c_1'\ c_2' \quad d_1'\ d_2'$ „ $\mathfrak{S}'$

in Folge dessen wird jedes Geradenpaar von $\mathfrak{S}$ von jedem Geradenpaar von $\mathfrak{S}'$ geschnitten.

Wir wollen festsetzen, dass $a_1\ a_1'$, $a_2\ a_2'$; $b_1\ b_1'$, $b_2\ b_2'$; $c_1\ c_1'$, $c_2\ c_2'$; $d_1\ d_1'$, $d_2\ d_2'$ einander schneiden.

Die acht Geraden von H^2 liegen nun paarweise in Ebenen, die durch σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, gehen, und zwar mögen die Ebenen durch

$$\begin{array}{llllll} (aa') & (bb') & (cc') & (dd') & \text{durch} & \sigma_1 \\ (ab') & (a'b) & (cd') & (c'd) & „ & \sigma_2 \\ (ac') & (a'c) & (bd') & (b'd) & „ & \sigma_3 \\ (ad') & (a'd) & (bc') & (b'c) & „ & \sigma_4 \end{array}$$

gehen. Dem aus $(a\,a')$ bestehenden Kegelschnitte, welcher k^4 doppelt berührt, entspricht eine in zwei Kegelschnitte zerfallende Curve vierter Ordnung. Die Kegelschnitte zerfallen aber selbst in je ein Geradenpaar, da $(a\,a')$ einen Doppelpunkt besitzt. Die Geraden sind $a_1\ a_2\ a_1'\ a_2'$ und da die Ebene $a_1\,a_2$ durch σ geht, so kann nur $a_1\,a_1'$ das eine, $a_2\,a_2'$ das andere Geradenpaar sein, daher müssen die Ebenen $(a_1\,a_1')$ und $(a_2\,a_2')$ durch σ_1 gehen. $(a_1\,a_1')$ gehört zu $\mathfrak{S}_1$ und $(a_2\,a_2')$ zu $\mathfrak{S}_1'$.

Auf analoge Art findet man die Vertheilung der Geraden von Φ^4 zur Schaar $\mathfrak{S}_1\ \mathfrak{S}_1'$ und aus der Vertheilung in $\mathfrak{S}\ \mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}_1\ \mathfrak{S}_1'$ auch die Vertheilung auf die übrigen Schaaren. Man erhält folgendes Schema:

---

[1] Cf. Clebsch l. c.

$$\begin{array}{llllllll}
(a_1\,a_2) & (b_1\,b_2) & (c_1\,c_2) & (d_1\,d_2) & \text{gehören} & \text{zur} & \text{Schaar} & \mathfrak{S} \\
(a_1'\,a_2') & (b_1'\,b_2') & (c_1'\,c_2') & (d_1'\,d_2') & \text{„} & \text{„} & \text{„} & \mathfrak{S}' \\
(a_1\,a_1') & (b_1\,b_1') & (c_1\,c_1') & (d_1\,d_1') & \text{„} & \text{„} & \text{„} & \mathfrak{S}_1 \\
(a_2\,a_2') & (b_2\,b_2') & (c_2\,c_2') & (d_2\,d_2') & \text{„} & \text{„} & \text{„} & \mathfrak{S}_1' \\
(a_1\,b_2') & (a_2'\,b_1) & (c_2\,d_1') & (c_1'\,d_2) & \text{„} & \text{„} & \text{„} & \mathfrak{S}_2 \\
(a_2\,b_1') & (a_1'\,b_2) & (c_1\,d_2') & (c_2'\,d_1) & \text{„} & \text{„} & \text{„} & \mathfrak{S}_2' \\
(a_1\,c_2') & (a_2'\,c_1) & (b_2\,d_1') & (b_1'\,d_2) & \text{„} & \text{„} & \text{„} & \mathfrak{S}_3 \\
(a_2\,c_1') & (a_1'\,c_2) & (b_1\,d_2') & (b_2'\,d_1) & \text{„} & \text{„} & \text{„} & \mathfrak{S}_3' \\
(a_1\,d_2') & (a_2'\,d_1) & (b_2\,c_1') & (b_1'\,c_2) & \text{„} & \text{„} & \text{„} & \mathfrak{S}_4 \\
(a_2\,d_1') & (a_1'\,d_2) & (b_1\,c_2') & (b_2'\,c_1) & \text{„} & \text{„} & \text{„} & \mathfrak{S}_4'
\end{array}$$

Hat man nämlich die Vertheilung der Geraden unter $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}', \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_1'$ festgesetzt und will die Vertheilung der Geraden $a_1\ a_2\ \ b_1'\,b_2'$ unter $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_2'$ angeben, da die Ebene $(a\,b')$ durch σ_2 geht; so braucht man nur zu bestimmen, welche von den Geraden $b_1'\,b_2'$ die Gerade a_1 trifft. Da nun $(a_1\,a_1')$ $(b_1\,b_1')$ zu $\mathfrak{S}_1$ gehören, so können sich diese Geradenpaare nicht schneiden, also muss a_1 die b_2' schneiden und $(a_1\,b_2')$ gehört zu einer $(a_2\,b_1')$ zur anderen Schaar deren Ebenen durch σ_2 gehen. Auf diese Art gelangt man zur vollständigen Vertheilung der Geraden.

Jede Gerade der Fläche vierter Ordnung wird von fünf anderen geschnitten, welche in den Ebenen liegen, die durch die angenommenen Geraden und die fünf Kegelspitzen $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ der doppelt umschriebenen Kegel zweiten Grades gehen.

Schreibt man die Geraden in der Weise an:

$$\begin{array}{llll} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2' & b_2' & c_2' & d_2' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{llll} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1' & b_1' & c_1' & d_1' \end{array} \qquad \text{II}$$

so wird jede Gerade der einen Gruppe von den Geraden derselben Gruppe getroffen, welche in der anderen Zeile stehen, mit Ausnahme derjenigen Geraden, welche über oder unter der herausgenommenen steht, überdies wird dieselbe noch von den zwei Geraden der anderen Gruppe getroffen, welche denselben Buchstaben haben.

So z. B. wird c_1 getroffen von $a_2'\ \ b_2'\ \ d_2'\ \ c_2\ \ c_1'$
b_1' „ „ $a_2\ \ c_2\ \ d_2\ \ b_2'\ \ b_1$

Eine solche Gruppe von acht Geraden, wie oben zwei angeschrieben sind, nennt man eine Doppelvier, jede Gerade derselben wird von dreien getroffen und ist zur vierten windschief. Es frägt sich, zu wie viel Doppelvieren lassen sich die 16 Geraden von Φ^4 anordnen oder auf wie viele Arten kann man die 16 Geraden in der Art wie unter II anschreiben?

Nimmt man eine beliebige l von den 16 Geraden heraus, und legt durch sie und zwei der Kegelspitzen $\sigma_i \sigma_h$ Ebenen, so enthalten diese je eine Gerade $m' n'$, legt man nun durch m' und σ_h sowie n' und σ_i die Ebenen, so schneidet sich diese in einer Geraden der Fläche, die wir o nennen wollen.

Seien nun $\sigma_i \sigma_h \sigma_k$ irgend drei der 5 Punkte $i, h, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ $(\sigma_o = \sigma)$, man lege durch l und diese die Ebenen, so erhält man die drei Geraden $m' n' o'$, legt man durch diese und $\sigma_i \sigma_h \sigma_k$ wieder Ebenen, so schneiden sich dieselben paarweise in den drei Geraden m, n, o, die zu l windschief sind.

Legt man durch diese und $\sigma_i \sigma_h \sigma_k$ Ebenen, so schneiden sich dieselben in einer Geraden l', die zu m' n' o' und l windschief ist. Daher ist

$$\begin{matrix} l & m & n & o \\ l' & m' & n' & o' \end{matrix}$$

eine solche Doppelvier. Da dieselbe also durch eine Gerade und drei der Kegelspitzen bestimmt ist, so erhält man zu jeder Geraden $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ Doppelviere und da jede Doppelvier acht Geraden enthält, so haben wir im Ganzen $\frac{1}{8}.16.10 = 20$ Doppelviere, welche sich in 10 Paare derart theilen, dass jedes Paar alle 16 Geraden der Fläche enthält. Man kann also in zehn verschiedenen Arten die 16 Geraden von Φ^4 in der Form II anschreiben.

Zwei zu einander windschiefe Gerade der Fläche Φ^4 werden von zwei und nur zwei Geraden der Fläche gleichzeitig getroffen. Seien l und m windschief und es werde l von l' und m von m' getroffen. Dabei sei ll' in derselben Schaar $\mathfrak{S}_i$ enthalten, wie mm'. Dann wird $(l l')$ und $(m m')$ von den vier Geradenpaaren der conjungirten Schaar getroffen. Würden zwei Gerade von drei anderen geschnitten werden, so müssten das Hyperboloid, welches durch

diese fünf Geraden geht, auch a^2 enthalten, also ein Theil von Φ^4 sein. Daher müssen die Geraden lm, lm' $l'm$, $l'm'$ jedes von zwei der obigen vier Geradenpaare der conjungirten Schaar getroffen werden.

Vier solche Gerade bilden ein windschiefes Vierseit, dessen vier Seiten auf Φ^4 liegen, die Diagonalen, welche die vier Punkte noch paarweise verbinden, gehen durch zwei der Kegelspitzen, da sie in der Ebene zweier Geradenpaare liegen, also Schnittlinien zweier Tangentialebenen, der Φ^4 doppeltumschriebenen Kegel zweiter Ordnung sind.

Es gibt 40 solche Vierseite. Jedes sich schneidende Geradenpaar tritt in vier Vierseiten auf, da es von vier Geradenpaaren der conjungirten Schaar getroffen wird. Jedes Vierseit enthält vier Geradenpaare. Also gibt es so viele Vierseite als sich schneidende Geradenpaare. Da jede Gerade von 5 getroffen wird, so gibt es $\frac{1}{2}\,16.5 = 40$ sich schneidende Geradenpaare und ebensoviele windschiefe Vierseite auf Φ^4.

Oder, je zwei windschiefe Geraden bestimmen ein Vierseit, da es $\frac{1}{2}\,.16.15 = 120$ Combinationen der 16 Geraden zu zwei gibt, von denen, wie wir eben sahen, 40 sich schneidende Geradenpaare liefern, so sind $120 - 40 = 80$ Paare windschiefer Geraden vorhanden, die $\frac{1}{2}\,80 = 40$ Vierseite geben.

Jedes Vierseit gehört zu drei Doppelvieren, da eine Seite derselben nur noch von drei anderen Geraden getroffen wird, von denen eine zu den zwei Seiten des Vierseites genommen, die Doppelvier bestimmt. In einer Doppelvier sind 6 Vierseite enthalten, was die $\frac{1}{3}\,.6.20 = 40$ Vierseite gibt.

Jedes der Vierseite hat 4 von den 40 Schnittpunkten der Geraden von Φ^4 zu Ecken. Die Diagonalen der Vierseite gehen durch σ, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, und zwar gehen von den 80 Diagonalen je 16 durch einen der Punkte. Diese 16 Geraden liegen zu 4 in 8 Ebenen. Jedes Geradenpaar wird nämlich von den vier conjungirten geschnitten und die Diagonalen dieser Vierseite, welche in der Ebene des festen Geradenpaares liegen, gehen

durch den in dieser Ebene enthaltenen Punkt σ_i. Die anderen vier Diagonalen dieser Vierseite, welche also alle durch den Scheitel des angenommenen Geradenpaares gehen, gehen durch je einen der vier übrigen Punkte σ_h. Projicirt man daher aus einem Schnittpunkte zweier Geraden die Punkte σ_h, welche nicht in der Ebene des Geradenpaares liegen, so erhält man auf Φ^4 unter den Schnittpunkten der Projectionsstrahlen vier weitere Scheitel von Geradenpaaren, deren Ebenen durch denselben Punkt σ_i geht, wie die des angenommenen Geradenpaares, zu dem die ersteren conjungirt sind.

Die 8 Scheitel der 8 Geradenpaare, welche zu einer Schaar und ihrer conjungirten gehören, liegen auf je einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species. Für die Schaar $\mathfrak{S}\mathfrak{S}'$ haben wir dieselben auf der Curve r^4 gefunden. Für die Schaaren $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_1'$; $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_2'$; $\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_3'$; $\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_4'$ bemerken wir, dass die Scheitel immer paarweise den Schnittpunkten der Geradenpaare auf H^2 entsprechen, welche 4 Schnittpunkte in den Ebenen Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 liegen.

Also liegen die ihnen entsprechenden Punkte auf Φ^4 auf den Curven vierter Ordnung r_1^4, r_2^4, r_3^4, r_4^4, welche den Kegelschnitten von H^2 entsprechen, deren Ebenen Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 sind. Diese letzteren Raumcurven werden aus σ durch Kegel zweiter Ordnung projicirt.

Jede r_i^4 wird überdies aus den Punkten σ_h, σ_k, σ_l durch Kegel zweiter Ordnung projicirt, für welche h, k, l von i verschieden ist. r^4 wird aus σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 durch Kegel zweiter Ordnung projicirt. (Siehe pag. 935.)

Aus dem Vorhergehenden ersieht man also: Nimmt man auf r_i^4 ($i = 0, 1, 2, 3, 4$ $r_0^4 = r^4$) einen Scheitel eines Geradenpaares an, projicirt diesen Punkt aus den vier Punkten σ_h, σ_k, σ_l, σ_m wo h, k, l, m von i verschieden sind, so erhält man vier weitere Scheitel von Geradenpaaren, diese aus denselben Punkten auf r_i^4 projicirt, liefern ausser den angenommenen nur noch drei weitere Punkte, welche auch Scheitel von Geradenpaaren sind. Diese 8 Punkte sind die Scheitel der Geradenpaare einer Schaar und ihrer conjungirten. Sie sind acht Punkte durch die ein Netz von Flächen

zweiter Ordnung geht. Dies letztere ersieht man aus ihrem Verhalten den Kegelspitzen gegenüber.

Die 40 Scheitel trennen sich so in fünf Gruppen zu acht. Jede solche Gruppe gehört zu einem der Punkte σ_i und die 32 anderen Punkte liegen paarweise auf den 16 bereits erwähnten Geraden, welche durch σ_i gehen. Die Curve r_i^4, auf welcher die 8 Punkte liegen, wird aus σ_i durch einen Kegel vierter Ordnung mit zwei Doppelkanten projicirt.

Nimmt man ein Vierseit heraus, so gehen seine zwei Diagonalen durch zwei Punkte σ_h, σ_k. Projicirt man dieses Vierseit aus den drei übrigen Punkten σ auf Φ^4, so erhält man drei neue Vierseite, deren Diagonalen auch durch σ_k, σ_h gehen. Diese vier Vierseite enthalten alle 16 Geraden von Φ^4. So z. B. ist:

$\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{matrix}$ ein Vierseit, dessen Diagonalen $(a_1 a_2 \quad a_1' a_2')$ durch σ $(a_1 a_1' \quad a_2 a_1')$ durch σ_1 gehen, projicirt man es aus

σ_2 so erhält man das Vierseit $\begin{matrix} b_2' & b_1' \\ b_2 & b_1 \end{matrix}$

aus σ_3 „ „ „ „ „ $\begin{matrix} c_2' & c_1' \\ c_2 & c_1 \end{matrix}$

„ σ_4 „ „ „ „ „ $\begin{matrix} d_2' & d_1' \\ d_2 & d_1 \end{matrix}$

Diese drei Vierseite schicken ihre Diagonalen durch σ und σ_1. Hiebei werden die zwei Ecken, deren Verbindungsgerade durch σ geht, nach der Projection zwei Ecken gaben, deren Verbindungslinie wieder durch σ geht.

Man kann also die 40 Vierseite in zehn Gruppen zu vier so theilen, dass jede Gruppe alle 16 Geraden enthält,

---

Es sollen noch die Raumcurven vierter Ordnung erster Species c^4 betrachtet werden, die auf Φ^4 liegen. Jede Fläche zweiter Ordnung, die durch a^2 geht, kann Φ^4 nur in einer Raumcurve vierter Ordnung schneiden, durch die ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung geht, umgekehrt ist auf Φ^4 eine c^4 vorhanden, so enthält die Fläche, welche durch dieselbe und einen Punkt von a^2 geht letzteren Doppelkegelschnitt ganz und schneidet Φ^4 nicht mehr. Jede andere durch c^4 gehende Fläche zweiter Ordnung

trifft Φ^4 noch in einer zweiten Curve d^4, die von vierter Ordnung und erster Species sein muss. c^4 und d^4 sollen conjungirt genannt werden. Auf Φ^4 sind also ∞^4 Curven vierter Ordnung, erster Species enthalten, da durch a^2 nur ∞^4 Flächen zweiter Ordnung gehen. Zu jeder c^4 sind ∞^1 Curven d^4 conjungirt, unter denen auch a^2 auftritt.

Unter den ∞^4 Curven c^4 gibt es fünf ∞^3 Systeme besonders ausgezeichneter Curven gegenüber den fünf Punkten $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, indem jede Curve eines solchen ∞^3 Systems aus einem der Punkte durch einen Kegel zweiter Ordnung projicirt wird.

Nehmen wir das zu σ gehörige System von ∞^3 Curven c^4. Nach unserer früheren Beziehung von H^2 zu Φ^4 ersehen wir ohne weiters, dass den Kegelschnitten c^2 von H^2 dieses System von Curven c^4 entspricht, indem jede Curve c^4 auf einem Kegel zweiter Ordnung aus σ liegt und auf der Fläche des Gebüsches, welches wir im Anfang betrachteten, deren Pol für A der Pol des Kegelschnittes c^2 für H^2 ist. Da sich je zwei Kegelschnitte c^2, c_1^2 in zwei Punkten schneiden, denen auf Φ^4 vier in einer durch σ gehenden Ebene liegende Punkte entsprechen, die auf c^4 und c_1^4 liegen, so können c^4 und c_1^4 nicht auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, da sie sonst acht Punkte gemeinschaftlich haben müssten. Legt man also durch eine Curve C^4, welche einem der Systeme ∞^3 angehört, eine Fläche zweiter Ordnung, so schneidet sie Φ^4 in einer Curve d^4, welche diesem Systeme nicht angehört.

Jedem Kegelschnitte c^2 von H^2, dessen Ebene durch einen der vier Punkte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ geht, z. B. durch σ_1 entspricht eine c^4, die ausser aus σ auch aus σ_1 durch einen Kegel zweiter Ordnung projicirt wird, denn der Pol $\mathfrak{p}$ von c^2 für H^2 liegt auf Σ_1 und daher wird die Fläche P^2 des Gebüsches, deren Pol für a^2 $\mathfrak{p}$ ist, die Fläche Σ^2 in dem Kegelschnitte p^2 treffen, dessen Pol für P^2 der Punkt σ ist. Da nun c^4 auf dem Kegel H^2 zweiter Ordnung mit der Spitze σ und auf P^2 liegt, so sind die drei anderen Punkte, aus denen c^4 durch Kegel zweiter Ordnung projicirt wird, in der Polarebene von σ für P^2, d. h. in der Ebene $\mathfrak{P}$ von p^2 enthalten. Da diese die Polarebene von $\mathfrak{p}$ für Σ^2 ist, so geht sie durch σ_1, und σ_1 hat für p^2 dieselbe

Polare, wie für die Trace von H^2 auf $\mathfrak{P}$, d. h. σ_1 ist ein Punkt, aus dem c^4 durch einen Kegel weiter Ordnung projicirt wird.

Hieraus folgt: dem Büschel von Kegelschnitten, deren Ebenen durch zwei der vier Punkte $\sigma_1\, \sigma_3\, \sigma_3\, \sigma_4$ gehen, entsprechen auf Φ^4 Curven vierter Ordnung, welche aus σ und aus diesen zwei Punkten durch Kegel zweiter Ordnung projicirt werden. Den Kegelschnitten von H^2, welche in den Ebenen durch drei der vier Punkte liegen, entsprechen die Curven r_1^4, r_2^4, r_3^4, r_4^4, welche aus σ und aus diesen drei Punkten durch Kegel zweiter Ordnung projicirt werden. r_1^4 wird aus $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ projicirt und entspricht dem Kegelschnitte c_1^2 auf H^2, dessen Ebene $\overline{\sigma_2\sigma_3\sigma_4} = \Sigma_1$ ist. Auf diesen Curven liegen die Schnittpunkte der 16 Geraden von Φ^4, wenn noch r^4 hinzugenommen wird, welche h^4 auf H^2 entspricht, und die aus σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 durch Kegel zweiter Ordnung projicirt wird, also nicht dem eben betrachteten ∞^3 System von Curven angehört.

Da σ gegenüber den anderen Punkten nicht ausgezeichnet ist, so kann man folgenden Satz aussprechen:

Auf Φ^4 existirt ein ∞^4 System von Raumcurven vierter Ordnung, erster Species. Hievon sind fünf Systeme von ∞^3 Curven dadurch ausgezeichnet, dass sie aus je einem der Punkte σ, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 durch Kegel zweiter Ordnung projicirt werden. Je zwei dieser fünf Systeme ∞^3 haben ein System ∞^2 Curven gemeinschaftlich, die aus zwei der Punkte durch Kegel zweiter Ordnung projicirt werden. Es gibt zehn solche Systeme ∞^2. Je zwei dieser letzteren haben ein System ∞^1 gemeinschaftlich, dessen Curven aus dreien der Punkte $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ durch Kegel zweiter Ordnung projicirt werden. Jedes dieser ∞^1 Systeme gehört drei Systemen ∞^2 an und drei Systemen ∞^3 an. Es sind zehn Systeme ∞^1 vorhanden. Je zwei dieser Systeme ∞^1 haben eine Curve gemeinschaftlich, welche aus vieren der Punkte $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ durch Kegel zweiter Ordnung projicirt wird. Jede Curve gehört vier Systemen ∞^1, sechs Systemen ∞^2 und vier Systemen ∞^3 an. Diese Curven sind die bereis erwähnten $r^4\, r_1^4\, r_2^4\, r_3^4\, r_4^4$. Sie sind die Berührungscurven der

Kegel vierter Ordnung, die aus $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ an Φ^4 gelegt werden können.

Die Curven des Systems ∞^1 sind in einem Flächenbüschel zweiter Ordnung enthalten, dessen Basis aus a^2 und einem nicht auf Φ^4 liegenden Kegelschnitte besteht. Die Curven des Systems ∞^2 liegen auf Flächen zweiter Ordnung eines Netzes, das durch a^2 und zwei feste Punkte geht. Unter diesen treten auch die im Kegelschnittpaare zerfallenden Curven auf.

Durch jeden Punkt $\mathfrak{x}$ von Φ^4 geht ein Büschel von Curven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt in diesem Punkte. Denn schneidet die Tangentialebene von Φ^4 in $\mathfrak{x}$ den Kegelschnitt a^2 in $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$, so geht durch die Geraden $\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1}$ und $\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{x}_2}$ und den Kegelschnitt a^2 ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung, welche Φ^4 in Curven vierter Ordnung mit dem Doppelpunkte in $\mathfrak{x}$ schneiden. Die Curven, deren Doppelpunkte auf den Raumcurven $r^4, r_1^4, r_2^4, r_3^4, r_4^4$ liegen, treten in den Systemen ∞^3 auf, welches dem betreffenden Punkte σ_i zugehört, aus dem die Curven r_i^4 durch einen Kegel vierter Ordnung projicirt wird.

Die dem Doppelkegelschnitt a^2 und H^2 gemeinschaftlich umschriebene Developable Δ berührt H^2 in der Curve a^4. Die vier Schnittpunkte eines Kegelschnittes c^2 mit derselben haben zu entsprechenden Punkten die vier Punkte, in denen c^4 die Ebene A respective den Kegelschnitt a^2 trifft. Der Kegel, welcher c^4 aus σ projicirt, schneidet Φ^4 noch in einer Curve, die dem Kegelschnitte c_1^2 entspricht, der auf dem Kegel liegt, welcher c^2 aus $\mathfrak{a}$ projicirt. Dieser Kegelschnitt c_1^2 schneidet also a^4 in den vier Punkten, welche aus $\mathfrak{a}$ projicirt die vier Schnittpunkte von c^2 geben.

Die entsprechende Curve c_1^4 schneidet auch in der That A respective a^2 in denselben Punkten, wie c^4.

Den Kegelschnitten, welche a^4 doppelt berühren, deren Ebenen also durch $\mathfrak{a}$ gehen, entsprechen ebenen Curven vierter Ordnung mit einem Selbstberührungspunkt auf a^2, ihre Ebene berührt a^2 in diesem Punkte. [Den Kegelschnitten c^2, deren Ebenen durch $\mathfrak{a}$ gehen, entsprechen stets ebenen Curven auf Φ^4, deren Ebenen durch σ gehen.]

Sei t, t_1, t_2 das k^2 und a^2 gemeinschaftlich conjungirte Tripel, dann wird a^4 auch aus diesen Punkten durch Kegel zweiter Ordnung projicirt. Legt man durch diese Punkte eine a^4 doppelt berührende Ebene, so enthält dieselbe einen Kegelschnitt c^2 von H^2, dem auf Φ^4 eine Raumcurve vierter Ordnung c^4 entsprechen muss, welche A respective a^2 nur in zwei Punkten trifft, d. h., welche A in zwei Punkten berührt.

Diese Curve c^4 liegt auch auf einer Fläche zweiter Ordnung $\mathfrak{P}^2$ des Gebüsches, deren Pol $\mathfrak{p}$ für A der Pol von c^2 für H^2 ist. Da nun die Tangentialebenen der Kegel, welche a^4 aus t, t_1, t_3 projiciren, zu Polarfiguren für H^2 die Doppelkegelschnitte δ^2, δ^2_1, δ^2_2 der Developablen Δ haben, so erkennen wir, dass die Flächen des Gebüsches, deren Pole für A auf den Doppelkegelschnitten δ^2, δ^2_1, δ^2_2 von Δ liegen, die Φ^4 in Curve vierter Ordnung treffen, welche A in zwei Punkten berühren.

Für die früher erwähnten ebenen Curven vierter Ordnung, welche von zerfallenden Flächen des Gebüsches ausgeschnitten werden, haben letztere ihre Pole auf A respective a^2, wenn die Curve vierter Ordnung einen Selbstberührungspunkt erhalten soll.

Construction der 16 Geraden einer Fläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt.

(Hiezu eine Tafel.)

Für die Darstellung der Geraden der Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt ist besonders der Fall bemerkenswerth, in welchem alle 16 Geraden reell sind. Hiezu ist erforderlich, dass der Doppelkegelschnitt a^2 selbst reell ist, ferner, dass die auf pag. 18 erwähnten acht Geraden der Fläche zweiter Ordnung H^2, der wir nach Früherem Φ^4 entsprechen lassen, reell sind. Dann können aber noch die Geradenpaare von Φ^4 imaginär werden, sobald ihre Ebene a^2 nicht in reellen Punkten schneidet.

In der beiliegenden Tafel wurde die Construction so angelegt, dass alle 16 Geraden sich reell ergaben.

Für Σ^2 wurde eine Kugel, mit dem Mittelpunkte σ_1, für H^2 ein zu ihr concentrisches Hyperboloid genommen. σ_2, σ_3, σ_4 sind

dann die unendlich fernen Punkte der Axen von H^2, welch' letztere den Projectionsebenen parallel angenommen wurden.

Ist nun a eine Erzeugende von H^2, welche in $\mathfrak{a}$ die Fläche Σ^2 berührt, und δ ihr Durchstosspunkt auf der Ebene von a^2, so geht die Ebene des Geradenpaares $a_1\ a_2$ durch die Polare von δ in Bezug auf a^2 und durch $\mathfrak{a}$, sowie auch durch σ, dem Pol der Ebene von a^2 für Σ^2, d. h. diese Ebene enthält die Gerade $\mathfrak{A}$, welche zu a in Bezug auf Σ^2 conjungirt ist, die natürlich auch in $\mathfrak{a}$ die Σ^2 berührt. Ist also H_1^2 die Polarfigur von H^2 in Bezug auf Σ^2, so wird H_1^2 die Σ^2 in der Raumcurve r^4 schneiden und die Gerade $\mathfrak{A}$ wird Tangente von r^4 sein. Die Ebene, welche $\mathfrak{A}$ mit σ verbindet, enthält dann das Geradenpaar $a_1\ a_2$, als Verbindungsgeraden des Punktes $\mathfrak{a}$ mit den Schnittpunkten $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2$ der Ebene mit a^2. In der Figur 1 wurde nun H_1^2 direct angenommen.

Die horizontale Projection der acht Geraden von H_1^2, welche r^4 den Schnitt von H_1^2 und Σ^2 berühren, wurden als gemeinschaftliche Tangenten der Kehlellipse von H_1^2 und der Projection $r^{4\prime}$ von r^4, die eine Ellipse ist, construirt. Die Construction ist rechts in Figur 1 ersichtlich gemacht. Links ist die Bestimmung von $r^{4\prime}$ als Schnitt von H_1^2 und Σ^2 durchgeführt.

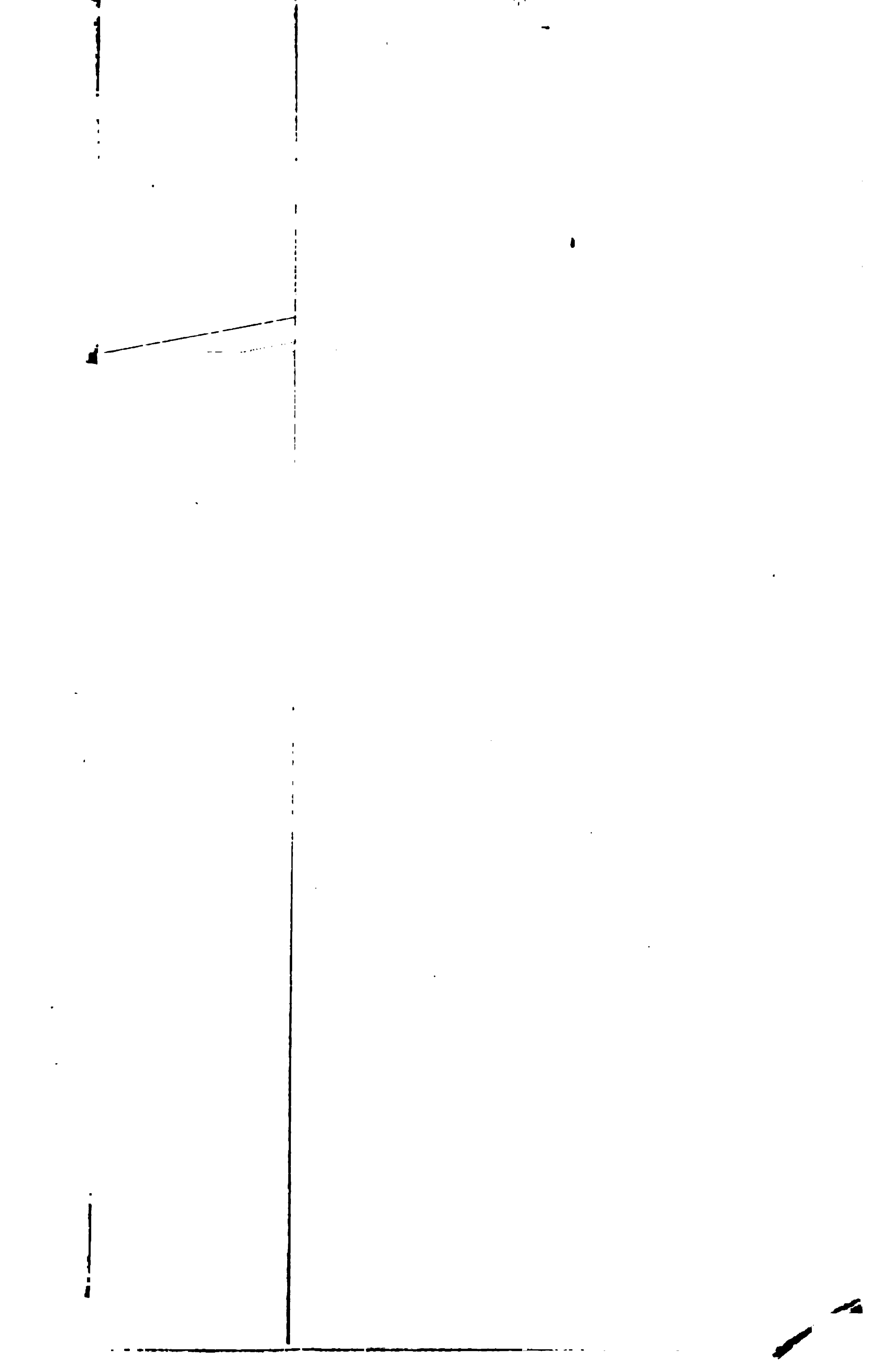
Nachdem so die horizontale Projection der acht Geraden in A', B', C', D'; $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}', \mathfrak{D}'$, von denen je zwei sich decken, bestimmt wurde, ergibt sich die verticale Projection einfach, da die Geraden Erzeugende von H_1^2 sind. Auch die verticalen Projectionen decken sich paarweise. Die acht Berührungspunkte auf Σ^2 wurden mit $a, b, c, d, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ bezeichnet.

Nun wurden durch σ, dem Pol von a^2 für Σ^2, und die acht Geraden Ebenen gelegt und ihre Tracen auf der Ebene von a^2 bestimmt. Die Ebene von a^2 hat H und V zur horizontalen, respective verticalen Trace.

Die in der Ebene von a^2 sich ergebenden Tracen wurden seitwärts in Figur 1 a in ihrer wirklichen Grösse gezeichnet, und die Schnittlinien der Ebenen durch σ und

A	B	C	D	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$ in den Geraden
α I	β II	γ III	δ IV	α 1	β 2	γ 3	δ 4

gefunden, indem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Durchstosspunkte der durch σ zu $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$, $D\mathfrak{D}$ parallel gezogenen Geraden mit der Ebene von



a^2 sind, während I, II, III, IV, 1, 2, 3, 4 die Durchstosspunkte der Geraden selbst sind.

Die Geraden

$$\alpha\,\mathrm{I} \quad \beta\,\mathrm{II} \quad \gamma\,\mathrm{III} \quad \delta\,\mathrm{IV} \quad \alpha\,1 \quad \beta\,2 \quad \gamma\,3 \quad \delta\,4$$

schneiden a^2 in den Punktepaaren

$$a_1\ a_2,\quad b_1\ b_2,\quad c_1\ c_2,\quad d_1\ d_2,\quad \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2,\quad \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_2,\quad \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{c}_2,\quad \mathfrak{d}_1\ \mathfrak{d}_2$$

die auf den Geraden von Φ^4 liegen.

Nachdem diese Punkte construirt worden sind, wurde ihre Projection in Figur 1 bestimmt, wobei der Umstand benutzt wurde, dass a^2 ein Kreis ist, dessen Ebene und Mittelpunkt bekannt sind.

Die 16 Verbindungsgeraden der acht Punkte

$$a \quad b \quad c \quad d \quad \mathfrak{a} \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{c} \quad \mathfrak{d}$$

mit den Punktepaaren

$$a_1\ a_2,\quad b_1\ b_2,\quad c_1\ c_2,\quad d_1\ d_2,\quad \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2,\quad \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_2,\quad \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{c}_2,\quad \mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2$$

sind die 16 Geraden von Φ^4. Ihre horizontalen und verticalen Projectionen decken sich auch paarweise, da die Projectionsrichtungen durch σ_2, respective σ_3 gehen.

Die 16 Geraden von Φ^4 sind strich-punktirt gezeichnet.

Nach der Figur 1 ist es nun sehr leicht möglich, ein Fadenmodell der 16 Geraden zu construiren und wurde in Figur 2 eine axonometrische Ansicht eines solchen gezeichnet. Nebstbei habe ich auch ein Fadenmodell wirklich hergestellt, welches sich im mathematischen Seminar der hiesigen deutschen Universität befindet.

Prag, 1884.

Bahnbestimmung des Planeten (232) Russia.

II. Abhandlung.

Von Dr. Norbert Herz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. December 1884.)

In den Sitzungsberichten der k. Akademie der Wissenschaften Bd. LXXXVIII, pag. 1166 ff. habe ich aus zehn beziehungsweise acht Normalorten, welche sich aus 28 Beobachtungen der ersten Opposition ergaben, zwei Elementensysteme und Oppositionsephemeriden für 1884 berechnet, von denen sich das zweite System (Elemente IV, pag. 1193) durch die Beobachtungen der zweiten Opposition als das richtigere erwies. Der Planet wurde auf Grund derselben von Herrn Dr. J. Palisa in Wien am 27. Juli wieder aufgefunden (s. Circular zum Berliner Astronomischen Jahrbuch Nr. 233) und hierauf von Herrn Baron v. Engelhardt in Dresden bis zum 18. August beobachtet. Die erhaltenen Beobachtungen sind die folgenden:

		Mittl. Ortszeit	α	δ	Grösse	Circ.-Nr.
1884 Juli 27	Wien ...	10ʰ26ᵐ14ˢ	20ʰ50ᵐ23ˢ50	−13°35′ 8″2	—	233
„ 27	„	12 59 9	20 50 17·62	−13 35 47·6	—	233
„ 31	Dresden	12 13 52	20 46 41·98	−13 59 6·9	14·0	234
Aug. 16	„	11 32 39	20 33 3·09	—	14·0	235
„ 16	„	11 34 19	—	−15 32 12·7	—	235
„ 18	„	11 9 10	20 31 34·50	−15 43 1·4	14·3	235
„ 18	„	11 35 27	20 31 33·64	−15 43 7·5	—	235

Die angegebenen mittleren Örter der benützten Vergleichssterne sind:

	α	δ	Circ.-Nr.
1.	20ʰ30ᵐ50ˢ75	−15°32′52·6	235γ
2.	20 45 8·96	−14 10 57·5	234a
3.	20 48 2·53	−13 35 52·2	233a

Um die Positionen möglichst sicher zu erhalten, wurden auch diesmal, wie dies schon früher geschah, die Örter der Vergleichssterne aus möglichst vielen Sterncatalogen entnommen; es ergab sich hiefür das folgende Schema, bei welchem in der ✓

Nr.	Epoche des Catalogs	Gr.	Angabe des Catalogs α	Angabe des Catalogs δ
1	1800 Lalande 39723	7½	20h 26m 7s70	−15°49'44"6
	1836 Rümker 8460	—	20 28 8·862	−15 42 37·45
	1840 Armagh 4422	6	20 28 22·50	−15 41 45·49
	1850 Lamont .... 1227[1]	8	20 28 56·79	−15 39 44·8
	1850 Argelander Öltzen 20659	7	20 28 56·30	−15 39 44·0
	1850 Newcomb 916	—	20 28 56·244	−15 39 47·21
	1860 Yarnall 8942	6·5	20 29 29·96	−15 37 43·9
	1860 Sec. Radcliffe 1996	6·0	20 29 29·90	−15 37 48·0
	1864 New Seven Year Cat. 2321	6	20 29 43·43	−15 36 59·06
2	1825 Weisse.......XX 1114	8·9	20 41 52·81	−14 23 56·0
	1850 Lamont 3410	9	20 43 15·95	−14 18 21·9
	1860 Santini 1908	8	20 43 48·90	−14 16 14·1
3	1800 Lalande......... 40349	9	20 43 23·84	−13 54 17·0
	1825 Weisse.......XX 1184	9	20 44 47·23	−13 49 0·1
	1850 Lamont 3429	8	20 46 9·97	−13 43 25·2
	1860 Santini 1913	8·9	20 46 42·76	−13 41 13·0
	1865 Schjellrup 8359	8·7	20 46 59·57	−13 40 6·6

Vergleicht man die erhaltenen Mittelwerthe mit den im Circular angegebenen Werthen, so erhält man die folgenden Correctionen:

	α	δ
1.	+0s03	+1"0
2.	+0·04	0·0
3.	−0·02	+1·5

[1] Obzwar der Werth von Lamont 1227 in *AR* vom Mittelwerthe um 0s5 ausweicht, war doch kein genügender Grund vorhanden, denselben auszuschliessen.

mit „Correction δ“ überschriebenen Columne die Reductionen auf ein mittleres System (Auwers, Astronomische Nachrichten Bd. 64) eingetragen sind.

Reduction auf 1884·0		Corr.	Mittlerer Ort für 1884·0		Mittel	
α	δ	δ	α	δ	α	δ
+4m43s07	+16'56"57	—2"26	20h30m50s77	—15°32'50"3		
+2 41·664	+ 9 44·21	+0·97	50·53	52·3		
+2 28·18	+ 8 55·88	—0·46	50·68	50·1		
+1 54·48	+ 6 54·7		51·27	50·1		
+1 54·48	+ 6 54·73	—0·66	50·78	49·9		
+1 54·485	+ 6 54·73		50·73	52·5		
+1 20·80	+ 4 53·2		50·76	50·7		
+1 20·80	+ 4 53·21	+0·61	50·70	54·2		
+1 7·33	+ 4 4·5		50·76	54·6	50s78	32'51"6
+3 16·36	+12 54·26	+0·95	20 45 9·17	—14 11 0·8		
+1 53·11	+ 7 27·7		9·06	10 54·2		
+1 19·88	+ 5 16·4		8·78	10 57·7	9·00	10 57·5
+4 38·53	+18 34·60	—2·31	20 48 2·37	—13 35 44·7		
+3 15·55	+13 5·53	+0·94	2·78	53·6		
+1 52·65	+ 7 34·1		2·62	51·1		
+1 19·51	+ 5 21·0		2·27	52·0		
+1 2·94	+ 4 14·3		2·51	52·3	2·51	35 50·7

Dieselben sind so klein, dass man eigentlich auf dieselben gar nicht Rücksicht zu nehmen brauchte; doch da sie einmal gerechnet waren, und ihre Anbringung keinen Schwierigkeiten unterlag, so wurden dieselben, wie schon früher in der Weise verwendet, dass sie direct an die angegebenen Coordinaten des Planeten angebracht wurden.

Zur Bildung eines Normalortes wurden nun die erwähnten Beobachtungen mit einer genauen aus den Elementen IV abgeleiteten Ephemeride verglichen. Für den Zeitraum, über welchen

sich die Beobachtungen erstrecken, theile ich dieselbe im Folgenden mit.

12h M. Z. B.		α app	δ app	log r	log ρ	Abzt.
Juli	26	20h 51m 9s41	−13°29'59"9	0·417994	0·206611	13m23s
	27	20 50 15·34	−13 35 48·1	0·418293	0·206722	13 23
	28	20 49 21·08	−13 41 38·6	0·418591	0·206905	13 23
	29	20 48 26·71	−13 47 31·0	0·418889	0·207162	13 24
	30	20 47 32·27	−13 53 24·9	0·419186	0·207493	13 24
	31	20 46 37·84	−13 59 20·1	0·419482	0·207896	13 25
Aug.	1	20 45 43·49	−14 5 16·1	0·419778	0·208370	13 26
	2	20 44 49·26	−14 11 12·7	0·420073	0·208916	13 27
	3	20 43 55·24	−14 17 9·6	0·420367	0·209536	13 28
	4	20 43 1·47	−14 23 6·4	0·420661	0·210228	13 29
	5	20 42 8·01	−14 29 2·5	0·420954	0·210991	13 31
	6	20 41 14·93	−14 34 57·9	0·421247	0·211823	13 32
	7	20 40 22·31	−14 40 52·6	0·421538	0·212727	13 34
	8	20 39 30·21	−14 46 46·4	0·421829	0·213699	13 36
	9	20 38 38·66	−14 52 38·3	0·422119	0·214739	13 38
	10	20 37 47·72	−14 58 28·3	0·422409	0·215847	13 40
	11	20 36 57·42	−15 4 16·0	0·422699	0·217024	13 42
	12	20 36 7·84	−15 10 1·2	0·422988	0·218268	13 45
	13	20 35 19·03	−15 15 43·9	0·423276	0·219575	13 47
	14	20 34 31·06	−15 21 23·8	0·423564	0·220947	13 50
	15	20 33 44·02	−15 27 0·3	0·423852	0·222383	13 52
	16	20 32 57·95	−15 32 33·2	0·424138	0·223883	13 55
	17	20 32 12·88	−15 38 2·3	0·424423	0·225446	13 58
	18	20 31 28·85	−15 43 27·4	0·424708	0·227072	14 1
	19	20 30 45·90	−15 48 48·2	0·424992	0·228760	14 5

Die folgende Tabelle enthält nun die an die Beobachtungen anzubringenden Correctionen wegen des Vergleichssternes, wegen Parallaxe, die so corrigirten beobachteten Positionen; ferner die aus der Ephemeride interpolirten (berechneten) Coordinaten, und die Unterschiede im Sinne Beobachtung — Rechnung, also die Correctionen der Ephemeride. Dass dieselben so klein ausgefallen sind, muss als ein Zufall betrachtet werden, wenngleich die zahlreichen Beobachtungen der ersten Opposition, welche einen Zeitraum von circa 3 Monaten umfassen, auf eine recht gute Bahnbestimmung schliessen lassen konnten. Es war auch vorauszusehen, dass den vorhandenen Abweichungen gemäss die Bahnelemente nur unbedeutende Veränderungen erfahren würden.

	Correction				Corrigirter Ort		Berechneter Ort		Correct. d. Ephem.	
	wegen Vgl. *		wegen Parallaxe							
	α	δ	α	δ	α	δ	α	δ	α	δ
1	—0ˢ02	+1″5	—0ˢ10	+4″7	20ʰ50ᵐ23ˢ38	—13°35′ 2″0	20ʰ50ᵐ19ˢ83	—13°35′17″7	+3ˢ55	+15″7
2	—0·02	+1·5	+0·04	+4·8	20 50 17·64	—13 35 41·3	20 50 14·06	—13 35 54·9	+3·58	+13·6
3	+0·04	0·0	+0·01	+5·0	20 46 42·03	—13 59 1·9	20 46 37·81	—13 59 19·9	+4·22	+18·0
4	+0·03	—	+0·04	—	20 33 3·16	—	20 37 59·30	—	+3·86	—
5	—	+1·0	—	+4·8	—	—15 32 6·9	—	—15 32 22·8	—	+15·9
6	+0·03	+1·0	+0·03	+4·8	20 31 34·56	—15 42 55·6	20 31 30·85	—15 43 11·6	+3·71	+16·0
7	+0·03	+1·0	+0·05	+4·8	20 31 33·72	—15 43 1·7	20 31 30·06	—15 43 17·4	+3.66	+15·7

Die vorliegenden Beobachtungen hätten sich nun leicht in zwei Normalorte zusammenfassen lassen können, so dass der erste aus den Beobachtungen von Juli 27 (Wien) und 31 (Dresden) mit der Correction der Ephemeride in *AR*: +3ˢ78 in Declination +15″8 für Juli 28·5, der zweite aus den übrigen mit der Correction gleich +3ˢ74 in *AR* und +15″9 in Declination für August 17·5 gebildet worden wäre. Wie schon erwähnt, waren aber nur geringe Änderungen der Elemente zu erwarten, überdies die Ephemeridencorrection für die beiden Orte nahe dieselben, so dass ich es vorzog, die sämmtlichen Beobachtungen in einen einzigen Normalort zusammenzuziehen, für welchen sich als Ephemeridencorrection

n *AR*........... + 3ˢ763
in Declination ... +15″82

für August 8·5 ergab. Hieraus folgt, bezogen auf das mittlere Äquinoctium 1883·0 der Normalort

$$1884 \text{ Aug. } 8{\cdot}5 \quad \alpha = 20^h 39^m 28^s 290 = 309^\circ 52' 4'' 35$$
$$\delta = -14^\circ 46' 59'' 63$$

Nachdem von den Beobachtungen des Jahres 1883 diejenigen von April 27, 28, 29, Mai 1 und 6 ausgeschlossen werden mussten, habe ich, um dieser Opposition kein allzugrosses Übergewicht zu geben, die übrigbleibenden 23 Beobachtungen zu nur drei Normalorten in folgender Weise zusammengefasst:

				Correction der Ephemeride[1]	
				α	δ
I. Normalort:	Januar	31	Wien	+0ˢ02	0″0
	Februar	1	Wien	—0·34	+ 8·0
		3	Rom	—0·23	+ 2·3
		5	Rom	+0·34	— 2·7
		5	Palermo	+0·48	+16·2
		5	Paris	+0·35	+ 3·0
		7	Wien	—0·26	+ 6·0
		9	Palermo	—0·08	+18·7
		13	Paris	—0·28	+11·0
		14	Wien	—0·28	+ 3·4
		16	Paris	—0·36	+ 3·7
		16	Dresden	—0·30	+ 0·1
		18	Dresden	+0·17	+ 5·0
II. Normalort:	Februar	28	Rom	+0·37	+10·5
	März	2	Rom	+0·14	+ 3·6
		8	Rom	—0·31	+ 1·7
		13	Rom	+0·50	+ 3·8
		17	Rom	+0·27	+ 1·4
III. Normalort:	März	28	Dresden	+0·67	— 0·9
		30	Dresden	+1·03	— 0·7
	April	5	Dresden	—0·13	— 1·9
		7	Dresden	—0·54	— 0·6
		13	Dresden	+0·16	— 0·2

Daraus folgt als Correction der Ephemeride (l. c. pag. 1168), welcher das Elementensystem I (l. c. pag. 1166) zu Grunde liegt:

			Δα	Δδ
für den I. Normalort	Februar	9·5	Δα = —0ˢ059	Δδ = +5″75
„ II. „	März	8·5	+0·194	+4·20
„ III. „	April	4·5	+0·238	—0·86

[1] S. Sitzungsberichte Bd. LXXXVIII, pag. 1181.

Es werden somit die vier der Ausgleichung zu Grunde gelegten Normalorte, bezogen auf das mittlere Äquinoctium 1883·0

		α		δ
I.	1883 Februar 9·5	$9^h 58^m 43^s 590$	$= 149°40'53''85$	$+10°50'\ 2''13$
II.	1883 März 8·5	9 36 54·603	= 144 13 39·05	+ 14 22 57·83
III.	1883 April 4·5	9 30 43·764	= 142 40 56·46	+ 16 19 22·99
IV.	1884 August 8·5	20 39 28·290	= 309 52 4·35	— 14 46 59·63

Rechnet man aus dem Elementensystem IV die geocentrischen Coordinaten, und vergleicht dieselben mit diesen beobachteten Werthen, so ergeben sich die folgenden Differenzen im Sinne Beobachtung — Rechnung, zu denen ich gleich die für die Ausgleichung nöthigen Werthe von $\log r$, v und $\log \frac{r}{\rho}$ hinzugefügt habe, wo r, ρ, v heliocentrische und geocentrische Distanz und wahre Anomalie bedeuten.

	$\cos\delta\, d\alpha$	$d\delta$	$\log r$	v	$\log(r:\rho)$
N. O. I	$+0''36$	$-0''57$	0·35248	304°45′ 1″	0·24908
II	— 0·46	+ 0·37	0·34469	313 9 37	0·23863
III	+ 0·06	+ 0·31	0·33784	321 51 34	0·17850
IV	+51·76	+15·68	0·42183	111 20 28	0·20813

Die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler ist hiernach 2925″8. Um die Fehler wegzuschaffen, müssen an die Elemente gewisse Correctionen angebracht werden; der Ausgleichung wurden die äquatorealen Elemente zu Grunde gelegt, welche, bezogen auf das mittlere Äquinoctium 1883·0 die folgenden sind:

$M = 328°\ 8'25''02$ Epoche 1883 März 15·5
$\omega' = 191\ 43\ 44·91$
$\Omega' = 8\ 57\ 28·82$
$i' = 18\ 17\ 34·00$ $\quad\varphi = 10°0'20''49$
$\pi' = 200\ 41\ 13·73$ $\quad\log e = 4·5543400$
$\mu = 870·6486$ $\quad L' = M + \pi'$

Doch wurden, wie es sich bei der Rechnung für Planeten als vortheilhaft erweist, an Stelle von φ und π' die Grössen

$$\Phi = \sin\varphi\ \sin\pi'$$
$$\Psi = \sin\varphi\ \cos\pi'$$

eingeführt, deren numerische Werthe, in Bogenmasse angesetzt, sich zu

$$\Phi = 8_n 78802$$
$$\Psi = 9_n 21097$$

ergaben. Die Bedingungsgleichungen erhält man nun durch Berechnung des folgenden Formelsystems, wo t die seit der Epoche verflossene Zeit in mittleren Sonnentagen ist.

$$m \sin M = \sin i' \qquad \Psi \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \sec \varphi = l \qquad F \sin F' = -\frac{a}{r} \operatorname{tg} \varphi \sin v$$

$$m \cos M = -\sin(\alpha - \Omega') \cos i' \qquad \Phi \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \sec \varphi = k \qquad F \cos F' = \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi$$

$$A \sin A' = \cos(\alpha - \Omega') \cos i' \qquad \Psi \sec \varphi^2 = n \qquad G \sin G' = t . F \sin F' + h$$

$$A \cos A' = \sin(\alpha - \Omega') \qquad \Phi \sec \varphi^2 = q \qquad G \cos G' = t . F \cos F'$$

$$B \sin B' = m \sin(M + \delta) \qquad \frac{2}{3 \mu \sin 1''} = h \qquad H \sin H' = \frac{a}{r} \{ \sin(v + \pi') + l \sin v \}$$

$$B \cos B' = \cos(\alpha - \Omega') \sin \delta \qquad H \cos H' = -\{ d \cos(v + \pi') + n f \}$$

$$u = v + \omega' \qquad \frac{2 + \sin \varphi \cos v}{\cos \varphi^2} = d \qquad K \sin K' = \frac{a}{r} \{ \cos(v + \pi') - k \sin v \}$$

$$1 + \frac{(1 + \sin \varphi \cos v)^2}{2 \cos \varphi \cos {}^1/_2 \varphi^2} = f \qquad K \cos K' = \{ d \sin(v + \pi') + q f \}$$

$$\frac{\cos\delta\, d\alpha}{dL'} = \frac{r}{\rho} AF \sin(F' + A' + u) \qquad \frac{d\delta}{dL} = \frac{r}{\rho} BF \sin(F' + B' + u)$$

$$\frac{\cos\delta\, d\alpha}{d\mu} = \frac{r}{\rho} AG \sin(G' + A' + u) \qquad \frac{d\delta}{d\mu} = \frac{r}{\rho} BG \sin(G' + B' + u)$$

$$\frac{\cos\delta\, d\alpha}{d\Phi} = \frac{r}{\rho} AH \sin(H' + A' + u) \qquad \frac{d\delta}{d\Phi} = \frac{r}{\rho} BH \sin(H' + B' + u)$$

$$\frac{\cos\delta\, d\alpha}{d\Psi} = \frac{r}{\rho} AK \sin(K' + A' + u) \qquad \frac{d\delta}{d\Psi} = \frac{r}{\rho} BK \sin(K' + B' + u)$$

$$\frac{\cos\delta\, d\alpha}{\sin i'\, d\Omega'} = \frac{r}{\rho} \operatorname{tg} {}^1/_2 i' \cos(\alpha - \Omega' + u) \qquad \frac{d\delta}{\sin i'\, d\Omega'} = -\frac{r}{\rho} \{\sin(\alpha - \Omega' + u) \sin\delta \operatorname{tg} {}^1/_2 i' + \cos\delta \cos u\}$$

$$\frac{\cos\delta\, d\alpha}{di'} = -\frac{r}{\rho} \sin u \cos(\alpha - \Omega') \sin i' \qquad \frac{d\delta}{di'} = \frac{r}{\rho} \{\sin(\alpha - \Omega') \sin\delta \sin i' + \cos\delta \cos i'\} \sin u$$

und die Bedingungsgleichungen werden dann:

$$\cos\delta\, \Delta\alpha = \frac{\cos\delta\, d\alpha}{dL} \Delta L' + \frac{\cos\delta\, d\alpha}{d\mu} \Delta\mu + \frac{\cos\delta\, d\alpha}{d\Phi} \Delta\Phi + \frac{\cos\delta\, d\alpha}{d\Psi} \Delta\Psi + \frac{\cos\delta\, d\alpha}{\sin i'\, d\Omega'} \sin i'\, \Delta\Omega' + \frac{\cos\delta\, d\alpha}{di'} \Delta i'$$

$$\Delta\delta = \frac{d\delta}{dL} \Delta L' + \frac{d\delta}{d\mu} \Delta\mu + \frac{d\delta}{d\Phi} \Delta\Phi + \frac{d\delta}{d\Psi} \Delta\Psi + \frac{d\delta}{\sin i'\, d\Omega'} \sin i'\, \Delta\Omega' + \frac{d\delta}{di'} \Delta i'$$

Dieselben werden hier, wenn man die Coëfficienten logarithmisch ansetzt:

Rectascensionen:

9·55630 =	0·34010 $\Delta L'$	$+1_n78673\ \Delta\mu$	$+0\cdot55458\ \Delta\Phi$	$+0\cdot26873\ \Delta\Psi$	$+8\cdot55377 \sin i'\Delta\Omega'$	$+9\cdot47223\ \Delta i'$
9_n66276 =	0·32712	1_n82104	0·54854	0·24601	8·69151	9·34630
8·77815 =	0·25209	1_n68935	0·48719	0·13463	8·85856	9·16264
1·71399 =	0·16937	2·86985	0_n22285	0_n40968	9_n05672	9·33844

Declinationen:

9_n75587 =	$9_n74085\ \Delta L'$	$+1\cdot02750\ \Delta\mu$	$+9_n96092\ \Delta\Phi$	$+9_n63809\ \Delta\Psi$	$+0\cdot11961 \sin i'\Delta\Omega'$	$+0\cdot07381\ \Delta i'$
9·56820 =	9_n67173	1·32437	9_n88704	9_n63962	0·15861	9·98725
9·49136 =	9_n54358	1·36176	9_n77013	9_n56425	0·13403	9·81567
1·19535 =	9·37661	2·09342	9_n47107	9_n60523	9_n95978	0_n12559

Setzt man

$0\cdot55458\ \Delta\Phi = x$ $\qquad 0\cdot12559\ \Delta i' = t$

$0\cdot40968\ \Delta\Psi = y$ $\qquad 0\cdot34010\ \Delta L' = u$

$0\cdot15861 \sin i'\ \Delta\Omega' = z$ $\qquad 2\cdot86985\ \Delta\mu = v$ $\qquad$ log Fehlereinheit = 1·71399

so gehen diese Gleichungen in die folgenden über:

Rectascensionen:

0·00000 x	$+9\cdot85905\ y$	$+8\cdot39516\ z$	$+9\cdot34664\ t$	$+0\cdot00000\ u$	$+8_n91688\ v$	= 7·84231
9·99396	9·83633	8·53290	9·22071	9·98702	8_n95119	= 7_n94877
9·93261	9·72495	8·69995	9·03705	9·91199	8_n81950	= 7·06416
9_n66827	0_n00000	8_n89811	9·21285	9·82927	0·00000	= 0·00000

Declinationen:

$9_n40634\ x$	$+9_n22841\ y$	$+9\cdot96100\ z$	$9\cdot94822\ t$	$9_n40075\ u$	$+8\cdot15765\ v$	= 8_n04188
9_n33246	9_n22994	0·00000	9·86166	9_n33163	8·45452	= 7·85421
9_n21555	9_n15427	0·97542	9·69008	0_n20348	8·49191	= 7·77737
8_n91649	9_n19555	9_n80117	0_n00000	9·03651	9·22357	= 9·48136

Hieraus folgen die Normalgleichungen:

$$\begin{array}{rrrrrrcr}
+3\cdot06779\,x & +2\cdot43582\,y & -0\cdot41280\,z & +0\cdot02273\,t & +2\cdot46945\,u & -0\cdot72180\,v & = & -0\cdot49139 \\
 & +2\cdot37734\,y & -0\cdot21306\,z & -0\cdot01755\,t & +1\cdot23193\,u & -1\cdot19399\,v & = & -1\cdot04818 \\
 & & +3\cdot13938\,z & +2\cdot63790\,t & -0\cdot61890\,u & -0\cdot12241\,v & = & -0\cdot26808 \\
 & & & +2\cdot67214\,t & +0\cdot01627\,u & +0\cdot00421\,v & = & -0\cdot14114 \\
 & & & & +3\cdot21103\,u & +0\cdot45525\,v & = & +0\cdot70746 \\
 & & & & & +1\cdot04915\,v & = & +1\cdot05107
\end{array}$$

und die Eliminationsgleichungen:

$$\begin{array}{rrrrrrcr}
+3\cdot06779\,x & +2\cdot43582\,y & -0\cdot41280\,z & +0\cdot02273\,t & +2\cdot46945\,u & -0\cdot72180\,v & = & -0\cdot49139 \\
 & +0\cdot44329\,y & +0\cdot11470\,z & -0\cdot03560\,t & -0\cdot72883\,u & -0\cdot62088\,v & = & -0\cdot65802 \\
 & & +3\cdot05416\,z & +2\cdot65017\,t & -0\cdot09804\,u & -0\cdot05888\,v & = & -0\cdot16398 \\
 & & & +0\cdot36943\,t & +0\cdot02452\,u & +0\cdot01077\,v & = & -0\cdot04804 \\
 & & & & +0\cdot02017\,u & +0\cdot01286\,v & = & +0\cdot01906
\end{array}$$

während die letzte Gleichung, welche

$$+0\cdot00006\,v = -0\cdot00010$$

lautet, wegen der erheblichen Unsicherheit in der Ermittlung des Werthes von v weggelassen werden musste. Ferner ergibt sich

$$[nns] = 9\text{'}60$$

Um für v eine genügend sichere Bestimmung zu erhalten, und über den Einfluss seines Fehlers auf die übrigen Unbekannten ein Urtheil zu erhalten, wurden die sämmtlichen Unbekannten als Functionen von v ausgedrückt; es folgt:

$$
\begin{aligned}
u &= +0\cdot 94495 - 0\cdot 63757\, v \\
t &= -0\cdot 19284 + 0\cdot 01315\, v \\
z &= +0\cdot 14399 - 0\cdot 01261\, v \\
y &= +0\cdot 01650 + 0\cdot 35668\, v \\
x &= -0\cdot 91311 + 0\cdot 46350\, v
\end{aligned}
$$

welche Werthe, in die Bedingungsgleichungen eingesetzt, die übrigbleibenden Fehler ergeben:

$$
\begin{array}{l}
-0\cdot 00245 + 0\cdot 00378\, v \\
+0\cdot 00969 - 0\cdot 00463\, v \\
-0\cdot 01644 + 0\cdot 00040\, v \\
+0\cdot 00381 + 0\cdot 00021\, v \\
-0\cdot 03636 - 0\cdot 00353\, v \\
-0\cdot 01265 + 0\cdot 00204\, v \\
+0\cdot 03229 + 0\cdot 00038\, v \\
-0\cdot 02565 - 0\cdot 00140\, v
\end{array}
$$

die nun selbst wieder zu einem Minimum gemacht werden sollten; der blosse Anblick lehrt, dass sich eine genügend sichere Bestimmung von v nicht ergeben wird; überdies ist

$$\Delta\mu = \frac{v}{741}$$

es wird daher am besten, $v = 0$ zu setzen, für welche Annahme die absoluten Glieder in den obigen Binomen die Werthe von u, t, z, y und x und die übrigbleibenden Fehler bedeuten; die Summe der Quadrate der letzteren ist

$$0\cdot 003567$$

also mit Rücksicht auf die gewählte Fehlereinheit

$$9\text{'}56$$

in genügender Übereinstimmung mit dem aus der Auflösung der Normalgleichungen folgenden Werthe. Nun erhält man, logarithmisch angesetzt, in Bogensecunden:

$$
\begin{aligned}
\Delta L' &= 1\cdot 34930 \\
\Delta\mu &= 0 \qquad\qquad \Delta\Phi = 1_n 11993 \\
\sin i' \Delta \Omega' &= 0\cdot 71379 \qquad \Delta\Psi = 9\cdot 52172 \\
\Delta i' &= 0_n 87366
\end{aligned}
$$

Setzt man

$$(\Delta\Phi)'' = n \sin N$$
$$(\Delta\Psi)'' = n \cos N$$

so erhält man die Änderungen von π' und φ aus den Formeln

$$\Delta\pi' = \frac{n \sin(N-\pi')}{e + n \sin 1'' \cos(N-\pi')}$$

$$\Delta e = \frac{n \cos(N-\pi'-{}^1/_2\Delta\pi')}{\cos {}^1/_2\Delta\pi'}\,;\ \Delta\varphi = \frac{\Delta e}{\cos\varphi}$$

Im vorliegenden Falle erhält man

$$\Delta\pi' = 1\cdot85515$$
$$\Delta\varphi = 0\cdot64487$$

also als Correctionen der äquatorealen Elemente

$$\Delta L' = +22\cdot35$$
$$\Delta \Omega' = +16\cdot50$$
$$\Delta\pi' = +71\cdot64$$
$$\Delta i' = -\ 7\cdot47$$
$$\Delta\varphi = +\ 4\cdot41$$
$$\Delta M = -49\cdot29$$
$$\Delta\omega' = +55\cdot14$$
$$\Delta\mu = 0$$

Aus diesen berechnen sich die Correctionen der eklipticalen Elemente nach den Formeln

$$\Delta i = \cos\sigma\Delta i' + \sin\sigma\sin i'\Delta\Omega'$$
$$\sin i\Delta\Omega = -\sin\sigma\Delta i' + \cos\sigma\sin i'\Delta\Omega'$$
$$\Delta = -\sin\sigma \operatorname{tg}{}^1/_2\, i\Delta i' + (\cos\sigma\operatorname{tg}{}^1/_2\, i - \operatorname{tg}{}^1/_2\, i')\sin i'\Delta\Omega$$
$$\Delta\pi = \Delta\pi' + \Delta$$
$$\Delta L = \Delta L' + \Delta$$

wo σ der Bogen des grössten Kreises der Bahnebene zwischen Äquator und Ekliptik, hier 144°6′35″ ist.

Bringt man diese Correctionen an die eklipticalen Ausgangselemente an, so erhält man die verbesserten Elemente, mit denen man nach den bekannten Formeln die Constanten für die Bestimmung der äquatorealen Coordinaten berechnet. Hat man

jedoch, wie dies bei der Methode der Verbesserung äquatorealer Elemente stets der Fall ist, die oben angeschriebenen Correctionen $\Delta\Omega'$, $\Delta i'$, $\Delta\omega'$ gegeben, so lassen sich sehr leicht aus diesen die Verbesserungen jener Constanten direct ableiten, und zwar wird hierzu meist eine vier- bis fünfstellige Rechnung genügen, da die anzubringenden Correctionen immer nur mässig sein werden. Man hat bekanntlich

$$\begin{array}{ll} a \sin A_a = \cos\Omega' & A' = A_a + \omega' \\ a \cos A_a = -\sin\Omega' \cos i' & B' = B_a + \omega' \\ b \sin B_a = \sin\Omega' & C' = \omega' \\ b \cos B_a = \cos\Omega' \cos i' & x = ra \sin(A'+v) \\ c = \sin i' & y = rb \sin(B'+v) \\ & z = rc \sin(C'+v) \end{array}$$

Durch Differentiation dieser Gleichungen erhält man nach einigen leicht ersichtlichen Vereinfachungen

$$\begin{array}{ll} a^2 dA_a = \cos i' d\Omega' - \sin\Omega' \cos\Omega' \sin i' di' & dA' = dA_a + d\omega' \\ b^2 dB_a = \cos i' d\Omega' + \sin\Omega' \cos\Omega' \sin i' di' & dB' = dB_a + d\omega' \\ & dC' = d\omega' \end{array}$$

$$\begin{aligned} ada &= -\sin i' \sin\Omega' [\sin i' \cos\Omega' d\Omega' + \cos i' \sin\Omega' di'] \\ bdb &= +\sin i' \cos\Omega' [\sin i' \sin\Omega' d\Omega' - \cos i' \cos\Omega' di'] \\ dc &= \cos i' di' \end{aligned}$$

Setzt man daher

$$\begin{aligned} \Delta\Omega' &= f \sin F \\ \sin\Omega' \cos\Omega' \Delta i' &= f \cos F \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} a^2 \Delta A_a &= f \sin(F - i'); \quad a\Delta a = -f \sin i' \operatorname{tg}\Omega' \cos(F - i') \\ &\qquad\qquad + f \sin i'^2 \sin\Omega'^2 \operatorname{tg}\Omega' \sin F \\ b^2 \Delta B_a &= f \sin(F + i'); \quad b\Delta b = -f \sin i' \cot\Omega' \cos(F + i') \\ &\qquad\qquad + f \sin i'^2 \cos\Omega'^2 \cot\Omega' \sin F \\ &\qquad \Delta c = \cos i' \Delta i' \end{aligned}$$

Die Formeln für $a\Delta a$, $b\Delta b$ werden noch einfacher, wenn man

$$\begin{aligned} \sin i' \Delta\Omega' &= g \sin G \\ \cos i \Delta i' = \Delta c &= g \cos G \end{aligned}$$

setzt, wodurch

$$a\Delta a = -g \sin i' \sin\Omega' \sin(G+\Omega')$$
$$b\Delta b = -g \sin i' \cos\Omega' \cos(G+\Omega')$$

entsteht. Beachtet man nun, dass

$$\Delta \log_b x = \text{Mod.} \frac{\Delta x}{x}$$

ist, dass ferner die Änderungen $\Delta\Omega'$, $\Delta i'$ in Bogensecunden vorausgesetzt sind, während diejenigen von a, b, c im Bogenmasse benöthigt werden, so hat man um letztere in Einheiten der siebenten Decimale zu erhalten, zu rechnen

$$\Delta\Omega' = f \sin F \qquad \sin i'^2 \Delta\Omega' = g \sin G$$
$$\sin\Omega' \cos\Omega' \Delta i' = f \cos F \qquad \sin i' \cos i' \Delta i' = g \cos G$$

$$\left.\begin{aligned} a^2\Delta A_a &= f \sin(F-i') & \Delta A' &= \Delta A_a + \Delta\omega' \\ b^2\Delta B_a &= f \sin(F+i') & \Delta B' &= \Delta B_a + \Delta\omega' \\ & & \Delta C' &= \Delta\omega' \\ a^2\Delta \log a &= Cg \sin\Omega' \sin(G+\Omega') \\ b^2\Delta \log b &= Cg \cos\Omega' \cos(G+\Omega') \\ c\,\Delta \log c &= -C \cos i' \Delta i' \end{aligned}\right\}$$

wobei

$$C = -10^7 \text{arc}\,1'' \text{Mod}, \text{ demnach } \log C = 1_n32336$$

ist. Eine vierstellige Rechnung ergab hier

$$\Delta A' = +1'11'22 \qquad \Delta \log a = -\ \ 4$$
$$\Delta B' = +1'12'08 \qquad \Delta \log b = +\ 56$$
$$\Delta C' = +0'55'14 \qquad \Delta \log c = -477$$

Die Übertragung der Änderungen der äquatorealen Coordinaten auf die Ekliptik nach den oben angeschriebenen Formeln ergab:

$$\Delta L = +21'53$$
$$\Delta M = -49 \cdot 29$$
$$\Delta\Omega = +\ 1 \cdot 81$$
$$\Delta\omega = +69 \cdot 01$$
$$\Delta\pi = +70 \cdot 82$$
$$\Delta i = +\ 9 \cdot 09$$
$$\Delta\varphi = +\ 4 \cdot 41$$

folglich als Elementensystem V, bezogen auf die Ekliptik und das mittlere Äquinoctium 1883·0

(232) **Russia**

Epoche 1883; März 15·5 mittl. Berl. Zeit.

$$
\begin{aligned}
L &= 168^\circ 15' 23''90 \\
M &= 328\ \ 7\ 35\cdot73 \\
\omega &= 47\ 38\ 19\cdot27 \\
\Omega &= 152\ 29\ 28\cdot90 \\
\pi &= 200\ \ 7\ 48\cdot17 \\
i &= 6\ \ 4\ 15\cdot90 \\
q &= 10\ \ 0\ 24\cdot90 \\
\mu &= 870''6486 \\
\log a &= 0\cdot4067758
\end{aligned}
$$

und die hiermit direct gerechneten Constanten für die Berechnung der äquatorealen Coordinaten

$$
\begin{aligned}
x &= 9\cdot9994812\, r \sin(290^\circ 15' 42''66 + v) \\
y &= 9\cdot9780998\, r \sin(201\ 10\ 29\cdot00 + v) \\
z &= 9\cdot4963236\, r \sin(191\ 44\ 40\cdot06 + v)
\end{aligned}
$$

in genügender Übereinstimmung mit dem auf differentiellem Wege erhaltenen Resultate. Die hieraus berechneten Örter der vier Normalorte geben die Fehler

	I	II	III	IV
$\cos\delta\Delta\alpha$	+0''24	—0''71	+0''80	—0''29
$\Delta\delta$	+1·84	+0·69	—1·66	+1·32

und die Fehlerquadratsummen 9''64.

Um die obigen Elemente von der Ekliptik und dem mittleren Äquinoctium 1883·0 auf diejenigen von 1885·0 zu übertragen hat man die Incremente

$$
\begin{aligned}
\Delta\Omega' &= -\ 27''79 & \Delta\Omega &= +1' 37''28 \\
\Delta\pi' &= +\ 98\cdot52 & \Delta\omega &= +\ \ 3\cdot22 \\
\Delta\omega' &= +126\cdot31 & \Delta\pi &= +1\ 40\cdot50 \\
\Delta i' &= -\ \ 6\cdot24 & \Delta i &= -\ \ 0\cdot90
\end{aligned}
$$

beziehungsweise an die äquatorealen und eklipticalen Elemente anzubringen. Aus ersteren findet man die Correctionen für die

Constanten zur Berechnung der Äqatorcoordinaten mit

$$\Delta \log a = +\ 10 \quad \Delta A' = +100''16$$
$$\Delta \log b = +\ 32 \quad \Delta B' = +\ 96\cdot79$$
$$\Delta \log c = -398 \quad \Delta C' = +126\cdot31$$

Endlich werden die Elemente V, bezogen auf die mittlere Ekliptik und das mittlere Äquinoctium 1885·0

(232) Russia

Epoche 1883; März 15·5 mittl. Berl. Zeit.

$$L = 168°17'\ 4''38 \qquad \pi = 200°\ 9'28''65$$
$$M = 328\ \ 7\ 35\cdot73 \qquad i = \ 6\ \ 4\ 15\cdot00$$
$$\omega = \ 47\ 38\ 22\cdot47 \qquad \varphi = \ 10\ \ 0\ 24\cdot90$$
$$\Omega = 152\ 31\ \ 6\cdot18 \qquad \mu = 870''6486$$
$$\log a = 0\cdot4067758$$

und die auf den mittleren Äquator und das mittlere Äquinoctium 1885·0 bezogenen rechtwinkligen Coordinaten

$$x = 9\cdot9994822\, r \sin(290°17'22''82 + v)$$
$$y = 9\cdot9781030\, r \sin(201\ \ 12\ \ \ 5\cdot79 + v)$$
$$z = 9\cdot4962838\, r \sin(191\ \ 46\ \ 46\cdot37 + v)$$
$$g = 10\cdot38$$

Mittl. Oppositionsgrösse: $m_0 = 13\cdot37$

Jahresephemeride für 1885

12ʰ Mittl. Berl. Zeit	Mittlere AR	Mittlere Decl.	log r	log ρ
Januar 2	21ʰ59ᵐ41ˢ	−13° 5'5	0·4568	0·5413
Januar 22	22 28 19	−10 43·0	0·4602	0·5654
Februar 11	22 57 24	− 8 5·1	0·4633	0·5822
März 3	23 26 30	− 5 18·4	0·4661	0·5920
März 23	23 55 20	− 2 29·3	0·4685	0·5946
April 12	0 23 38	+ 0 16·0	0·4706	0·5905
Mai 2	0 51 8	+ 2 51·4	0·4724	0·5797
Mai 22	1 17 30	+ 5 11·1	0·4739	0·5622
Juni 11	1 42 14	+ 7 9·7	0·4750	0·5381
Juli 1	2 4 35	+ 8 41·6	0·4758	0·5072
Juli 21	2 23 27	+ 9 41·4	0·4762	0·4700
August 10	2 37 19	+10 3·6	0·4763	0·4276
August 30	2 44 16	+ 9 43·2	0·4761	0·3824
September 19	2 42 32	+ 8 38·1	0·4756	0·3398
October 9	2 31 49	+ 6 56·2	0·4747	0·3088
October 29	2 15 9	+ 5 3·4	0·4735	0·2989
November 18	1 58 55	+ 3 39·3	0·4719	0·3141
December 8	1 49 10	+ 3 13·1	0·4700	0·3485
December 28	1 48 32	+ 3 48·4	0·4679	0·3920

Opposition October 29. Lichtstärke 0·45, Grösse 14·2

Ephemeride für die Opposition 1885.

12h Mittl. Berl. Zeit		Mittlere AR	Mittlere Decl.	log r	log ρ	Abzt.
October	11	2h 30m 19s·93	+6° 44' 49"·2	0·474604	0·306687	16m 50s
	12	2 29 34·02	+6 39 5·0	0·474549	0·305735	16 48
	13	2 28 47·28	+6 33 19·8	0·474494	0·304841	16 46
	14	2 27 59·78	+6 27 34·0	0·474438	0·304005	16 44
	15	2 27 11·57	+6 21 47·7	0·474381	0·303228	16 42
	16	2 26 22·69	+6 16 1·5	0·474323	0·302511	16 41
	17	2 25 33·19	+6 10 15·5	0·474265	0·301856	16 39
	18	2 24 43·12	+6 4 30·1	0·474206	0·301263	16 38
	19	2 23 52·52	+5 58 45·7	0·474146	0·300731	16 37
	20	2 23 1·45	+5 53 2·6	0·474085	0.300261	16 36
	21	2 22 9·97	+5 47 20·9	0·474023	0·299855	16 35
	22	2 21 18·13	+5 41 41·2	0·473960	0·299512	16 34
	23	2 20 25·97	+5 36 3·7	0·473896	0·299234	16 33
	24	2 19 33·54	+5 30 28·7	0·473832	0·299019	16 33
	25	2 18 40·90	+5 24 56·5	0·473767	0·298869	16 32
	26	2 17 48·10	+5 19 27·5	0·473701	0·298783	16 32
	27	2 16 55·19	+5 14 2·0	0·473634	0·298762	16 32
	28	2 16 2·23	+5 8 40·3	0·473567	0·298805	16 32
	29	2 15 9·27	+5 3 22·7	0·473499	0·298914	16 32
	30	2 14 16·38	+4 58 9·5	0·473430	0·299088	16 33
	31	2 13 23·61	+4 53 1·0	0·473360	0·299326	16 33
November	1	2 12 31·00	+4 47 57·6	0·473288	0·299628	16 34
	2	2 11 38·59	+4 42 59·6	0·473216	0·299995	16 35
	3	2 10 46·45	+4 38 7·3	0·473143	0·300426	16 36
	4	2 9 54·65	+4 33 20·8	0·473069	0·300920	16 37
	5	2 9 3·26	+4 28 40·6	0·472995	0·301477	16 38
	6	2 8 12·34	+4 24 6·9	0·472920	0·302097	16 40
	7	2 7 21·93	+4 19 40·0	0·472844	0·302778	16 41
	8	2 6 32·08	+4 15 20·2	0·472767	0·303520	16 43
	9	2 5 32·86	+4 11 7·8	0·472689	0·304319	16 45
	10	2 4 54·32	+4 7 2·9	0·472610	0·305177	16 47
	11	2 4 6·50	+4 3 5·6	0·472530	0·306096	16 49
	12	2 3 19·43	+3 59 16·2	0·472450	0·307075	16 51
	13	2 2 33·13	+3 55 35·0	0·472369	0·308111	16 54
	14	2 1 47·62	+3 52 2·2	0·472287	0·309201	16 56
	15	2 1 2·92	+3 48 38·0	0·472204	0·310344	16 59
	16	2 0 19·08	+3 45 22·5	0·472121	0·311537	17 2

Studien über Verbindungen aus dem animalischen Theer.

V. Collidin.

Von Dr. H. Weidel und B. Pick.

(Aus dem Universitäts-Laboratorium des Prof. v. Barth.)

Th. Anderson[1] hat aus dem basischen Theile der Dippel'schen Öle eine Substanz isolirt, welche er Collidin nannte. Er fand sie nach der Formel $C_8H_{11}N$ zusammengesetzt und ermittelte den Siedepunkt zu 179° C.

Die Studien über Verbindungen aus dem animalischen Theer[2] haben ergeben, dass das Picolin Anderson's aus zwei isomeren Körpern besteht, dass in den von 150—160° und den zwischen 160—170° C. siedenden Fractionen der basischen Producte zwei Lutidine enthalten sind, weil die Oxydation derselben zwei Pyridindicarbonsäuren liefert.

Anderson hat sein Collidin aus dem Basengemisch durch fractionirte Destillation abgeschieden. Diese Operation aber liefert nach den schon vor einiger Zeit bekannt gemachten Erfahrungen keine brauchbaren Resultate. Es war daher nicht unmöglich, dass das Thieröl-Collidin ein Gemisch von Isomeren oder gar ein Gemisch verschiedenartigster Substanzen sei.

Aus diesen Gründen haben wir nun auch die höher siedenden basischen Antheile des animalischen Theers in Arbeit genommen und zunächst den zwischen 170 und 180° C. siedenden, also Collidin enthaltenden Theil untersucht.

Wir konnten uns bald überzeugen, dass dieses Öl ein Gemisch vieler Körper war, aus welchem durch Destillation keine einheit-

---

[1] Annal. d. Chem. u. Pharm. 94. 360.

[2] Weidel. Ber. d. kais. Akad. d. Wissenschft. Bd. 79, Mai-Heft und Weidel u. Herzig, Monatshefte f. Chem. Bd. I. p. 1.

lichen Substanzen zu erhalten waren. Ausser Basen, welche der Pyridinreihe angehören, waren die höheren Homologen des Pyrrols, Anilin, Cyanverbindungen und Amine in denselben vorhanden. Die Reingewinnung haben wir auf nachstehende Weise ermöglicht.

In die Lösung der Basen in einem grossen Überschuss von verdünnter Schwefelsäure wurde in kleinen Portionen doppeltchromsaures Kali eingetragen. Hiedurch wurde die Flüssigkeit anfänglich rothviolett gefärbt, später trat reichliche Abscheidung eines schwarzen Niederschlags (Anilinschwarz) ein. Beim Erwärmen nahm man deutlich den bekannten Chinongeruch wahr. Als in einer Probe das Chromat keine weitere Veränderung hervorbrachte, wurde die Flüssigkeit von dem Niederschlag getrennt, dann wurde ein kräftiger Dampfstrom durchgeblasen, um das Chinon und einen Theil der Fettsäuren, welche durch Oxydation der Amine gebildet wurden, zu entfernen, schliesslich wurde die saure Flüssigkeit mit Ätzkali versetzt und abdestillirt. Die Basen waren nach dem Abscheiden lichtgelb, dunkelten am Lichte nach und gingen mit röthlicher Farbe bei Zugabe von Salzsäure in Lösung. Diese Erscheinungen sprachen nach unseren Erfahrungen für das Vorhandensein pyrrolartiger Körper. Um diese durch das Oxydationsmittel nicht zerstörten Producte zu entfernen, haben wir die Basen in concentrirter Salzsäure gelöst und anhaltend gekocht. Als die Flüssigkeit dicklich zu werden begann, wurde sie in eine Retorte gebracht und dort so weit concentrirt, bis eine herausgenommene Probe erstarrte.

Während dieser Behandlung hat sich die Lösung dunkel gefärbt und hat auch eine kleine Menge einer harzigen Masse abgeschieden. Selbst diese Operation wird von einem Theil der pyrrolartigen Substanzen überdauert. Erst wenn die fast wasserfreie Salzsäureverbindung in concentrirte Schwefelsäure eingetragen und mit circa der doppelten Gewichtsmenge derselben während 4—5 Stunden auf 190—200° C. erhitzt wird, wobei Entwickelung von etwas schwefeliger Säure eintritt, findet Zerstörung der Verunreinigungen statt.

Wenn nach dieser Behandlung die Basen abgeschieden werden, so stellen sie nach dem Trocknen und Destilliren ein farbloses Öl dar, welches sich in Berührung mit Luft am Lichte

nicht mehr verändert und welches von Salzsäure farblos gelöst wird. Es beginnt bei 162° zu sieden, bis 170° geht ungefähr der zehnte Theil über, zwischen 170 und 180° destillirt die Hauptmenge und ein kleiner Rest verflüchtigt sich erst bei 184°. Durch öfteres Fractioniren wurde das unter 170° und das über 180° Übergehende entfernt. Das Destillat zwischen 170—180° mussten wir, weil Einheitliches nicht zu isoliren war in die Platindoppelsalze verwandeln.

Es ist von Vortheil, einen Überschuss von Platinchlorid zu vermeiden, desshalb haben wir je 100 Grm. des Öls in einem bedeutenden Überschusse von verdünnter Salzsäure gelöst und soviel einer Lösung von Platinchlorid, deren Gehalt ermittelt war, zugegeben, als für 100 Grm. Collidin berechnet war.

Den mühsamen und zeitraubenden Weg des fractionirten Krystallisirens wollen wir nicht in seinen Einzelheiten beschreiben, sondern wollen nur hervorheben, dass schliesslich die Platinverbindungen in drei Hauptheile zerlegt werden konnten, und zwar:

A. In einen schwerer löslichen, gut krystallisirenden Theil, aus welchem eine Base vom Siedepunkt 162—167° gewonnen wurde, welche die Zusammensetzung C_7H_9N (Lutidin) besass.

B. In einen leichter löslichen, minder gut krystallisirenden Theil, welcher noch die Doppelsalze zweier Verbindungen enthielt, und

C. In einen nicht krystallisirbaren Theil, welcher in den Mutterlaugen blieb und sich beim Concentriren ölig abschied.

Jeder Theil musste für sich mehrmals fractionirt werden (das Gleichartige wurde immer vereint), dann wurde das Platin mit Schwefelwasserstoff abgeschieden, die salzsaure Verbindung zerlegt, das resultirende Öl fractionirt und die von den unter 170 und über 180° siedenden Verbindungen befreiten Basen neuerdings in die Doppelsalze verwandelt. Im Ganzen haben wir diese Operation viermal durchgeführt.

Der Antheil *C* war in überwiegender Menge vorhanden und war, nachdem er zum vierten Male erhalten war, so weit gereinigt, dass er trotz mehrmonatlichen Stehens nichts Krystallinisches abschied. Er lieferte dann nach entsprechender Behandlung eine constant siedende Base, welche bei der Analyse Zahlen lieferte, die

mit den für Collidin ($C_8H_{11}N$) berechneten vollkommen übereinstimmen.

Dieses Thieröl - Collidin, welches wir seines Verhaltens wegen als

α-Methyläthylpyridin

bezeichnen wollen, stellt ein wasserhelles, stark lichtbrechendes Öl dar, welches gegen die Einwirkung von Licht und Luft vollkommen unempfindlich ist. Es hat einen nicht unangenehmen aromatischen, gleichzeitig an Pyridin erinnernden Geruch. Im kalten Wasser ist es etwas löslich, in der Wärme wird es aber wieder ausgeschieden. Äther, Alkohol, Benzol nehmen es leicht und in jedem Verhältniss auf. Es ist etwas leichter als Wasser. Das specifische Gewicht wurde zu 0·9286 bei 16·8° gefunden. Der Siedepunkt liegt bei einem Barometerstand von 758·4 Mm. bei 177·8° C. (uncorr.). Unter Berücksichtigung der nöthigen Correctur ergibt sich der corrigirte Siedepunkt, bezogen auf den Normalbarometerstand zu 178·7° C.

Die Analysen ergaben:

I. 0·2847 Grm. Substanz gaben 0·8263 Grm. Kohlensäure und 0·2326 Grm. Wasser.

II. 0·2536 Grm. Substanz gaben 0·7349 Grm. Kohlensäure und 0·2082 Grm. Wasser.

III. 0·2454 Grm. Substanz gaben 0·7138 Grm. Kohlensäure und 0·2019 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	I.	II.	III.	$C_8H_{11}N$
C....	79·15	79·03	79·32	79·34
H....	9·07	9·01	9·14	9·09

Die Bestimmung der Dampfdichte lieferte Zahlen, welche die Richtigkeit der Formel ausser Frage stellen. Die Zahlen sind:

Gewicht der angewandten Substanz ....(*G*)......0·0302 Grm.
" des " Quecksilbers .(*A*)...1121 "
" " ausgeflossenen " .(*B*)... 150·7 "
Anfangstemperatur des Quecksilbers ...(*t*) ... 19·4° C.

Endtemperatur des Bades ....(T)... 205° C.
Höhe der wirksamen Quecksilbersäule..(h_T).. 92·5 Mm.
Barometerstand....................(P)... 746·4 „

Daraus rechnet sich die Dampfdichte, bezogen auf Wasserstoff

$$D = 60{\cdot}67 \qquad \underbrace{60{\cdot}5}_{C_8H_{11}N}$$

Das Methyläthylpyridin ist eine starke Base, sie verbindet sich leicht mit Säuren. Die entstehenden Salze sind jedoch, so weit wir sie untersucht haben, sämmtlich nicht im krystallisirten Zustande zu erhalten.

Das salzsaure Salz stellt eine äusserst hygroskopische, gummiartige Masse dar, dieselben Eigenschaften haben die Schwefelsäure- und die Salpetersäureverbindung.

Die Platindoppelverbindung ist sowohl in verdünnter als auch in concentrirter Salzsäure löslich, scheidet sich aber bei einer gewissen Concentration in öligen Tropfen ab, die von heissem Wasser aufgenommen werden. Unter der Luftpumpe trocknet das Doppelsalz zu einem durchsichtigen gelben Firniss ein.

Auch die entsprechende Goldverbindung scheidet sich bei Zugabe von Goldchlorid zu der Lösung der Base in Salzsäure ölig ab und krystallisirt nicht.

Mit Jodmethyl vereinigt sich das Methyläthylpyridin unter Wärmeentwickelung und liefert ein anfänglich farbloses, öliges Additionsproduct, welches unter der Luftpumpe zu einer zerfliesslichen, gelben, firnissartigen Masse austrocknet.

Oxydation des Thieröl-Collidins.

Um über die Anzahl der Seitenketten der Base Aufschluss zu erhalten, haben wir dieselbe mit übermangansauerem Kali oxydirt. 20 Grm. Collidin wurden in der für die Bildung des neutralen Salzes nöthigen Quantität Schwefelsäure gelöst und in gelinder Wärme allmälig mit einer zur Entstehung einer Pyridintricarbonsäure erforderlichen Quantität des Oxydationsmittels versetzt. Die Reaction verläuft ziemlich stürmisch und in quantitativer Hinsicht nicht so günstig, als wie bei den Picolinen. Man muss, um die ganze Menge der Base zu oxydiren, einen beträchtlichen Über-

schuss von Permanganat verwenden, weil ein Theil der Substanz vollständig verbrennt. Aus der von den Manganoxyden getrennten Flüssigkeit wird in der schon mehrfach beschriebenen Weise das Oxydationsproduct abgeschieden.

Nach wiederholtem Umkrystallisiren wird die Säure in kleinen kreideweissen Nadeln erhalten, welche im kalten Wasser wenig, leicht aber im heissen löslich sind.

Die Säure schmilzt bei 219° C. und wurde als Lutidinsäure erkannt, die der Eine von uns und Herzig[1] beschrieben haben.

Die Analyse der bei 100° C. getrockneten Säure lieferte Zahlen, welche mit den für Lutidinsäure gerechneten vollständig übereinstimmten.

I. 0·2943 Grm. Substanz gaben 0·5433 Grm. Kohlensäure und 0·0825 Grm. Wasser.

II. 0·3267 Grm. Substanz gaben 24·2 CC. Stickstoff bei 20° C. und 749·8 Mm.

In 100 Theilen:

	I	II	$C_7H_5NO_4$
C....	50·34	—	50·29
H....	3·11	—	2·99
N....	—	8·35	8·38

Die Krystallwasserbestimmung ergab:

0·3625 Grm. Substanz verloren bei 100, 0·0358 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

		$C_7H_5NO_4+H_2O$
H_2O....	9·87	10·73

Ein weiterer Beweis für die Identität des Oxydationsproductes mit Lutidinsäure ist die Bildung von Isonicotinsäure (Schmelzpunkt 309°), welche durch Erhitzen auf 290° aus jener hervorgeht. Die Isonicotinsäure wurde nach erfolgtem Umkrystallisiren an ihren Eigenschaften und an ihrem Schmelzpunkt 302° als solche erkannt.

---

[1] Monatshefte f. Chemie. I. pag. 20.

Die Entstehung einer Pyridindicarbonsäure (Lutidinsäure) bei der Oxydation lässt die Annahme gerechtfertigt erscheinen, dass das Thieröl-Collidin ein Methyläthylpyridin ist.

Die mit *B* bezeichneten Platindoppelsalze konnten durch zahlloses fractionirtes Krystallisiren noch in zwei verschiedene Doppelverbindungen zerlegt werden; die in grösserer Menge vorhandene war in Wasser, beziehungsweise in verdünnter Salzsäure etwas schwerer löslich als die in kleineren Quantitäten auftretende. Der schwerer lösliche Theil ergab nach dem Zersetzen eine Base, welche Zahlen ergab, die mit den für Lutidin gerechneten, übereinstimmten. Das andere Platinsalz hingegen lieferte eine Base, welche bei 173·8° C. siedet, und bei der Analyse Zahlen lieferte, welche mit den für $C_8H_{11}N$ berechneten im Einklange stehen.

0·2854 Grm. Substanz gaben 0·8268 Grm. Kohlensäure und 0·2361 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

		$C_8H_{11}N$
C	79·01	79·34
H	9·19	9·09

Das Platindoppelsalz war trotz mehrfachen Umkrystallisirens nicht in gut ausgebildeten Individuen zu erhalten.

Herr Dr. Brezina, welcher die Freundlichkeit hatte die Krystalle zu untersuchen, fand den Habitus derselben mit den von Groth gemessenen übereinstimmend, allein die Krystalle zeigten ihrer schlechten Ausbildung wegen solche Differenzen in den Winkelwerthen untereinander, dass die Identität dieser Verbindung mit der von Ador und Baeyer dargestellten nicht festgestellt werden konnte und wir daher vorläufig nur die Collidinformel des Körpers als gesichert betrachten.

Wir konnten auf eine nähere Untersuchung vorläufig nicht eingehen, weil wir aus 300 Grm. der Fraction 170—180 nur circa 12 Grm. dieser Base erhielten.

Vergleicht man die von uns für das Methyläthylpyridin ermittelten Eigenschaften mit den von Anderson für das Thieröl-Collidin angegebenen, so ergibt sich, namentlich unter Berücksichtigung der Provenienz, dass die beiden Körper identisch sind. Anderson hat eine Trennung, wie wir sie durchgeführt haben, nicht vorgenommen und konnte desshalb keine einheitliche Substanz erhalten. Die salzsaure Verbindung beschreibt er als gummiartige Masse, welche erst nach sehr langem Stehen Spuren von Krystallisation zeigt. Diese Erscheinung konnten wir nur bei nicht völlig reinen Präparaten beobachten. Ebenso dürfte die Krystallisationsfähigkeit seines Platindoppelsalzes auf Rechnung des Vorhandenseins von Lutidinen oder gar höherer Homologen zu setzen sein.

Es existiren eine Anzahl von Basen, welche nach der Formel $C_8H_{11}H$ zusammengesetzt sind und der Pyridinreihe angehören, u. zw.:

Erhielt Ador und Baeyer[1] aus dem Aldehydammoniak das bei 176° C. siedende Aldehydcollidin, mit welchem das von Krämer[2] aus dem Äthylidenchlorid durch Einwirkung von Ammoniak und das von Tawildarow[3] aus Äthylidenbromid und Ammoniak erhaltene Product identisch ist. Ferner hat Würtz[4] durch Behandlung von Aldol mit Ammoniak ein Collidin gewonnen, welches, sowie das nach Herzig[5] aus der Trigensäure entstehende, mit dem Aldehydcollidin von Ador und Baeyer entschieden identisch ist.

Das Aldehydcollidin liefert nach Wischnegradsky[6] bei der Oxydation mit Chromsäure eine Picolindicarbonsäure, was er als Beweis betrachtet, dass das Aldehydcollidin ein Trimethylpyridin ist.

---

[1] Annalen d. Chem. u. Pharm. 155. 294.

[2] Berl. Berichte III. 202.

[3] Annalen d. Chem. u. Pharm. 176. 15.

[4] Berl. Berichte XII. 1710.

[5] Monatshefte f. Chem. II. 403.

[6] Berl. Berichte XII. 1506.

Ein Isomeres, von obigem verschiedenes als β-Collidin bezeichnetes Trimethylpyridin, ist die von Hantzsch[1] aus der Collidindicarbonsäure gewonnene Base. Sie ist unbedingt ein Trimethylpyridin, weil die Collidindicarbonsäure bei der Oxydation endlich eine Pentacarbonsäure des Pyridins liefert.

Oechsner de Coninck beschreibt eine nach der Formel $C_8H_{11}N$ zusammengesetzte Base, welche er durch Behandlung von Cinchonin[2] und Strychnin[3] mit Ätzkali erhalten hat. Er betrachtet diese Substanz als Methyläthylpyridin, weil sie als Endproduct bei der Oxydation Cinchomeronsäure[4] liefert. Oechsner bezeichnet diese Base als β-Collidin.

Endlich sind von Ladenburg[5] durch Erhitzen von Pyridinpropyljodür auf 290° zwei mit dem Collidin isomere Verbindungen das α-Propylpyridin und das γ-Propylpyridin gewonnen worden und durch Erhitzen des Pyridinisopropyljodür wurde von Ladenburg und Schrader[6] das α- und γ-Isopropylpyridin dargestellt.

Mit keinem der aufgezählten Producte ist das Thieröl-Collidin identisch. Am nächsten steht es dem Methyläthylpyridin (β-Collidin) Oechsner's, da es bei der Oxydation die mit der Cinchomeronsäure isomere Lutidinsäure liefert.

Das Thieröl-Collidin wurde auch von Richard[7] untersucht. Seine Erfahrungen stimmen mit den Anderson'schen nicht überein. Vielmehr stehen die von uns ermittelten Verhältnisse mit seinen Angaben im Einklang. Richard hat auch das Platindoppelsalz als eine gummiartige, völlig unkrystallinische Masse erhalten. Richard's Angaben über Siedepunkt und Dichte sind mit unsern nahezu übereinstimmend.

Die Unterschiede, welche zwischen den Isomeren ($C_8H_{11}N$), welche der Pyridinreihe angehören, bestehen, mögen durch die folgende Zusammenstellung besonders hervorgehoben werden.

---

1 Annal. d. Chem. u. Pharm. 215. 32.
2 Berl. Berichte XIII. 1997 und Compt. rend. 91. 296.
3 „ „ XV. 2378.
4 „ „ XVII. 439 C.
5 „ „ XVII. 772.
6 „ „ XVII. 1121.
7 Bull. d. Soc. chim. 1879.

	Siedepunkt	Spec. Gewicht	Form der Platin-doppelverbindung	Oxydationsproduct
Aldehydcollidin. α-Collidin $C_5H_2(CH_3)_3N$	178—179° (180—182 nach Würtz).	0·953	Trikline Prismen	Picolindicarbonsäure $C_5H_3(CH_3)(COOH)_2N$
β-Collidin $C_5H_2(CH_3)_3N$	171—172°	0·917 bei 15°	Gelber krystallinischer Niederschlag	
α-Methyläthylpyridin. Thieröl-Collidin $C_5H_3(C_2H_5)(CH_3)N$	177·8°	0·9286 bei 16·8°	amorph.	Lutidinsäure $C_5H_3(COOH)_2N$ Schmelpunkt 219°
β-Methyläthylpyridin (β-Collidin Oechsner's) $C_5H_3(C_2H_5)(CH_3)N$	195°		krystallinisch	Cinchomeronsäure $C_5H_3(COOH)_2N$ Schmelzpunkt 251
α-Propylpyridin $C_5H_4(C_3H_7)N$	173—175°	0·9411	Rhombische Tafeln	
γ-Propylpyridin $C_5H_4(C_3H_7)N$	162°	0·9393	Blätterig krystallisirt	(γ-Pyridincarbonsäure.) Isonicotinsäure $C_5H_4(COOH)N$ Schmelzpunkt 309° C.
α-Isopropylpyridin ($C_5H_4(C_3H_7)N$	166—168°		Vierseitige Tafeln	
γ-Isopropylpyridin $C_5H_4(C_3H_7)N$	158°	0·9408		γ-Pyridincarbonsäure Schmelzpunkt 309° $C_5H_4(COOH)N$

Fassen wir die Resultate unserer Untersuchung zusammen, so ergibt sich:

1. Dass das von Anderson aus dem Thieröl abgeschiedene Collidin keine einheitliche Substanz war.

2. Dass keine der auf synthetischem Wege gewonnenen Basen ($C_8H_{11}N$) mit dem Thieröl-Collidin identisch ist.

3. Dass das Thieröl-Collidin ein Methyläthylpyridin ist, weil es bei der Oxydation eine Pyridindicarbonsäure und zwar Lutidinsäure (Schmelzpunkt 219°) liefert.

4. Dass das Thieröl-Collidin mit dem β-Collidin Oechsner's, welches auch eine Pyridindicarbonsäure (Cinchomeronsäure Schmelzpunkt 251°) liefert, im engeren Sinne isomer ist, da dieses ebenfalls ein Methyläthylpyridin ist.

Wir beabsichtigen die Untersuchung fortzusetzen und wollen zunächst das zweite im Thieröl vorkommende Collidin, welches vielleicht doch mit dem Aldehydcollidin von Ador und Baeyer identisch ist, in grösserer Menge zu gewinnen trachten, um über die Natur dieses, sowie über die der Lutidine, welche wir bereits theilweise getrennt haben, Sicheres zu ermitteln.

Einige Bemerkungen über das Problem der Glanzpunkte.

Von Dr. **P. H. Schoute,**

Professor an der Universität in Groningen.

In der Sitzung der kais. Akademie der Wissenschaften vom 14. December 1871 hat Professor C. Pelz eine Abhandlung vorgelegt, worin er auf sehr einfache Weise das Problem der Glanzpunkte bei dem Kreise und den Kegelschnitten überhaupt geometrisch löst.[1] Nachdem er nachgewiesen hat, dass diese Punkte beim Kreise als die Schnittpunkte mit einer leicht construirbaren gleichseitigen Hyperbel erscheinen, zeigte er, dass die den geometrischen Anforderungen des Problems genügenden Punkte bei Kegelschnitten von einer cyclischen Curve dritter Ordnung C^3 ausgeschnitten werden, die durch die vier Brennpunkte des Kegelschnittes, die als Lichtquelle und Auge auftretenden Punkte A, A' und den unendlich fernen Punkt des durch den Mittelpunkt der Strecke AA' geführten Kegelschnitt-Durchmessers bestimmt ist. Dabei ergab sich aus der Entstehungsweise dieser Curve sofort, dass sie für das als Lichtquelle und Auge angenommene Punktepaar A, A' der Ort der Glanzpunkte der Schaar von mit dem gegebenen Kegelschnitte confocalen Kegelschnitten ist, dass auf ihr die imaginären Kreispunkte, die beiden Paare von Brennpunkten des Kegelschnittes und das Paar A, A' demselben Systeme angehörende Paare conjugirter Punkte sind und dass die Curve sich nicht ändert, wenn man irgend ein

[1] Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftl. Classe der kais. Akademie d. Wissenschaften in Wien, Bd. 64 (Jahrg. 1871) Seite 730 bis 741: „Über das Problem der Glanzpunkte“.

anderes Paar conjugirter Punkte desselben Systemes als Lichtquelle und Auge an die Stelle des Paares A, A' treten lässt.

Fast zur selben Zeit war diese Curve C^3 Gegenstand einer Abhandlung, welche Professor H. Schröter in den Mathematischen Annalen veröffentlichte.[1] Hier tritt sie als der Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar auf und wird weiter als das Erzeugniss von zwei projectivisch verwandten hyperbolisch gleichseitigen Strahleninvolutionen in halb perspectivischer Lage betrachtet. Dies führt dann einerseits zur einfachsten Construction der Curve, die von Professor C. Küpper herrührt, wobei sie als der Ort der Schnittpunkte der Kreise eines Büschels mit ihren durch einen festen Punkt der Ebene gehenden Durchmessern erscheint; anderseits zeigt es, dass die gefundene Curve für irgend ein Paar conjugirter Punkte des nämlichen Systemes als Lichtquelle und Auge Ort der Glanzpunkte ist in Bezug auf jede Schaar von confocalen Kegelschnitten, deren gemeinschaftliche Brennpunkte auf ihr zwei Paare conjugirter Punkte desselben Systemes sind.

Ich habe früher an anderer Stelle[2] den a. a. O. von Herrn Schröter eingeführten Begriff von Strahleninvolutionen in halb perspectivischer Lage auf den Raum ausgedehnt und hieran anschliessend eine besondere Raumcurve siebenter Ordnung beschrieben; ich will jetzt in aller Kürze an die Resultate des Herrn Pelz einige synthetische Betrachtungen anknüpfen, um nachher das Problem der Glanzpunkte im Raume zu behandeln.

---

1. „Jede cyclische Curve C^3, für welche die imaginären Kreispunkte ein Paar conjugirter Punkte sind, (welche also durch den reellen Schnittpunkt ihrer imaginären Asymptoten geht) ist für jedes Paar conju-

---

[1] Math. Annalen, herausgegeben von A. Clebsch u. C. Neumann Bd. 5 (Jahrg. 1872), Seite 50—83: „Über eine besondere Curve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve dritter Ordnung.“

[2] Nieuw Archief voor Wiskunde, deel 10, blz. 54—66: „Over eene bijzondere ruimtekromme van den zevenden graad“.

girter Punkte desselben Systemes Ort der Glanzpunkte in Bezug auf eine Schaar von Schaaren confocaler Kegelschnitte."

Das Material zum Beweise dieses Satzes ist den angegebenen Arbeiten zu entnehmen, wenn nur noch gezeigt wird, dass jede cyclische Curve C^3, für welche die imaginären Kreispunkte ein Paar conjugirter Punkte sind, von zwei projectivisch verwandten, hyperbolisch gleichseitigen Strahleninvolutionen in halb perspectivischer Lage erzeugt werden kann. Ich deute also hier nur diesen ermangelnden Theil des Beweises an.

Wenn P und P' zwei conjugirte Punkte einer C^3 sind, so erhält man bekanntlich alle Paare conjugirter Punkte, die mit P, P' zum nämlichen Systeme gehören, wenn man das Paar P, P' aus jedem Curvenpunkte Q auf die Curve projicirt.[1] Verbindet man nun jedes dieser Punktepaare mit einem festen Punkte R der Curve, so erhält man zweimal die Strahlenpaare einer quadratischen Strahleninvolution.[2] Ist dabei unsere C^3 eine cyclische Curve und sind P, P' die imaginären Kreispunkte, so stehen die Doppelstrahlen der Strahleninvolution senkrecht auf einander, da sie von den nach den imaginären Kreispunkten gehenden Strahlen harmonisch getrennt sind; also ist die Strahleninvolution eine hyperbolisch gleichseitige.

Schneidet nun weiter irgend ein Strahlenpaar der Involution R die Curve C^3 in den Paaren S, S' und T, T', wobei S und T auf der einen und S' und T' auf der anderen dieser beiden Geraden

---

[1] In Bezug auf die Theorie der drei Systeme conjugirter Punkte einer C^3 vergleiche man:

a) „Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven von G. Salmon, deutsch bearbeitet von Dr. W. Fiedler," 2. Aufl. 1882, Seite 168.

b) C. Küpper: „Über die Steiner'schen Polygone auf einer Curve dritter Ordnung C^3 und damit zusammenhängende Sätze aus der Geometrie der Lage." (Abhandl. der k. böhm. Gesellsch. der Wissensch., Prag 1873, oder Math. Annalen, Bd. 24. (Jahrg. 1884), Seite 1—42.)

[2] Unter den Systemen (*a*, *b*) von Küpper gilt dies nur von den drei Systemen conjugirter Punkte, da in diesen die Paarlinge b und β von a zusammenfallen. Man vergleiche noch die Abhandlung von Prof. Em. Weyr: „Über eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung". (Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. Bd. 87, Jahrg. 1883, Seite 848.)

liegen, so schneiden die Geraden ST' und $S'T$ beide die C^3 in demselben dritten Punkte R'.[1] Hierdurch entsteht eine projectivische Verwandtschaft zwischen den Strahleninvolutionen mit den Mittelpunkten R und R' und zwar derart, dass die vier Schnittpunkte von je zwei einander entsprechenden Strahlenpaaren auf der C^3 liegen, und dass ferner das den Strahl RR' enthaltende Paar der Involution von R dem den Strahl $R'R$ enthaltenden Paare der Involution von R' entspricht. Der Ort der Schnittpunktenquadrupel der entsprechenden Strahlenpaare dieser Involutionen, die in unserem Falle beide hyperbolisch gleichseitig sind, zerfällt also in einen eigentlichen Theil, die cyclische Curve C^3 und einen uneigentlichen Theil, die Gerade RR', u. s. w.

Nun folgt aus der Arbeit des Herrn Pelz, dass die Curve C^3 für jedes Paar conjugirter Punkte des das imaginäre Kreispunktepaar enthaltenden Systemes als Lichtquelle und Auge die Glanzpunkte auf jedem Kegelschnitt bestimmt, dessen reelle Brennpunkte ein Paar conjugirter Punkte desselben Systemes sind. Aber aus der Arbeit des Herrn Schröter folgt, dass diese Kegelschnitte eine Schaarschaar bilden. Also u. s. w.

2. „Drei auf einem gegebenen Kegelschnitte K beliebig gewählte Punkte G_1, G_2, G_3 können für eine einfach unendliche Anzahl von als Lichtquelle und Auge dienenden Punktepaaren A, A' als zu einem und demselben Glanzpunktesextupel gehörig betrachtet werden.[2] Die Punktepaare A, A' bilden das durch das imaginäre Kreispunktepaar individualisirte System von conjugirten Punktepaaren der durch die vier Brennpunkte von K und die Punkte G_1, G_2, G_3 bestimm-

---

[1] Dieser Satz folgt in Verbindung mit einem schon von Poncelet gefundenen Theorem aus der Theorie der drei Systeme conjugirter Punkte.

[2] Obgleich wir weiterhin einen Fall begegnen werden, wo man ausser den drei gegebenen Glanzpunkten noch einen vierten beliebig wählen kann, so führen vier willkürlich angenommene Glanzpunkte im Allgemeinen selbstverständlich nur noch zu drei als Lichtquelle und Auge dienenden Punktepaaren, für welche sie Glanzpunkte sind, nämlich die beiden Paare Brennpunkte von K und die imaginären Kreispunkte. Aber in diesen Fällen sind alle Punkte von K Glanzpunkte.

ten cyclischen Curve C^3. Die drei übrigen Glanzpunkte G_4, G_5, G_6 sind dabei immer dieselben, nämlich die drei weiteren Schnittpunkte von K mit C^3."

Geht eine Curve C^3 durch die sechs Eckpunkte eines vollständigen Vierseits, so sind die drei Paare Gegenecken auch drei demselben Systeme angehörende Paare von conjugirten Punkten der Curve. Nach der Definition der Brennpunkte aber bilden diese Punkte mit den imaginären Kreispunkten die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits, wobei die imaginären Kreispunkte ein Paar Gegenecken dieses Vierseits sind. Also hat die oben bestimmte cyclische Curve C^3 die imaginären Kreispunkte zu einem Paare conjugirter Punkte.

Ist nun A, A' ein Paar conjugirter Punkte desselben Systemes und sind F, F' die reellen Brennpunkte von K und G irgend einer der sechs Schnittpunkte von K mit C^3, so sind GF, GF' und GA, GA' zwei Strahlenpaare einer hyperbolisch gleichseitigen Involution. Also werden die Winkel FGF' und AGA' von demselben Geradenpaare halbirt. Aber diese Geraden sind bei dem Winkel FGF' bekanntlich die Tangente und die Normale des Kegelschnittes in G; also ist G Glanzpunkt für A und A' als Lichtquelle und Auge, u. s. w.

Untersuchen wir weiter die Fälle, wenn unter den gegebenen Punkten G_1, G_2, G_3 Coincidenz auftritt. Wir setzen erstens voraus dass G_1 und G_2 im Punkte G von K zusammenfallen. Da dann G_2G_1 mit der Tangente t von K in G zusammenfällt und diese Gerade als Halbirungsstrahl des Winkels FG_2F' ein Doppelstrahl der hyperbolisch gleichseitigen Involution von G_2 ist, so liegt G_1' d. h. G', offenbar auf ihr und wird durch die aus der hyperbolisch gleichseitigen Involution von G_3 abzuleitende Bedingung bestimmt, dass der Winkel GG_3G' durch die Tangente und Normale von K in G_3 halbirt werden soll. Wir begegnen hier also den Fall, dass G' zugleich conjugirter Punkt und Tangentialpunkt von G ist; desshalb ist G' in diesem Falle Wendepunkt der cyclischen Curve C^3 und hat, wie man leicht erkennt, die zweite Tangente von G' an K zur Wendetangente.

Lassen wir endlich den Punkt G_3 dem Punkte G unbegrenzt näher rücken, so tritt auch G' diesem Punkte immer näher. Und sobald die drei Punkte G_1, G_2, G_3 in G vereinigt sind, fällt auch

G' mit diesem Punkte G zusammen und die cyclische Curve hat dann einen Wendepunkt in G mit t als Wendetangente. Diese Curve kann aber K in G nur dann dreimal auf t schneiden, wenn sie in G einen Doppelpunkt mit t als eine der beiden Doppelpunkttangenten hat. Wirklich wird sich dies später von einer anderen Seite her bestätigen.

3. „Das Problem der Glanzpunkte bei dem Kegelschnitte K beweist an einem einfachen Beispiele geometrisch die Existenz von nicht involutorischen Cremona'schen Transformationen, die einen Ort von Coincidenzpunkten zulassen."

Die Punktepaare A und A', für welche die drei auf K gegebenen Punkte G_1, G_2, G_3 Glanzpunkte sind, können auch auf andere Weise bestimmt werden. Sieht man nämlich zunächst nur die Punkte G_1 und G_2 als auf K gegebene Glanzpunkte an, so entspricht jeder beliebig gewählten Lichtquelle A_1 involutorisch ein bestimmtes Auge A_2; sieht man dann weiter nur die zwei Punkte G_1 und G_3 als auf K gegebene Glanzpunkte an, so entspricht derselben Lichtquelle A_1 involutorisch ein bestimmtes Auge A_3. Also besteht zwischen den zwei Augen A_2 und A_3, welche derselben Lichtquelle entsprechen, eine im Allgemeinen nicht mehr involutorische Cremona'sche Transformation, deren Coincidenzpunkte eben die Punkte sind, welche, als Auge oder Lichtquelle betrachtet, die drei Punkte G_1, G_2, G_3 zu Glanzpunkten desselben Sextupels machen können. Aber nach dem vorhergehenden Satze erfüllen diese Punkte eine cyclische Curve dritter Ordnung. Also hat die zwischen den Punkten A_2 und A_3 auftretende Verwandtschaft einen Ort von Coincidenzpunkten, dem ich den Namen „Coincidenzcurve" beilege.

So viel mir bekannt ist, hat man bis jetzt noch nicht bemerkt, dass sich bei nicht involutorischen Cremona'schen Transformationen eine Coincidenzcurve darbieten kann;[1] dies möge entschul-

[1] Natürlich nehme ich hiebei den allgemein bekannten Fall der Collineationsaxe von zwei perspectivischen aber nicht involutorischen collinearen ebenen Systemen aus. In Bezug auf die involutorischen Cremona'schen Transformationen bemerke ich noch, dass mein in der „Annuaire de l'Association française pour l'avancement des sciences, Congrès de La Rochelle

digen, wenn ich die Verwandtschaft der Punkte A_2 und A_3 noch näher betrachte. Unmittelbar leuchtet nun ein, dass die involutorische Verwandtschaft der Punkte A_1 und A_2 eine gewöhnliche quadratische Transformation mit dem Fundamentaldreiecke $G_1\,G_2\,H_3$ ist, wobei die Kegelschnittstangenten in G_1 und G_2 die Winkel G_1 und G_2 halbiren, eine Transformation, die ich an einer anderen Stelle[1] als „transformation par droites symétriques“ untersucht habe und hier als hyperbolisch gleichseitige Transformation bezeichnen will.[2] Da nun dasselbe von der Verwandtschaft der Punkte A_1 und A_3 in Bezug auf ein ganz analog construirtes Dreieck $G_1\,G_3\,H_2$ gilt, so ist es klar, dass die Verwandtschaft der Punkte A_2 und A_3 von der dritten Ordnung ist und einer willkürlichen Geraden l von Punkten A_2 eine Curve dritter Ordnung C^3 von Punkten A_3 entspricht, die in G_1 einen Doppelpunkt hat und, unabhängig von l, immer durch vier Punkte geht, nämlich durch die Punkte G_3, H_2 und durch die in der Verwandtschaft zwischen A_1 und A_3 den G_2 und H_3 entsprechenden Punkte G_2' und H_3', von welchen der erste auf $G_1\,H_3$, der zweite auf $G_1\,G_2$ liegt, u. s. w.

Unabhängig von dem vorhergehenden Artikel findet man die Coincidenzcurve mittelst der Bemerkung, dass die Transformation dritter Ordnung aus der Combination von zwei hyper-

1883“ aufgenommener Aufsatz „Sur deux transformations géométriques uniformes“ eine ganze Familie von Cremona'schen Transformationen mit einer Coincidenzcurve enthält.

[1] Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 2. série, tome 6, page 152—169 et 174—189 „Deux cas particuliers de la transformation birationelle.“

[2] Sind M_1, M_2, M_3, M_4 die Centra der vier die Seiten des Fundamentaldreiecks berührenden Kreise, so kann unsere hyperbolisch gleichseitige Transformation ebenfalls als die Correspondenz der conjugirten Punkte in Bezug auf die durch die vier Punkte M gehende gleichseitige Hyperbel gedeutet werden. Dieser mir brieflich von Herrn Ed. Dewulf, jetzt Genie-Oberst zu Bordeaux, mit getheilte Satz wird leicht geometrisch bewiesen. Aber ebenso leicht zeigt man, dass jede involutorische quadratische Transformation zu den Kegelschnitten eines bestimmten Büschels in derselben Beziehung steht, woraus dann in Verbindung mit der bekannten Zerlegbarkeit einer beliebigen Cremona'schen Transformation in quadratische Transformationen weiter folgt, dass jede involutorische Transformation als eine Aneinanderreihung von Correspondenzen in Bezug auf verschiedene Büschel von Kegelschnitten betrachtet werden kann.

bolisch gleichseitigen Transformationen entstanden ist, welche den Fundamentalpunkt G_1 und die sich selbst entsprechenden Strahlen durch diesen Punkt gemein haben. Denn hieraus folgt, dass zwei einander entsprechende Punkte A_2 und A_3 immer mit G_1 auf einer Geraden liegen und dass diese Punkte auf einer bestimmten Geraden durch G_1 zwei projectivische Punktreihen bilden, die zwei Doppelpunkte besitzen. Der Ort dieser auf den verschiedenen Geraden durch G gelegenen Doppelpunktepaare ist nun eine Curve dritter Ordnung, da G_1, wenn der Punkt A_1 in den Schnittpunkt von $G_2 H_3$ und $G_3 H_2$ hineinfällt, einmal selbst Doppelpunkt wird, u. s. w.

4. „Für ein als Lichtquelle und Auge dienendes Punktepaar A, A' ist der Ort der Glanzpunkte der Kegelschnitte eines Büschels eine durch A und A' gehende Curve C^7 siebenter Ordnung mit sieben Doppelpunkten, welche letztere sich in den vier Basispunkten und den drei Doppelpunkten des Büschels befinden. In einem Basispunkte P sind die Tangenten von C^7 die Halbirungsstrahlen des Winkels APA'; in einem Doppelpunkte Q des Büschels sind sie jene Geraden, welche die Halbirungsstrahlen des Winkels AQA' harmonisch trennen, von den die durch Q gehende Curve des Büschels bildenden Geraden. In jedem der beiden Punkte A wird der von AA^1 und der Tangente an C^7 gebildete Winkel von dem durch diesen Punkt gehenden Kegelschnitt des Büschels halbirt.

Jeder Basispunkt P ist Glanzpunkt für zwei Kegelschnitte des Büschels und zwar für diejenigen, deren Tangenten den Winkel APA' halbiren; also fällt zweimal ein Glanzpunkt mit dem Basispunkte P und zwar in den Richtungen der beiden Halbirungsstrahlen des Winkels APA' zusammen. Demnach ist jeder Basispunkt P des Büschels ein Doppelpunkt der gesuchten Curve mit bekannten, senkrecht auf einander stehenden Doppelpunkttangenten. Aber dann muss jeder Kegelschnitt des Büschels die gesuchte Curve auch in vierzehn Punkte schneiden, nämlich in den vier zweimal zu zählenden Basispunkten und den sechs Glanzpunkten des Kegelschnittes selbst; woraus eben folgt, dass die gesuchte Curve eine C^7 ist.

Jeder der drei Punkte Q wird am Einfachsten als Doppelpunkt der Curve C^7 erkannt durch Betrachtung der beiden Kegelschnitte, die in dem gegebenen Büschel dem in zwei durch diesen Punkt Q gehende Gerade q und q' zerfallenden Kegelschnitte unendlich benachbart sind. Sind nämlich G und G' die in der Nähe von Q liegenden Berührungspunkte der in der Richtung des inneren Halbirungsstrahles des Winkels AQA' an einen dieser beiden Nachbarkegelschnitte gelegten Tangenten, so ist die diese Punkte verbindende Gerade GG' bekanntlich der der Richtung dieses inneren Halbirungsstrahles conjugirte Durchmesser des Nachbarkegelschnittes und ihre Grenzlage, die Gerade durch Q, welche durch q und q' harmonisch von dem inneren Halbirungsstrahl getrennt wird, eine Tangente in Q an die gesuchte Curve. Daher hat unsere Curve in Q zwei Tangenten, von welchen jede einen der beiden Halbirungsstrahlen des Winkels AQA' von q und q' harmonisch trennt. Und da die beiden Nachbarkegelschnitte in der Nähe von Q in verschiedenen Paaren von Scheitelwinkeln liegen, so wird jede der beiden Tangenten von C^7 in Q nur von einem Aste dieser Curve berührt,[1] u. s. w.

Ausser den in dem Satze angeführten Punkten A und A' und ihren Tangenten findet man leicht noch die siebenten Schnittpunkte der je zwei Basispunkte P verbindenden Geraden. Also führen die vier Basispunkte und die beiden Punkte A und A' unmittelbar zur Kenntniss von mit 45 Punkten äquivalenten Bedingungen.[2]

5. „Die Punktequadrupel, welche zwei auf einem Kegelschnitte K gegebene Punkte G_1 und G_2 zu einem

---

[1] Allerdings können hiebei zwei Fälle eintreten, indem die beiden Halbirungsstrahlen sich in einem und demselben Paare von Scheitelwinkeln befinden können oder nicht. Im ersten Falle liefert einer der beiden Nachbarkegelschnitte die beiden Tangenten und der andere keine, im zweiten Falle liefert jeder der Nachbarkegelschnitte eine Tangente.

[2] Ich habe mich auch bestrebt, die Frage zu lösen, für wieviel Kegelschnitte des von vier gegebenen Punkten bestimmten Büschels die vier gegebenen Basispunkte zu demselben Glanzpunktesextupel gehören, indem ich die Lichtquelle in einen dieser vier Punkte verlegte — was den gefundenen Resultaten nach erlaubt ist —; fand aber bis jetzt nur, dass die gesuchte Anzahl zwölf nicht übersteigen kann.

Glanzpunktesextupel ergänzen, bilden auf K eine biquadratische Involution. Bekanntlich wird diese von den Kegelschnitten eines Büschels aus dem gegebenen Kegelschnitte ausgeschnitten."

Aus dem letzten Theile des Satzes von Artikel 2 folgt, dass man ein solches ergänzende Quadrupel durch die Wahl eines seiner Punkte unzweideutig bestimmt; also bilden die Quadrupel eine Involution.

Zum Beweise, dass die die Punkte G_1 und G_2 zu Glanzpunktesextupeln ergänzenden Quadrupel eine biquadratische Involution bilden, kann man aber auch anführen, dass die Quadrupel die beweglichen Schnittpunkte von K mit den entsprechenden cyclischen Curven C^3 sind, welche, da sie acht Punkte — die zwei Paare Brennpunkte von K, die imaginären Kreispunkte und G_1, G_2 — gemein haben, ein Büschel bilden. Es gibt also wirklich ein die Involution aus K ausschneidendes Büschel.

Die acht Basispunkte des Büschels der Curven dritter Ordnung bestimmen bekanntlich einen neunten. Liegt dieser neunte Basispunkt zufällig auf K, so enthält jedes Quadrupel der Involution diesen Punkt, also ist die Involution nach Weglassung dieses Punktes eine cubische. Nimmt man nun diesen Punkt neben G_1 und G_2 als dritten Glanzpunkt G_3 an, so hat man ein Tripel G, G_2, G_3 von Glanzpunkten erhalten, welches das ergänzende Tripel G_4, G_5, G_6 noch nicht zu bestimmen im Stande ist, sondern zulässt, dass man noch einen vierten, willkürlich auf K gewählten Punkt als zugehörigen Glanzpunkt annimmt.[1]

---

[1] Man findet, dass zu jedem beliebig gewählten Punkte G_1 von K eilf Paare G_2, G_3 gehören, die mit G_1 ein Tripel bilden, welches das ergänzende Tripel nicht bestimmt. Denn wenn sieben Basispunkte eines Büschels von Curven C^3 fest sind und der achte eine willkürliche Gerade beschreibt, so durchläuft der neunte eine Curve achter Ordnung, die dreimal durch jeden der sieben festen Basispunkte geht; beschreibt nun der achte Basispunkt den durch den Basispunkt G_1 gehenden Kegelschnitt K, so durchläuft der neunte eine Curve dreizehnter Ordnung, die viermal durch G_1 geht, da die Fundamentalcurve von G_1 diesen Punkt zweimal enthält. Daher ist die Zahl der übrigen Schnittpunkte 22, u. s. w.

Man vergleiche:

a) C. F. Geiser: „Über zwei geometrische Probleme" (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 67, Jahrg. 1867, Seite 87—90).

Aber obwohl ein die Involution in K ausschneidendes Büschel von Curven C^3 vorhanden ist, so ist es doch einfacher die Involution auf K mittelst eines leicht zu findenden Kegelschnittbüschels zu erzeugen. Sind nämlich A_1, A_2, A_3, A_4 und B_1, B_2, B_3, B_4 zwei Quadrupel der Involution und ist P irgend ein nicht auf K liegender Punkt der Ebene, so bestimmen die beiden Kegelschnitte $(A_1 A_2 A_3 A_4 P)$ und $(B_1 B_2 B_3 B_4 P)$ ein Büschel, das offenbar das verlangte leistet.

Die Ordnungscurve der gefundenen Involution, d. h. die Enveloppe der Seitensextupel der von den Quadrupeln gebildeten vollständigen Vierecke, ist eine Curve C_3^6 sechster Ordnung, dritter Classe, für welche die Gegenseitenpaare der genannten Vierecke ein der drei Systeme von conjugirten Tangentenpaaren bilden. Die gemeinsamen Tangenten von C_3^6 und K berühren K in den sechs Doppelpunkten der Involution und die diese sechs Doppelpunkte zu Verzweigungsgruppen ergänzenden Paare von Verzweigungspunkten sind die zwölf den beiden Curven C_3^6 und K gemeinsamen Punkte.[1]

6. „Fallen die Punkte A und A' zusammen, so besteht das Glanzpunktesextupel auf K aus den vier Fusspunkten der Normalen und den zwei Berührungs-

---

b) C. Le Paige: „Sur quelques transformations géométriques uniformes.“ (Bulletins de l'Academie de Belgique, 3. Série, tome 4, Nr. 11, 1882.)

c) P. H. Schoute: „Sur la transformation conjuguée“ (Annuaire de l'Association française etc., Montpellier 1879; page 194—206.)

[1] In den oben gegebenen Betrachtungen des Textes findet man leicht das Material zum Beweise des allgemeinen Satzes:

„Die sechs Gegenseitenpaare von zwei vollständigen Vierecken sind sechs Paare conjugirter Tangenten desselben Systemes einer C_3^6, wenn die acht Eckpunkte der beiden Vierecke auf einem Kegelschnitt liegen.“

Also hat man auch umgekehrt:

„Die sechs Gegenpunktepaare von zwei vollständigen Vierseiten sind sechs Paare conjugirter Punkte desselben Systems einer C_6^3, wenn die acht Seiten der beiden Vierseite einen Kegelschnitt berühren.“

In Bezug auf den zweiten Satz vergleiche man meine „Notiz über die Lemniscate“ (Sitzungsberichte der kais. Akademie d. Wissensch. in Wien, II. Abth. Bd. 88, Jahrg. 1883, S. 1252—1267).

punkten der Tangenten, welche man aus dem Coincidenzpunkte an K legt."[1]

Diese Bemerkung führt in Verbindung mit einer schönen von Joachimsthal gegebenen Construction zur Bestimmung von zwei Quadrupeln der biquadratischen Involution mittelst Geraden und Kreisen, wenn K ein gezeichnet vorliegender Kegelschnitt ist. Sind nämlich t_1 und t_2 die Tangenten und n_1 und n_2 die Normalen in G_1 und G_2 an K, und schneiden t_1 und n_2 einander in A, t_2 und n_1 einander in B, so enthalten die beiden Glanzpunktesextupel von K, welche der Coincidenz von Lichtquelle und Auge in A resp. B entsprechen, die Punkte G_1 und G_2 und es gehören also die die beiden Punkte G_1 und G_2 zu diesen Sextupeln ergänzenden Quadrupel der in's Auge gefassten Involution an. Das erste dieser beiden Quadrupel besteht nun aus dem Berührungspunkte der zweiten Tangente an K durch A und den drei Fusspunkten der ausser n_2 aus A an K noch möglichen Normalen; das zweite ist ganz analog zusammengesetzt. Und während nun der Berührungspunkt der zweiten Tangenten aus A resp. B leicht lineal gefunden wird, hat Joachimsthal bekanntlich zur Bestimmung der verlangten drei Normalenfusspunkte für Centralkegelschnitte eine elegante mit dem Zirkel ausführbare Construction gegeben,[2] welche erst jüngst von Herrn Pelz wiederbehandelt und auf die Parabel ausgedehnt worden ist.[3]

Ich bemerke, dass man leicht noch eine dritte Gruppe findet, wenn man A und A' in den Schnittpunkt von n_1 und n_2 zusammenrücken lässt.

Die cyclische Curve C^3, welche für das Paar A, A' im Allgemeinen der Ort der Glanzpunkte einer Schaar von confocalen Kegelschnitten ist, kann auch, wenn A und A' in einen willkürlichen Punkt H zusammenfallen, entweder als der Ort der Fuss-

[1] Die Normalenfusspunkte sind selbstverständlich für ein leuchtendes Auge „Punkte von Maximalglanz", die Berührungspunkte der Tangenten „Punkte von Minimalglanz."

[2] Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 26, S. 172—181, „Über die Normalen der Ellipse und des Ellipsoids."

[3] Sitzungsberichte der kais. Akademie d. Wissensch. in Wien. II. Abtheilung, Bd. 85 (Jahrg. 1882), S. 169—175, „Zum Normalenproblem der Kegelschnitte."

punkte von den aus H auf die Kegelschnitte dieser Schaar gefällten Normalen, oder aber als der Ort der Berührungspunkte von den aus H an die Kegelschnitte dieser Schaar gelegten Tangenten betrachtet werden. Denn da durch jeden Punkt P der Ebene zwei einander senkrecht schneidende Kegelschnitte der Schaar gehen, so ist dieser Punkt Berührungspunkt einer der beiden Tangenten aus H für den einen dieser beiden Kegelschnitte, wenn er Fusspunkt einer der vier Normalen aus H für den anderen ist, und umgekehrt. Betrachtet man nun die Curve als den Ort der Berührungspunkte der aus H an die Kegelschnitte der Schaar zu führenden Tangenten, so erhellt unmittelbar, dass sie in H einen Doppelpunkt hat und dass die senkrecht auf einander stehenden Halbirungsstrahlen des Winkels FHF', die Doppelstrahlen der hyperbolisch gleichseitigen Involution der Tangenten durch H, die Doppelpunktstangenten sind. So findet man bei Betrachtung eines der beiden durch H gehenden Kegelschnitte der Schaar das am Ende des zweiten Artikels schon erwähnte Ergebniss bestätigt.

7. Construction der drei Punkte G eines Kegelschnittes K, welche drei auf dieser Curve gegebene Punkte G_1, G_2, G_3 zu einem Glanzpunktesextupel ergänzen.

Die die beiden Punkte G_1 und G_2 von K zu Glanzpunktesextupeln ergänzenden Quadrupel bilden, wie wir gesehen haben, auf K eine biquadratische Involution, von welcher man zwei Gruppen mittelst Lineal und Zirkel construiren kann, wenn K ein gezeichnet vorliegender Kegelschnitt ist. Die gestellte Aufgabe verlangt nun die den Punkt G_3 enthaltende Gruppe dieser Involution zu vervollständigen.

Nennt man die Punkte des eines Quadrupels A_1, A_2, A_3, A_4, die des anderen B_1, B_2, B_3, B_4 und ist P ein willkürlich ausserhalb K gewählter Punkt der Ebene, so sind die drei gesuchten Punkte offenbar die weiteren Schnittpunkte von K mit dem durch G_3 gehenden Kegelschnitte K' des durch die Kegelschnitte $(A_1 A_2 A_3 A_4 P)$ und $(B_1 B_2 B_3 B_4 P)$ bestimmten Büschels. Da wir zwei Punkte von K', nämlich P und G_3, schon haben, so construiren wir noch drei Punkte dieser Curve und bestimmen dazu auf jeder von drei beliebig durch G_3 geführten Geraden ihren zweiten

Punkt vermittelst der durch das Büschel der Kegelschnitte auf dieser Geraden erzeugten quadratischen Involution. Dies erfordert auf jeder der drei Geraden durch G_3 erstens die Bestimmung der Schnittpunktepaare A', A'' und B', B'' mit den beiden Kegelschnitten $(A_1 A_2 A_3 A_4 P)$ und $(B_1 B_2 B_3 B_4 P)$ und zweitens die Construction jenes Punktes, der mit G_3 ein Paar der durch $A'A''$ und $B'B''$ bestimmten Involution bildet. Hat man so fünf Punkte von K' gefunden, so erhält man — das Gebiet der nur Gerade und Kreise erfordernden Constructionen verlassend[1] — in den drei neuen Schnittpunkten von K mit der nun zu zeichnenden Curve K' die drei verlangten Punkte.

Die angegebene Construction vereinfacht sich bedeutend durch eine passende Wahl des Punktes P. Ist nämlich P der Schnittpunkt irgend einer der sechs Seiten des Vierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$ mit irgend einer der sechs Seiten des Vierecks $B_1 B_2 B_3 B_4$, so zerfallen die beiden das Büschel bestimmenden Kegelschnitte in Geradenpaare; also werden auf jeder Geraden durch G_3 die Punkte A', A'' und B', B'' unmittelbar gefunden, u. s. w.

Wenn von den drei gegebenen Punkten G_1, G_2, G_3 die beiden G_1 und G_2 in G zusammenfallen, dann können die angegebenen Constructionen noch ausgeführt werden, indem man G_1 und G_2 durch G und G_3 ersetzt, nachher statt drei Gerade durch G_3 drei Gerade durch G annimmt, u. s. w.

Bei Coincidenz der drei gegebenen Punkte in G kann man offenbar annehmen, dass auch Lichtquelle und Auge in diesem Punkte zusammenfallen, wobei dann G_4, G_5, G_6 die Fusspunkte der Normalen sind, die man aus G auf K fällen kann. Diese Fusspunkte werden nach Joachimsthal mittelst eines Kreises gefunden.

Wenn aber der Kegelschnitt K nicht gezeichnet vorliegt, so kann man — und hiebei kehre ich noch einmal zum allgemeinen Falle von nicht coincidirenden Punkten G_1, G_2, G_3 zurück — die drei gesuchten Punkte G_4, G_5, G_6 natürlich auch mittelst der cyclischen Curve C^3 erhalten. Zur Construction dieser Curve führen dann hauptsächlich zwei Wege, indem man sie entweder

---

[1] Eigentlich hat man dieses Gebiet schon verlassen bei der Voraussetzung, dass K gezeichnet vorliegt.

als den Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Strahlenpaare von zwei hyperbolisch gleichseitigen Strahleninvolutionen in halb perspectivischer Lage, oder aber als den Ort der Schnittpunkte der Kreise eines Büschels mit ihren durch einen festen Punkt gehenden Durchmessern betrachtet. Ich deute beide Constructionen mit einigen Worten an.

Bei der ersten Auffassung bestimmt man sogleich den dem Punkte G_1 conjugirten Punkt G'_1 der Curve. Da die Tangente und die Normale von K in G_2 die Doppelstrahlen der Involution in G_2 sind, so halbiren diese Geraden den Winkel $G_1 G_2 G'_1$. Ebenso findet man, dass die Tangente und die Normale von K in G_3 die Halbirungsstrahlen des Winkels $G_1 G_3 G'_1$ sind. Hat man nun nach diesen Angaben den Punkt G'_1 construirt und nimmt man weiter G_1 und G'_1 als die Scheitel der quadratischen Strahleninvolutionen an, so ist die Verwandtschaft beider Involutionen in halb perspectivischer Lage schon durch zwei der drei Punkte F, G_2, G_3 festgelegt und man findet die ganze Construction in allen Details durch Herrn Schröter a. a. O. angegeben.

Bei der zweiten Auffassung fängt man ebenfalls mit der Bestimmung von G'_1 an. Darauf verbindet man den Mittelpunkt der Strecke $G_1 G'_1$ mit dem Centrum von K, wodurch man in dem unendlich fernen Punkt dieser Verbindungslinie den reellen unendlich fernen Punkt der cyclischen Curve gefunden hat. Der diesem unendlich fernen Punkt conjugirte Punkt ist dann der Scheitel des Büschels der Kreisdurchmesser. Das Kreisbüschel selbst wird durch die auf FF' und $G_1 G'_1$ als Durchmesser beschriebenen Kreises bestimmt, u. s. w.

Die Construction der cyclischen Curve C^3 in den beiden Fällen, wenn zwischen den G_1, G_2, G_3 Coincidenz auftritt, bietet weiter keine Schwierigkeit.

---

8. „Bei willkürlicher Lage von Lichtquelle und Auge, also der Punkte A und A', hat eine punktallgemeine Curve C^m von der Ordnung m eine Anzahl von $m(2m-1)$ Glanzpunkten. Diese Punkte liegen auf einer Curve C^{2m} von der Ordnung $2m$, welche durch A, A' und

die unendlich ferne n Punkte von C^m geht und die $(m-1)^2$ Pole der unendlich fernen Geraden g_∞ in Bezug auf C zu Doppelpunkten hat."

Bekanntlich hat Steiner bei der Ableitung der Anzahl der Normalen, die von einem Punkte A auf eine Curve C^m gefällt werden können, für den Ort des Punktes P, dessen Polgerade in Bezug auf C^m senkrecht auf AP steht, eine Curve C^m_A gefunden.[1] Später hat Herr Dewulf, jetzt Genie-Oberst zu Bordeaux, diese Untersuchung erweitert, indem er den Ort des Punktes P ableitete, dessen Polgerade in Bezug auf C^m mit der von P nach dem festen Punkte A geführten Gerade einen bestimmten Winkel α bildet.[2] Da nun die in meinem obenstehenden Satze angeführte Hilfscurve C^{2m} mittelst der schiefen Polaren des Herrn Dewulf gefunden wird, erlaube ich mir die von ihm gefundenen Resultate, welcher ich für meinen Zweck bedarf, hier in aller Kürze einzuschalten.

Versteht man zur Vermeidung von Zweideutigkeiten unter dem von AP und der Polargerade p von P gebildeten Winkel, jenen Winkel, um den man AP um ihren Schnittpunkt mit p im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers drehen muss, damit sie mit p zusammenfalle, so ist es klar, dass die Punkte P einer willkürlichen Gerade g durch A, für welche dieser Winkel einen bestimmten, zwischen $0°$ und π liegenden Werth α annimmt, jene Punkte von g sind, deren Polgerade durch den unendlich fernen Punkt G'_∞ jener Gerade g' gehen, in welche g durch Drehung um den Winkel α um A übergeht. Also werden die auf g gesuchten Punkte von der ersten Polare von G'_∞ in Bezug auf C^m aus g ausgeschnitten, und desshalb ist auch der Ort des Punktes P,

---

[1] Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 57; Jahrg. 1855, Seite 333—348, oder Jacob Steiner's gesammelte Werke, Band 2 Seite 621—638, „Über algebraische Curven und Flächen."

Da Steiner die Erzeugung von Curven durch projectivisch verwandte Curvenbüschel noch nicht benützt, ist seine Ableitung nicht die einfachste.

[2] Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 2. série, tome 2 (1878), page 41—48 et 372—392: „Essai d'une théorie géométrique des polaires inclinées."

dessen Polgerade in Bezug auf C^m mit AP den bestimmten Winkel α bildet, der Ort der Schnittpunkte der einander entsprechenden Elemente von zwei projectivisch verwandten Büscheln, nämlich des Büschels der Strahlen g durch A und des Büschels der ersten Polaren der Punkte G'_∞ der Geraden g_∞: denn die Büschel sind offenbar projectivisch verwandt, da dies mit dem Strahlenbüschel der Geraden g durch A und der Punktreihe G'_∞ auf g_∞ der Fall ist. Hieraus folgt dann, dass die „schiefe Polare" von C^m für den Punkt A und den Winkel α eine Curve m^{ter} Ordnung durch A und die $(m-1)^2$ Pole von g_∞ in Bezug auf C^m ist; diese Curve mag durch die Schreibweise $C^m_{A,\alpha}$ angedeutet werden.

Nun beweist man leicht, dass die den verschiedenen, zwischen 0° und π liegenden Werthen von α entsprechenden Curven $C^m_{A,\alpha}$ eines Punktes A ein Büschel C^m_A bilden, welches projectivisch ist mit der Werthreihe von $\tan\alpha$. Denn ein willkürlich gewählter Punkt P der Ebene bestimmt durch den in dem oben angegebenen Sinne genommenen Winkel α seiner Polgerade p und AP eine diesem Werthe von α entsprechende Curve $C^m_{A,\alpha}$. Die Curven C^m_A haben wirklich m^2 gemeinschaftliche Punkte, nämlich die $(m-1)^2$ Pole von g_∞, den Punkt A und auf jeder der beiden Gerade durch A und einen imaginären Kreispunkt die $m-1$ weiteren Schnittpunkte mit der ersten Polare dieses Kreispunktes in Bezug auf C^m.

Diese einzige Eigenschaft der schiefen Polare reicht schon hin zur Auffindung der oben angedeuteten Hilfscurve. Ist nämlich P ein Glanzpunkt von C^m in Bezug auf das Paar A, A', so bilden AP und $A'P$ mit der Tangente p von C^m in P einander zu π ergänzende Winkel. Desshalb werden die Glanzpunkte von C^m in Bezug auf A, A' sich auf dem Orte der Schnittpunkte der einander entsprechenden Elemente der zwei Büschel C^m_A und $C^m_{A'}$ befinden, wenn man jene Curven als einander entsprechend betrachtet, für welche die beiden Parameter $\tan\alpha$ gleiche, aber entgegengesetzt bezeichnete Werthe haben. Dieser Ort ist aber eine Curve C^{2m}, u. s. w.

Unsere Curve C^{2m} geht durch A und A', da A ein Basispunkt des Büschels C^m_A und ebenso A' ein Basispunkt des Büschels $C^m_{A'}$ ist; sie geht zweimal durch jeden der $(m-1)^2$ Pole von g_∞ in

Bezug auf C^m, da jeder dieser Punkte Basispunkt von beiden Büscheln ist.[1] Aber zur Beantwortung der Frage, warum sie auch durch die m Schnittpunkte von g_∞ mit C^m geht, fassen wir die auf g_∞ liegenden Punkte von C^{2m} etwas näher in's Auge.

Ist g wieder eine willkürliche Gerade durch A und G_∞ ihr unendlich ferner Punkt, ebenso g' diese Gerade in der um den Winkel α um A gedrehten Lage und G'_∞ ihr unendlich ferner Punkt, sind weiter P^m die m Schnittpunkte von g_∞ mit C^m und ist P^{m-1} auf g_∞ die erste Polgruppe von G'_∞ in Bezug auf P^m, so wird diese Gruppe P^{m-1} bei Bewegung von G_∞ über g_∞ auf dieser Geraden eine Involution erzeugen, welche projectivisch ist mit der Punktreihe G'_∞ und also auch mit der Punktreihe G_∞. Und nun sind die n Schnittpunkte von g_∞ mit $C^m_{A,\alpha}$ diejenigen Punkte, in denen G_∞ mit einem der Punkte der ihm entsprechenden Gruppe P^{m-1} coincidirt.

Im Allgemeinen folgt hieraus, dass alle Curven C^m_α, welche für verschiedene Punkte A demselben Werthe von α entsprechen, von g_∞ in denselben Punkten geschnitten werden, dass für $\alpha = 0°$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, für $\alpha = \pi$, die Punkt-G reihen$_\infty$ und G'_∞ Punkt für Punkt übereinstimmen und dass die m Schnittpunkte von $C^m_0 = C^m_\pi$ und g_∞ eben die unendlich fernen Punkte von C^m sind. Denn der Pol G_∞ fällt nur mit einem Punkte seiner ersten Polargruppe zusammen, wenn G_∞ einer der Punkte P^m ist. Also bestehen die m^2 Schnittpunkte von C^m mit $C^m_{A,0} = C^m_{A,\pi}$ aus den Berührungspunkten der $m(m-1)$ aus A an C^m gehenden Tangenten und den m Schnittpunkten von C^m mit g_∞; also geht die Curve C^{2m} durch diese m Punkte hindurch, da sie als Schnittpunkte von $C^m_{A,0} = C^m_{A,\pi}$ mit $C^m_{A',\pi} = C^m_{A',0}$ zu betrachten sind. Auch findet man leicht die m übrigen Schnittpunkte von g_∞ mit C^{2m}; es sind dies die gemeinschaftlichen Schnittpunkte von g_∞ mit $C^m_{A,\frac{\pi}{2}}$ und $C^m_{A',\frac{\pi}{2}}$.

[1] Die übrigen $2(m-1)$ Schnittpunkte der Curve C^{2m} mit der Gerade durch A und A' sind die $m-1$ Punkte von l, deren Polgeraden in Bezug auf C^m senkrecht auf l stehen, und die $m-1$ Punkte von l, deren Polgeraden in Bezug auf C^m mit l parallel laufen. Beide Gruppen enthalten $m-1$ Punkte, da die erste Polare des unendlich fernen Punktes von l und ebenso die des allen Senkrechten auf l gemeinsamen Punktes durch l in $m-1$ Punkten geschnitten werden.

Ist nun einerseits jeder Glanzpunkt von C^m in Bezug auf A, A' in dem Schnittpunktesysteme der beiden Curven C^m und C^{2m} enthalten, so leuchtet anderseits ein, dass jeder Punkt des um die m unendlich fernen Punkte von C^m verringerten Schnittpunktesystemes Glanzpunkt von C^m ist in Bezug auf A, A'. Also hat die Curve C^m in Bezug auf das Paar A, A' eine Anzahl von $m(2m-1)$ Glanzpunkten.[1]

---

[1] Die Zahl der Glanzpunkte von C^m für das Paar A, A' ist offenbar die Zahl der Kegelschnitte mit den Brennpunkten A, A', die C^m berühren. Nun ist die Zahl der Berührungen von Kegelschnitten des Systemes μ, ν mit einer Curve m^{ter} Ordnung und n^{ter} Classe im Allgemeinen $n\mu+m\nu$ (Kalkül der abzählenden Geometrie von Dr. H. Schubert, Seite 14); da nun hier bekanntlich $\mu=2$, $\nu=1$ und $n=m(m-1)$, so findet man für die Zahl der Glanzpunkte $2m(m-1)+m=m(2m-1)$.

Bekanntlich hat Quételet (man vergleiche „Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven" u. s. w., Seite 125) bemerkt, dass die Brennlinie, welche durch Reflexion von A in Bezug auf irgend eine C^m erzeugt wird, die Evolute ist von der von A aus verdoppelten Fusspunktcurve von A in Bezug auf C^m. Die Zahl der Glanzpunkte von C^m für das Paar A, A', d. h. die Zahl der durch A' gehenden Tangenten der Brennlinie, ist also die Classe der erwähnten Evolute, d. h. die Zahl der Normalen, die von A' auf die verdoppelte Fusspunktcurve gefällt werden können. Sind nun m' und n' Ordnung und Classe der Evolute, geben s und s' an, wie oft C^m und ihre Fusspunktcurve für A die unendlich ferne Gerade berühren und e und e', wie oft diese Curven durch einen imaginären Kreispunkt gehen, so ist die verlangte Zahl durch $m'+n'-s'-e'$ gegeben (Anal. Geom. d. h. e. C., S. 120). Aber bei willkürlicher Lage von A hat man (Anal. Geom. der h. e. C., S. 130):

$$m'=2n-s \qquad\qquad e'=2(n-s)$$
$$n'=m+2n-2s-e \qquad\qquad s'=o;$$

also ist die Zahl der Glanzpunkte allgemeiner durch $m+2n-s-e$ ausgedrückt. Dieses Resultat gilt aber nur, wenn A und A' eine willkürliche Lage haben in Beziehung auf C^m und die unendlich ferne Gerade der Ebene. Wenn z. B. beide Punkte auf g_∞ liegen, so verringert sich die Zahl aus leicht zu ermittelnden Gründen um $m-e$, was man u. a. beim Kreise und den Kegelschnitten überhaupt unmittelbar bestätigt findet, u. s. w.

Die bekannte Eigenschaft der durch einen Kreispunkt gehenden Geraden, mit jeden zwei nicht durch diesen Kreispunkt gehenden Geraden der Ebene Winkel zu bilden, die wegen der Gleichheit ihrer trigonometrischen Tangenten als gleich zu betrachten sind, könnte uns veranlassen, zu glauben, dass die $2m(m-1)$ Berührungspunkte P der von den Kreispunkten an C^m gehenden Tangenten unter die Glanzpunkte aufzunehmen sind, da

Fallen A und A' zusammen, so ist die Gruppe der $m(2m-1)$ Glanzpunkte zusammengesetzt aus den Fusspunkten der m^2 Normalen und den Berührungspunkten der $m(m-1)$ Tangenten, die aus dem Coincidenzpunkte an C^m gelegt werden können. Die Curve C^{2m} ist dann die Combination der diesem Punkte zukommenden Curven $C^m_{\frac{\pi}{2}}$ und $C^m_0 = C^m_\pi$.

9. „Es gibt eine $\frac{m(m+1)}{2}$-fach unendliche Anzahl von Curven C^{2m-1}, welche auf C^m die $m(2m-1)$ Glanzpunkte in Bezug auf A, A' bestimmen.“

Ist γ^m eine Curve m^{ter} Ordnung, deren Schnittpunkte mit g_∞ die allen Curven $C^m_{\frac{\pi}{2}}$ gemeinsamen unendlich fernen Punkte sind, so bestimmen die oben gefundene Curve C^{2m} und die Combination von C^m und γ^m ein Büschel von Curven der Ordnung $2m$, welche alle g_∞ in den nämlichen Punkten schneiden und durch die $m(2m-1)$ Glanzpunkte von C^m in Bezug auf A, A' gehen. Die durch einen willkürlich auf g_∞ gewählten Punkt gehende Curve dieses Büschels zerfällt offenbar in g_∞ und eine durch die Glanzpunktegruppe gehende Curve C^{2m-1}. Also gibt es wenigstens eine durch diese Punkte gehende Curve C^{2m-1}. Aber wenn durch $m(2m-1)$ Punkte einer C^m eine C^{2m-1} gelegt werden kann, so geht nach einem bekannten Satze Pluecker's jede Curve C^{2m-1}, welche durch $m(2m-1) - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ dieser Punkte gelegt ist, durch die $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ übrigen. Also kann man von der durch die Glanzpunkte gehenden C^{2m-1} noch

$$(m+1)(2m-1) - \left[m(2m-1) - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)\right] = \frac{1}{2}\, m(m+1)$$

Punkte willkürlich annehmen, u. s. w.

---

für jeden dieser Punkte P und seiner Tangente p die Winkel (AP,p) und $(A'P,p)$ gleich sind. Dies ist aber nicht der Fall. Denn die Glanzpunktebedingung ist nicht die, dass die trigonometrischen Tangenten der beiden Winkel einander gleich sind, sondern dass sie einander entgegengesetzt gleich sind.

10. „**Es gibt im Allgemeinen drei Punktepaare** A, A', **welche vier beliebig auf** C^m **gewählte Punkte** G_1, G_2, G_3, G_4 **zu Glanzpunkten einer und derselben Gruppe machen.**“

Nimmt man erstens nur drei Punkte G_1, G_2, G_3 auf C^m als Glanzpunkte an, so findet man auf der am Schlusse von Artikel 3 entwickelten Weise eine (nun nicht mehr cyclische) Curve dritter Ordnung als Ort von Paaren A, A'. Ebenso erhält man bei Annahme der Punkte G_1, G_2, G_4 als Glanzpunkte für diesen Ort eine zweite C^3. Aber beide Curven C^3 haben schon drei Punkte gemein, nämlich die drei Fundamentalpunkte G_1, G_2, H_3 der in beiden Combinationen aufgenommenen nur von G_1 und G_2 abhängenden quadratischen Transformation; sie schneiden sich daher noch in sechs Punkten und diese müssen sich, da der dem A entsprechende Punkt A' schon von G_1 und G_2 allein bestimmt ist, in drei Paare von Punkten A, A' zerlegen lassen.

Während wir im vorhergehenden Artikel sahen, dass die $m(2m-1)$ Punkte einer Glanzpunktegruppe bei der Bestimmung einer durch sie hindurchgehenden Curve C^{2m-1} für ebenso viele von einander unabhängige Punkte gelten, als es der **Pluecker**'sche Satz verlangt, so haben wir jetzt gezeigt, dass sie, als Glanzpunkte betrachtet, schon von vier aus ihnen, wenn auch nicht unzweideutig, bestimmt werden.

11. „**Der Ort der Glanzpunkte der Curven** C^m **eines allgemeinen Büschels für das Paar** A, A' **ist eine Curve** C^{4m-1}, **welche die** m^2 **Basispunkte und die** $3(m-1)^2$ **Doppelpunkte des Büschels zu Doppelpunkten hat.**“

Denn jede Curve C^m des Büschels schneidet den gesuchten Ort einmal in ihren $m(2m-1)$ eigenen Glanzpunkten und zweimal in den m^2 Basispunkten; also u. s. w.

Die $4m-1$ Schnittpunkte des Ortes mit der Verbindungslinie von A und A' sind erstens die $2(m-1)$ Berührungspunkte von l mit Curven des Büschels, zweitens die $2m-1$ Punkte, in denen l von einer Curve des Büschels senkrecht geschnitten wird und drittens die Punkte A, A'. Denn erstens gibt es $2(m-1)$ Curven des Büschels, welche l berühren, da die von dem Büschel auf l erzeugte Involution bekanntlich $2(m-1)$ Doppelpunkte hat und zweitens hat man $2m-1$ Curven des Büschels, welche l senkrecht schneiden, da der Ort der Schnittpunkte der Curven C^m

mit ihren ersten Polaren in Bezug auf den in der Richtung senkrecht auf l unendlich fernen Punkt eine Curve C^{2m-1} ist, u. s. w.

Ich wende mich nun zur Behandlung des Glanzpunkteproblems im Raume.

---

12. „In Bezug auf zwei willkürlich als Lichtquelle und Auge gewählte Punkte A, A' hat eine punktallgemeine Fläche m^{ter} Ordnung F^m eine Anzahl von $m(2m^2-1)$ Glanzpunkten. Jede der beiden Ebenen, die durch die Verbindungslinie l von A und A' gehen und den unendlich fernen imaginären Kugelkreis berühren, enthält $m(m-1)$ dieser Punkte.

Ist G für das Paar A, A' ein Glanzpunkt von F^m, so liegt die Normale auf F^m in G erstens mit der Verbindungslinie l der Punkte A, A' in einer Ebene und dann halbirt sie überdies in dieser Ebene den Winkel AGA'. Also suchen wir zuerst auf F^m den Ort der Punkte, für welche die auf F^m errichteten Normalen die Gerade l schneiden und zweitens den Ort der Glanzpunkte der Schnitte von F^m mit den durch l gelegten Ebenen für das Paar A, A'. Denn, da die gesuchten Glanzpunkte auf beiden Curven liegen, so werden sie in dem Systeme der Schnittpunkte beider Curven enthalten sein müssen.

Der Ort der Punkte von F^m, für welche die auf F^m errichteten Normalen l schneiden, d. h. die Projection von l auf F^m [1], ist als

---

[1] Man vergleiche:

a) F. August, „Geometrische Betrachtung der Normalen, welche sich von einem beliebigen Punkte auf eine algebraische Fläche fällen lassen". (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 68, Jahrg. 1868, Seite 242—246.)

b) A. Mannheim. „Quelques résultats obtenus par la considération du déplacement infiniment petit d'une surface algébrique" (Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, tome 70, année 1870 I. p. 1025—1028).

c) P. H. Schoute, „Over het projecteeren op oppervlakken." (Nieuw Archief von Wiskunde, deel 6, blz 19—49, §. 10) oder in der abgekürzten französischen Übersetzung „De la projection sur une surface" (Annuaire de l'Association française, etc., Montpellier 1879, page 155—162 §. 2).

Schnittcurve der gegebenen Fläche F^m mit einer zweiten Lage, die sie bei einer unendlich kleinen Drehung um l einnehmen würde, eine Raumcurve R^{m^2}, die Basiscurve des von beiden Flächen bestimmten Büschels. Sie geht offenbar durch die Schnittpunkte von l mit F^m.

Der Ort der Glanzpunkte für die durch l geführten ebenen Schnitte von F^m ist eine Raumcurve R^{2m^2}. Denn jede dieser Ebenen enthält, wie wir gesehen haben, $m(2m-1)$ Glanzpunkte der Schnittcurve für A, A'. Und jeder Schnittpunkt von l mit F^m liegt einmal auf der gesuchten Curve, nämlich in Bezug auf den Schnitt von F^m mit jener Ebene durch l, welche die Tangentialebene von F^m in diesem Punkte in einer senkrecht auf l stehenden Geraden durchschneidet, so dass jede Ebene durch l im Ganzen $m(2m-1)+m=2m^2$ Punkte des Ortes enthält, u. s. w.

Wenn wir nun weiter die Zahl der Schnittpunkte der beiden Curven ermitteln, so erinnern wir daran, dass R^{m^2} die Basiscurve eines Flächenbüschels von der Ordnung m ist. Hieraus geht nämlich hervor, dass die gesuchten Punkte als die Schnittpunkte von R^{2m^2} mit einer zweiten, sie nicht enthaltenden, Fläche F^m zu betrachten sind und die Zahl dieser Schnittpunkte also $2m^3$ betragen muss. Da nun aber die m Schnittpunkte von l mit F^m auf R^{2m^2} und ebenfalls auf der zweiten Fläche F^m gelegen sind, so kommen diese unter den gefundenen Punkten vor, ohne jedoch Glanzpunkte von F^m für das Paar A, A' zu sein; und da die nicht auf l liegenden Schnittpunkte von R^{2m^2} und R^{m^2} offenbar den beiden Glanzpunktebedingungen Genüge leisten, so ist die gesuchte Anzahl $2m^3-m$ oder $m(2m^2-1)$.[1]

---

[1] Die Betrachtung des Ortes der in den Ebenen durch l liegenden Curven C^{2m}, welche in der in Artikel 8 angegebenen Weise auf den Schnittcurven dieser Ebenen mit F^m die Glanzpunkte geben, führt, wie ich in aller Kürze zeigen werde, zur selben Zahl. Dieser Ort geht einmal durch l, da die Polarebene eines beliebigen Punktes von l in Bezug auf F^m von einer einzigen Ebene durch l in einer senkrecht auf l stehenden Geraden aber von keiner Ebene durch l in einer zu l parallelen Geraden geschnitten wird. Desshalb ist die Fläche eine durch l gehende F^{2m+1}, da jede Ebene durch l die Gerade l und eine Curve C^{2m} enthält. Ausserdem wissen wir, dass diese Fläche F^{2m+1} den Durchschnitt von F^m mit der unendlich fernen Ebene enthält, da jede C^{2m} die unendlich fernen Punkte der zugehörigen C^m ent-

Ist π eine der beiden durch l an den imaginären Kugelkreis Ω gelegten Berührungsebenen, ω der Berührungspunkt und k^m die Schnittcurve von π mit F^m, so beweist man weiter ohne Mühe, dass alle $m(m-1)$ Berührungspunkte Q der aus ω an k^m geführten Tangenten Glanzpunkte sind. Da eine Gerade und eine Ebene bekanntlich senkrecht auf einander stehen, wenn ihre unendlich fernen Elemente Pol und Polgerade von einander sind in Bezug auf Ω und die Berührungsebene von F^m in irgend einem der Punkte Q durch ω geht, so schneidet die Normale von F^m in diesem Punkte Q die Polgerade von ω in Bezug auf Ω, d. h. die Tangente von Ω in ω, d. h. die unendlich ferne Gerade von π; also liegt diese Normale in π und Q ist ein Punkt der Projectionscurve R^{m^2} von l auf F^m. Anderseits ist ein willkürlich auf k^m gewählter Punkt R bekanntlich Glanzpunkt von k^m in Bezug auf A, A', wenn Tangente und Normale von k^m in R die Gerade l in zwei harmonisch von A und A' getrennten Punkten T und N treffen, welche Bedingung erstens von den $m(m-1)$ Punkten Q und weiter noch von m^2 anderen Punkten R auf k^m erfüllt wird. Da nämlich ein Winkel in einer Ebene ein rechter ist, wenn die unendlich fernen Punkte seiner Schenkel von den imaginären Kreispunkten der Ebene harmonisch getrennt werden, in π aber die imaginären Kreispunkte in ω zusammenfallen und die Tangente in einem Punkte Q an k^m ebenfalls durch ω geht, so ist die Normale in diesem Punkte Q an k^m unbestimmt und man kann daher die Verbindungslinie von Q mit dem durch A, A' harmonisch vom Schnittpunkte T der Tangente getrennten Punkte N

---

hält. Nun schneidet aber die Projection R^{m^2} von l auf F^m diese Fläche F^m in $m^2(2m+1)$ Punkten, von welchen die m^2 Schnittpunkte von R^{m^2} mit der unendlich fernen Ebene und die m Schnittpunkte dieser Curve mit l als dem Probleme fremde Punkte zu betrachten sind. Es bleiben also $m^2(2m+1)-m^2-m=m(2m^2-1)$ Punkte als Glanzpunkte übrig.

Die Zahl der Glanzpunkte von F^m für das Paar A, A' ist offenbar auch als die Zahl der Umdrehungsflächen zweiten Grades mit den Hauptbrennpunkten A, A', die F berühren, zu betrachten. Also führt auch die Formel $k\mu+r\nu+m\rho$ („Kalkul der abzählenden Geometrie" von Dr. H. Schubert, Seite 54) zum Ziele. Denn man hat $\mu=2$, $\nu=4$, $\rho=1$ und anderseits bei den punktallgemeinen Flächen $r=m(m-1)$ und $k=m(m-1)^2$; man findet desshalb $2m(m-1)^2+4m(m-1)+m=m(2m^2-1)$ wie oben.

als Normale von k^m in Q betrachten. Also zeigen die nicht auf l liegenden Schnittpunkte Q von R^{m^2} mit π in gewisser Hinsicht auch das zweite Merkmal der Glanzpunkte im Raume und es müssen also die $2m(m-1)$ ausser l liegenden Schnittpunkte von R^{m^2} mit den beiden Ebenen π in der Gruppe der $m(2m^2-1)$ Glanzpunkte enthalten sein. Desshalb suchen wir nur noch in jeder der beiden Ebenen π die m^2 Punkte R, welche ausser den Punkten Q die zweite Bedingung erfüllen und also die übrigen Schnittpunkte dieser Ebene mit R^{m^2} sein werden.[1]

Ist R ein willkürlich gewählter Punkt der Curve k^m in einer der beiden Ebenen π, so geht die Normale von k^m in R durch ω; denn der unendlich ferne Punkt N_∞ dieser Normale n wird durch den unendlich fernen Punkt T_∞ der Tangente t in R harmonisch getrennt von den in ω zusammenfallenden imaginären Kreispunkten und da T_∞ nicht in ω liegt, wenn R kein Punkt Q ist, so muss N_∞ in ω hineinfallen. Ist nun, wie oben, N der Schnittpunkt der Normale $R\omega$ mit l, T' der durch A, A' harmonisch von N getrennte Punkt und T^{m-1} die erste Polare von T' in Bezug auf k^m, so ist das Strahlenbüschel $R\omega$ der Normalen projectivisch mit der Punktreihe T' und desshalb auch mit dem Polarenbüschel T^{m-1}. Also ist der Ort der Schnittpunkte einander entsprechender Elemente des Strahlenbüschels $R\omega$ und des Polarenbüschels T^{m-1}

---

[1] Allerdings scheint aus der bekannten Relation („Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch", bearbeitet von Dr. F. Lindemann, S. 148) zwischen den goniometrischen Functionen eines Winkels und dem Doppelverhältnisse der vier Strahlen, welche aus dem Schenkel des Winkels und den beiden den Scheitel mit den Kreispunkten verbindenden Geraden bestehen, zu folgen, dass jede von drei beliebig in π gewählten Geraden mit den zwei anderen gleiche Winkel bildet; woraus man dann weiter schliessen könnte, dass jeder Punkt von k^m ein Glanzpunkt dieser Curve ist und der Ort der Glanzpunkte der durch l geführten ebenen Schnitte von F^m in Bezug auf A, A' aus R^{2m^2} und zwei ergänzenden ebenen Curven k^m besteht. Aber dies ist nicht der Fall, denn die Glanzpunktebedingung fordert, wie ich Seite 20 unten schon bemerkte, nicht die Gleichheit der Winkel, sondern die entgegengesetzte Gleichheit ihrer trigonometrischen Tangenten.

Dass von den übrigen Punkten R von k^m nur m^2 die zweite Glanzpunktebedingung erfüllen, zeigt unwiderlegbar, dass R^{2m^2} durch die Schnittpunkte von R^{m^2} mit den beiden Ebenen π geht, wenn auch diese Punkte Q der Bedingung nur in gewisser Hinsicht Genüge leisten.

eine Curve m^{ter} Ordnung, welche offenbar k^m in den m^2 gesuchten Punkten schneidet.

Wir untersuchen weiter einige besondere Fälle und nehmen dazu erstens an, dass Lichtquelle und Auge in verschiedener Richtung in unendlicher Entfernung liegen, wobei die Frage nach den Glanzpunkten sich reducirt auf jene nach solchen Punkten von F^m, für welche die auf F^m errichteten Normalen eine von zwei bestimmten Richtungen haben, so dass man also nur $2m(m-1)^2$ Glanzpunkte erhält.[1] Zweitens betrachten wir noch den Fall von Coincidenz der Punkte A und A', der insofern merkwürdig ist, als er neben $m(m^2-m+1)$ vereinzelten Glanzpunkten, nämlich den Fusspunkten der aus dem Coincidenzpunkte auf F^m gefällten Normalen[2], zu einer Glanzcurve, der Berührungscurve von F^m mit dem Umhüllungskegel, dessen Scheitel im Coincidenzpunkte liegt, führt.[3] Fallen drittens die Punkte A, A' im Unendlichen zusammen, so erhält man neben der Glanzcurve nur noch $m(m-1)^2$ vereinzelte Glanzpunkte, u. s. w.

In den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie findet man bisweilen ein graphisches Verfahren zur Bestimmung der Glanzpunkte, wobei dann eine Curve auftritt, die von den französischen Mathematikern eine „courbe d'erreur" genannt wird. So erwähnt de la Gournerie in seinem „Traité de géométrie descriptive" folgende von Hachette herrührende Construction, welche er bei den Umdrehungsflächen zweiten Grades als eine nützliche Übungsaufgabe anpreist. Auf jeder Normale, welche AA' schneidet, suche man den Glanzpunkt; die Schnittpunkte des geometrischen

---

[1] Hiebei sind die eventuell in der unendlich fernen Ebene auftretenden Glanzpunkte nicht berücksichtigt. Sie sind, wie wir es früher bei einer nicht unendlich fernen C^m nachgewiesen haben, $m(2m-1)$ an der Zahl, und die Verringerung der ganzen Glanzpunkteanzahl um $m(4m-3)$ ist eine Folge zweier Ursachen, nämlich der Vernachlässigung der unendlich fernen Glanzpunkte und des Verschwindens der $2m(m-1)$-Glanzpunkte in den beiden Ebenen π, welche hier mit der unendlich fernen Ebene zusammenfallen.

[2] Man vergleiche die auf Seite 1004 in der Anmerkung gegebenen Quellen (von c, in der ursprünglichen Abhandlung §. 11, in der französischen Übersetzung §. 3).

[3] Für ein leuchtendes Auge sind die vereinzelten Punkte Punkte von Maximalglanz und ist die Glanzcurve eine von Minimalglanzcurve.

Ortes dieses Punktes mit F^2 geben dann die Lage der Glanzpunkte von F^2.

Sogleich leuchtet ein, dass die von Hachette angegebene Curve alle gesuchten Glanzpunkte ohne Ausnahme enthalten muss; aber nicht jeder Schnittpunkt von F^2 mit ihr ist ein Glanzpunkt von F^2. Denn sobald durch einen Punkt P von F^2 eine Gerade gezogen werden kann, die AA' schneidet, die in der Ebene APA' den Winkel APA' halbirt und in ihrem zweiten Schnittpunkt Q mit F^2 Normale von F^2 ist, ist P ein Schnittpunkt der Hachette'schen Curve mit F^2 und doch kein Glanzpunkt von F^2 für das Paar A, A'. Dieser Mangel macht sich in noch stärkerem Masse bei den Flächen höherer Ordnung bemerkbar.[1]

Ich schliesse diesen Artikel mit der Ableitung der Ordnung der Hachette'schen Curve, wie sie sich bei einer F^m ergibt. Erstens enthält jede Ebene ε durch l eine Zahl von $m(m-1)$ ausser l gelegenen Punkten von ihr; denn die in ε liegende Curve C^m von F^m schneidet die erste Polare des allen senkrecht auf ε stehenden Geraden gemeinsamen Punktes in Bezug auf F^m in $m(m-1)$ Punkten. Die gesuchte Curve schneidet l in jedem der Punkte A, A' noch $m(m^2-m+1)$-mal; da aus jedem Punkte $m(m^2-m+1)$ Normale auf F^m gefällt werden können. Endlich hat die Curve noch $m^2(m-1)$ andere Punkte mit l gemein, denn F^m enthält so viel Normalen, die l senkrecht schneiden, als es Schnittpunkte gibt von R^{m^2} mit der oben schon genannten ersten Polare. Also ist die Curve von Hachette eine Curve von der Ordnung $m(3m^2-2m+1)$, u. s. w.[2]

13. „Der Ort der Punktepaare A, A', für welche zwei beliebig auf F^m gewählte Punkte G_1, G_2 Glanzpunkte sind, ist ein einschaliges Hyperboloid F^2, welches durch die Schnittlinie $g_{1,2}$ der beiden Berührungsebenen

---

[1] Ich stehe nicht an, zu versichern, dass ich mit der Erwähnung dieses Mangels keineswegs beabsichtige, die Hachette'sche Construction zu verurtheilen. Nur führt seine Curve nicht zur Bestimmung der Glanzpunktezahl.

[2] Diese Curve würde $m^2(3m^2-2m+1)$ Glanzpunkte geben. Also ist die Zahl der fremden Punkte $m(3m^3-4m^2+m+1)$. Man sieht, dass der Quotient der Zahl der Glanzpunkte in die Zahl der fremden Punkte mit m unendlich wird, wie zu erwarten war.

χ_1 und χ_2 von F^m in G_1 und G_2 und die Spiegelbilder der Verbindungslinie $G_1 G_2$ in Bezug auf diese Ebenen geht."

Wenn nur G_1 als Glanzpunkt gegeben ist, so kann man den einem beliebig gewählten Punkte A entsprechenden Punkt A' noch auf einer Geraden willkürlich annehmen; bekanntlich erhält man diese Gerade a_1, wenn man das Spiegelbild A_1 von A in Bezug auf die Berührungsebene χ_1 von F^m in G_1 mit G_1 verbindet. Durchläuft A eine beliebige Gerade l, so beschreibt a_1 in der durch G_1 und das Bild l_1 von l in Bezug auf χ_1 bestimmten Ebene λ_1 ein Strahlenbüschel mit G_1 als Centrum. Dieses Strahlenbüschel ist perspectivisch mit der Punktreihe A_1 auf l_1, also projectivisch mit der Punktreihe A auf l. Zieht man nun auch den Punkt G_2 herbei, so entsprechen in ganz gleicher Weise den Punkten A von l projectivisch die Strahlen a_2 eines Büschels mit dem Centrum G_2 und in der durch G_2 und das Bild l_2 von l in Bezug auf die Berührungsebene χ_2 von F^m in G_2 bestimmten Ebene λ_2. Also bestimmen diese beiden Strahlenbüschel a_1 und a_2, welche mit der Punktreihe A auf l und also auch mit einander projectivisch sind, auf der Schnittlinie der Ebenen λ_1 und λ_2 zwei projectivische Punktreihen. Da diese zwei Doppelpunkte besitzen, so gibt es auf der willkürlich gewählten Gerade l zwei Punkte A, die als Lichtquelle oder Auge betrachtet die Punkte G_1 und G_2 auf F^m zugleich zu Glanzpunkten machen. Also wird der gesuchte Ort der Punkte A, A' von einer beliebig gewählten Geraden l in zwei Punkten geschnitten, also ist er eine Fläche zweiter Ordnung.

Diese Fläche zweiter Ordnung F^2 ist ein einschaliges Hyperboloid; denn sie enthält drei im Allgemeinen nicht einer und derselben Ebene parallele Gerade, deren keine zwei in einer Ebene liegen, nämlich die Schnittlinie $g_{1,2}$ der beiden Berührungsebenen χ_1 und χ_2 und die Bilder von $G_1 G_2$ in Bezug auf beide Ebenen.[1] Wenn $G_1 G_2$ in einer senkrecht auf der Schnittlinie $g_{1,2}$

[1] Die Bedingung, dass die drei Geraden einer und derselben Ebene parallel sind, d. h. dass die orthogonalen Projectionen der beiden Bilder auf eine senkrecht auf $g_{1,2}$ stehende Projectionsebene parallel sind, ist nur erfüllt, wenn χ_1 und χ_2 senkrecht auf einander stehen. In diesem Falle ist also F^2 ein hyperbolisches Paraboloid.

stehenden Ebene χ liegt, dann zerfällt F^2 in zwei Ebenen, die Ebene χ und die Ebene durch $g_{1,2}$ und den Schnittpunkt der in G_1 und G_2 auf χ_1 und χ_2 errichteten Senkrechten.

14. „Die Paare A, A' bilden auf ihrem Träger F^2 eine involutorische Transformation mit einer Coincidenzgeraden, die Schnittlinie $g_{1,2}$ der Berührungsebenen χ_1 und χ_2. Sie hat zwei einfache Fundamentalpunkte G_1 und G_2, indem dem G_1 das Spiegelbild g_1 von $G_1 G_2$ in Bezug auf χ_2, dem G_2 das Spiegelbild g_2 von $G_1 G_2$ in Bezug auf χ_1 entspricht. Nennt man das System der Geraden g von F^2, welches $g_{1,2}, g_1, g_2$ aufnimmt, die Regelschaar, das andere der $g_{1,2}, g_1, g_2$ schneidenden Geraden l die Leitschaar, so entspricht dem Systeme der Leitstrahlen der Leitschaar perspectivisch das System der ebenen Schnittcurven durch $G_1 G_2$ mit $g_{1,2}$ als perspectivischem Durchschnitt. Weiter sind die Generatricen involutorisch gepaart und hat diese Involution die Generatrix $g_{1,2}$ und die durch g_1 und g_2 von $g_{1,2}$ harmonisch getrennten Generatrix g' zu Doppelstrahlen. Endlich entspricht dem dreifach unendlichen Systeme der ebenen Schnittcurven von F^2 das ebenfalls dreifach unendliche System der Raumcurven dritter Ordnung R^3 durch G_1 und G_2, die jede Generatrix einmal und jeden Leitstrahl zweimal treffen, u. s. w.

Aus einem beliebig gewählten Punkte P von F^2 als Centrum projicirt sich die Transformation auf eine diesen Punkt nicht enthaltende Ebene ε als eine Cremona'sche Transformation dritter Ordnung mit einer Coincidenzgeraden und fünf Fundamentalpunkten, unter denen vier einfach und einer doppelt ist.“

Die Punkte G_1 und G_2 werden unmittelbar als Fundamentalpunkte der Transformation erkannt, indem ihnen die im vorhergehenden Artikel schon benützten Geraden g_1 und g_2 ganz entsprechen. Ebenso leuchtet ein, dass die Punkte von $g_{1,2}$ Coincidenzpunkte der Transformation sind.

Für jeden Leitstrahl l fallen die Ebenen λ_1 und λ_2 zusammen. Denn schneidet l die Gerade $g_{1,2}$ im Coincidenzpunkte P, so ist ihre l_1 die Gerade PG_2, ihre l_2 die Gerade PG_1 und nun ist die Ebene $PG_1 G_2$ sowohl die Verbindungsebene λ_1 von G_1 mit PG_2 als auch die Verbindungsebene λ_2 von G_2 mit PG_1. Also werden die demselben Punkte A von l angehörenden Strahlen a_1 und a_2 einander immer begegnen und die projectivischen Strahlenbüschel a_1 und a_2 in der Ebene $PG_1 G_2$ einen Kegelschnitt, die Schnittcurve von $PG_1 G_2$ mit F^2, erzeugen. Und da l die Ebene $PG_1 G_2$ im Coincidenzpunkte P auf $g_{1,2}$ trifft, so sind die Leitstrahlen l perspectivisch bezogen auf ihre ebenen Schnittcurven mit $g_{1,2}$ als perspectivischen Durchschnitt.

Die durch G_1 und G_2 gehenden Leitstrahlen liegen in den ihnen zukommenden für λ_1 und λ_2 geltenden Ebenen $PG_1 G_2$. Die ihnen entsprechenden Schnittcurven zerfallen in zwei Gerade, nämlich die dem Leitstrahle durch G_1 entsprechende Curve in g_1 und ihn selbst, die dem Leitstrahle durch G_2 entsprechende Curve in g_2 und ihn selbst. Mit Weglassung der Fundamentalgeraden entsprechen diese beiden Leitstrahlen also sich selbst, aber nur als Ganzes, nicht Punkt für Punkt. Auf jedem dieser beiden bilden die entsprechenden Punktepaare eine Involution; einer der beiden Doppelpunkte dieser Involution liegt auf g, der andere auf einer anderen sofort bestimmbaren Generatrix.

Da jede Generatrix g ebenfalls auf F^2 liegt, ihr also ein Ort von Punkten auf F^2 entsprechen muss und ihre Ebenen λ_1 und λ_2 offenbar nicht zusammenfallen, so muss der ihr entsprechende Ort nothwendig der Durchschnitt ihrer Ebenen λ_1 und λ_2 sein. Dieser gerade Durchschnitt ist dann aber wieder eine Generatrix von F_2, da er kein Leitstrahl sein kann; denn einem Leitstrahle entspricht keine Gerade. Also sind die Generatricen von F^2 in der Transformation involutorisch gepaart. Natürlich ist $g_{1,2}$ ein Doppelstrahl dieser Involution und da g_1 und g_2 zusammen ein Paar bilden, so ist der zweite Doppelstrahl g' durch g_1 und g_2 harmonisch von $g_{1,2}$ getrennt. Diese Generatrix g' wird dann ebenso, wie die beiden Leitstrahlen durch G_1 und G_2 wohl als Ganzes, nicht aber Punkt für Punkt sich selbst entsprechen. Die Schnittpunkte von g' mit den beiden sich selbst entsprechenden Leitstrahlen g_1 und g_2 sind die Doppelpunkte der Involution auf g'

und zugleich die zweiten Doppelpunkte der Involution auf jedem dieser Leitstrahlen.

Merkwürdig ist also das von den Generatricen $g_{1,2}, g'$ und den Leitstrahlen g_1, g_2 gebildete schiefe Viereck auf F^2. Jede seiner vier Seiten entspricht sich selbst, aber nur bei $g_{1,2}$ Punkt für Punkt; auf jeder der Seiten g_1, g_2 und g' bilden die einander entsprechenden Punkte eine Involution und die Doppelpunkte dieser drei Involutionen sind immer wieder zwei der Eckpunkte. Bezeichnet man die Schnittpunkte von $g_{1,2}$ mit g_1 und g_2 durch P und Q, ebenso die Schnittpunkte von g' mit g_2 und g_1 durch R und S, so müssen also die Punkte P, Q, R, S als Eckpunkte des Vierecks sich selbst entsprechen. Dies findet bei den Punkten P, Q schon desshalb statt, da sie auf $g_{1,2}$ liegen; weiter erkennt man aber die Punkte R und S leicht als Schnittpunkte der Normalen in G_1 und G_2 auf χ_1 und χ_2 mit jener der Ebenen χ_2 und χ_1 auf welcher sie nicht senkrecht stehen. Die Verbindungslinie dieser Punkte also ist die Seite g', u. s. w.

Nach dem Vorhergehenden findet man ohne Mühe die einem willkürlich angenommenen ebenen Schnitt μ von F^2 entsprechende Curve, indem wir erst mittelst einer Berührungsebene von F^2 ihre Ordnung untersuchen. Enthält nämlich diese Ebene (g, l) die Generatrix g und den Leitstrahl l, so wird g einen Punkt und l zwei Punkte der gesuchten Curve enthalten müssen; denn die der Generatrix g entsprechende Generatrix schneidet den in μ liegenden Kegelschnitt von F^2 einmal und die dem Leitstrahle l entsprechende ebene Schnittcurve thut dies zweimal. Also ist die gesuchte Curve eine Raumcurve R^3, die alle Generatricen von F^2 einmal, alle Leitstrahlen von F^2 aber zweimal trifft. Sie geht durch G_1 und G_2, da der Schnitt μ die entsprechenden Geraden g_1 und g_2 einmal begegnet, u. s. w.[1]

---

[1] Der Beweis, dass den ebenen Schnitten von F^2 Raumcurven R^3 entsprechen, kann auch auf folgende Weise geführt werden. Betrachtet man die Punkte Q einer willkürlich angenommenen Ebene φ und spiegelt die Verbindungslinien q_1 und q_2 von Q mit G_1 und G_2 in Bezug auf χ_1 und χ_2 ab, so bilden die Bilder q_1' und q_2' zwei Strahlenbündel, die mit dem ebenen Systeme der Punkte Q in φ und also auch mit einander collinear verwandt sind. Desshalb ist der Ort der Schnittpunkte der einander entsprechenden

In derselben Weise findet man im Allgemeinen, dass einer Curve $R_{p,q}^{p+q}$, d. h. einer Curve von F^2, die alle Generatricen p-mal und alle Leitstrahlen q-mal begegnet, eine Curve $R_{p,p+q}^{2p+q}$ entspricht, die p-mal durch jeden der beiden Punkte G_1 und G_2 geht. Liegt G_1 aber r-mal und G_2 ebenso s-mal auf der gegebenen Curve $R_{p,q}^{p+q}$, so entspricht dieser Curve eine $R_{p,p+q-r-s}^{2p+q-r-s}$, welche $p-s$ mal durch G_1 und $p-r$ mal durch G_2 geht, u. s. w.

Projicirt man die Fläche F^2 aus einem ihrer Punkte P Punkt für Punkt auf eine den Punkt P nicht enthaltende Ebene ε, so ist die Projection der auf F^2 liegenden Transformation auf ε eine Cremona'sche Transformation dritter Ordnung, da den ebenen Schnittcurven durch P, die die Geraden von ε zu Projectionen haben, sich als Curven dritter Ordnung projicirende Raumcurven R^3 entsprechen. Die Coincidenzgerade ist natürlich die Projection von $g_{1,2}$; ausserdem gibt es in ε noch zwei vereinzelte Coincidenzpunkte, die Projectionen der Ecken R und S des erwähnten schiefen Vierecks. Die vier einfachen Fundamentalpunkte mit ihren Fundamentalgeraden sind *a)* die Projectionen von G_1 und g_1, *b)* die Projectionen von G_2 und g_2, *c)* die Projection des dem Punkte P entsprechenden Punktes mit der Schnitt linie von ε und der Berührungsebene in P an F^2, *d)* der Schnittpunkt der durch P gehenden Generatrix mit der Projection der ihr entsprechenden Generatrix. Der doppelte Fundamentalpunkt ist der Durchschnittspunkt von ε mit dem durch P gehenden Leitstrahle, seine Fundamentalcurve die Projection der entsprechenden Schnittcurve von F^2.

15. „Drei beliebig auf F^n angenommene Punkte können bei noch unbekannter Lage von Lichtquelle und Auge als zu einander gehörige Glanzpunkte betrachtet werden. Sie bestimmen im Allgemeinen vier verschiedene Glanzpunktgruppen, von welchen eine eine Glanzcurve enthält."

Strahlen q_1' und q_2', die sich schneiden, eine Raumcurve dritter Ordnung durch G_1 und G_2, die dann in der Transformation auf F^2 dem ebenen Schnitte in φ entspricht.

Man vergleiche „Die Geometrie der Lage" von Dr. Th. Reye, 2. Auflage, 2. Abtheilung, Seite 87.

Nimmt man von den drei gegebenen Punkten G_1, G_2, G_3 von F^m erst nur G_2 und G_3 als Glanzpunkte an, so ist der Ort der Punktepaare A, A' eine Fläche zweiter Ordnung durch G_2, G_3 und die Schnittlinie $g_{2,3}$ der Berührungsebenen χ_2 und χ_3, welche Fläche als F_1^2 bezeichnet werden mag. Ebenso führt die Annahme der Glanzpunkte G_3, G_1 zu einer Fläche F_2^2 durch G_3, G_1 und die Schnittlinie $g_{3,1}$ von χ_3 und χ_1, die Annahme von G_1, G_2 zu einer Fläche F_3^2 durch G_1, G_2 und die Schnittlinie $g_{1,2}$ von χ_1 und χ_2.

Diese drei Flächen zweiter Ordnung F_1^2, F_2^2, F_3^2 gehören nicht einem Büschel an; denn da F_1^2 nur von G_2, G_3 und χ_2, χ_3 abhängt, geht sie nicht durch den Punkt G_1 der auf F_2^2 und F_3^2 liegt. Auch haben die drei Flächen $F_1^2, F_2^2. F_3^2$ keinen Ort von Punkten, Gerade, Kegelschnitt oder Raumcurve R^3 gemein; denn man zeigt ohne Mühe, dass die Ebene χ durch G_1, G_2, G_3 keinen gemeinschaftlichen Punkt der drei Flächen enthält. Ist nämlich k_1^2 die Schnittcurve von χ mit F_1^2 und k_1 der ihr auf F_1^2 entsprechende Leitstrahl, so wird die Ebene χ_1' durch G_1 und das Spiegelbild von k_1^2 in Bezug auf χ_1 die Gerade k_1 in einem Punkt Q schneiden. Diesem Punkt Q entspricht in der Transformation auf F_1^2 ein bestimmter Punkt Q' von k_1^2 und in Bezug auf G_1 und χ_1 eine bestimmte durch G_1 gehende Gerade q_1 von χ. Da nun — und hierbei setze ich $m > 2$ voraus[1] — zwischen den drei Punkten G_1, G_2, G_3 von F^m und ihren Berührungsebenen χ_1, χ_2, χ_3 keine Relation besteht, da man nach Annahme von G_1, G_2, G_3 und χ_2, χ_3, die Ebene χ_1 noch willkürlich durch G_1 wählen kann, so dass man noch eine allgemeine Fläche F^m erhält, so kann man, nachdem G_1, G_2, G_3 und χ_2, χ_3 angenommen worden und mit diesen Elementen auch F_1^2, χ, k_1^2, k_1 und die Verwandtschaft der Punkte Q, Q' auf k_1 und k_1^2 gegeben sind, einen beliebigen Punkt von k_1 als Q, eine beliebige Gerade durch G_1 in χ als q_1 bezeichnen und nun χ_1 noch so annehmen, dass q_1 in Bezug auf G_1 und χ_1 dem

[1] Wenn $m = 2$, so ist χ_1 nach Annahme von G_1, G_2, G_3 und χ_2, χ_3 nur noch um eine bestimmte Gerade in χ, die Tangente in G_1 des Kegelschnittes durch G_1, G_2, G_3, welche χ_2 und χ_3 berührt, drehbar. Da nun diese beschränkte Beweglichkeit der Ebene χ_1 zum verlangten Beweise nicht ausreicht, muss eine andere Untersuchung diesen besonderen Fall, welchen ich hier übergehe, erledigen.

Punkte Q entspricht. Daraus folgt, dass die Gerade q_1 im Allgemeinen den dem Q entsprechenden Punkt Q' nicht enthält und die Ebene χ nicht durch einen den Flächen F_1^2, F_2^2, F_3^2 gemeinsamen Punkt geht.[1]

Wenn nun unsere drei Flächen zweiter Ordnung keinen Ort von Punkte gemeinsam haben, so schneiden sie einander in acht Punkten, die im Folgenden als „die acht Punkte P" bezeichnet werden mögen. Unter diesen begegnen wir erstens den Punkt Q von k_1 und den Schnittpunkt R der drei Geraden $g_{2,3}, g_{3,1}, g_{1,2}$ d. h. der Ebenen χ_1, χ_2, χ_3, von welchen wir den ersten als ein dem Probleme fremden, den zweiten als eine sich selbst entsprechende Lösung erkennen werden. Weiter wird es sich zeigen, dass die sechs übrigen Punkte P sich zu drei Punktepaaren A, A' combiniren, welche die Punkte G_1, G_2, G_3 von F^m zugleich zu Glanzpunkten machen.

Der Punkt Q von k_1 ist den drei Flächen F_1^2, F_2^2, F_3^2 gemeinsam. Denn wir sahen, dass ihm in Bezug auf G_1 und χ_1 eine Gerade q_1 in χ und durch G_1 entspricht; aber als Punkt von k_1 entspricht ihm in Bezug auf G_2 und χ_2 eine Gerade q_2 in χ und durch G_2, in Bezug auf G_3 und χ_3 eine Gerade q_3 in χ und durch G_3. Also schneiden sich die durch Reflexion von QG_1, QG_2, QG_3 an χ_1, χ_2, χ_3 entstehenden Strahlen q_1, q_2, q_3 zu je zweien, da sie in einer Ebene χ liegen und Q ist also den Flächen F_1^2, F_2^2, F_3^2 gemeinsam. Desshalb gehen die drei Geraden k_1, k_2, k_3, welche auf diesen Flächen die den Schnittcurven k_1^2, k_2^2, k_3^2 mit χ entsprechenden Leitstrahlen sind, durch den Punkt Q. Aber da q_1, wie oben schon gezeigt wurde, im Allgemeinen den dem Q auf F_1^2 entsprechenden Punkt Q' nicht enthält, so liegen q_1, q_2, q_3 in χ, ohne durch einen und denselben Punkt zu gehen und Q ist also kein Punkt, welcher eine Lösung unseres Problemes, Punkte A, A' zu finden, die G_1, G_2, G_3 zu zusammengehörigen Glanzpunkten

---

[1] Diese Untersuchung lehrt, dass die Ebene χ in einem besonderen Falle höchstens einen den drei Flächen zweiter Ordnung gemeinsamen Punkt enthalten kann. Denn scheint es auch in diesem Falle möglich, dass die drei Flächen eine Gerade gemein haben, so leuchtet doch unmittelbar die Unhaltbarkeit dieser Voraussetzung ein, da sie entweder auf eine gemeinschaftliche zweite Gerade oder auf einen gemeinschaftlichen Kegelschnitt führt.

machen, herbeiführt. Dass Q unter den acht Punkten P vereinzelt dasteht, folgt daraus, dass die Geraden k_1, k_2, k_3 nur einen Punkt gemein haben können.

Der Schnittpunkt R der Ebenen χ_1, χ_2, χ_3 ist offenbar auf jeder der drei Flächen zweiter Ordnung gelegen, da F_1^2 durch den ihn enthaltenden Strahl $g_{2,3}$ und ebenso F_2^2 durch $g_{3,1}$, F_3^2 durch $g_{1,2}$ geht; und es leuchtet unmittelbar ein, dass dieser Punkt R an und für sich, wenn man ihn zugleich als Lichtquelle und Auge verwendet, eine Lösung bildet. Man erhält dann, wie schon bemerkt wurde, $m(m^2-m+1)$ vereinzelte Punkte von Maximalglanz und eine Curve $R^{m(m-1)}$ von Minimalglanz.

Weiter lassen sich die sechs übrigen Punkte P zu drei Punktepaaren A, A' combiniren. Denn wenn man sich die von einem solchen Punkte P ausgehenden Strahlen PG_1, PG_2, PG_3 in G_1, G_2, G_3 an χ_1, χ_2, χ_3 als G_1P_1, G_2P_2, G_3P_3 reflectirt denkt, so werden diese drei Geraden sich zu je zweien treffen, nämlich G_2P_2 und G_3P_3 auf F_1^2, G_3P_3 und G_1P_1 auf F_2^2, G_1P_1 und G_2P_2 auf F_3^2, also entweder in einer Ebene liegen oder aber durch einen Punkt gehen. Da nun das erste nur eintritt, wenn man von Q ausgeht, muss hier das letztere stattfinden und es führen die Geraden G_1P_1, G_2P_2, G_3P_3 zu einem und demselben Punkte P', der dann offenbar zu den sechs Punkten P gehört und mit dem Ausgangspunkte P ein Paar A, A' bildet, u. s. w.

In aller Kürze bemerke ich noch, dass die Zahl der Lösungen auch folgendermassen bestimmt werden kann. Der durch G_3 gehenden Schnittcurve R_3^4 von F_1^2 und F_2^2 entspricht auf F_1^2 eine $R_{2,3}^5$, die zweimal durch G_3 und einmal durch G_2 geht. Diese Curve hat, da sie F_2^2 in zehn Punkten schneidet, zehn Punkte mit R_3^4 gemein. Unter diesen zählt G_3 zweimal und die zwei Schnittpunkte von R_3^4 mit $g_{1,2}$, R und ein anderer Punkt je einmal; es bleiben also sechs Schnittpunkte übrig, die sich zu drei Paaren A, A' combiniren lassen, u. s. w.[1]

---

[1] Der erwähnte andere Schnittpunkt von R_3^4 mit $g_{1,2}$ ist der Schnittpunkt von $g_{1,2}$ mit dem in χ_1 gelegenen Leitstrahle von F_1^2.

Ich übergehe den Fall, in welchem k_1^2, k_2^2, k_3^2 einen Punkt gemein haben und deute nur an, dass dann einer der sechs Punkte P in χ hineinfällt und dass sich der andere, mit P ein Paar bildende, mit Q vereinigt.

6. „Für das Paar A, A' ist der Ort der Glanzpunkte der durch die Verbindungslinie l von A, A' geführten ebenen Schnitte der Flächen F^m eines allgemeinen Büschels $m$ter Ordnung eine Fläche F^{4m}, die einmal durch l und zweimal durch die Basiscurve des Büschels geht. Jede der beiden durch l an den imaginären Kugelkreis gelegten Berührungsebenen π schneidet diese Fläche ausser in l in einer Curve C^{2m-1}, die sich auch auf dem Orte F^{2m} der Projectionscurven R^{m^2} von l auf die Flächen des Büschels befindet und in einer C^{2m}."

Nach Artikel 11 enthält eine beliebige Ebene ε durch l eine der Flächen zukommende Curve der Ordnung $4m-1$ als Ort der Glanzpunkte des Büschels von Schnittcurven. Da nun jeder Punkt P von l einmal Glanzpunkt ist für einen ebenen Schnitt der durch ihn gehenden Fläche F^m, nämlich in jener Ebene durch l, welche die Berührungsebene dieser F^m in P in einer Senkrechten auf l schneidet, so ist l einmal auf der gesuchten Fläche gelegen und diese also eine Fläche $4m$ter Ordnung. Sie enthält die Basiscurve des Büschels zweimal, da jeder Punkt dieser Curve in seiner Ebene Doppelpunkt ist der im Artikel 11 betrachteten Curve $4m-1$ter Ordnung.

Da die gefundene Fläche F^{4m} offenbar der Ort der den Flächen F^m des gegebenen Büschels angehörenden Raumcurven R^{2m^2} ist und die m^2 Schnittpunkte der Projection von l auf irgend einer der Flächen des Büschels mit jeder der beiden Ebenen π nach Artikel 12 auf der entsprechenden R^{2m^2} liegen, so muss unsere Fläche F^{4m} den ganzen Durchschnitt der beiden Ebenen π mit dem Orte der Projectionscurven von l auf die Flächen des Büschels aufnehmen. Dieser Ort der Projectionscurven ist aber bekanntlich[1] eine F^{2m} durch l und die Basiscurve; also besteht der Durchschnitt jeder der beiden Ebenen π mit F^{4m} aus l und einer C^{2m-1}, welche zusammen auf F^{2m} liegen, und einer C^{2m}.

17. „Für das Paar A, A' besteht der Ort der Glanzpunkte der Flächen F^m eines allgemeinen Büschels aus einer Raumcurve R^{6m^2-4m+1} von der Ordnung

---

[1] Man vergleiche meinen schon angeführten Aufsatz „Over het projecteeren op oppervlakken" §. 24, oder „De la projection sur une surface" §. 6.

$6m^2-4m+1$ und zwei ebenen Curven C^{2m-1} von der Ordnung $2m-1$ in den Ebenen π."

Der gesuchte Ort ist offenbar die Schnittcurve der F^{4m} des vorhergehenden Artikels und des Ortes F^{2m} der Projectionscurven; denn die den beiden Flächen gemeinsamen Punkte leisten den beiden einem Glanzpunkte im Raume gestellten Bedingungen Genüge. Von dem totalen Durchschnitt sind aber auszuscheiden *a*) die Gerade l einmal, *b*) die Basiscurve R^{m^2} zweimal. Es bleibt also eine Raumcurve der Ordnung $4m.\ 2m-1-2m^2=6m^2-1$. Aber diese zerfällt, wie aus den vorhergehenden Artikeln gefolgert wird, in zwei ebene Curven und eine Raumcurve R^{6m^2-4m+1}.

Man kann auch von den Schnittcurven von F^{4m} und F^{2m} mit einer beliebig durch l gelegten Ebene ε ausgehen und bemerken, dass diese bei F^{4m} aus l und einer C^{4m-1}, bei F^{2m} aus l und einer C^{2m-1} besteht. Denn die beiden Curven C^{4m-1} und C^{2m-1} haben $(4m-1)(2m-1)$ nicht auf l liegende Punkte gemein. Aber nun muss diese Zahl einerseits wegen der m^2 in ε liegenden Basispunkte um $2m^2$ vermindert werden. Anderseits muss sie, da l vom fraglichen Orte die $2(m-1)$ Berührungspunkte von l mit Flächen des Büschels und die Punkte A und A' enthält, um $2m$ vermehrt werden, so dass ε von dem gesuchten Orte in $(4m-1)(2m-1)-2m^2+2m=6m^2-4m+1$ Punkten geschnitten wird, woraus folgt, dass dieser Ort eine R^{6m^2-4m+1} ist. Aber diese Behandlungsweise zeigt nicht die Existenz der beiden, den Bedingungen des Problemes genügenden ebenen Curven, die als ergänzende Theile mit R^{6m^2-4m+1} den vollständigen Ort bilden.

Wenn A und A' zusammenfallen, so besteht der Ort aus einer Curve R^{3m^2-2m+1} von der Ordnung $3m^2-2m+1$ von Maximalglanz, dem Orte der Fusspunkte der vom Coincidenzpunkte auf die Flächen des Büschels gefällten Normalen[1], und aus einer Fläche F^{2m-1} von der Ordnung $2m-1$ von Minimalglanz, dem Orte der Schnittcurven der Flächen des Büschels mit ihren ersten Polaren in Bezug auf den Coincidenzpunkt.

---

[1] Man vergleiche meinen Aufsatz „Over het projecteeren op oppervlakken" §. 23, oder „De la projection sur une surface" §. 6.

18. „Für das Paar A, A' hat die Basiscurve R^{m^2} eines allgemeinen Büschels von Flächen F^m eine Zahl von $2m^2(2m-1)$ Glanzpunkten."

Der vollständige Ort R^{6m^2-1} des vorhergehenden Artikels schneidet irgend eine der Flächen des Büschels in $m(6m^2-1)$ Punkten; diese bestehen aus den $m(2m^2-1)$ Glanzpunkten der Fläche, den hier als uneigentliche Punkte auftretenden $2m^2$ Schnittpunkten der Basiscurve mit den Ebenen π und den eigentlichen Glanzpunkten der Basiscurve. Also ist die Zahl der Glanzpunkte dieser Curve $m(6m^2-1)-m(2m^2-1)-2m^2=2m^2(2m-1)$.

Wenn A und A' zusammenfallen, also an der Stelle des Ortes R^{6m^2-4m+1} der Glanzpunkte des Büschels für A, A' die Combination einer R^{3m^2-2m+1} und einer F^{2m-1} tritt, so zerfällt die Gruppe der $2m^2(2m-1)$ Glanzpunkte des allgemeinen Falles in zwei verschiedene Theile von je $m^2(2m-1)$ Punkten. Der erste Theil enthält die Fusspunkte der vom Coincidenzpunkte auf die Basiscurve gefällten Normalen und diese dem besonderen Falle entsprechenden Glanzpunkte der Basiscurve sind bekanntlich[1] eben $m^2(2m-1)$ an der Zahl. Der zweite Theil enthält die Schnittpunkte der Fläche F^{2m-1} mit der Basiscurve, welche Punkte hier als dem Probleme fremde Punkte zu betrachten sind.

19. „Für das Paar A, A' ist der Ort der Glanzpunkte eines allgemeinen Bündels von Flächen F^m eine Fläche F^{6m-2}."

Die Basiscurve irgend eines im Bündel befindlichen Büschels enthält von der gesuchten Fläche erstens ihre eigenen $2m^2(2m-1)$ Glanzpunkte, dann aber die zweimal zu zählenden m^3 Basispunkte des Bündels. Sie enthält also $m^2(6m-2)$ Punkte des Ortes, der desshalb eine Fläche F^{6m-2} sein muss.

Wenn A und A' coincidiren, so findet man eine Fläche F^{3m-1} als Ort von Maximalglanz, den Ort der Fusspunkte der vom

---

1 Man vergleiche

a) Dr. R. Sturm „Über Fusspunktscurven und -Flächen, Normalen und Normalenebenen" (Math. Annalen u. s. w., Band 6, Jahrgang 1873, Seite 241—264).

b) P. H. Schoute „Over het projecteeren op oppervlakken" §. 23, oder „De la projection sur une surface" §. 6.

Coincidenzpunkte auf die Flächen des Bündels gefällten Normalen [1]; wie man aber leicht einsieht, kann in diesem Falle jeder Punkt des Raumes Punkt von Minimalglanz sein.

Ich breche hier die Untersuchung ab und gehe in Bezug auf den gefundenen Ort F^{6m-2} nicht in Einzelheiten ein [2]. Habe ich doch auch die letzten allgemeinen Resultate hauptsächlich hinzugefügt, um die gegebene Anschauungsweise der beiden Ebenen π als die richtige hervortreten zu lassen. Wirklich kommt man, wenn man nicht weiss, dass die Curven R^{m^2} und R^{2m^2} von Artikel 12 in jeder dieser Ebenen ausser den m Punkten auf l noch $m(m-1)$ Punkte gemein haben, bei jedem Schritte zu widersprechenden Resultaten; man findet z. B. bei der Ableitung der Ordnung des Ortes F^{6m-2} für die Zahl der Schnittpunkte der Basiscurve mit dieser Fläche eine nicht durch m^2 theilbare Zahl, u. s. w.

---

[1] Man vergleiche meinen Aufsatz „Over het projecteeren op oppervlakken" §. 26, oder „De la projection sur une surface" §. 6.

[2] Ich bemerke nur, dass der ganz einfache Fall $m = 1$ leicht controlirt werden kann, was die gefundenen Resultate bestätigt.

XXVIII. SITZUNG VOM 18. DECEMBER 1884.

Das Präsidium der Handels- und Gewerbekammer für Schlesien in Troppau übermittelt ein Exemplar des von dieser Kammer dem k. k. Handelsministerium erstatteten statistischen Berichtes über die Industrie Schlesiens, sowie über die anderen wirthschaftlichen Verhältnisse dieses Kronlandes in den Jahren 1880 und 1881.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: „Über das quadratische Reciprocitätsgesetz."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Die Deformation der Lichtwellenfläche im magnetischen Felde", von Herrn Prof. Dr. E. v. Fleischl in Wien.
2. „Über Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt." II. Abhandlung von Herrn Karl Bobeck, Docent an der deutschen technischen Hochschule in Prag.
3. „Beiträge zur Erklärung der kosmisch-terrestrischen Erscheinungen. II. Über das Polarlicht", von Herrn Johannes Unterweger, Landes-Bürgerschullehrer in Judenburg.
4. „Verfahren zur Stickstoffbestimmung nach Kjeldahl", nachträgliche Mittheilung von Herrn G. Czeczetka technischer Fabriksdirector in St. Marx (Wien).

Ferner theilt der Secretär mit, dass das w. M. Herr Prof. J. Wiesner das in der Sitzung dieser Classe vom 17. Juli d. J. behufs Wahrung seiner Priorität vorgelegte versiegelte Schreiben mit der Aufschrift: „Über einige Eigenschaften der Fermentorganismen" zurückziehe.

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr überreicht eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. G. v. Escherich in Wien, unter dem Titel: „Die Construction der algebraischen Flächen aus der Anzahl sie bestimmender Punkte.“

Herr Dr. Eduard Mahler in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Die centralen Sonnenfinsternisse des XX. Jahrhunderts.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Ackerbau-Ministerium, k. k.: Statistisches Jahrbuch für 1883. 1. Heft: Production aus dem Pflanzenbau. Wien, 1884; 8°.

Akademie der Wissenschaften k. b. zu München: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe. 1884. Heft III. München, 1884; 8°.

— kaiserliche Leopoldino-Carolinische deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XX. Nr. 21—22. Halle a. S. 1884; 4°.

Apotheker-Verein, allgemeiner österreichischer: Zeitschrift nebst Anzeigenblatt. XXII. Jahrgang. Nr. 32—35. Wien, 1884; 8°.

Centralbureau der europäischen Gradmessung: Verhandlungen. Berlin, 1884; 4°.

Central-Commission, k. k. zur Erforschung und Erhaltung der Kunst- und historischen Denkmale: Mittheilungen. X. Band, 3. Heft. Wien, 1884; gr. 4°.

— — k. k. statistische: Österreichische Statistik. VI. Band, 4. Heft. VII. Band, 2. u. 3. Heft. Wien, 1884; gr. 4°.

— — Nachrichten über Industrie, Handel und Verkehr XXIX. Band, 1.—3. Heft. Wien, 1884; 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VIII. Nr. 93 bis 95. Cöthen, 1884; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. 2e semestre. Nos 21 et 22. Paris, 1884; 4°.

Geological Survey of India: Memoirs. Vol. XIX, parts 2—4. Calcutta, 1882—83; 8°. Vol. XX, parts 1 et 2. Calcutta, 1883; 8°.

Geological Survey Recordo. Vol. XV, part 4. Calcutta, 1882; 8°. Vol. XVI, parts 1—3. Calcutta, 1883; 8°. Vol. XVII, parts 3 et 4. Calcutta, 1884; 8°.

— — Memoirs. Palaeontologia Indica. Ser. X. Vol. II, parts 4 et 6. Calcutta, 1883—84; gr. 4°. Ser. X. Vol. III, part 1. Calcutta, 1884; gr. 4°. Ser. XII. Vol. IV, part 1. Calcutta, 1882; gr. 4°. Ser. XIII. 1. et 2. fasc. Calcutta, 1882—83; gr. 4°. Ser. XIV. Vol. I, parts 3 et 4. Calcutta, 1883—84; gr. 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVII. Jahrgang, Nr. 17. Berlin, 1884; 8°.

— k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXVII, Nr. 11. Wien, 1884; 8°.

Johns Hopkins University: American chemical Journal. Vol. VI. No. 4. Baltimore, 1884; 8°.

Krankenhaus, k. k. Wieden: Bericht im Solarjahre 1883. Wien, 1884; 8°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k. in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1884, 2.—5. Heft. Wien, 1884; 8°.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Jahrgang 1884. 10. u. 11. Heft. Wien, 1884; 8°.

Nature. Vol. XXXI. No. 789. London, 1884; 8°.

Observatory, the: A monthly Review of Astronomy. No. 92. London, 1884; 8°.

Osservatorio reale di Brera in Milano: Pubblicazioni. Nro. XXVI. Milano, 1884; 4°.

Owen, Sir Richard: Description of an Impregnated Uterus and of the Uterine ova of Echidna hystrix. London, 1884; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 12. Wien, 1884; 8°.

— — Jahrbuch. Jahrgang 1884. XXXIV. Band, 3. Heft. Wien 1884; 4°.

Reichsforstverein, österreichischer: Österreichische Vierteljahresschrift für Forstwesen. N. F. II. Band, III. Quartal. Wien, 1884; 8°.

Rostock, Universität: Akademische Schriften pro 1883/84. — 25 Stücke 8° u. 4°.

Società degli Spettroscopisti Italiani: Memorie. Vol. XIII, Disp. 9ª & 10ª. Roma, 1884; 4°.

Société, Impériale des Naturalistes de Moscou: Bulletin. Année 1884. Nr. 1. Moscou, 1884; 8°.

— des Ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux. 4 série, 37ᵉ année, 9ᵉ cahier. Paris, 1884; 8°.

Trigonometrical Survey of India, the great: Account of the operations. Vol. IX. Dehra Dun, 1883; gr. 4°.

Verein der Wiener Handels-Akademie: Zwölfter Jahresbericht. 1884. Wien, 1884; 8°.

— militär-wissenschaftlicher in Wien. Organ. XXIX. Band. 2. Heft. 1884. Wien; 8°.

Über das quadratische Reciprocitätsgesetz.

Von Leopold Gegenbauer.

Die verallgemeinerte Gauss'sche charakteristische Zahl einer Restzahl m in Bezug auf einen positiven ungeraden, zu m theilerfremden Modul n ist bekanntlich gleich der Anzahl der negativen Reste, welche verbleiben, wenn man von jeder der Zahlen:

1. $$1.\frac{m}{n},\ 2.\frac{m}{n},\ 3.\frac{m}{n},\ldots,\ \frac{n-1}{2}.\frac{m}{n}$$

die nächste ganze Zahl subtrahirt, so dass also das von Jacobi verallgemeinerte Legendre'sche Symbol $\left(\frac{m}{n}\right)$ durch die Gleichung:

$$\left(\frac{m}{n}\right) = sgn. \prod_{x=1}^{\frac{n-1}{2}} R\left(\frac{xm}{n}\right)$$

gegeben ist, wo $R\left(\frac{xm}{n}\right)$ den in $\frac{xm}{n}$ enthaltenen absolut kleinsten Bruchrest und $sgn.\ a$ das Vorzeichen der reellen Grösse a bedeutet.

Setzt man nun:

$$\frac{xm}{n} = \left[\frac{xm}{n}\right] + \frac{\alpha}{n}$$

wo α eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ ist, so hat man die Relationen:

$$\frac{xm}{n} + \frac{n-1}{2n} = \left[\frac{xm}{n}\right] + \frac{2\alpha+n-1}{2n}$$

$$\frac{xm}{n} + \frac{1}{2} = \left[\frac{xm}{n}\right] + \frac{2\alpha+n}{2n}.$$

Nun ist für jeden Werth von α, welcher der Beziehung:

$$\frac{n-1}{2} \geqq \alpha \geqq 0$$

genügt:

$$1-\frac{1}{n} \geqq \frac{2\alpha+n-1}{2n} \geqq \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

$$1-\frac{1}{2n} \geqq \frac{2\alpha+n}{2n} \geqq \frac{1}{2}$$

und daher ist für diese Werthe von α:

$$\left[\frac{2\alpha+n-1}{2n}\right] = \left[\frac{2\alpha+n}{2n}\right] = 0.$$

Für jeden Werth von α hingegen, welcher der Relation:

$$n-1 \geqq \alpha \geqq \frac{n+1}{2}$$

genügt, ist:

$$\frac{3}{2}-\frac{3}{2n} \geqq \frac{2\alpha+n-1}{2n} \geqq 1$$

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{n} \geqq \frac{2\alpha+n}{2n} \geqq 1+\frac{1}{2n}$$

und demnach hat man für diese Werthe von α die Gleichung:

$$\left[\frac{2\alpha+n-1}{2n}\right] = \left[\frac{2\alpha+n}{2n}\right] = 1.$$

Es ist also:

$$\left[\frac{xm}{n}+\frac{n-1}{2n}\right] = \left[\frac{xm}{n}+\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{xm}{n}\right]$$

für:

$$\frac{n-1}{2} \geqq \alpha \geqq 0$$

und:

$$\left[\frac{xm}{n}+\frac{n-1}{2n}\right] = \left[\frac{xm}{n}+\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{xm}{n}\right]+1$$

für:

$$n-1 \geqq \alpha \geqq \frac{n+1}{2}.$$

Da nun der in $\frac{xm}{n}$ enthaltene absolut kleinste Bruchrest dann negativ ist, wenn $\alpha > \frac{n-1}{2}$ wird, so hat man:

$$sgn.\ R\left(\frac{xm}{n}\right) = (-1)^{\left[\frac{xm}{n}+\frac{n-1}{2n}\right]-\left[\frac{xm}{n}\right]}$$

$$= (-1)^{\left[\frac{xm}{n}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{xm}{n}\right]}$$

und daher bestehen für das Legendre-Jacobi'sche Symbol $\left(\frac{m}{n}\right)$ die Gleichungen:

$$2. \qquad \left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{xm}{n}+\frac{n-1}{2n}\right]-\sum\limits_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{xm}{n}\right]}$$

$$3. \qquad \left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{xm}{n}+\frac{1}{2}\right]-\sum\limits_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{xm}{n}\right]}$$

Aus jeder dieser zwei Formeln lässt sich leicht das Reciprocitätsgesetz ableiten.

Man hat nämlich:

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{xm}{n}+\frac{n-1}{2n}\right] = \sum_{x=1,\ y=1}^{x=\frac{n-1}{2},\ y=\frac{m-1}{2}} \varepsilon\left(\frac{2xm+n-1}{2ny}\right)$$

oder, da jedesmal, wenn:

$$mx + \frac{n-1}{2} \gtreqless ny$$

ist, auch:

$$n\left\{\frac{m+1}{2}-y\right\}+\frac{m-1}{2} \gtreqless m\left\{\frac{n+1}{2}-x\right\}$$

wird:

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{xm}{n}+\frac{n-1}{2n}\right]=\sum_{x=1,\,y=1}^{x=\frac{n-1}{2},\,y=\frac{m-1}{2}}\varepsilon\left(\frac{2ny+m-1}{2mx}\right)$$

$$=\sum_{y=1}^{y=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{yn}{m}+\frac{m-1}{2m}\right]$$

und daher ist:

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{xm}{n}+\frac{n-1}{2n}\right]-\sum\limits_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{xm}{n}\right]+\sum\limits_{y=1}^{y=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{yn}{m}+\frac{m-1}{2m}\right]-\sum\limits_{y=1}^{y=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{yn}{m}\right]}$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{mx}{n}\right]+\sum\limits_{y=1}^{y=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{ny}{m}\right]}$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{x=1,\,y=1}^{x=\frac{n-1}{2},\,y=\frac{m-1}{2}}\left\{\varepsilon\left(\frac{mx}{ny}\right)+\varepsilon\left(\frac{ny}{mx}\right)\right\}}$$

oder weil der Exponent von -1 auf der rechten Seite dieser Gleichung, da für dasselbe Werthepaar x, y der eine von den beiden Brüchen $\frac{mx}{ny}$, $\frac{ny}{mx}$ grösser, der andere aber kleiner als 1 ist, gleich der Anzahl der Werthepaare x, y wird:

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}$$

Diese Relation hätte man selbstverständlich auf demselben Wege auch aus der Formel 3) ableiten können.

Beachtet man, dass bei festem x die Differenzen:

$$\frac{y}{m}-\frac{x}{n};\ \frac{y}{m}-\frac{x}{n}-\frac{n-1}{2mn};\ \frac{y}{m}-\frac{x}{n}-\frac{1}{2m}$$

negativ sind, wenn die ganze Zahl y beziehungsweise nicht grösser ist als:

$$\left[\frac{xm}{n}\right]; \quad \left[\frac{xm}{n}+\frac{n-1}{2n}\right]; \quad \left[\frac{xm}{n}+\frac{1}{2}\right]$$

so sieht man, dass die eben angegebenen ganzen Zahlen der Reihe nach die Anzahlen der negativen Factoren der Producte

$$\prod_{y=1}^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{y}{m}-\frac{x}{n}\right); \quad \prod_{y=1}^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{y}{m}-\frac{x}{n}-\frac{n-1}{2mn}\right); \quad \prod_{y=1}^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{y}{m}-\frac{x}{n}-\frac{1}{2m}\right)$$

angeben, und daher verwandeln sich die Gleichungen 2) und 3) in die folgenden:

$$4. \qquad \left(\frac{m}{n}\right)=sgn.\prod_{xy}\left(\frac{y}{m}-\frac{x}{n}\right)\left(\frac{y}{m}-\frac{x}{n}-\frac{n-1}{2mn}\right)$$

$$5. \qquad \left(\frac{m}{n}\right)=sgn.\prod_{xy}\left(\frac{y}{m}-\frac{x}{n}\right)\left(\frac{y}{m}-\frac{x}{n}-\frac{1}{2m}\right)$$

$$\left(x=1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}; \; y=1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}\right).$$

Schreibt man in diesen Formeln zuerst für y: $\frac{m+1}{2}-y_1$, sodann für x: $\frac{n+1}{2}-x_1$, so ergeben sich die vier Relationen:

$$6. \qquad \left(\frac{m}{n}\right)=sgn.\prod_{xy}\left(\frac{x}{n}-\frac{y}{m}\right)\left(\frac{y}{m}+\frac{x}{n}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2mn}\right)$$

$$7. \qquad \left(\frac{m}{n}\right)=sgn.\prod_{xy}\left(\frac{x}{n}-\frac{y}{m}\right)\left(\frac{y}{m}+\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\right)$$

$$8. \; \left(\frac{m}{n}\right)=sgn.\prod_{xy}\left(\frac{y}{m}-\frac{x}{n}\right)\left(\frac{y}{m}+\frac{x}{n}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2m}-\frac{1}{2mn}-\frac{1}{2}\right)$$

$$9. \qquad \left(\frac{m}{n}\right)=sgn.\prod_{xy}\left(\frac{y}{m}-\frac{x}{n}\right)\left(\frac{y}{m}+\frac{x}{n}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2m}\right)$$

durch welche das Legendre-Jacobi'sche Symbol in einer Weise dargestellt wird, welche das Reciprocitätsgesetz sofort erkennen lässt.

Die Formel 7) ist die interessante, von Herrn L. Kronecker unlängst veröffentlichte Darstellung des verallgemeinerten Legendre'schen Zeichens („Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Von L. Kronecker. Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrgang 1884. Nr. XXIII, p. 519 ff.). Dieselbe ergibt sich übrigens auch aus der von Herrn Ernst Schering mitgetheilten Gleichung:

$$\mathfrak{Anz}_{\mu}\ \mathfrak{Neg}\ \mathfrak{AB}\left(\frac{\mu m}{n}\right)_{\left(\mu=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2}\right)}=$$

$$=\mathfrak{Anz}_{\mu,\nu}\ \mathfrak{Pos}\left(\frac{\nu}{m}+\frac{\mu}{n}-\frac{1}{2}\right)_{\left(\mu=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2};\ \nu=1,2,\ldots,\frac{m-1}{2}\right)}-$$

$$-\mathfrak{Anz}_{\mu,\nu}\ \mathfrak{Pos}\left(\frac{\mu}{n}-\frac{\nu}{m}\right)_{\left(\mu=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2};\ \nu=1,2,\ldots,\frac{m-1}{2}\right)}.$$

(„Neuer Beweis des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste." Von Ernst Schering. Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus dem Jahre 1879. Göttingen 1879, p. 217 ff.).

Die Formeln 5) und 8) finden sich in etwas anderer Darstellung und in anderer Weise abgeleitet in der im 24. Bande der Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen enthaltenen Arbeit des Herrn Ernst Schering: „Bestimmung des quadratischen Restcharakters".

Setzt man:

$$\frac{xm}{n}=g_x\pm\frac{x'}{n}$$

wo x' einen der Werthe $0, 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ hat, so ist:

$$\frac{xm}{n}+\frac{n-1}{2n}=g_x+\frac{n-1\pm 2x'}{2n}.$$

Nun ist aber:

$$1-\frac{1}{n}\geq\frac{n-1\pm 2x'}{2n}\geq 0$$

daher ist für die angegebenen Werthe von x':

$$\left[\frac{n-1\pm 2x'}{2n}\right]=0$$

und demnach:

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{xm}{n}+\frac{n-1}{2n}\right]=\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} g_x$$

oder, da, wie schon Herr L. Kronecker a. a. O. hervorgehoben hat:

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} g_x \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, 2)$$

ist:

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{xm}{n}+\frac{n-1}{2n}\right]=\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{xm}{n}+\frac{1}{2}\right]\equiv 0\,(\mathrm{mod.}\,2)$$

also auch:

$$sgn. \prod^{xy}\left(\frac{y}{m}-\frac{x}{n}-\frac{n-1}{2mn}\right)=+1$$

$$\left(x=1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2};\; y=1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}\right)$$

Die Gleichungen 2) und 4) verwandeln sich daher in:

10. $$\left(\frac{m}{n}\right)=(-1)^{\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{xm}{n}\right]}$$

$$=(-1)^{\sum_{x=1,\, y=1}^{x=\frac{n-1}{2},\, y=\frac{m-1}{2}} \varepsilon\left(\frac{mx}{ny}\right)}$$

11. $$\left(\frac{m}{n}\right)=sgn. \prod^{xy}\left(\frac{y}{m}-\frac{x}{n}\right)$$

$$\left(x=1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2};\; y=1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}\right)$$

welche beide ebenfalls das Reciprocitätsgesetz unmittelbar erkennen lassen.

Die Gleichung 11) hat Herr L. Kronecker in den Monatsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1876 auf anderem Wege abgeleitet; die dort angegebenen Entwicklungen hat er übrigens schon am 20. November 1873 in seinen an der Berliner Universität abgehaltenen Vorlesungen über Zahlentheorie mitgetheilt, wie ich aus meinen damaligen Aufzeichnungen ersehe. In einer unlängst veröffentlichten Notiz („Über den dritten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste von L. Kronecker." Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1884, Nr. XXIX, p. 645 ff.) hat Herr L. Kronecker diese Formel auf die im dritten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes enthaltenen Ideen zurückgeführt, indem er von der Gleichung:

$$sgn.\ R\left(\frac{xm}{n}\right) = (-1)^{\left[\frac{2xm}{n}\right]}$$

ausgeht, welche sich sofort ergibt, wenn man beachtet, dass der bei der Division von $2xm$ durch n auftretende Rest ungerade ist, sobald der bei der Division von xm durch n sich ergebende Bruchrest grösser als $\frac{1}{2}$ wird. Nach dieser Bemerkung ist nämlich:

$$sgn.\ R\left(\frac{xm}{n}\right) = (-1)^{n\left\{\frac{2xm}{n} - \left[\frac{2xm}{n}\right]\right\}}$$

woraus, da n ungerade ist, sofort die letzte Gleichung folgt.

Die in den Zahlen 1) enthaltenen Bruchreste wurden bisher in zwei Gruppen getheilt, je nachdem ihre Zähler grösser als $\frac{n-1}{2}$ waren oder nicht.

Es ist nicht uninteressant, dieselben in zwei Gruppen zu theilen, je nachdem die Zahl α grösser als $\frac{m-1}{2}$ ist oder nicht. Man sieht sofort, dass die Differenz:

$$\left[\frac{xm}{n} + \frac{2n-m}{2n}\right] - \left[\frac{xm}{n}\right]$$

den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem:

$$\alpha \leqq \frac{m-1}{2} \text{ oder } \alpha > \frac{m-1}{2}$$

ist. Bezeichnet nun $A\left(\frac{xm}{n}\right)$ den Werth dieser Differenz, so hat man:

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} A\left(\frac{xm}{n}\right) = \sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{xm}{n}+\frac{2n-m}{2n}\right] - \sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{xm}{n}\right]$$

$$= \frac{n-1}{2} + \sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{xm}{n}-\frac{m}{2n}\right] - \sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{xm}{n}\right]$$

und daher:

$$(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} A\left(\frac{xm}{n}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{xy}\left(\frac{y}{m}-\frac{x}{n}\right)\left(\frac{y}{m}-\frac{x}{n}+\frac{1}{2n}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{xy}\left(\frac{y}{m}-\frac{x}{n}\right)\left(\frac{y}{m}+\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(x=1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2};\ y=1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}\right)$$

oder nach 7):

12.
$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{(m+1)(n-1)}{4} + \sum\limits_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} A\left(\frac{xm}{n}\right)}$$

oder auch:

$$\left(\frac{m}{4r+1}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{x=2r} A\left(\frac{xm}{4r+1}\right)}$$

$$\left(\frac{m}{4r+3}\right) = (-1)^{\frac{m+1}{2} + \sum\limits_{x=1}^{x=2r+1} A\left(\frac{xm}{4r+3}\right)}.$$

Aus den obigen Entwickelungen ergibt sich auch sofort das folgende arithmetische Theorem:

Die Anzahl der Werthepaare x, y $\left(x<\frac{n}{2};\, y<\frac{m}{2}\right)$, für welche:

$$\frac{y}{m}-\frac{x}{n}<\frac{n-1}{2mn};\quad \frac{y}{m}+\frac{x}{n}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2mn};$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2mn}>\frac{y}{m}+\frac{x}{n},\ \text{oder}\ \frac{y}{m}+\frac{x}{n}>\frac{1}{2}$$

ist, ist stets gerade, während die Anzahl der Werthepaare x, y, für welche:

$$\frac{y}{m}-\frac{x}{n}>\frac{n-1}{2mn};\quad \frac{y}{m}+\frac{x}{n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2mn};$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2mn}<\frac{y}{m}+\frac{x}{n}\ \text{oder}\ \frac{y}{m}+\frac{x}{n}<\frac{1}{2}$$

ist, ungerade wird, wenn beide Zahlen m und n die Form $4r+3$ besitzen.

Die Construction der algebraischen Flächen aus der Anzahl sie bestimmender Punkte.

Von G. v. Escherich.

Während das Problem der Construction der algebraischen Curven der zweiten, dritten und vierten Ordnung aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte eine eingehende Bearbeitung gefunden hat, erfreute sich bisher das analoge Problem für die algebraischen Flächen nicht der gleichen Aufmerksamkeit. Zwar die Construction der Fläche der zweiten Ordnung aus neun Punkten hat seit ihrer ersten Erledigung durch Hesse mannigfache Lösungen gefunden, doch schon das nächstfolgende Problem: Die Construction der allgemeinen Fläche der dritten Ordnung aus 19 gegebenen Punkten fand fast gar keine Beachtung und dieses Schicksal theilte eine von mir (im Jahre 1877) gegebene Lösung[1] desselben. Jüngst machte nun auch Herr C. Le Paige in einer interessanten Abhandlung (Acta mathematica, t. III) eine neue Lösung dieser Aufgabe bekannt, und ich irre wohl nicht, wenn ich hierin ein Anzeichen erblicke, dass das Problem der Construction der algebraischen Flächen aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte mehr in den Vordergrund tritt. Das allmälig hiefür erwachende Interesse[2] dürfte es wohl rechtfertigen, wenn

---

[1] Die reciproken linearen Flächensysteme. Sitzber. der kais. Akad. d. Wiss. in Wien. Bd. LXXV. Diese Arbeit werde ich in der Folge mit A. I. bezeichnen.

[2] F. Schur. Über ein Paradoxon (Berichte der k. sächs. Gesellsch. d. Wiss. J. 1883). Fr. v. Krieg. Über die eind. Beziehung von Räumen (Zeitschrift f. Math. 1884). Erst nach Beendigung dieser Arbeit kam mir noch eine Abhandlung des Herrn F. Schur (Math. Annalen, Bd. XXIII Heft 3, p. 437) zu Gesicht, worin er sich auch zu einigen Bemerkungen über meine oben erwähnten Arbeiten veranlasst fühlt. Die Art, wie er dieselben vorbringt, enthebt mich wohl einer eingehenden Erwiderung und ich

ich von den beiden Lösungen, die ich vor einigen Jahren in zwei vorläufigen Anzeigen der kais. Akademie mittheilte,[1] hier die eine eingehend darzustellen mir erlaube.

Beide Constructions-Arten der algebraischen Flächen aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte entspringen der Auffassung der algebraischen Flächen als Erzeugnisse zweier reciproker linearen Systeme algebraischer Flächen, worunter zwei Systeme verstanden werden, deren Parameter durch nur eine lineare Gleichung an einander gebunden sind. Es hat sich aber gezeigt, dass für die Erzeugung der Flächen die Stufenzahl der sie erzeugenden reciproken Systeme nicht gleichgiltig ist. Denn während jede allgemeine Fläche $(m+n)$-ter Ordnung ohneweiters als das Erzeugniss zweier reciproker Systeme bezüglich der m-ten und n-ten Ordnung betrachtet werden darf, sobald diese von höherer als der zweiten Stufe sind, ist dies bei zwei reciproken Flächenbündeln nur möglich, wenn m und n einer bestimmten Ungleichung genügen. Trifft dies aber zu, so wird die Construction der erzeugenden Systeme aus der Anzahl der die Flächen bestimmenden Punkte in beiden Fällen nach analogen Methoden ausgeführt, Methoden, die auch bei der Construction der algebraischen Curven[3] aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte ihre Analoga haben und somit für alle diese Gebilde eine einheitliche Lösung des Problems liefern.

---

verzichte umsomehr hierauf, als der sich interessirende Leser durch die vorliegende Arbeit in den Stand gesetzt ist, selbst zu beurtheilen, ob Herrn Schur's Bemerkungen gerechtfertigt sind, und in wie weit er mit seiner Abhandlung Neues meinen Arbeiten über die Construction der algebraischen Flächen hinzufügte.

Um diese Beurtheilung zu erleichtern, habe ich in nachträglichen Noten, wo ich Herrn Schur's Arbeit unter S. anführe, zum Vergleichen aufgefordert.

[1] Sitzber. der kais. Akad. d. Wiss. in Wien, Bd. LXXXV, p. 526 und 893. In der Folge werde ich die erste dieser beiden Anzeigen mit A I[?] bezeichnen.

[2] A. I. Abschnitt II. Ich möchte auch hier hervorheben, dass die Sätze dieses Abschnittes, wie übrigens ihre Ableitung deutlich zeigt, nur für allgemeine Flächen entwickelt wurden.

[3] Mag man sie als Erzeugnisse collinearer Curvenbüschel oder reciproker linearer Curvensysteme darstellen wollen.

Von den Erzeugungsweisen der allgemeinen algebraischen Flächen durch reciproke lineare Systeme scheint mir die durch reciproke Bündeln trotz der Beschränkung, der sie unterliegt, wegen ihrer grösseren Anschaulichkeit den Vorzug zu verdienen und ich werde daher hier die darauf gegründete Construction der allgemeinen algebraischen Flächen aus der Anzahl sie bestimmender Punkte erörtern. Als Anwendung behandle ich die Construction der Flächen der zweiten, dritten und vierten Ordnung, die sich nach diesem Verfahren blos mit Lineal und Zirkel herstellen lassen.

I.

Ist die allgemeine Fläche der $(m+n)$-ten Ordnung durch einen Bündel der m-ten und einen hiezu reciproken der n-ten Ordnung erzeugbar, so können, wenn die Zahl[1]

$$Q = 3N(m) + 3N(n) - N(m+n) - 4$$

wo $N(p) = \binom{p+1}{3} - 1$ gesetzt wurde, durch zwei theilbar ist, $\frac{Q}{2}$, anderenfalls $\frac{Q-1}{2}$ Punkte der Fläche und noch ein Punkt einer bestimmten, auf der Fläche gelegenen Curve, willkürlich zu Knotenpunkten der beiden die Fläche erzeugenden Bündel genommen werden.

Von den zur Construction der Fläche gegebenen Punkten kann also eine dieser Zahl gleiche Anzahl zu Knotenpunkten der beiden zu construirenden reciproken Bündel verwendet werden. In sehr vielen Fällen ist nun diese Zahl grösser oder gleich der Anzahl der Knotenpunkte, welche die Basis des einen der beiden erzeugenden Bündel bestimmen, wie z. B. stets, wenn der eine von ihnen ein Strahlenbündel ist.

Diesen Fall will ich nun näher erörtern und um einen bestimmten vor Augen zu haben, etwa annehmen, die Fläche $(m+n)$-ter Ordnung lasse sich durch einen Bündel m-ter und

---

[1] A. I. Abschnitt II. Diese Zahl wird für die vorliegenden Zwecke hier in IV abgeleitet.

einen zu ihm reciproken n-ter Ordnung erzeugen und es sei die Maximalzahl der verfügbaren Knotenpunkte derselben $\gtrless$ als die Zahl der Knotenpunkte, welche die Basis des einen, etwa des Bündels der m-ten Ordnung bestimmen: man sei also im Stande, diesen Bündel wirklich herzustellen. Um die Fläche zu erzeugen, hat man somit nur noch einen Flächenbündel der n-ten Ordnung zu construiren, dessen Basis den Rest der verfügbaren Knotenpunkte enthält und der zu dem ersten derart reciprok ist, dass jeder durch einen der übrigen gegebenen Punkte gehenden $C^{m,m}$ dieses Bündels eine durch denselben Punkt gehende F^n des anderen entspricht. Bezieht man nun den Flächenbündel m-ter Ordnung collinear auf einen Strahlenbündel, so ersieht man, dass die Construction der Fläche in dem Probleme enthalten ist:

Zu einem gegebenen Strahlenbündel einen reciproken F^n-Bündel zu construiren, wenn von dessen Basis eine Anzahl Knotenpunkte — die auch Null sein kann — bekannt ist und jede Fläche, welche einem aus einer Reihe gegebener Strahlen entspricht, durch einen ihr zugewiesenen Punkt gehen soll.

II.

Diese Aufgabe löse ich durch ein stufenförmiges Verfahren, welches ein Satz nahelegt, der in seiner Einschränkung auf Curven- und Flächenbüschel bekannt ist,[1] aber selbst für die Construction der algebraischen Curven aus gegebenen Bestimmungsstücken nicht systematisch und erschöpfend verwerthet wurde. Ich will hier diesen Satz, der sich auf beliebige projectivische lineare Curven- und Flächensysteme erstreckt,[2] dem vorliegenden Zwecke gemäss für collineare Flächenbündel derselben Ordnung aussprechen.

1. Zu jeder Fläche eines Bündels, welcher durch drei entsprechende Flächen dreier gegebener collinearer Flächenbündel bestimmt wird, findet sich in jedem anderen solchen Bündel eine und nur eine Fläche derart, dass alle diese Flächen wieder einen

---

[1] Sitzber. der kais. Akad. d. Wiss. in Wien Bd. LXXXV, p. 528.
[2] Ibid p. 893.

Bündel bilden, der zu den ursprünglichen collinear ist in Hinsicht jener hier genannten Flächen, welche demselben mittleren Bündel angehören; die mittleren Bündel sind selbst wieder collinear hinsichtlich jener hier auftretenden Flächen, welche demselben ursprünglichen oder neuen Bündel angehören.

Beweis. Die drei ursprünglichen collinearen Bündel lassen sich durch drei Gleichungen von der Form darstellen:

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0$$
$$m_1 \lambda_1 F_1' + m_2 \lambda_2 F_2' + m_3 \lambda_3 F_3' = 0$$
$$n_1 \lambda_1 F_1'' + n_2 \lambda_2 F_2'' + n_3 \lambda_3 F_3'' = 0$$

wo die λ Parameter bedeuten. Man überzeugt sich nun am einfachsten von der Richtigkeit des obigen Satzes, wenn man — was ja unbeschadet der Allgemeinheit des Beweises gestattet ist — als drei mittlere Bündel, welche die neuen bestimmen, die folgenden annimmt:

$$\rho F_1 + \rho' F_1' + \rho'' F_1'' = 0$$
$$\sigma F_2 + \sigma' F_2' + \sigma'' F_2'' = 0$$
$$\tau F_3 + \tau' F_3' + \tau'' F_3'' = 0$$

wo die Grössen ρ, σ und τ Parameter bezeichnen.

Sind nun α, α', α'' gegebene Grössen, so ist

$$\alpha F_1 + \alpha' F_1' + \alpha'' F_1'' = 0$$

eine bestimmte Fläche des ersten dieser drei Bündel. Diese bildet mit irgend zwei Flächen der beiden anderen Bündel:

$$\sigma F_2 + \sigma' F_2' + \sigma'' F_2'' = 0$$
$$\tau F_3 + \tau' F_3' + \tau'' F_3'' = 0$$

wieder einen Bündel:

$$\xi_1(\alpha F_1 + \alpha' F_1' + \alpha'' F_1'') + \xi_2(\sigma F_2 + \sigma' F_2' + \sigma'' F_2'') +$$
$$+ \xi_3(\tau F_3 + \tau' F_3' + \tau'' F_3'') = 0$$

Man erkennt nun unmittelbar, dass man hierin den Grössen σ, τ und ξ stets solche Werthe beilegen kann, dass die durch dieselben bestimmte Fläche auch dem beliebigen mittleren Bündel angehört:

$$\begin{aligned}\Phi_{k,\rho} \equiv \rho(k_1F_1 + k_2F_2 + k_3F_3) \\ + \rho'(m_1k_1F_1' + m_2k_2F_2' + m_3k_3F_3') \\ + \rho''(n_1k_1F_1'' + n_2k_2F_2'' + n_3k_3F_3'') = 0,\end{aligned}$$

wo die ρ Parameter bezeichnen und die k gegebene Werthe besitzen.

Dies wird nämlich sicher der Fall, wenn man die genannten Grössen und ρ, ρ', ρ'' so bestimmen kann, dass sie den Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned}\xi_1\alpha = \rho k_1;\ \xi_1\alpha' = \rho' m_1 k_1;\ \xi_1\alpha'' = \rho'' n_1 k_1 \\ \xi_2\sigma = \rho k_2;\ \xi_2\sigma' = \rho' m_2 k_2;\ \xi_2\sigma'' = \rho'' n_2 k_2 \\ \xi_3\tau = \rho k_3;\ \xi_3\tau' = \rho' m_3 k_3;\ \xi_3\tau'' = \rho'' n_3 k_3\end{aligned}$$

Es ergibt sich nun hieraus

$$\rho : \rho' : \rho'' = \alpha : \frac{\alpha'}{m_1} : \frac{\alpha''}{n_1}$$

$$\sigma : \frac{\sigma'}{m_2} : \frac{\sigma''}{n_2} = \tau : \frac{\tau'}{m_3} : \frac{\tau''}{n_3} = \alpha : \frac{\alpha'}{m_1} : \frac{\alpha''}{n_1}$$

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \frac{k_1}{\alpha} : \frac{k_2}{\sigma} : \frac{k_3}{\tau}.$$

Da aber hier blos die Verhältnisszahlen der σ und τ in Betracht kommen, so kann man $\sigma = \tau = \alpha$ setzen, wodurch man dann erhält:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = k_1 : k_2 : k_3.$$

Es bestimmt somit die Fläche

$$\alpha F_1 + \alpha' F_1' + \alpha'' F_1'' = 0$$

des ersten der drei Bündel mit den Flächen

$$\alpha F_2 + \frac{m_2}{m_1}\alpha' F_2' + \frac{n_2}{n_1}\alpha'' F_2'' = 0$$

$$\alpha F_3'' + \frac{m_3}{m_1}\alpha' F_3'' + \frac{n_3}{n_1}\alpha'' F_3'' = 0$$

der beiden anderen Bündel wieder einen Bündel, welcher mit dem Bündel $\Phi_{k,\rho} = o$ die Fläche gemein hat:

$$\alpha(k_1F_1 + k_2F_2 + k_3F_3)$$
$$+ \alpha'\left(k_1 F_1' + \frac{m_2}{m_1} k_2 F_2' + \frac{m_1}{m_2} k_3F_3'\right)$$
$$+ \alpha''\left(k_1F_1'' + \frac{n_2}{n_1} k_2 F_2'' + \frac{n_3}{n_1} k_3F_3''\right) = 0.$$

Aus dieser Gleichung erhellt auch, wenn man darin die k als Parameter betrachtet, dass der neue Bündel mit jedem ursprünglichen in der angegebenen Weise collinear ist.

Es erübrigt noch zu zeigen, dass die Fläche

$$\alpha F_1 + \alpha' F_1' + \alpha'' F_1'' = 0$$

nur einen einzigen derartigen Bündel bestimmt.

Bildete sie auch mit den Flächen

$$\sigma F_2 + \sigma' F_2' + \sigma'' F_2'' = 0$$
$$\tau F_3 + \tau' F_3' + \tau'' F_3'' = 0$$

einen solchen Bündel, so müsste dessen Gleichung auf die Form gebracht werden können

$$p_1k_1(\alpha F_1 + \alpha' F_1' + \alpha'' F_1'') + p_2k_2(\sigma F_2 + \sigma' F_2' + \sigma'' F_2'') +$$
$$+ p_3k_3(\tau F_3 + \tau' F_3' + \tau'' F_3'') = 0$$

wo die p gewisse Constante und die k Parameter bedeuten. Für jeden Werth von k müssten sich dann ρ bestimmen lassen, dergestalt, dass

$$p_1k_1(\alpha F_1 + \alpha' F_1' + \alpha'' F_1'') + p_2k_2(\sigma F_2 + \sigma' F_2' + \sigma'' F_2'') +$$
$$+ p_3k_3(\tau F_3 + \tau' F_3' + \tau'' F_3'')$$
$$\equiv k_1(\rho_1 F_1 + \rho' F_1' + \rho'' F_1'') + k_2\left(\rho F_2 + \frac{m_2}{m_1}\rho' F_2' + \frac{n_2}{n_1}\rho'' F_2''\right) +$$
$$+ k_3\left(\rho F_3 + \frac{m_3}{m_1}\rho' F_3' + \frac{n_3}{n_1}\rho'' F_3''\right).$$

Diese Identität zieht aber die Gleichungen nach sich:

$$p_1(\alpha F_1 + \alpha' F_1'' + \alpha'' F_1'') \equiv \rho F_1 + \rho' F_1' + \rho'' F_1''$$
$$p_2\left(\sigma F_1 + \frac{m_2}{m_1}\sigma' F_3' + \frac{n_2}{n_1}\sigma'' F_2''\right) \equiv \rho F_2 + \frac{m_2}{m_1}\rho' F_2' + \frac{n_2}{n_1}\rho'' F_2''$$
$$p_3\left(\tau F_3 + \frac{m_3}{m_1}\tau' F_3' + \frac{n_3}{n_1}\tau'' F_3''\right) \equiv \rho F_3 + \frac{m_3}{m_1}\rho' F_3' + \frac{n_3}{n_1}\rho'' F_3''$$

aus welchen, wenn die Flächen in jedem Tripel

$$F_1, F_1', F_1''; F_2, F_2', F_2''; F_3, F_3', F_3''$$

von einander linear unabhängig sind, folgt:

$$\begin{array}{lll} p_1\alpha = \rho & p_2\sigma = \rho & p_3\tau = \rho \\ p_1\alpha' = \rho' & p_2\sigma' = \rho' & p_3\tau' = \rho' \\ p_1\alpha'' = \rho'' & p_2\sigma'' = \rho'' & p_3\tau'' = \rho'' \end{array}$$

oder

$$\rho : \rho' : \rho'' = \sigma : \sigma' : \sigma'' = \tau : \tau' : \tau'' = \alpha : \alpha' : \alpha''.$$

Die Fläche

$$\alpha F_1 + \alpha' F_1' + \alpha'' F_1'' = 0$$

bestimmt somit nur einen einzigen Bündel von der angegebenen Art:

$$k_1(\alpha F_1 + \alpha' F_1' + \alpha'' F_1'') + k_2\left(\alpha F_2 + \frac{m_2}{m_1}\alpha' F_2' + \frac{n_2}{n_1}\alpha'' F_2''\right) + \\ + k_3\left(\alpha F_3 + \frac{m_3}{m_1}\alpha' F_3' + \frac{n_3}{n_1}\alpha'' F_3''\right) = 0.$$

Betrachtet man in dieser Gleichung die k als fix und die α als Parameter, so erhellt, dass die mittleren Bündel selbst collinear sind in der angegebenen Weise.

2. Im vorhergehenden Satze wurden blos jene Tripeln entsprechender Flächen der drei ursprünglichen Bündel berücksichtigt, die wieder einen Bündel constituiren. Der Beweis des Satzes ist aber von dieser Voraussetzung nur in seinem zweiten Theile abhängig und lässt leicht die Modificationen erkennen, welche der Satz erleidet, wenn ein Tripel entsprechender Flächen einen Büschel oder eine einzige Fläche bildet.

Ich werde im Folgenden nur die erste Annahme discutiren, da der Gang für die Untersuchung der zweiten derselbe bleibt. Wenn eines der vorbenannten Tripel einen Büschel bildet, so muss unterschieden werden, ob die vorgegebene Fläche diesem oder einem Bündel entnommen ist. Ich will zunächst den letzteren Fall erörtern und etwa annehmen, die vorgegebene Fläche sei dem Bündel

$$\lambda F_1 + \lambda' F_1' + \lambda'' F_1'' = 0$$

entnommen und sei gegeben durch $\lambda : \lambda' : \lambda'' = \alpha : \alpha' : \alpha''$, während das Tripel F_3, F_3', F_3'' einen Büschel bildet und

$$F_3'' = \alpha F_3 + \alpha' F_3'$$

ist, wo α und α' gegebene Constante bedeuten.

Man überzeugt sich leicht, dass auch bei diesen Voraussetzungen der obige Satz bestehen bleibt. Eine Modification erfährt jedoch derselbe, wenn angenommen wird, dass das Tripel, dessen Systeme die vorgegebenen Flächen entnommen sind, einen Büschel bildet: wenn also im oben behandelten allgemeinen Falle die Voraussetzung eingeführt wird

$$F_1'' \equiv \alpha F_1 + \alpha' F_1'.$$

Ertheilt man in

$$\lambda F_1 + \lambda' F_1' + \lambda'' F_1'' \equiv (\lambda + \alpha\lambda'')F_1 + (\lambda' + \alpha'\lambda'')F_1' = 0$$

den Parametern λ die Werthe $\lambda : \lambda' : \lambda'' = \alpha : \alpha' : \alpha''$, so wird hiedurch in dem Büschel eine Fläche bestimmt. Diese bildet mit den Flächen

$$\alpha F_2 + \frac{m_2}{m_1}\alpha' F_2' + \frac{n_2}{n_1}\alpha'' F_2'' = 0$$

$$\alpha F_3 + \frac{m_3}{m_1}\alpha' F_3' + \frac{n_3}{n_1}\alpha'' F_3'' = 0$$

den Bündel

$$k_1(\alpha F_1 + \alpha' F_1' + \alpha'' F_1'') + k_2\left(\alpha F_2 + \frac{m_2}{m_1}\alpha' F_2' + \frac{n_2}{n_1}\alpha'' F_2''\right) + \\ + k_3\left(\alpha F_3 + \frac{m_3}{m_1}\alpha' F_3' + \frac{n_3}{n_1}\alpha'' F_3''\right) = 0.$$

Legt man in dieser Gleichung den Parametern k bestimmte Werthe bei, so stellt sie die Gleichung einer Fläche dar, welche zugleich dem Bündel $\Phi_{k,\rho} = o$ angehört; die Gleichung des neuen Bündels zeigt zugleich, dass er zu jedem ursprünglichen in der angegebenen Weise collinear ist.

Insoweit erfährt also der allgemeine Satz durch die gemachten Annahmen keine Änderung und es erübrigt nun noch, zu untersuchen, ob die obige Fläche des Büschels nur einen einzigen derartigen Bündel bestimmt.

Aus der früheren Identität

$$p_1k_1(\alpha F_1+\alpha' F_1'+\alpha'' F_1'')+p_2k_1\left(\alpha F_2+\frac{m_2}{m_1}\alpha' F_2'+\frac{n_2}{n_1}\alpha'' F_2''\right)+$$
$$+p_3k_3\left(\alpha F_3+\frac{m_3}{m_1}\alpha' F_3'+\frac{n_3}{n_1}\alpha'' F_3''\right)\equiv$$
$$k_1(\rho F_1+\rho' F_1'+\rho'' F_1'')+k_2\left(\rho F_2+\frac{m_2}{m_1}\rho' F_2'+\frac{n_2}{n_1}\rho'' F_2''\right)+$$
$$+k_3\left(\rho F_3+\frac{m_3}{m_1}\rho' F_3'+\frac{n_3}{n_1}\rho'' F_3''\right)$$

ergibt sich nun unter Berücksichtigung

$$F_1''=aF_1+a'F_1'$$

das System von Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} p_1(\alpha+a\alpha'')=\rho+\rho'' a; & p_2\sigma=\rho; & p_3\tau=\rho \\ p_1(\alpha'+a'\alpha'')=\rho'+\rho'' a'; & p_2\sigma'=\rho'; & p_3\tau'=\rho' \\ & p_2\sigma''=\rho''; & p_3\tau''=\rho'' \end{array}$$

Diesem Systeme kann aber ausser durch die obige Annahme

$$\rho:\rho':\rho''=\sigma:\sigma':\sigma''=\tau:\tau':\tau''=\alpha:\alpha':\alpha''$$

noch durch einfach unendlich viele Werthe genügt werden, wie die Gleichungen lehren

$$\sigma:\sigma':\sigma''=\tau:\tau':\tau''=(\alpha+a\alpha''-\rho'' a):(\alpha'+a'\alpha''-\rho'' a'):\rho''$$

wo für $\frac{\rho''}{p_1}:\rho''$ gesetzt wurde.

Es bestimmt somit die vorgegebene Fläche in dem mittleren Systeme $\Phi_{k,\rho}=o$ nicht mehr blos eine Fläche, sondern den Büschel

$$(\alpha+a\alpha'')(k_1F_1+k_2F_2+k_3F_3)+(\alpha'+a'\alpha'')\left(k_1F_1'+\frac{m_2}{m_1}k_2F_2'+\frac{m_3}{m_1}k_3F_3'\right)-$$
$$-\rho''\left[a(k_1F_1+k_2F_2+k_3F_3)+a'\left(k_1F_1'+\frac{m_2}{m_1}k_2F_2'+\frac{m_3}{m_1}k_3F_3'\right)\right.$$
$$\left.-\left(k_1F_2'+\frac{n_2}{n_1}k_2F_2''+\frac{n_3}{n_1}k_3F_3''\right)\right]+0$$

wo ρ'' einen Parameter bezeichnet. Diese Büschel in den verschiedenen mittleren Systemen sind hinsichtlich der Flächen, welche demselben Werthe des ρ'' entsprechen, zu einander

collinear und die entsprechenden Flächen dieser Büschel bilden also mit der gegebenen Fläche je einen Bündel der angegebenen Art. Die Gleichung desselben ist die obige, wenn man darin ρ'' seinen speciellen Werth ertheilt und die k als Parameter ansieht. Belässt man ρ'' seinen Werth, nimmt aber die k als constant an und die α als Parameter, so lehrt die Gleichung, dass die mittleren Bündel, welche demselben Werthe ρ'' zugehören, selbst in der im Satze angegebenen Weise collinear sind. Der Fall, dass nicht nur das erste, sondern auch eines der anderen mittleren Systeme ein Büschel sei, bedarf wohl keiner Erörterung.

3. Es soll nun noch die für die folgende Construction wichtige Aufgabe erörtert werden: aus der gegebenen projectivischen Beziehung zwischen den drei ursprünglichen Bündeln die zwischen den mittleren abzuleiten. Diese Beziehung ist unmittelbar bekannt, sobald man einen neuen Bündel kennt und ein Tripel entsprechender Flächen der drei ursprünglichen Bündel, die wieder je einen Bündel bilden. Denn nach dem Satze in II. ist dann die Fläche bekannt, welche der neue Bündel mit jedem mittleren Systeme gemein hat und es sind somit in je zwei mittleren Systemen vier Paare entsprechender Flächen gegeben.

Die collineare Beziehung der mittleren Systeme muss sich aber nach deren Entstehungsweise offenbar auch ohne Hilfe eines im vorhinein gegebenen neuen Bündels feststellen lassen. Ein solches Verfahren ergibt sich in der That unmittelbar aus den Gleichungen der entsprechenden Flächen der zwei ersten mittleren Systeme:

$$\alpha F_1 + \alpha' F_1' + \alpha'' F_1'' = 0$$

$$\alpha F_2 + \frac{m_2}{m_1} \alpha' F_2'' + \frac{n_2}{n_1} \alpha'' F_2'' = 0.$$

Um die beiden Bündel in der durch diese Gleichungen ausgedrückten Weise collinear auf einander zu beziehen, wird man zunächst die Flächen der beiden Büschel $(F_1 F_1')$ und $(F_2 F_2')$ gemäss den Gleichungen

$$\sigma F_1 + \sigma' F_1' = o; \quad \sigma F_2 + \frac{m_2}{m_1} \sigma' F_2' = 0$$

einander zuordnen. Diese Zuordnung ist aber durch die collineare Beziehung der beiden Bündel gegeben, denn dadurch sind die

Flächen der beiden Büschel (F_1F_2) und $(F'_1F'_2)$ einander derart zugewiesen, dass die entsprechenden durch dieselben Parameterwerthe aus den Gleichungen

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = o; \quad \lambda_1 F'_1 + \frac{m_2}{m_1}\lambda_2 F'_2 = 0$$

sich ergeben. Ebenso ist durch die collineare Beziehung der Büschel (F_1F_3) und $(F'_1F'_3)$ in den gegebenen Bündeln auch die durch Gleichungen

$$\tau F_1 + \tau'' F''_1 = o; \quad \tau F_2 + \frac{n_2}{n_1}\tau'' F''_2 = 0$$

ausgedrückte der Büschel $(F_1F''_1)$ und $(F_2F''_2)$ bekannt. Um nun zu irgend einer Fläche des ersten Bündels die entsprechende im zweiten Bündel zu finden, wird man in der bekannten Weise verfahren. Man wird diese Fläche als das Erzeugniss der beiden Büschel im ersten Bündel darstellen; hiedurch werden die entsprechenden Flächen der collinearen Büschel im zweiten Bündel wieder zwei projectivische Büschel bilden, die wegen ihrer perspectivischen Lage gleichfalls eine, die gesuchte der gegebenen, zugeordnete Fläche erzeugen.

Ist das zweite System (F'_1, F'_2, F'_3) nicht mehr ein Bündel, sondern ein Büschel, während das erste ein Bündel bleibt, so ändert sich offenbar nichts an diesem Verfahren. Die Fläche im zweiten Systeme, die irgend einer Fläche des ersten Systems entspricht, ist die den beiden im zweiten Systeme durch diese Fläche hervorgerufenen collinearen Büscheln ausser $F_2 = o$ gemeinsame Fläche.

Ist hingegen das erste System (F_1, F_2, F_3) ein Büschel, so ergibt das Verfahren ebenfalls die ∞^1 Flächen, welche im zweiten Systeme der gegebenen Fläche zugehören. Man überzeugt sich hievon leicht. Es sei

$$F''_1 = pF_1 + p'F'_1,$$

wo p und p' gegebene Constante sind. Die Gleichung der gegebenen Fläche hat sodann die Form

$$(\alpha + \alpha'' p)F_1 + (\alpha' + \alpha'' p')F'_1 = 0.$$

Die durch diese Fläche bestimmten collinearen Büschel sind somit

$$\sigma F_1 + \sigma' F_1'' = o; \quad \sigma F_2 + \frac{m_2}{m_1}\sigma' F_2' = 0$$

$$\tau F_1 + \sigma' F_1'' = o; \quad \tau F_2 + \frac{n_2}{n_1}\sigma' F_2'' = 0$$

wo $\tau = a\sigma + a'\sigma'$ ist.

Die unbekannten Grössen a und a' werden nun durch die Bedingung bestimmt, dass die gegebene Fläche das Erzeugniss der beiden collinearen Bündel links sein soll. Während aber in den beiden vorhergehenden Fällen sich hieraus zwei Gleichungen zwischen a und a' ergeben, folgt in diesem Falle nur die eine:

$$\frac{p' - a}{p + a'} = \frac{\alpha' + \alpha'' p'}{\alpha + \alpha'' p}$$

oder

$$a' = \frac{(p' - a)(\alpha + \alpha'' p)}{\alpha' + \alpha'' p'} - p.$$

Das Erzeugniss der beiden Büschel rechts im zweiten Bündel, die entsprechende Fläche, ist somit

$$a' F_2 + \frac{n_2}{n_1} F_2'' - \frac{m_2}{m_1} a F_2' \equiv$$

$$p'\alpha - p\alpha' - a(\alpha + \alpha'' p)] F_2 + \frac{n_2}{n_1}(\alpha' + \alpha'' p') F_2'' - \frac{m_2}{m_1} a(\alpha' + \alpha'' p') F_2' = 0,$$

wo also a ein Parameter ist. Bezeichnet ρ'' eine ebensolche Grösse und setzt man

$$a = p' + \frac{\alpha' + \alpha'' p'}{\rho''},$$

so erhält die obige Gleichung der Fläche die Gestalt

$$(\alpha + p\alpha'') F_2 + (\alpha' + p'\alpha'') \frac{m_2}{m_1} F_2' - \rho'' \left(p F_2 + \frac{m_2}{m_1} p' F_2' - \frac{n_2}{n_1} F_2'' \right) = 0$$

ist also nach (2) für jedes ρ'' eine der Flächen des Bündels, welche mit der gegebenen Fläche einem gesuchten Bündel angehört.

Ich möchte hier noch darauf hinweisen, dass auch in diesem speciellen Falle die Construction ganz übereinstimmt mit der in den anderen Fällen, so zwar, dass man gänzlich der oft schwierigen Untersuchung überhoben ist, ob das mittlere System, dem die gegebene Fläche entnommen ist, ein Bündel oder Büschel ist.

III.

Die Anwendung dieses Satzes zur Lösung des obigen Problems in I. ist wohl ohneweiters klar. Kennt man nämlich ein Verfahren, um zu einem gegebenen Strahlenbündel einen reciproken Flächenbündel p-ter Ordnung zu construiren, dessen Basis B gegebene Punkte enthält und in dem die Flächen, welche den n Strahlen $s_1, s_2 \ldots s_n$ entsprechen, bezüglich durch die Punkte $P_1, P_2 \ldots P_n$ gehen, so hat es keine Schwierigkeit, vermöge des obigen Satzes einen zu dem Strahlenbündel reciproken Flächenbündel herzustellen, dessen Basis blos B—1 der gegebenen Punkte enthält und in dem jede einem von weiteren i Strahlen, wo i die Zahl drei nicht übersteigen darf, entsprechende Fläche ebenfalls durch einen ihr zugewiesenen Punkt geht.

Aus der Darstellung des hiezu dienenden Verfahrens werden von selbst auch die Bedingungen für die Daten ersichtlich werden, von denen seine Ausführbarkeit abhängig ist.

Ich löse zunächst die Aufgabe:

„Es ist durch (B—1) gegebene Knotenpunkte ein Flächenbündel zu legen, derart, dass die den Strahlen $s_1, s_2 \ldots s_n, s_{n+1}$ entsprechenden Flächen bezüglich durch die Punkte $P_1, P_2 \ldots P_n, P_{n+1}$ gehen."

Mittelst des als bekannt angenommenen Verfahrens können zunächst $(n+1)$ der Aufgabe genügende Flächenbündel dadurch construirt werden, dass stets einer der gegebenen Punkte $P_1, P_2 \ldots P_n, P_{n+1}$ in die Basis einbezogen wird. Ich will irgend drei der so entstandenen Bündel, etwa jene, wo bezüglich die Punkte i, k, l zur Ergänzung der gegebenen (B—1) zu B Punkten der Basis verwendet wurden, näher in Betracht ziehen.

$$\left.\begin{array}{l} F_1^{(i)}, F_2^{(i)}, \ldots F_n^{(i)} \ldots F_x^{(i)} \ldots \\ F_1^{(k)}, F_2^{(k)}, \ldots F_n^{(k)} \ldots F_x^{(k)} \ldots \\ F_1^{(l)}, F_2^{(l)}, \ldots F_n^{(l)} \ldots F_x^{(l)} \ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

seien die in den drei Bündeln bezüglich den Strahlen s_1, $s_2 \ldots s_n \ldots s_x$ entsprechenden Flächen. Vermittelst dieser drei Bündel können nun nach dem Satze in (II) neue Bündel abgeleitet werden, die den Bedingungen der Aufgabe genügen. Irgend drei Systeme, die durch entsprechende Flächen der drei Bündel in (I) gebildet werden, geben nämlich einer neuen Reihe derartiger Bündel Entstehung. Denn sind etwa

$$\left.\begin{matrix} F_\rho^{(i)}, F_\rho^{(k)}, F_\rho^{(l)} \\ F_\sigma^{(i)}, F_\sigma^{(k)}, F_\sigma^{(l)} \\ F_\tau^{(i)}, F_\tau^{(k)}, F_\tau^{(l)} \end{matrix}\right\} \quad (2)$$

diese drei mittleren Systeme, so existirt zu jeder Fläche f_ρ des ersten mindestens eine f_σ des zweiten und f_τ des dritten Systems, welche einen Bündel constituiren, der mit jedem mittleren Systeme $(F_\lambda^{(i)}, F_\lambda^{(k)}, F_\lambda^{(l)})$ eine Fläche f_λ gemein hat und mit jedem der ursprünglichen Bündel (1) collinear ist in Hinsicht der Flächen, die denselben unteren Index tragen.

Es ist aber klar, dass die durch die obigen drei mittleren Systeme (2) erhaltenen Bündel $(f_1, f_2 \ldots)$ die sämmtlichen sind, welche der Aufgabe genügen; denn gäbe es noch einen solchen Bündel, dessen Flächen f_1, f_2, f_3 nicht bezüglich den Systemen $[F_1^{(i)}, F_1^{(k)}, F_1^{(l)}]$, $[F_2^{(i)}, F_2^{(k)}, F_2^{(l)}]$, $[F_3^{(i)}, F_3^{(k)}, F_3^{(l)}]$ angehörten, so ergäbe eine wiederholte Anwendung des Satzes, dass jede durch die $B-1$ Basispunkte gelegte F^n etwa dem Strahle s_1 zugewiesen werden könnte. Dies setzt aber ganz specielle Beziehungen zwischen den Daten voraus und derartige Beziehungen sollen hier ausgeschlossen werden.

Sind somit

$$F_1, F_2 \;\ldots\; F_{n+1} \;\ldots\; F_x \;\ldots$$

die Flächen irgend eines den Bedingungen der Aufgabe genügenden Bündels, so gehört F_x dem mittleren Systeme $F_x^{(i)} F_x^{(k)} F_x^{(l)}$ an und ist dieses ein Bündel, so ist derselbe mit $F_p\, F_p^{(i)}\, F_p^{(k)}\, F_p^{(l)}$ collinear hinsichtlich der Flächen, welche denselben unteren Index haben. Es bilden also die sämmtlichen Flächen der verschiedenen, den Bedingungen des Problems genügenden Bündel, welche demselben Strahle des Strahlenbündels entsprechen, im Allgemeinen selbst einen (mittleren) Bündel und alle diese Bündel

sind collinear in der im Satze (II.) angegebenen Weise. Da nun von vornherein $(n+1)$ Bündel, welche die Forderungen befriedigen, gegeben sind, so ist damit auch die collineare Beziehung zwischen den verschiedenen, den einzelnen Strahlen des Strahlenbündels zugehörigen Bündeln gegeben. Man ist übrigens auch ohne Benützung eines solchen neuen Bündels nach dem in II., 3 angegebenen Verfahren im Stande, zu jeder Fläche eines einem Strahl zugehörigen Systems die übrigen Flächen zu finden, welche mit ihr einen der gesuchten Bündel erfüllen.

Mittelst der oben gelösten Aufgabe ist es nun möglich, das Problem nächst höherer Stufe zu erledigen, in dem zu den früheren Forderungen die weitere hinzugefügt wird, dass auch die dem Strahle s_{n+2} zugehörige Fläche durch einen gegebenen Punkt P_{n+2} gehe.

Denn die Flächen, welche in dem vorhergehenden Probleme s_{n+2} zugehören, bilden einen Bündel und es constituiren somit alle Flächen desselben, die durch P_{n+2} gehen, einen Flächenbüschel. Diesem Flächenbüschel entspricht dann in dem einem anderen Strahle zugehörigen collinearen Bündel, der aus den entsprechenden Flächen gebildete Büschel und jedes System entsprechender Flächen dieser Büschel bildet nach dem Vorhergehenden einen gesuchten Bündel.

Es kann sich allerdings ereignen, dass die dem Strahle s_{n+2} zugehörigen Flächen blos einen Büschel bilden und dann existirt nur ein einziger der Aufgabe genügender Bündel, aber in diesem Falle sind die Daten nicht mehr von einander unabhängig.

In dem jetzigen Vereine von Flächen bilden also die irgend einem Strahle des Strahlenbündels zugehörigen Flächen i. A. einen Flächenbüschel und diese Büschel sind zu einander collinear in Ansehung der Flächen, welche demselben gesuchten Bündel angehören. Legt man nun durch einen weiteren Punkt P_{n+3} die Fläche des s_{n+3} zugehörigen Büschels, so bildet diese mit ihren in den anderen collinearen Büscheln entsprechenden Flächen einen Bündel. Hiemit wäre also die Aufgabe gelöst:

„Zu einem gegebenen Strahlenbündel einen reciproken Flächenbündel zu construiren, dessen Basis $B-1$ gegebene Knotenpunkte enthält und in dem die den Strahlen $s_1, s_2, \ldots s_n$

s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3} entsprechenden Flächen bezüglich durch die Punkte $P_1, P_2 \ldots P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3}$ gehen."

Die vorstehenden Bemerkungen bieten also das folgende Verfahren zur Lösung des in I. gestellten Problems.

Nimmt man an, dass etwa B die Zahl der gegebenen Knotenpunkte des zu construirenden F^n-Bündels sei, so wird man diesen Punkten noch $N(n)-2-B$ willkürliche Punkte beifügen und den hiedurch festgelegten F^n-Bündel reciprok auf den gegebenen Strahlenbündel beziehen. Gemäss den vorhergehenden Auseinandersetzungen wird man nun von den willkürlichen Punkten einen nach dem andern wieder ausscheiden, wodurch man stets einen neuen Bündel erhält, der zum Strahlenbündel ebenfalls reciprok ist und in dem jede Fläche, welche einem von drei weiteren Strahlen entspricht, durch einen ihr zugewiesenen Punkt geht.

Ich will, obwohl es mir selbstverständlich erscheint, doch darauf aufmerksam machen, dass, wie aus den vorstehenden Bemerkungen erhellt, das angegebene Constructionsverfahren nur durchführbar ist, wenn die B gegebenen Punkte ein Flächensystem der $[N(n)-B]$-ten Stufe und n-ten Ordnung bestimmen; sind überdies auch die gegebenen Strahlen, Punkte und das Flächensystem von einander unabhängig, so löst also das auseinandergesetzte Verfahren sicherlich das gestellte Problem, sobald man im Stande ist, einen gegebenen F^n-Bündel reciprok auf einen gegebenen Strahlenbündel zu beziehen. Da nun die reciproke Beziehung zwischen zwei Bündeln durch acht Constante hergestellt wird, so ergibt sich hieraus die folgende Aufgabe:

Einen durch seine Basis gegebenen Flächenbündel derart reciprok auf einen gegebenen Strahlenbündel zu beziehen, dass jede Fläche, welche irgend einem von acht gegebenen Strahlen des letzteren entspricht, durch einen ihr zugewiesenen Punkt geht.

Diese Aufgabe kommt wieder, indem man irgend einen Strahlenbündel collinear auf den Flächenbündel bezieht, auf die einfache zurück:

„Zu einem gegebenen Strahlenbündel um einen Punkt einen reciproken zu construiren, dergestalt, dass jede Ebene des letzteren, welche einem von acht gegebenen Strahlen des ersteren entspricht, durch einen ihr zugewiesenen Punkt geht."

Die Lösung dieses Problems ist schon von Herrn Schroeter[1] gegeben worden und beruht im Wesentlichen ebenfalls auf dem obigen Satze.[2]

IV.

Mit diesem allgemeinen Probleme ist nach den Erörterungen in (I) auch das Problem der Construction einer algebraischen Flächte n-ter Ordnung aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte erledigt. Es sollen nun nur noch einige Eigenthümlichkeiten besprochen werden, welche bei der Anwendung des obigen allgemeinen Verfahrens auf dieses specielle Problem auftreten.[3]

1. Die obige Zahl B bedeutet hier die Anzahl der Knotenpunkte des zu construirenden F^n-Bündels, die den gegebenen Punkten entnommen wird. Für diese Zahl lässt sich eine obere Grenze angeben und sie ist, wie in (I) angegeben wurde

$$\frac{Q}{2} - [N(m) - 2] \text{ oder } \frac{Q-1}{2} - [N(m) - 2]$$

je nachdem

$$Q = 3\,N(m) + 3\,M(n) - N(m+n) - 4$$

durch 2 theilbar ist oder nicht. Diese obere Grenze x lässt sich übrigens auch unmittelbar aus der Natur des auseinandergesetzten Verfahrens ableiten. Sie muss offenbar der Gleichung genügen:

$$[N(n) - 2 - x]\,3 + x + N(m) - 2 + 8 = N(m+n),]$$

woraus sich, übereinstimmend mit dem Obigen, ergibt:

$$2x = 3N(n) + N(m) - N(m+n).$$

Nimmt man nun bei der Construction der Fläche

$$B < \frac{Q}{2} - [N(m) - 2]$$

oder im zweiten Falle

$$\leqq \frac{Q-1}{2} - [N(m) - 2],$$

---

[1] Journal für Mathematik, Bd. 62.

[2] Man vergl. hiemit p. 529—31 in (A. II) und §. 2 in S.

[3] Man vergl. hiemit S. p. 438 und 441.

so ist im ersten Falle

$$\left.\begin{aligned} &N(m)-2+B+3[N(n)-2-B]+8 > N(m+n) \\ &\text{und im zweiten} \\ &\qquad\qquad \geqq N(m+n)+1 \end{aligned}\right\} (a)$$

Es hat somit den Anschein, als ob durch das angegebene Verfahren zu dem F^m-Bündel ein F^n-Bündel derart reciprok construirt werden könnte, dass die durch sie erzeugte Fläche durch mehr als $N(m+n)$ beliebig gegebene Punkte geht.

Setzt man als bewiesen voraus, dass eine F^{m+n} durch $N(m+n)$ unabhängige Punkte bestimmt sei, so lässt sich dieses Paradoxon leicht aufhellen, doch kann ich die Aufklärung desselben wegen dieser Voraussetzung, strenge genommen, keine Lösung nennen.[1] Ich nehme an, es sei durch das angegebene Verfahren zu dem F^m- ein reciproker F^n-Bündel construirt, welche die durch die gegebenen $N(m+n)$ Punkte bestimmte F^{m+n} erzeugen und es enthalte die Basis des F^n-Bündels B dieser Punkte. Wollte man nun nach dem Verfahren neue zu dem F^m-reciproke Bündel herstellen, in denen die Fläche, welche einer weiteren gegebenen $C^{m,m}$ entspricht, durch einen ihr zugewiesenen Punkt geht, so hätte man einen der B Punkte aus der Basis auszuscheiden und erhielte ein zweifach unendliches System von Bündeln, deren jeder in seiner Basis die übrigen $(B-1)$ Punkte enthält und in deren jedem durch den ausgeschiedenen Punkt die Fläche geht, welche der durch diesen Punkt bestimmten $C^{m,m}$ entspricht. Die Flächen, welche in diesen Bündeln derselben $C^{m,m}$ entsprechen, bilden wieder einen Bündel; alle diese Bündel Σ sind in bekannter Weise dergestalt collinear zu einander, dass ihre entsprechenden Flächen je einen zum F^m-Bündel reciproken und die F^{m+n} mit ihm erzeugenden Bündel bilden. Da alle diese Bündel dieselbe F^{m+n} mit dem gegebenen F^m-Bündel herstellen, so müssen die sämmtlichen Flächen eines jeden der Bündel Σ die zugehörige $C^{m,m}$ in den $m.m.n$-Punkten schneiden, welche diese $C^{m,m}$ ausser der Basis des F^m-Bündels mit der F^{m+n} gemein hat. Diese $m.m.n$-Punkte sind somit in der Basis des der $C^{m,m}$ zugehörigen Bündels enthalten.

---

[1] Im Gleichungssysteme, das in allgemeinen Fällen zur Bestimmung der Unbekannten dient (A. I, p. 534) treten dieselben in diesem speciellen zu $N(m+n)$ Gruppen zusammen.

In dem zweifach unendlichen Systeme von Bündeln bilden jene, deren einer bestimmten weiteren $C^{m,m}$ entsprechenden Flächen durch einen angenommenen Punkt P gehen nach (III) ein einfach unendliches System und die Flächen dieser Bündeln, welche derselben $C^{m,m}$ zugehören, bilden einen Büschel. Liegt nun P auf dieser $C^{m,m}$ selbst, aber nicht auf der F^{m+n}, so müssen die sämmtlichen Flächen ihres zugehörigen Büschels die $C^{m,m}$ enthalten, da jede mit ihr $m \,.\, m \,.\, n + 1$-Punkte gemein hat. Die Flächen dieses Büschels müssen also in eine einzige zusammenfallen, wenn nicht die $C^{m,m}$ einen Theil der Basis des Büschels bildet, was aber nicht der Fall ist, da sonst die Basis des F^m-Bündels auf ihr läge. Es existirt somit in jedem Bündel des zweifach unendlichen Systems, welcher einer $C^{m,m}$ zugehört, eine Fläche, welche durch diese $C^{m,m}$ geht und alle diese Flächen müssen einen zum F^m-Bündel reciproken constituiren, da sonst eine F^{m+n} durch mehr als $N(m+n)$ von einander unabhängige Punkte ginge.

Die erhaltene Aufklärung besteht hiernach in Folgendem:

Hat man zu dem gegebenen F^m-Bündel einen reciproken F^n-Bündel construirt, welche beide die durch $N(m+n)$ gegebene Punkte bestimmte F^{m+n} erzeugen, so führt die Fortsetzung des Verfahrens, um einen F^n-Bündel zu construiren, in welchem die einer weiteren gegebenen $C^{m,m}$ entsprechende Fläche durch einen ausserhalb der F^{m+n} gelegenen Punkt der $C^{m,m}$ geht, zu einem Bündel, in dem jede Fläche die zugehörige $C^{m,m}$ enthält. Dieser Bündel erzeugt also mit dem F^m-Bündel den ganzen Raum und also auch die F^{m+n} insoferne sie ein Theil desselben ist.

2. Nimmt man nun B gleich der Maximalzahl der verfügbaren Knotenpunkte des F^n-Bündels, so zeigen die Ungleichungen (α), dass im Falle Q durch zwei theilbar ist, das Verfahren einen einzigen F^n-Bündel ergibt, der mit dem gegebenen F^m-Bündel die gesuchten F^{m+n} erzeugt. Anders verhält es sich, wenn Q nicht durch zwei theilbar ist. Denn nun ist $B = \frac{Q-1}{2} - [N(m) - 2]$ und somit

$$\frac{Q-1}{2} + 3[N(n) - 2 - B - 1] + 8 + 2 = N(m+n).$$

Wenn man also von den $N(n) - 2 - B$ willkürlichen Punkten nach Massgabe des Verfahrens alle bis auf einen eliminirt, so erhält man einen F^n-Bündel, der mit dem gegebenen F^m-Bündel eine F^{m+n} erzeugt, welche durch diesen willkürlichen Punkt in der Basis des F^n-Bündels und überdies durch $N(m+n) - 2$ der gegebenen Punkte geht. Man kann also, indem man noch diesen letzten willkürlichen Punkt aus der Basis ausscheidet nach dem Verfahren ∞^1 F^n-Bündel herstellen, deren jeder in seiner Basis die B Punkte enthält und mit dem gegebenen F^m-Bündel die gesuchte F^{m+n} erzeugt. Die Flächen dieser F^n-Bündel, welche derselben $C^{m,m}$ des F^m-Bündels entsprechen, bilden einen Flächenbüschel und alle diese Büschel sind in bekannter Weise zu einander collinear. Alle Flächen eines solchen Büschels schneiden die zugehörige $C^{m,m}$ in denselben Punkten, den Punkten, welche die $C^{m,m}$ ausser der Basis des F^m-Bündels mit der F^{m+n} gemein hat.

Diese $m.m.n$ Punkte der $C^{m,m}$ liegen also auf der Grundcurve ihres zugehörigen Flächenbüschels. Man ersieht hieraus, dass in dem ∞^1 Systeme von Bündeln wieder eines existirt, dessen jede Fläche ihre zugehörige $C^{m,m}$ enthält, der also den gesammten Raum und insoferne auch die F^{m+n} erzeugt. So erklärt sich auch in diesem Falle die scheinbare Ungereimtheit, als ob sich mittelst des angegebenen Verfahrens eine F^{m+n} construiren liesse, die durch mehr als $N(m+n)$ beliebige Punkte ginge.

V.

Als Anwendungen des auseinandergesetzten Verfahrens zur Construction der allgemeinen Fläche n-ter Ordnung aus der Anzahl sie bestimmender Punkte soll in Kürze die Construction der Fläche der zweiten, dritten und vierten Ordnung besprochen werden. Es wird sich hiebei zeigen, dass in diesen Fällen das Problem mit blosser Hilfe des Lineals und Zirkels sich lösen lässt.

1. Die Construction der Fläche der zweiten Ordnung aus neun gegebenen Punkten $O, P_1, P_2 \ldots P_8$ lässt sich unmittelbar durch Anwendung des Satzes in (II) bewerkstelligen.

Den Punkt O nehme man zum Mittelpunkte eines Strahlenbündels und construire zu demselben um P_1, P_2, P_3, P_4 derart reciproke Bündel, dass den Strahlen OP_1, OP_2, OP_3, OP_4, OP_5 Ebenen entsprechen, die bezüglich durch P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 gehen.

In der Folge will ich mir erlauben, zur Bezeichnung der reciproken Beziehung das Zeichen[1] Λ zu gebrauchen und um anzuzeigen, dass der Bündel O derart Λ auf den Bündel O' bezogen ist, dass für jedes $i \gtreqless k$ die dem Strahle $OP_i = s_i$ entsprechende Ebene in O' durch P_i geht, die Schreibweise benützen

$$O(s_1, s_2 \ldots s_k) \,\Lambda\, O'(P_1, P_2 \ldots P_k).$$

Von den vier obigen Bündeln P_1, P_2, P_3, P_4 wurde der eine, etwa P_4, blos construirt, um die collineare Beziehung zwischen den mittleren Bündeln von P_1, P_2 und P_3 herzustellen, doch kann dieselbe, wie in (II, 2) erwähnt wurde, auch ohne Benützung von P_4 bestimmt worden. Die den Strahlen s_6 und s_7 von O in P_1, P_2 und P_3 entsprechenden Ebenen schneiden sich bezüglich in p_6 und p_7. Der Geraden $p_6 P_6$ des mittleren Bündels p_6 entspricht im mittleren Bündel p_7 eine Gerade g, die mit P_7 eine Ebene bestimmt. Die dieser Ebene in den mittleren Bündeln entsprechenden Ebenen bilden nun einen Bündel O_1, der zum Bündel O in der Beziehung steht:

$$O_1(P_1, P_2 \ldots P_7) \,\Lambda\, O(s_1, s_2 \ldots s_7).$$

Indem man nun in den Bündeln P_1, P_2, P_3, P_4 den Punkt P_5 mit P_6 und P_7 und schliesslich P_4 und P_5 gleichzeitig mit P_6 und P_7 vertauscht, erhält man drei weitere Bündel O_2, O_3, O_4, welche mit dem Bündel O in der Beziehung stehen:

$$\begin{aligned} O(s_1, s_2 \ldots s_7) \,\Lambda\, & O_2(P_1, P_2 \ldots P_7) \\ \Lambda\, & O_3(P_1, P_2 \ldots P_7) \\ \Lambda\, & O_4(P_1, P_2 \ldots P_7). \end{aligned}$$

Von den vier Bündeln O_1, O_2, O_3, O_4 wurde der eine (etwa O_4) wieder nur behufs der Vermittlung der collinearen Beziehung zwischen den mittleren Bündeln dreier von ihnen construirt, es kann aber dieselbe auch aus den dreien selbst in einfacher Weise hergestellt werden.

Durchschneiden sich die dem Strahle s_8 entsprechenden Ebenen von O_1, O_2 und O_3 in p_8, so bestimmt $p_8 P_8$ im mittleren Bündel p_8 einem Büschel und in jedem anderen mittleren Bündel einem hiezu $\overline{\wedge}$ Büschel. Die entsprechenden Ebenen dieser

[1] Man kann dasselbe als ein verzerrtes r ansehen.

Büschel geben je einen Bündel, der mit dem in O die gesuchte Fläche hervorbringt.

2. Bei der Fläche der dritten Ordnung ist die Zahl Q (N nicht durch zwei theilbar und somit die Anzahl der verfügbaren Knotenpunkte $\frac{Q-1}{2}=6$. Von diesen Punkten wird man einen O zum Mittelpunkte eines Strahlenbündels nehmen und die anderen fünf: B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, deren Gesammtheit mit B bezeichnet werden mag, in die Basis des herzustellenden F^2-Bündels verlegen. Diesen hat man nun so zu construiren, dass wenn P_1, $P_2 \ldots P_{13}$ die übrigen gegebenen Punkte sind

$$B(P_1, P_2 \ldots P_{13}) \wedge O(s_1, s_2 \ldots s_{13})$$

werde.

Zu diesem Zwecke füge man den fünf Punkten B zwei willkürliche C_1 und C_2 hinzu und beziehe den hiedurch bestimmten F^2-Bündel auf den Strahlenbündel O derart reciprok, dass

$$(B, C_1, C_2)(P_1 \ldots P_8) \wedge O(s_1, s_2 \ldots s_8).$$

Durch Ausscheiden des Punktes C_2 stelle man nun nach dem auseinandergesetzten Verfahren einen neuen F^2-Bündel her, dergestalt, dass

$$(B, C_1)(P_1, P_2 \ldots P_{11}) \wedge O(s_1, s_2 \ldots s_{11}).$$

Scheidet man nunmehr noch C_1 aus, so erhält man ∞^1-Bündel, deren jeder zum Bündel O in der Beziehung

$$B(P_1 \ldots P_{13}) \wedge O(s_1 \ldots s_{13})$$

steht. Die Flächen dieser verschiedenen Bündel, welche demselben Strahle von O entsprechen, bilden einen Büschel und alle diese Büschel sind in Ansehung der Flächen, welche demselben Bündel des Systems angehören, zu einander collinear.

Jedem Strahle von O ist somit ein bestimmter F^2-Büschel zugeordnet und er schneidet die F^3 in Punkten, welche auf der Grundcurve dieses Büschels liegen. Die F^3 erscheint somit als der geometrische Ort der Durchschnittspunkte der Strahlen von O mit den Grundcurven ihrer zugehörigen Büschel.

Eine andere Construction der Fläche der dritten Ordnung habe ich in (A. I), p. 546—565 gegeben.[1] Bei dieser letzteren

---

[1] Man vergl. Abschnitt IV (in A. I) mit der Behauptung in S. p. 437.

bedarf man zur Bestimmung der sie erzeugenden Bündel des Lineals und des Zirkels; bei der oben auseinandergesetzten Constructionsart lassen sich jedoch dieselben linear herstellen. Es gelingt dies am einfachsten, wenn man bei den verschiedenen nach dem Verfahren sich ergebenden, zu O reciproken F^2-Bündeln den Polarenbündel irgend eines Punktes zu Hilfe nimmt, um die irgend einem Strahle von O entsprechende F^2 zu construiren, denn vermöge vier der Punkte B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 lässt sich auf diese Weise die Fläche stets linear herstellen.

3. Bei der Fläche der vierten Ordnung ist Q durch zwe theilbar, sobald man sie als das Erzeugniss zweier reciproker F^2-Bündel auffasst und es ist in diesem Falle die Zahl der verfügbaren Knotenpunkte $\frac{Q}{2} = 8$. Von diesen wird man nun T in die Basis des einen Bündels verlegen, der hiedurch vollständig bestimmt ist und den achten B zu einem Knotenpunkte der Basis des zweiten zu construirenden F^2-Bündels bestimmen.

Die Anwendung des allgemeinen Verfahrens bedarf hier wohl keiner weiteren Erläuterung und es ist auch klar, dass seine Ausführung in diesem Falle bloss mit Lineal und Zirkel möglich ist.

Eine zweite Constructionsweise der Fläche ergibt sich aus dem allgemeinen Verfahren, wenn man dieselbe als das Erzeugniss eines Strahlenbündels und eines zu ihm reciproken F^3-Bündels darstellen will. In diesem Falle ist $\frac{Q}{2} = 14$ und man wird somit einen der gegebenen 34 Punkte zum Mittelpunkte des Strahlenbündels nehmen und 13 derselben in die Basis des zu construirenden F^3-Bündels verlegen. Doch lässt sich in diesem Falle das angegebene Verfahren nicht mehr unmittelbar wenigstens mit blosser Hilfe des Lineals und Zirkels durchführen.[1]

---

[1] Ich habe hier die in (A. II) pag. 532 angedeuteten Constructionen der unmittelbaren Anwendung des allgemeinen Verfahrens hintangesetzt, besonders wegen der räthselhaften Behauptung in S. pag. 437.

Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie.

III. Mittheilung.

Von Carl Pelz,

Professor an der k. k. technischen Hochschule in Graz.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. December 1884.)

In den beiden vorangehenden Mittheilungen (Sitzb. der k. Akademie der Wissenschaften Band LXXXI und LXXXVII) wurde gezeigt, dass die grundlegenden Probleme der Projectionslehre in der orthogonalen Axonometrie mit alleiniger Zuhilfenahme des Axenkreuzes und der Bildebene, und zwar mit solcher Einfachheit und Übersichtlichkeit gelöst werden können, welche die bisher in Anwendung stehenden, auf Grundlage von complicirten Transformationen oder unwissenschaftlicher Kunstgriffe aufgebauten Methoden nicht zu bieten vermögen.

Die Erreichung dieser Vortheile wurde bei der genannten Projectionsmethode insbesondere durch eine directe Construction von Normalen auf Ebenen und eine zweckmässige Bestimmung der wahren Länge einer Strecke ermöglicht. Für das erstgenannte Problem wurden zwei neue Lösungen durch räumliche Betrachtungen abgeleitet, während die für die Bestimmung der wahren Länge einer Strecke angegebene Construction mit Hilfe der Theorie der Kegelschnitte auf synthetischem Wege ihre Begründung fand.

Für diese Construction hat Herr J. A. Snijders, Professor an der polytechnischen Schule in Delft, einen anderen Beweis angegeben, der insofern einen Vorzug in Anspruch zu nehmen berechtigt ist, da er aus der räumlichen Anschauung direct folgt und in den Rahmen der orthogonal axonometrischen Projectionsmethode naturgemäss sich stellt. Aus diesem Grunde erlaube ich mir

diesen Beweis, dessen Kenntniss ich einer gütigen schriftlichen Mittheilung von Seite des Herrn Prof. P. H. Schoute in Gröningen verdanke, in den vorliegenden Aufsatz aufzunehmen.

Dass durch die in den zwei vorausgehenden Mittheilungen erörterten Principien neue Ausgangspunkte der geometrischen Forschung eröffnet werden, die, wie ein hervorragender Fachmann richtig bemerkt, die axonometrische Projectionsmethode gleichsam wieder neu beleben und zur Lösung schwierigerer Probleme befähigen, dafür erlaube ich mir im Nachfolgenden weitere Belege beizubringen.

1. Aus den Erörterungen der ersten Mittheilung geht hervor, dass die orthogonal axonometrische Darstellung eines Kreises K, dessen Ebene Σ eine beliebige Lage im Raume einnimmt, keine Umlegung erfordert. Es sei (siehe Fig. 2) p ein Punkt eines in der Grundrissebene liegenden Kreises K, der den Coordinatenanfangspunkt A zum Mittelpunkt besitzt. Da die grosse Halbaxe der Ellipse, als welche sich der Kreis axonometrisch projicirt, der wahren Länge der Strecke Ap gleich ist, so erhalten wir den einen Scheitel a_1 derselben, indem wir den Punkt p um die Z-Axe so lange drehen, bis er in die Bildebene (diese durch A gehend gedacht) zu liegen kommt.

Wird durch p eine Ebene parallel zur Bildebene gelegt, und ist z der Schnittpunkt derselben mit der Z-Axe, so ist der Halbirungspunkt o der Strecke Az von den beiden parallelen Ebenen gleich weit entfernt. Infolge dessen werden die Strecken op, oa_1, die im Raume gleiche Länge besitzen, auch in der Projection gleich lang erscheinen. Die Scheitel aa_1 der grossen Axe des elliptischen Bildes des Kreises liegen daher auf dem mit op um o als Mittelpunkt beschriebenen Kreise.[1]

Die Tangente der Ellipse im Punkte p steht auf pz senkrecht; da pz die Bildtrace der auf der Kreistangente im Raume normal stehenden, durch pZ bestimmten Ebene vorstellt, falls die Bildebene durch p gehend angenommen wird.

---

[1] Dieser elementare Beweis der bereits in der ersten Mittheilung angegebenen für die orthogonale Axonometrie besonders wichtigen Construction der wahren Länge einer Strecke, rührt, wie schon hervorgehoben wurde, von Prof. Snijders her.

Einem jeden Punkte p der Grundrissebene entspricht ein Punkt z (als Schnittpunkt der durch p gelegten Bildebene mit den Z-Axe) eindeutig; pz ist die Normale des Punktes p des elliptischen Bildes jenes Kreis K, der mit dem Radius Ap um den Mittelpunkt A in der Grundrissebene beschrieben wird. Es ist somit, da z, wenn p gegeben ist, leicht ermittelt werden kann, durch die Angabe von p auch die Normale des elliptischen Bilder bestimmt. Schneidet diese Normale (siehe Fig. 4) die kleine Axe der Ellipse im Punkte ω, so liegt p mit den Scheiteln aa_1 der grossen Axe auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt o die Strecke $m\omega$ halbirt. Analog hat, wie in der ersten Mittheilung gezeigt wurde, der durch die Scheitel bb_1 der kleinen Axe und p bestimmte Kreis, den Halbirungspunkt o_1 jener Strecke zum Mittelpunkte, die durch m und den Schnittpunkt der Normale, auf der grossen Axe abgeschnitten wird.

Beschreibt man über yz (siehe Fig. 6) als Durchmesser einen Halbkreis, der von der Projection der X Axe in (A) geschnitten wird, so geht die Gerade (A) y durch den einen Brennpunkt f jener Ellipse, welche als das axonometrische Bild des mit dem Radius Ay um A als Mittelpunkt in der Grundrissebene beschriebenen Kreises sich ergibt. Denn es ist y (A) die Projection von yz, und als wahre Länge der Strecke yA gleich der grossen Halbaxe der erwähnten Ellipse, woraus durch Umkehrung eines bekannten, die Projection der Normale auf den Brennstrahl ihres Fusspunktes betreffenden Satzes, die Richtigkeit obiger Behauptung sofort erhellet.

Durch f (siehe Fig. 7) geht auch der Kreis, welcher dem Dreieck $yz\zeta$, das die Tangente und Normale des Ellipsenpunktes y mit der Projection der Z-Axe bildet, umschrieben ist. Die Gerade yf schneidet X in (A), und es ist y (A) der grossen Halbaxe des elliptischen Bildes des Kreises gleich.

Ebenso einfach gelangen wir zum Ziele, wenn der Mittelpunkt m des in einer Coordinatenebene liegenden Kreises und die wahre Länge seines Halbmessers gegeben sind.

In diesem Falle ist die grosse Axe aa_1 (siehe Fig. 3 und 10) der Ellipse der Lage und Länge nach direct gegeben.

Schneidet die Y-Axe — oder die durch den Mittelpunkt m (siehe Fig. 10) hiezu gezeichnete Parallele — die eine Scheitel-

tangente in d, so geht die von d auf X gefällte Normale durch den Krümmungsmittelpunkt ω des respectiven Scheitels. Zur Bestimmung der Brennpunkte ff_1 (siehe Fig. 3) führt die Relation: $Aa. A\omega = \overline{Af}^2$, während der aus dem Halbirungspunkte o der Strecke $m\omega$ (siehe Fig. 10) mit dem Radius oa_1 beschriebene Kreis durch bb_1 hindurchgeht.

2. Aus dem Vorangehenden ist ersichtlich, dass das axonometrische Bild eines Kreises stets dann durch seine Axen leicht bestimmt werden kann, wenn die Projection eines in der Ebene des Kreises liegenden rechten Winkels direct gegeben ist.

Dies findet bei allen Ebenen statt, die auf einer Coordinatenebene senkrecht stehen.

Es sei (siehe Fig. 13) Σ eine auf der Grundrissebene senkrecht stehende Ebene, und m der Mittelpunkt eines in derselben liegenden Kreises K von gegebenem Radius. Die grosse Axe aa_1 der axonometrischen Projection des Kreises ist bekanntlich parallel zur Bildtrace Σ_b der gegebenen Ebene, daher normal auf die axonometrische Projection der Senkrechten, die von A auf die Grundrissspur Σ_h der Ebene gefällt wird. Da die Projection dieser Senkrechten $A\pi$ in bekannter Weise direct gezeichnet werden kann, so ist die Bestimmung von Σ_b nicht erforderlich. Die Scheiteltangente a schneidet mm' in d, und die von d auf Σ_h gefällte Normale geht durch den Krümmungsmittelpunkt ω des Scheitels a. Die Scheitel bb_1 der kleinen Axe liegen auf einem durch a gehenden Kreise, dessen Mittelpunkt o die Strecke $m\omega$ halbirt.

Dieselbe Aufgabe lässt auch die nachfolgende Lösung zu.

Es sei Σ (siehe Fig. 16) eine auf der Kreuzrissebene senkrecht stehende Ebene, und m der Mittelpunkt des Kreises vom gegebenen Radius.

Wir ziehen durch m die Parallele zur Bildtrace e_1 e_3 der gegebenen Ebene, und tragen den Radius des Kreises beiderseits des Punktes m auf diese Gerade auf. Der Schnittpunkt p der durch die Scheitel aa_1 parallel zu Σ_s und Σ_h respective gezogenen Geraden, liefert einen Punkt der Ellipse. Wird die kleine Axe mit einem Kreise vom Radius ma aus dem Mittelpunkte p in σ geschnitten, und trifft $p\sigma$ die Axe aa_1 in τ, so ist $p\tau = mb = mb_1$.

3. Von einem in der Ebene Σ (siehe Fig. 1) liegenden Kreise K ist der Mittelpunkt m und ein beliebiger Peripheriepunkt p gegeben; man construire die Axen der axonometrischen Projection des Kreises.

Wir legen durch die Z-Axe eine Ebene senkrecht auf die gegebene Ebene Σ. Die Projection der Grundrissspur Aq dieser Ebene kann mit Hilfe des Höhenschnittes π des Dreieckes $Ax\zeta$ in bekannter Weise direct gezeichnet werden. Wird Z von Σ in z geschnitten, so ist zqx die Projection eines in Σ liegenden rechten Winkels, wodurch das Problem auf jenen Fall zurückgeführt erscheint, der im Artikel 2 behandelt wurde. Wir haben die Bildebene durch den Punkt m gelegt. Es fällt daher die grosse Axe der elliptischen Projection des Kreises mit der Bildtrace Σ_b der gegebenen Ebene zusammen. Wird nun $mn \parallel$ zu Σ_h, $pd \parallel$ zu Σ_b und $d\omega$ senkrecht auf zq gezeichnet, so geht die Normale des Punktes p der Ellipse durch ω. Die Scheitel aa_1 der grossen Axe liegen auf einem durch p gehenden Kreise, dessen Mittelpunkt o die Strecke $m\omega$ halbirt, während die Scheitel bb_1 mit Hilfe des p ebenfalls enthaltenden Kreises, dessen Mittelpunkt o_1 auf der durch o parallel zu $p\omega$ gezogenen Geraden liegt, erhalten werden.

Noch einfacher gestaltet sich die Lösung, wenn Σ, m und die wahre Länge des Kreishalbmessers gegeben sind.

Wir bestimmen (siehe Fig. 8) die Bildtrace Σ_b von Σ auf der durch m gehenden Bildebene, und tragen den gegebenen Radius beiderseits des Punktes m auf Σ_b auf, legen durch Z die senkrechte Ebene auf Σ und bestimmen die Schnittlinie qz der beiden Ebenen. Wird nun $ap \parallel$ zu Σ_h und $a_1 p \parallel$ zu qz gezeichnet, so ist p ein Punkt der Ellipse, deren kleine Axe wie in Figur 16 gefunden werden kann.

Wir machen $p\sigma = ma$, und verlängern $p\sigma$ bis zum Schnittpunkte τ mit aa_1; dann ist $mb = mb_1 = p\tau$.

Oder wir ziehen $mr \parallel$ zu Σ_h, bis zum Schnittpunkte d mit der Scheiteltangente a_1; fällen $d\omega$ senkrecht auf qz und halbiren $m\omega$ in o. Dann ist $oa_1 = ob = ob_1$.

4. Nehmen wir an, es sei der in Figur 8 axonometrisch dargestellte Kreis K die Basis eines Rotationskegels, dessen Höhe H gegeben ist; man bestimme die axonometrische Projection dieses Kegels.

Um die Projection des Scheitels s des Kegels zu erhalten, verbinden wir b_1 mit dem Brennpunkte f_1 der Ellipse aa_1 bb_1 und tragen die Länge $f_1 g = H$ auf die Gerade $f_1 b_1$ vom Punkte f_1 auf. Dann ist die orthogonale Projection $f_1 i$ von $f_1 g$ auf aa_1, gleich der axonometrischen Projection der Höhe des Kegels.[1]

Von der Richtigkeit dieses Verfahrens können wir uns leicht überzeugen.

Es sei (siehe Fig. 5) ζ ein in der orthogonal-projicirenden Ebene der Z-Axe liegender Punkt der Grundrissebene. Denken wir uns mit dem Radius $A\zeta$ um A als Mittelpunkt einen Kreis K in der Grundrissebene beschrieben, so erhalten wir die wahre Länge des Kreishalbmessers, z. B. durch Umlegung der erwähnten orthogonal-projicirenden Ebene der Z-Axe in die Bildebene. Wird hiebei die Bildebene durch ζ gehend angenommen, so kommt der umgelegte Coordinaten-Anfangspunkt auf die Peripherie des über ζz (siehe Fig. 5) beschriebenen Halbkreises nach (A) zu liegen, und es ist (A) ζ die wahre Länge des Kreishalbmessers. Da nun (in der Projection) $A\zeta$ die kleine Halbaxe der Ellipse ist, als welche sich K axonometrisch projicirt, so muss (A) ein Brennpunkt dieser Ellipse sein, welcher Umstand mit Rücksicht auf die Ähnlichkeit der Dreiecke A $(A)\zeta$, A $(A)z$ die Richtigkeit der in Fig. 8 bezüglich des Scheitels s des Kegels durchgeführten Construction vollinhaltlich bestätigt.

5. Von einem in der Ebene Σ (siehe Fig. 9) liegenden Kreise K sind drei Punkte I II III gegeben; man bestimme (unter Vermeidung jeder Umlegung oder Transformation) die Axen jener Ellipse, welche als axonometrische Projection des Kreises auftritt.

Der dem Punkte I diametral gegenüberliegende Punkt p von K wird im Schnittpunkt der in II, III auf die Geraden I II, I III respective errichteten Senkrechten erhalten.

Um diese Senkrechten direct in der Projection zeichnen zu können, bestimmen wir die Bildtrace $e_1 e_2$ der Ebene Σ, und die Grundrissspur $A\pi$ der durch Z normal auf Σ gelegten Ebene E.

---

[1] In der Figur wurde, um die Papiergrenze nicht zu überschreiten, $f_1 g = \frac{H}{2}$ aufgetragen, und daher $ms = 2 f_1 i$ gemacht.

Nun bilden die Geraden $e_1 e_2$, Σ_h und z. B. I III ein Dreieck $e_1 ht$ dessen Höhenschnitt s in der Projection sofort gezeichnet werden kann. Es ist hs senkrecht auf $e_1 e_2$ und ts parallel zur Schnittlinie qz der Ebenen Σ, E. Die im Punkte III auf I III zu errichtende Normale ist daher parallel zu $e_1 s$. Da in derselben Weise mit Hilfe des Höhenschnittes des durch die Geraden Σ_b, Σ_h und I II bestimmten Dreiecks im Punkte II die Normale auf I II errichtet werden kann, so ist p bestimmt. Der Halbirungspunkt von Ip liefert den Mittelpunkt m, und die weitere Lösung erfolgt wie in Figur 1.

6. Durch eine Gerade G sind jene Ebenen E, H zu legen, welche mit der gegebenen Ebene Σ (siehe Fig. 11) den Winkel α einschliessen.

Man betrachtet bekanntlich, um die Aufgabe zu lösen, einen beliebigen Punkt p der Geraden G als Scheitel eines Rotationskegels, dessen Mantellinien mit Σ den Winkel α einschliessen, und legt durch G die möglichen Tangentialebenen an den Kegel. Die axonometrische Projection der Axe pn dieses Rotationskegels steht auf Σ_b senkrecht, und ihre Grundrissprojection ist parallel zu $A\pi$. Die Schnittlinie qr der Grundriss-projicirenden Ebene von pn mit Σ geht durch den Fusspunkt n der Kegelaxe und steht im Raume senkrecht auf Σ_h. Um die Axen des elliptischen Bildes jenes Kreises K zu bestimmen, den die Ebene Σ mit dem Rotationskegel hervorbringt, wollen wir auf ein neues Axensystem mit dem Anfangspunkte n übergehen, für welches Σ eine Coordinatenebene vorstellt. Unter dieser Voraussetzung ist pn eine Coordinatenaxe des neuen Systems, und nehmen wir nr als weitere Axe desselben an, so ist das Axensystem vollständig bestimmt, da die dritte Axe durch n parallel zu Σ_h zu ziehen ist. Denken wir uns die Bildebene durch p gelegt, so ist die von p auf die Projection rq gefällte Normale po die Bildtrace der auf nr senkrecht stehenden Coordinatenebene des neuen Systems. Nach der Umlegung des rechtwinkeligen Dreieckes pno um die Hypotenuse po, in die Bildebene, erscheint n auf der Peripherie des über po beschriebenen Halbkreises in (n) und es ist $p\,(n)$ die wahre Länge der Strecke pn im Raume. Wird die Kathete $(n)\,m$ des rechtwinkeligen Dreieckes $p\,(n)m$, dessen Winkel m gleich α ist, auf die in n auf np errichtete Senkrechte beiderseits n auf

getragen, so sind die erhaltenen Punkte aa_1 die Scheitel der grossen Axe der elliptischen Projection des Kreises K.

Infolge Fig. 5 ist die Excentricität dieser Ellipse gleich dem nach der Coordinatenaxe, die auf der Ebene des Kreises K senkrecht steht (in unserer Figur daher nach np) verkürzten Halbmesser von K. Wird daher die Strecke $(n)m = na = na_1$ vom Punkte (n) auf $(n)\,p$ nach (n) (ν) aufgetragen und durch (ν) die Parallele zu $n\,(n)$ bis zum Schnittpunkte ν mit np verzeichnet, so ist:

$$n\nu = n\varphi = n\varphi_1,$$

wobei $\varphi\varphi_1$ die Brennpunkte der in Rede stehenden Ellipse sind.

Die Gerade G schneidet Σ in g, und die von g an K gehenden Tangenten sind die Schnittlinien der gesuchten Ebenen mit der Ebene Σ.

Im Bilde haben wir also von g die Tangenten gt, $g\tau$ an die Ellipse $aa_1\,\varphi\varphi_1$ zu legen, um die axonometrischen Projectionen der erwähnten Schnittlinien zu erhalten.

Im Raume bestimmt G und gt die Ebene E, ebenso G und $g\tau$ die Ebene H.

7. Durch den Punkt p (siehe Fig. 12) sind jene Ebenen zu legen, die mit der Grundrissebene den Winkel α und mit der Seitenrissebene den Winkel γ einschliessen.

Bekanntlich kann diese Aufgabe mit Hilfe zweier Rotationskegel K_1K_2 mit dem gemeinschaftlichen Scheitel p und den Axen pp', pp''', deren Mantellinien die Winkel α, γ mit den erwähnten Projectionsebenen respective einschliessen, gelöst werden.

Wird dem Kegel K_1 eine Kugel $\varkappa_1$ und ebenso K_2 eine Kugel $\varkappa_2$ eingeschrieben, und ist o der Scheitel des den Kugeln umschriebenen Kegels, so liefert po eine, in den gesuchten Ebenen liegende Gerade.

Wir denken uns jene Kugeln $\varkappa_1\varkappa_2$ den Kegeln eingeschrieben deren Mittelpunkte die Punkte p' und p''' respective sind.

Um die Radien dieser Kugeln zu erhalten, bestimmen wir zunächst die wahren Längen der Strecken pp', pp''', oder was dasselbe ist, der Strecken $p'''\omega$ und $p'\omega$. Zu diesem Zwecke betrachten wir ω als Coordinatenanfangspunkt, und drehen die Axen $\omega p'''$, $\omega p'$ um Y so lange, bis sie in die durch ω gelegte Bildebene gelangen. Vermöge Fig. 2 haben wir vom Halbirungs-

punkte μ der Strecke $\omega p'''$ die Senkrechte μm auf $\omega p'$ zu fällen, und um den Schnittpunkt m derselben mit Y, einen Kreis mit dem Radius mp''' zu beschreiben. Wird dieser Kreis mit der Bildtrace der Aufrissebene in (p''') zum Schnitt gebracht, so ist ω (p''') die wahre Länge der Strecke $\omega p'''$. Mit Hilfe desselben Punktes m erhalten wir auch die wahre Länge $\omega(p')$ von $\omega p'$, indem wir $p'''n$ normal auf Y verzeichnen, $m(n) = mn$ machen, und durch p' die Parallele $p'(p')$ zu $n(n)$ ziehen.

Werden in den rechtwinkeligen Dreiecken $\omega(p''')q$ und $\omega(p')r$, die derart verzeichnet wurden, dass der Winkel bei $q = \alpha$ und jener bei $r = \gamma$ ist, die Senkrechten ωd, $\omega\delta$ auf die Hypotenusen gefällt, so erhalten wir die Längen der Radien der Kugeln $\varkappa_1 \varkappa_2$ beziehungsweise.

Denken wir uns die Kugeln um die respectiven Mittelpunkte p', p''' selbst beschrieben, und den Scheitel o des einen ihnen gemeinschaftlich umschriebenen Kegels mit p verbunden, so wird (infolge bekannter Eigenschaften des Ähnlichkeitscentrums zweier Kreise) die Gerade op die Grundrissebene in dem Punkte h derart schneiden, dass:

$$\frac{p'h}{pp'''} = \frac{\omega d}{\omega\delta}$$

Wir haben also blos $\omega\varepsilon = pp'''$ zu machen und εe parallel zu $d\delta$ zu ziehen, um in ωe eine Strecke zu erhalten, die $p'h$ gleich ist.

Die vom Punkte h im Raume an den in der Grundrissebene liegenden Kreisschnitt des Kegels K_1 gelegten Tangenten liefern die Grundrissspuren Q_h, R_h der Ebenen Q, R, die der Aufgabe Genüge leisten. Im Bilde haben wir von h die Tangenten an eine Ellipse mit dem Mittelpunkte p' zu legen, deren grosse Axe aa_1 (der Lage nach direct geben) die Länge $2\omega q$ besitzt, und deren Excentricität gleich ist der nach der Z-Axe verkürzten Strecke ωq.

Wird daher ω $(c) = \omega q$ aufgetragen und (c) c parallel zu p''' (p''') gezogen, so ist:

$$\omega c = p'f = p'f_1;$$

wobei ff_1 die Brennpunkte der erwähnten Ellipse sind.

Den Kugeln $\varkappa_1 \varkappa_2$ kann noch ein zweiter Kegel mit dem Scheitel o_1 umgeschrieben werden, dessen durch p gehende

Tangentialebenen S, T zwei weitere Lösungen des vorliegenden Problems bilden. Wir erhalten die axonometrischen Projectionen der Grundrissspuren S_h, T_h dieser Ebenen, indem wir $p'h_1 = p'h$ auftragen, und durch h_1 die möglichen Tangenten an die Ellipse aa_1ff_1 legen.

8. Eine Kugel mit dem Mittelpunkte o (siehe Fig. 15) und ein beliebiger Punkt s sind gegeben; man soll für s als leuchtenden Punkt, die Selbstschattengrenze der Kugel sowie die allfälligen Schlagschatten, welche dieselbe auf den durch das Spurendreieck xyz bestimmten Coordinaten-Ebenen und der Bildebene hervorbringt, — durch directe Ermittlung der Axen der axonometrischen Projectionen dieser Curven — construiren.

Die Ebene S der Selbstschattengrenze der Kugel bringt auf der Ebene des zur Bildebene parallelen grössten Kreises K der Kugel eine Spur S_b hervor, die in der Projection als die Polare des Punktes s bezüglich K erhalten wird; während die Projection der Spur S_h derselben Ebene, auf der durch o parallel zur Grundrissebene gelegten Ebene, auf der Bildtrace $t\tau$ der Grundrissprojicirenden Ebene R der Geraden so senkrecht steht. Die Spuren der Ebene R auf der Ebene K und der durch o parallel zur Grundrissebene gelegten Ebene sind: $R_b \parallel t\tau$ und $R_h \parallel s'o'$. Die Schnittgerade $R_b\ S_b$, $R_h\ S_h$ geht durch den Mittelpunkt μ der Selbstschattengrenze, deren axonometrische Projection nun leicht construirt werden kann. Es liegen die Brennpunkte $\varphi\varphi_1$ derselben auf dem über so beschriebenen Kreise, während ihre kleine Axe bb_1 der Relation

$$\overline{\mu b}^2 = \mu r \,.\, \mu s$$

Genüge leistet. Wobei r den Schnittpunkt von S_b mit so bezeichnet.

Schneidet die Polare S_b den Kreis K reell, so gestaltet sich die Construction noch einfacher.

Der Schlagschatten C_h der Kugel auf der Grundrissebene ist im vorliegendem Falle — da die durch s parallel zur Grundrissebene gelegte Ebene die Kugel nicht reell schneidet — eine Ellipse, deren Brennpunkte $\delta\delta_1$ im Raume als Centralprojectionen der Endpunkte dd_1 des Grundriss-projicirenden Kugeldurchmessers erhalten werden. Da jedoch die Eigenschaft der Brennpunkte durch das Projiciren verloren geht, und wir jede Umlegung vermeiden wollen, so führt die directe Anwendung des

ausgesprochenen Satzes blos zur Bestimmung des Mittelpunktes m der Curve C_h, den wir im Halbirungspunkte der Strecke $\delta\delta_1$ erhalten.

Hinsichtlich der Projection der Punkte dd_1 ist zu bemerken, dass die axonometrische Projection des Halbmessers od gleich ist dem nach der Z-Axe verkürzten Radius der Kugel, oder — wie Fig. 5 beweist — gleich der Excentricität der axonometrischen Projection des zur Grundrissebene parallelen grössten Kreises $\mathfrak{K}$ der Kugel.

Es ist daher $od = od_1 = oc = oc_1$, wenn cc_1 die Brennpunkte der axonometrischen Projection des Kreises $\mathfrak{K}$ sind.

Schneidet R_h die Tangente an die Contour der Kugel im Punkte a in β, und wird durch β die Parallele zu R_b bis zum Schnittpunkte n mit oa gezogen, so ist:

$$oa.\, on = \overline{oc}^2.$$

Hiemit sind cc_1 und dd_1 bestimmt.

Denken wir uns $\mathfrak{K}$ vom Centrum s auf die Grundrissebene nach $\mathfrak{K}_h$ projicirt, so werden die axonometrischen Projectionen von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_h$ ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen sein. Wir erhalten daher die Brennpunkte $\gamma\gamma_1$ des elliptischen Bildes von $\mathfrak{K}_h$ indem wir durch ω die Parallele zu xy zeichnen und cc_1 auf diese Gerade aus s projiciren.

Die axonometrischen Projectionen von C_h und $\mathfrak{K}_h$ sind doppelt berührende Kegelschnitte, und da die Brennpunkte $\gamma\gamma_1$ des einen als auch der Pol s' der gemeinschaftlichen Berührungssehne gegeben sind, so erhalten wir die Axen und Brennpunkte ff_1 des anderen durch nachfolgende Construction.[1]

Durch die Punkte $\gamma\gamma_1\, s'$ legen wir einen Kreis $\varkappa$, und bestimmen zu den genannten Punkten den vierten harmonischen, dem s zugeordneten Punkt σ, indem wir durch den zweiten Schnittpunkt der Geraden $s'o'$ mit dem Kreise $\varkappa$, die Parallele zu xy ziehen. Dann halbiren die Axen der zu construirenden Ellipse die Winkel $s'm\sigma$ und $(180 - s'm\sigma)$, während ihre Brennpunkte der Relation

$$ms'.\, m\sigma = \overline{mf}^2$$

Genüge leisten.

---

[1] Siehe „Über die Axenbestimmung der Kegelschnitte", Band LXXIII der Sitzb. der k. Akad. der Wissensch., Jahrg. 1876.

Da die Gerade $s'm$ im Raume die Hauptaxe der Schlagschattencurve C_h ist, so kennen wir von der Ellipse ausser den Brennpunkten ff_1 noch ein conjugirtes Durchmesserpaar der Lage nach, wodurch die axonometrische Projection von C_h vollständig bestimmt ist. Wir erhalten nämlich den zu $s'm$ conjugirten Durchmesser, indem wir von m die Senkrechte auf $t\tau$ fällen, oder die Parallele zu S_h ziehen.

Von diesem Umstande ist jedoch blos dann Gebrauch zu machen, wenn die Contourerzeugenden des aus s der Kugel umgeschriebenen Kegels imaginär sein sollten, da im Falle ihrer Realität sofort zwei Tangenten von der zu zeichnenden Curve gegeben sind.

Der Schlagschatten C_b der Kugel auf die Bildebene ist im vorliegenden Falle ebenfalls eine Ellipse. Ihre Brennpunkte FF_1 sind bekanntlich Centralprojectionen der Endpunkte gg_1 des auf der Bildebene senkrecht stehenden Kugeldurchmessers, für s als Projectionscentrum.

Die wahre Länge der Grundrissprojection $g'g'_1$ des Durchmessers gg_1 ist wie sofort ersichtlich der Strecke cc_1 gleich. Wir erhalten daher die axonometrische Projection der Punkte $g'g'_1$, indem wir auf cc_1 in c_1 die Normale c_1e bis zum Schnittpunkte e mit K errichten, $o\varepsilon = oc_1$ auf oe auftragen und von ε die Senkrechte $\varepsilon\varepsilon_1$ auf od fällen.

In der Projection ist $o'g' = o'g'_1 = o\varepsilon_1$ aufzutragen. Dadurch sind die Geraden sg, sg_1 und daher auch ihre respectiven Schnittpunkte F, F_1 mit der Bildebene bestimmt.

Um weitere Bestimmungsstücke der Curve C_b zu gewinnen, denken wir uns den zur Bildebene parallelen grössten Kreis K der Kugel aus s auf die Bildebene projicirt. Da der hiedurch erhaltene Kreis K_b — dessen Mittelpunkt Ω im Schnittpunkte von so mit der Bildtrace $t\tau$ der Grundriss-projicirenden Ebene der Geraden so erhalten wird — die Ellipse C_b doppelt berühren muss, so werden die Endpunkte P, P_1 seines auf FF_1 senkrechten Durchmessers mit den Punkten FF_1 als Scheiteln der einen Axe, eine Ellipse bestimmen, deren zweite Axe zugleich die kleine Axe von C_b ist.[1]

[1] Siehe Art. 4 der „Ergänzungen zur allgemeinen Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Flächen zweiten Grades". Sitzb der k. Akad. der Wissensch., Band LXXVII, Jahrg. 1878.

Diese Relation kann dann vortheilhaft verwerthet werden, wenn die Contourlinien des Kegels sC_b imaginär sein sollten.

Für die in der Figur getroffene Annahme befindet sich die Coordinatenebene XZ im Selbstschatten. Es wird daher der Schlagschatten des Dreiecks xAz auf der Bildebene zu ermitteln sein. Zu diesem Zwecke ist der Schatten α von A auf der Bildebene zu bestimmen, — was mit Hilfe der Grundriss-projicirenden Ebene der Geraden sA erreicht wird — und α mit x und z zu verbinden.

9. Für eine durch den Mittelpunkt A (siehe Fig. 14) und die Contour K bestimmte Kugel K sollen bei Parallelbeleuchtung und unter Zugrundelegung der zehntheiligen Beleuchtungsscala, die Intensitätscurven dargestellt werden.

Wird im Mittelpunkte A der Kugel die normale Ebene auf den Lichtstrahl gelegt und die Ellipse construirt, als welche sich der in dieser Ebene liegende grösste Kreis von K auf die Bildebene projicirt, so erhalten wir die axonometrische Projection der Selbstschattengrenze (Grenzisophote) der Kugel. In welcher Weise die Axen aa_1 bb_1 der erwähnten Ellipse direct ermittelt werden können, wurde in Fig. 8 eingehend erörtert.

Wir erhalten ferner die Projectionen der normal beleuchteten Punkte, der sogenannten Lichtpole pp_1, indem wir mit der Excentricität Af der Ellipse aa_1 bb_1 um A als Mittelpunkt einen Kreis Φ beschreiben, und denselben mit der axonometrischen Projection des (durch A gehenden) Lichtstrahles L zum Schnitt bringen.

Wird sowohl Ap als Ap_1 in zehn gleiche Theile getheilt, so erhalten wir die Mittelpunkte der Projectionen der einzelnen, der Beleuchtungsscala entsprechenden Intensitätscurven der Kugel. Bekanntlich sind diese Projectionen mit aa_1 bb_1 ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen, deren Hauptaxenscheitel $\alpha\alpha_1 \ldots\ldots$ auf der Ellipse aa_1 pp_1 liegen. Denn im Raume liegen die Punkte $\alpha\alpha_1$ auf jenem grössten Kreise der Kugel, dessen Ebene durch L geht, und auf der orthogonal projicirenden Ebene des Lichtstrahles senkrecht steht. Hieraus folgt jedoch weiter, dass der geometrische Ort der Brennpunkte $\varphi\varphi_1 \ldots$ der erwähnten Ellipsen der Kreis Φ sein muss, da infolge der Ähnlichkeit das Verhältniss der grossen Halbaxe zur Excentricität für jede dieser Ellipsen constant und zwar gleich $\frac{Aa}{Af}$ ist.

Der Ort der Brennpunkte $\varphi\varphi_1$ ist also der Ellipse aa_1 pp_1 in der durch pp_1 als Axe und die homologen Punkte a, f bestimmten Affinität entsprechend, und daher mit Rücksicht auf die Gleichheit der Halbaxen Ap, Af, mit dem Kreise Φ identisch.[1]

Wir erhalten also demzufolge z. B. die Brennpunkte $\varphi\varphi_1$ der dem Mittelpunkte V entsprechenden Ellipse, in den Schnittpunkten ihrer grossen Axe mit Φ, während die Scheiteltangenten α, α_1 dieser Axe, durch die Endpunkte $\gamma\gamma_1$ des Durchmessers $A\varphi$ des Kreises K respective hindurchgehen.

Denken wir uns die Directrix des Brennpunktes φ der Ellipse $\alpha\alpha_1$ $\beta\beta_1$ gezeichnet, so liegt der Schnittpunkt δ derselben mit dem Kreisdurchmesser $\gamma\gamma_1$ auf der gemeinschaftlichen Berührungssehne $\tau\tau_1$ der Ellipse $\alpha\alpha_1$ $\beta\beta_1$ und des Kreises K.

Denn, da $\alpha\alpha_1$ φd vier harmonische Punkte sind, so werden auch $\gamma\gamma_1$ durch $\varphi\delta$ harmonisch getrennt, und es ist δ ein Punkt der Polare des Punktes φ mit Bezug auf K. Da ferner $d\delta$ die Polare desselben Punktes bezüglich der Ellipse $\alpha\alpha_1$ $\beta\beta_1$ ist, und sich die Polaren eines Punktes hinsichtlich zweier sich doppelt berührender Kegelschnitte stets auf der gemeinschaftlichen Berührungssehne treffen, so muss δ ein Punkt von $\tau\tau_1$ sein.

Nun ist aber

$$\frac{V\alpha}{V\varphi} = \frac{Vd}{V\alpha} = \text{const.}$$

Der geometrische Ort des Punktes d ist daher eine Ellipse mit der kleinen Axe pp_1, deren grosse Halbaxe gleich ist dem Abstande D des Mittelpunktes A von einer Directrix der Ellipse aa_1 bb_1.

Hieraus resultirt weiter, dass die Punkte δ einem Kreise Δ mit dem Mittelpunkte A angehören, dessen Radius gleich D ist.

[1] Dass die Brennpunkte $\varphi\varphi_1$....auf einem Kreise Φ liegen müssen, resultirt auch als Corollarium des Satzes: „Parallele Schnitte einer Oberfläche zweiten Grades projiciren sich in beliebiger Parallelprojection, auf eine beliebige Ebene als Projectionsebene, als eine Kegelschnittschaar, deren Brennpunkte zwei Kegelschnitte erfüllen, welche mit der Contourcurve confocal sind."

Siehe „Über eine allgemeine Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Flächen zweiten Grades." Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. Band LXXV, Jahrg. 1877.

Man erhält diesen Radius, indem man die Gerade $b_1 f$ bis zum Schnittpunkte g mit der Tangente des Kreises K, im Punkte a, verlängert.

Dann ist $b_1 g = D$.

Es sei noch bemerkt, dass der Pol π der gemeinschaftlichen Berührungssehne $\tau\tau_1$ mit dem Pol der Geraden $\varphi\varphi_1$ bezüglich des Kreises Φ zusammenfällt, da auch dieser Umstand zur Bestimmung der Berührungssehne $\tau\tau_1$ verwerthet werden kann.

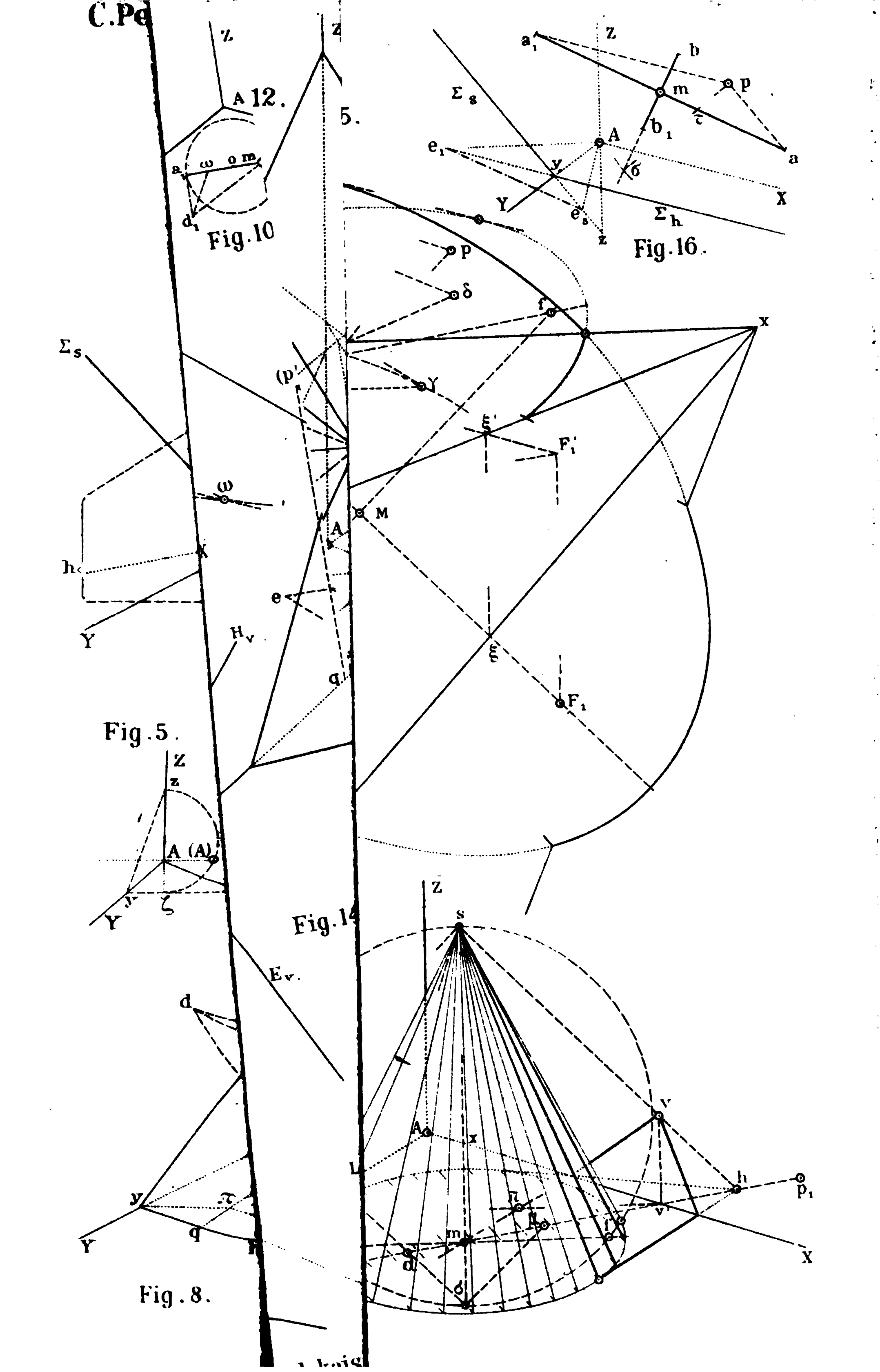
10. Unter denselben Voraussetzungen wie im vorangehenden Artikel sind Intensitätslinien eines Rotationscylinders, dessen Axe auf der Grundrissebene senkrecht steht, zu construiren.

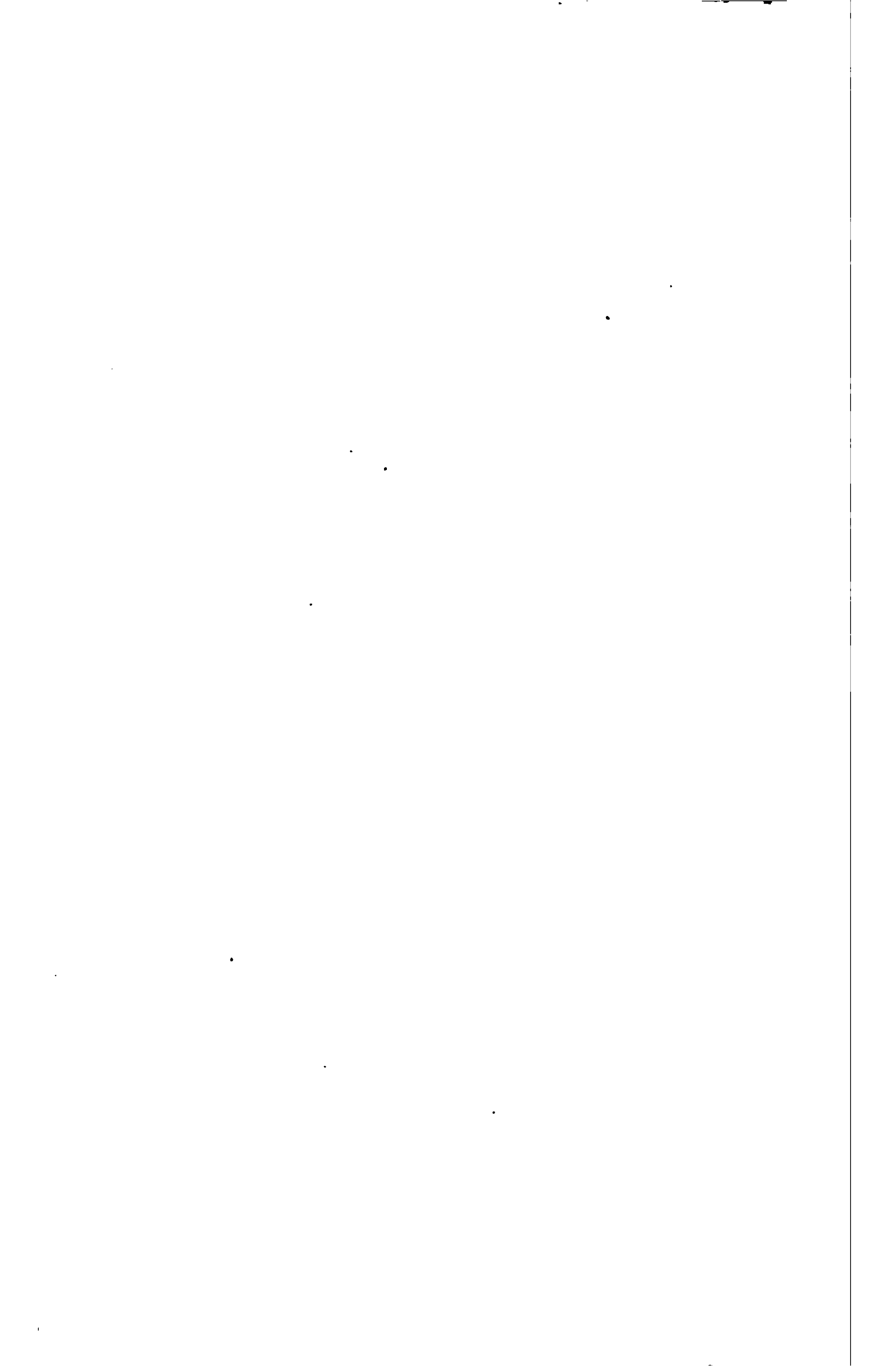
Legt man durch den Mittelpunkt m (siehe Fig. 17) des in der Grundrissebene liegenden Basiskreises K des gegebenen Cylinders, die Parallele L zum Lichtstrahl, welche den Cylinder in λ schneidet, und trägt die wahre Länge der Strecke $m\lambda$ auf L' beiderseits m auf, so erhält man die Endpunkte pp_1 der Beleuchtungsscala des Cylinders.

Wird sowohl mp als mp_1 in zehn gleiche Theile getheilt, so gehen die in den Theilpunkten auf L' errichteten Senkrechten, durch die Grundrissdurchstosspunkte der Cylindermantellinien von bestimmter (der Scala entsprechenden) Intensität. Um alle diese Operationen in der Projection einfach durchführen zu können, wollen wir ein neues Axensystem mit dem Anfangspunkte m einführen, welches die Cylinderaxe mo, die Gerade L' und somit auch die in m auf L' in der Grundrissebene errichtete Senkrechte $m\xi$ — diese in der Projection mit Hilfe des Höhenschnittes π des Dreiecks $Ax\zeta$ construirt — zu Axen besitzt.

Denken wir uns die Bildebene durch λ gelegt, so ist $\lambda\varepsilon$ die Seitenrissspur und $\varepsilon\xi$ die Grundrissspur derselben, und die aus dem Halbirungspunkte ν der Strecke $m\xi$ mit den Radien $\nu\varepsilon$, $\nu\lambda$ beschriebenen Kreise schneiden die in m auf $m\xi$ errichtete Normale in den Punkten (ε), (λ) derart, dass die Strecken $m(\varepsilon)$, $m(\lambda)$ die wahren Längen von $m\varepsilon$, $m\lambda$ respective ergeben.

Die durch (λ) parallel zu $\varepsilon(\varepsilon)$ gezogene Gerade geht daher durch die axonometrische Projection von p. Hiemit ist auch p_1 bestimmt, und da die in den Theilpunkten auf L' zu errichtenden Normalen in der Projection parallel zu $A\pi$ zu ziehen sind, so ist das Problem in der axonometrischen Darstellung als gelöst zu betrachten.


C.Pe
12.
5.
Fig.10
Fig.16.
Fig.5.
Fig.14
Fig.8.
Σs
Σh
Hv
Ev



11. Es sind die Mantellinien bestimmter Intensität — der zehntheiligen Beleuchtungsscala entsprechend — für einen Rotationskegel, dessen Axe sm auf der Grundrissebene senkrecht steht, zu construiren.

Legen wir (siehe Fig. 18) durch s und die Brennpunkte ff_1 der elliptischen Projection der kreisförmigen Basis K des Kegels einen Kreis $\varkappa$, so geht dieser durch die Projection des Mittelpunktes σ der dem Kegel längs des Kreises K eingeschriebenen Kugel. Die Ebene der Grenzisophote dieser Kugel schneidet die Grundrissprojection L' des durch σ gehenden Lichtstrahles L, im Halbirungspunkte μ der Intensitätsscala pp_1 des gegebenen Kegels. Wird die Bildebene durch s gelegt, so ist δt die Grundrissspur derselben und st — von s normal auf die axonometrische Projection von L gefällt — die Bildtrace der durch s senkrecht auf L gelegten Ebene N. Die Grundrissspur dieser Ebene geht durch t parallel zu $x\pi$ (wobei π den Höhenschnitt des in der Grundrissebene liegenden Dreieckes mxv' vorstellt) und schneidet L' in τ. Die Gerade $s\tau$ ist daher die Schnittlinie der Ebene N mit der Grundriss-projicirenden Ebene von L und folglich $s\tau$ parallel zu $\sigma\mu$.

Hiemit ist μ bestimmt, und da die Punkte pp_1 durch τ und den Grundrissdurchstosspunkt d des Lichtstrahles L harmonisch getrennt werden, so ist:

$$\overline{\mu p}^2 = \mu d . \mu\tau .$$

Wodurch p und p_1 bestimmt sind.

Werden nun sowohl μp als μp_1 in zehn gleiche Theile getheilt, und die in den Theilpunkten senkrecht auf L' errichteten — in der Projection daher parallel zu $x\pi$ gezeichneten — Geraden mit K zum Schnitt gebracht, so liefern die Kegelerzeugenden dieser Schnittpunkte, Mantellinien bestimmter Intensität, der Beleuchtungsscala entsprechend.

Über die Energie und den Zwangszustand im elektrostatischen Felde. II.

Von Dr. **Gottlieb Adler.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. December 1884.)

Es ist zuerst von Sir W. Thomson[1] und Cl. Maxwell die Möglichkeit erwiesen worden, die fernwirkenden elektrostatischen Kräfte in ihrem mechanischen Effekt vollständig zu ersetzen durch einen Spannungszustand der das elektrostatische Feld erfüllenden Dielektrica. Die Formeln, welche der Letztere[2] für eine solche Spannungsvertheilung durch ein homogenes isotropes Dielektricum hergeleitet hat, haben durch v. Helmholtz[3] eine Ausdehnung erfahren auf den Fall, dass das elektrostatische Feld beliebig von Dielektricis, in denen jedoch keine Richtung bevorzugt auftritt, erfüllt ist, und die eventuelle Änderung der Dielektricitätsconstante mit der Dichtigkeit berücksichtigt wird. Später hat Kirchhoff[4] die analoge Untersuchung für den allgemeineren Fall geführt, dass in den Dielektricis die Richtungen der eintretenden Hauptdilatationen als bevorzugte berücksichtigt werden.

Der Weg, den die beiden letztgenannten Forscher eingeschlagen haben, lässt sich kurz dahin characterisiren, dass für

[1] W. Thomson Reprint of papers on electrostatics and magnetism. Art. VII.

[2] Cl. Maxwell, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus Cap. V. §. 105.

[3] Über die auf das Innere magnetisch oder dielektrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte. Wiedemann's Annalen. Bd. XIII. S. 384 u. ff.

[4] Über die Formveränderung, die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder dielektrisch polarisirt wird. Sitzungsbericht der k. Berliner Akademie vom 28. Februar 1884.

den Zustand der das elektrostatische Feld bildenden Dielektrica — ihre Polarisation — analog der Poisson'schen Theorie der magnetischen Induction angenommen wird, dass in denselben ein den wirksamen elektrischen Kräften proportionales elektrisches Moment geweckt werde. Aus dem hieraus folgenden Ausdrucke für die Energie wird nach dem Princip der Erhaltung der Energie die Kraft hergeleitet, von der ein Volumelement des Dielektricums angegriffen wird. Indem nun gezeigt wird, dass eine beliebige — etwa A, die X — Componente dieser auf die Form gebracht werden könne

$$A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

und den A_x, A_y, A_z die Bedeutung von Componenten einer Zugkraft beigelegt wird, ist der Nachweis erbracht, dass die elektrostatischen fernwirkenden Kräfte durch Molecularkräfte des Dielektricums vollständig sich ersetzen lassen.

In meiner früheren Arbeit[1] habe ich für den Fall eines homogenen isotropen Dielektricums gezeigt, dass unendlich viele, stetige, eindeutig bestimmte Spannungsvertheilungen sich angeben lassen, deren jede an den im elektrostatischen Felde befindlichen Conductorflächen dieselbe mechanische Kraftwirkung hervorbringt, wie sie für diese aus der Annahme fernwirkender Kräfte resultirt. War die Dielektricitätsconstante dieses isotropen Dielektricums der Einfachheit wegen gleich Eins gesetzt worden, so war diese unendliche Reihe von Spannungsvertheilungen durch folgendes System characterisirt:

$$A_x = \frac{1}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + p\left[\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]\right\}$$

$$B_y = \frac{1}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + p\left[\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]\right\}$$

$$C_z = \frac{1}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + p\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right]\right\}$$

[1] Sitzungsbericht der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften vom 13. März 1884.

$$B_z = \frac{1}{8\pi}(1-p)\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} = C_y$$

$$C_x = \frac{1}{8\pi}(1-p)\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} = A_z$$

$$A_y = \frac{1}{8\pi}(1-p)\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} = B_x.$$

Hierin bedeutet der v. Helmholtz-Kirchhoff'schen Bezeichnungsweise folgend z. B. A_y die X-Componente des auf die Flächeneinheit bezogenen Zuges, welche in einem zur Y-Axe senkrechten Flächenelemente wirkt, wenn dessen Masse auf der positiven Seite der Y-Axe sich befindet; V das Potential der elektrostatischen Kräfte, p eine ganz willkürliche, reine Zahl. Für $p = -1$ gehen diese Formeln in die von Maxwell aufgestellten über, für $p = +1$ definiren sie einen Zwangszustand, der in einer nach allen Richtungen gleichen Spannung besteht.

In der vorliegenden Arbeit wird die Ausdehnung dieses Resultates gegeben auf den Fall, dass das elektrostatische Feld in beliebiger Weise von Dielektricis erfüllt ist, doch soll in diesen keine Richtung als bevorzugt auftreten.

Über den Zustand derselben soll ausser dem Bestehen der Poisson'schen Gleichung für die elektrische Kraftintensität keinerlei Annahme gemacht werden. Auf einem anderen, allgemeineren, Wege, als er in der früheren Arbeit eingeschlagen worden ist, werden wir zu einer unendlichen Reihe von Spannungsvertheilungen gefhrt, wieder von demselben Character, deren jede endlich und stetig ist, und eindeutig bestimmt durch die gegebene Anordnung der Dielektrica und die der von aussen eingeleiteten Elektricität und deren jede an den im elektrostatischen Felde befindlichen Conductorflächen denselben mechanischen Effekt hervorbringt wie die fernwirkenden Kräfte. Es wird sich ferner zeigen, dass die Kräfte, welche aus der Annahme irgend eines dieser Zwangszustände für das Innere der das elektrostatische Feld bildenden Dielektrica resultiren, wie jene, die für die Grenzfläche zweier Dielektrica sich ergeben, von genau denselben Grössen in genau derselben Weise — von Zahlenfactoren abgesehen — abhängen, wie sie von v. Helm-

holtz und Kirchhoff auf anderem Wege und unter den oben skizzirten Voraussetzungen hergeleitet worden sind.

In dieser unendlichen Reihe von Zwangszuständen wird wieder einer enthalten sein, der in einer gleichmässigen Spannung nach allen Richtungen besteht, deren auf die Flächeneinheit bezogene Grösse gleich ist der auf die Volumseinheit bezogenen elektrostatischen Energie im selben Punkte und die auch gleichzeitig die Kräftefunction ist für die Kraft, mit der dieser Punkt des Dielektricums, mag er nun mit eingeleiteter Elektricität geladen sein oder nicht, angegriffen wird. — Neben dieser analytischen Einfachheit, ferner seiner Vereinbarlichkeit mit der physikalischen Natur der Flüssigkeiten und ihrem Gleichgewichte, scheinen auch einzelne Ergebnisse der Experimente Quincke's über die elektrische Ausdehnung des Glases zu Gunsten dieses Zwangszustandes zu sprechen.

Es wird nothwendig sein, zunächst die Voraussetzungen und die characteristischen Gleichungen für ein im elektrostatischen Felde befindliches Dielektricum zusammenzustellen.

1.

Ist V das elektrische Potential im elektrostatischen, in gegebener Weise von Dielektricis erfüllten Felde, $-\frac{\partial V}{\partial x}$, $-\frac{\partial V}{\partial y}$, $-\frac{\partial V}{\partial z}$ also die Componenten der elektrischen Kraftintensität, so sollen diese mit den von aussen eingeleiteten Elektricitäten in folgendem Zusammenhange stehen: Für den Punkt des Feldes, in den die Elektricität von der Raumdichte ε eingeleitet worden ist, soll die Gleichung bestehen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial V}{\partial z}\right)+4\pi\varepsilon=0 \qquad \mathrm{I}_a)$$

wo K die Dielektricitätsconstante in diesem Punkte ist;

für den Punkt einer mit eingeleiteter Elektricität von der Flächendichte e geladenen Fläche die Gleichung:

$$K_1\frac{\partial V}{\partial n_1}+K_2\frac{\partial V}{\partial n_2}+4\pi e=0 \qquad \mathrm{I}_b)$$

wo K_1 und K_2 die Werthe der Dielektricitätsconstanten in den in Richtung der in diesem Punkte zur Fläche gezogenen beiderseitigen Normalen n_1 und n_2 unendlich benachbarten Punkten bedeuten;

für alle von eingeleiteter Elektricität freien Punkte des elektrostatischen Feldes die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial V}{\partial z}\right)=0. \qquad \text{I}^{c})$$

Wie diese Gleichungen aus irgend welchen Annahmen über den Zustand des Dielektricums im elektrostatischen Felde hergeleitet werden könnten, soll, dem Vorgange Maxwells folgend, nicht berücksichtigt werden; die Gleichungen I) sollen vielmehr gleichsam als Definitionsgleichungen für das Dielektricum, dem wir in einem bestimmten Punkte die Dielektricitätsconstante K zuschreiben, aufgefasst werden.

Von der Fernwirkungstheorie ausgehend, müssten wir die elektrostatische Energie definiren:

$$W = {}^1/_2 \int\int\int V\varepsilon\, dx\, dy\, dz + {}^1/_2 \int\int V e\, dS \qquad \text{II}^{a})$$

Ersetzen wir in diesen Integralen ε und e durch ihre aus den Gleichungen I) folgenden Werthe, so dürfen wir mit Rücksicht auf I^{c}) das Raumintegral über den ganzen unendlichen Raum mit Ausschluss beider Seiten der geladenen Flächen ausdehnen und erhalten so:

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int\int\int_{(-\infty)}^{(+\infty)} V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz$$
$$-\frac{1}{8\pi}\int\int K\frac{\partial V}{\partial n}\,dS,$$

worin das zweite Integral über beide Seiten der geladenen Flächen auszudehnen ist. Die Summe beider Integrale ist aber nichts anderes als die dem Green'schen Integralsatze[1] gemässe Umformung von

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\int\int_{(-\infty)}^{(+\infty)} K\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz = \frac{1}{8\pi}\int\int\int_{(-\infty)}^{(+\infty)} KR^2 d\tau \qquad \text{II})$$

---

[1] S. Maxwell l. c. §. 101.

Während in der ersten Darstellung II^a) der Energie der Sitz derselben ausschliesslich in den mit eingeleiteter Elektricität geladenen Punkten des elektrostatischen Feldes zu suchen war, diese also ganz der Annahme einer Wirkung in die Ferne entspricht, enthält das letztere Integral II), als ausgedehnt über alle Punkte der das elektrostatische Feld erfüllenden Dielektrica, den Hinweis auf eine in diesen hervorgebrachte Veränderung, in der die ganze elektrostatische Energie aufgespeichert ist.

Welcher Art diese Veränderung ist, wird dadurch angedeutet, dass

$$R^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

das Quadrat der elektrischen Kraftintensität, wesentlich die Dimensionen und, wie auch experimentell[1] erwiesen, die physikalische Bedeutung einer Spannung besitzt.

Es ist nämlich

$$[R] = \left[\frac{e}{r^2}\right], \quad R^2 = \left[\frac{e^4}{r^2}\right]$$

und da $\left[\frac{e^2}{r^2}\right]$ die Bedeutung einer Kraft besitzt

$$[R^2] = \left[\frac{1}{L^2}\right][MLT^{-2}].$$

Es ist ferner auf demselben Wege, wie er in der ersten Hälfte der früheren Arbeit eingeschlagen worden ist, die mechanische Kraftwirkung an den im elektrostatischen Felde befindlichen Conductorflächen herleitbar. Man geht wiederum vom Ausdrucke II)[2] für die elektrostatische Energie aus, nimmt dieselbe, dort definirte virtuelle Verschiebung eines Elementes der Conductorfläche in Richtung der nach auswärts gezogenen Normale vor, und übersieht ebenso, dass die hiedurch bewirkte Änderung des Potentialwerthes V die Energie nur um ein unendlich Kleines höherer Ordnung ändert.

---

[1] Thomson l. c. Cap. XIX. Tabelle VI und §. 333.

[2] Auf der zweiten und dritten Seite meiner früheren Abhandlung trägt dies Integral irrthümlich das Minuszeichen, der durchgeführten Rechnung liegt jedoch der richtige, positive Werth zu Grunde.

Beachtet man nun, dass bei Verschiebung des Flächenelementes $d\omega$ um δn in Richtung der auswärts gezogenen Normale das Element

$$d\omega\delta n . \frac{K . R^2}{8\pi}$$

aus dem Betrage des Integrals II) verschwindet, weil es in den von der Conductorfläche umschlossenen Raum tritt, wo R^2 verschwindet, so ergibt sich mit dem am angegebenen Orte hergeleiteten Grade der Genauigkeit [1] die mechanische Kraftwirkung für jedes Element der Conductorfläche

$$F d\omega = \frac{K}{8\pi} R^2 d\omega, \qquad \text{III)}$$

wo K die Dielektricitätsconstante in dem in Richtung der nach auswärts gezogenen Normale von $d\omega$ unendlich benachbarten Punkte des Dielektricums ist.

Es ist zu beachten, dass, weil die vorgenommene Verschiebung eine Verminderung des Arbeitswerthes W hervorbringt, diese Kraft im Sinne derselben, also als eine in Richtung der nach auswärts gezogenen Normale bestehende Spannung — unabhängig vom Zeichen der Ladung — wirkt.

Nachdem in dieser Weise die characteristischen Gleichungen für das elektrostatische Feld aufgestellt sind, soll untersucht werden, von welcher speciellen Anordnung der Spannungszustand in den Dielektricis ist, auf welchen uns der Ausdruck II) für die Energie hinweist.

---

[1] Dabei ist vernachlässigt die Änderung, die für die gedachte virtuelle Verschiebung W dadurch erfahren könnte, dass bei derselben am verschobenen Conductorelemente eine Stauung des Dielektricums eintritt, welche dessen Dichte σ und in Folge dessen die Dielektricitätsconstante in der Grenzschichte ändern könnte. Auf der Berücksichtigung dieser Eventualität beruht es, dass v. Helmholtz für die auf die Flächeneinheit bezogene Grösse der mechanischen Kraftwirkung

$$F' = \left(\frac{K}{8\pi} + \frac{\theta}{2}\right) R^2 \ldots \quad (\text{III}^a)$$

erhält, wo

$$\theta = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial K}{\partial \log \sigma} \text{ ist.}$$

2.

Allerdings würde derselbe Ansatz, dieselbe analytische Transformation, und dieselbe hieraus resultirende Analogie mit der bekannten Formel für einen stetig verbreiteten Druck, wie sie in der früheren Arbeit zur Herleitung des Zwangszustandes benützt worden, auch in diesem allgemeinen Falle nachweisen, dass die mechanische Kraftwirkung an den im elektrostatischen Felde befindlichen Conductoren aufgefasst werden darf als Folge einer stetigen Spannungsvertheilung in demselben und würde zu einer, der dort mit 1) bezeichneten analogen, Spannungsvertheilung führen.

Es soll jedoch die Frage nach der Ersetzbarkeit der elektrostatischen fernwirkenden Kräfte durch Molekularkräfte der das elektrostatische Feld bildenden Dielektrica mit möglichster Allgemeinheit dahin gestellt werden:

Lassen sich Vertheilungen von Zug- respective Druckkräften durch die das elektrostatische Feld erfüllende Dielektrica angeben, welche

erstens in Grösse und Richtung eindeutig bestimmt sind durch die gegebene, im Allgemeinen stetige, Anordnung der elektrischen Kraftintensität und der physikalischen Constanten der Dielektrica:

zweitens, deren sämmtliche Componenten überall endlich sind, stetig[1] bleiben mit denen der elektrischen Kraftintensität und keine Drehung der Moleküle des Dielektricums anstreben, welche endlich

drittens an den im elektrostatischen Felde befindlichen Conductorflächen dieselbe mechanische Kraftwirkung geben, welche oben (III) aus dem Princip der Erhaltung der Energie hergeleitet worden ist?

Die Berechtigung, die Frage nach dem allgemeinsten, die fernwirkenden elektrostatischen Kräfte ersetzenden Zwangszustande im letzten Theile beschränkend zu formuliren, glaube ich daraus ziehen zu dürfen, dass einerseits die für die Elektrostatik characteristischen, wie quantitativ genau verfolgbaren

[1] Siehe Maxwell l. c. §. 107.

Erscheinungen zwischen Conductoren sich abspielen, anderseits aus der aus dem Green'schen Satze fliessenden Möglichkeit, die Wirkung, die ein beliebiges elektrisches System ausübt, — also auch die, welche es erfährt, — stets zu ersetzen durch die einer eindeutig bestimmten Gleichgewichtsvertheilung von Elektricität über eine beliebige, dasselbe einhüllende Niveaufläche.

Um die gestellte Frage mit möglichster Allgemeinheit zu beantworten, ist zunächst darauf hinzuweisen, dass, wie oben hergeleitet worden, das Quadrat der elektrischen Kraftintensität wesentlich — die auch experimentell erwiesene — Bedeutung einer Zugkraft besitzt. Jede homogene Function zweiten Grades der Componenten der elektrischen Kraftintensität wird also dieselbe physikalische Bedeutung besitzen. Doch glaube ich, weil die gesuchte Spannungsvertheilung an Conductorflächen stetig in die an denselben herrschenden Werthe (III) der mechanischen Kraftwirkung übergehen soll, mich auf homogene ganze Functionen zweiten Grades derselben beschränken zu dürfen.

Bezüglich der Zeichen soll die Festsetzung getroffen werden, dass Zugkräfte (Spannungen), d. h. Molekularkräfte, deren normale Componenten auf eine Ebene wirkend, die zu beiden Seiten derselben liegenden Substanztheile zu trennen streben, als positiv gerechnet werden, und demgemäss sind negative Zugkräfte als positive Drucke zu betrachten. Wegen der Gleichberechtigung sämmtlicher Richtungen im Dielektricum wird es genügen, blos zwei der auf die Flächeneinheit bezogenen Zugscomponenten, etwa A_x, die Normalzugscomponente und A_y, die tangentiale (Schiebungs) Componente, zur Charakterisirung der übrigen explicite anzusetzen und an ihnen die ferneren Überlegungen zu vollziehen. Nach dem Vorausgeschickten setzen wir also an:

$$A_x = a_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + a_2 \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + a_3 \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + a_4 \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + a_5 \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z} + a_6 \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$A_y = b_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + b_2 \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + b_3 \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + b_4 \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + b_5 \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z} + b_6 \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z}$$

Hierin sind die Coëfficienten a und b entweder von den Werthen der physikalischen Constanten im betrachteten Punkte des Dielektricums abhängige *reine* Zahlen, welche jedoch in keinerlei Weise mehr von der Elektricitätsvertheilung abhängen, oder ein für allemal willkürlich festsetzbare, reine Zahlen.

Die Forderung nach Unabhängigkeit der für die Zugscomponenten supponirten Ausdrücke von der speciellen Wahl des Coordinatensystems, wobei zu berücksichtigen ist, dass die Coëfficienten a und b *nur* vom betrachteten *Punkte* abhängen, wird diese Ausdrücke wesentlich vereinfachen.

Da der für die *stetige* Zugscomponente A_x aufgestellte Ausdruck unverändert bleiben soll, wenn man der Y- oder Z- oder X-Axe, jeder einzeln die entgegengesetzte Richtung gibt, so müssen

$$a_4 = a_5 = a_6 = 0$$

sein.

Wegen der Vertauschbarkeit der Y- und Z-Axe muss $a_2 = a_3$ sein.

Die Berücksichtigung der Unveränderlichkeit von A_y bei Umlegung der Z-Axe in die entgegengesetzte Richtung, wie des Umstandes, dass die stetige Zugscomponente A_y den entgegengesetzten Werth annehmen muss, wenn man entweder der X- oder der Y-Axe allein die entgegengesetzte Richtung gibt, erheischt, dass

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_5 = b_6 = 0$$

sei.

Berücksichtigt man ferner die beliebige Vertauschbarkeit der Coordinatenrichtungen untereinander, so ist ersichtlich, dass zur Characterisirung der supponirten allgemeinsten Spannungsvertheilung die explicite Angabe blos der folgenden Zugscomponenten genügt

$$\left.\begin{aligned} A_x &= a_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + a_2\left[\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] \\ A_y &= b\,\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{\partial V}{\partial y} = B_x \\ A_z &= b\,\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{\partial V}{\partial z} = C_x \end{aligned}\right\} \qquad \text{IV}')$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass diese Ausdrücke den beiden ersten der oben an einen Zwangszustand gestellten Anforderungen entsprechen. Sie haben wesentlich die physikalische Bedeutung und Eigenschaft von Zugscomponenten, sie sind eindeutig bestimmt durch die Werthe der elektrischen Kraftintensität und die gegebene Anordnung der Dielektrica, deren charakteristische Constanten, ausser an ihren Grenzflächen, stetig sind, sie werden nie unendlich, auch an Grenzflächen der Dielektrica nicht, da nur die a und b selbst, nicht deren Differentialquotienten vorkommen, und endlich arbeiten sie, weil $A_{y_1} = B_x$ ist, auf keine Drehung der Molecüle der Dielektrica hin.

Wir wollen jetzt noch die dritte Forderung an diese Spannungsvertheilungen IV') stellen, an den Conductorflächen im elektrostatischen Felde den oben hergeleiteten Werth III) für die mechanische Kraftwirkung zu geben.

An diesen, als an Niveauflächen, genügen die Componenten der elektrischen Kraftintensität R folgenden Gleichungen:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = Rl; -\frac{\partial V}{\partial y} = Rm, -\frac{\partial V}{\partial z} = Rn,$$

wo l, m, n die Richtungscosinus der nach auswärts gezogenen Normale der Conductorfläche bezeichnen.

Die X-Componente der auf die Flächeneinheit bezogenen mechanischen Kraftwirkung ergibt sich, da die Zugscomponenten stetig sind

$$\left[a_1\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + a_2\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}\right]l + bm\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + bn\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z},$$

und unter Berücksichtigung der eben hingeschriebenen Gleichungen für die elektrischen Kraftcomponenten durch Gleichsetzung mit dem oben hergeleiteten Werthe III) die Gleichung:

$$Fl = \frac{K}{8\pi}R^2 l = a_1 R^2 l^3 + a_2 R^2(lm^2 + ln^2) + bR^2 m^2 l + bR^2 n^2 l$$
$$= R^2 l[a_1 l^2 + (a_2 + b)m^2 + (a_2 + b)n^2]. \qquad \text{III'})$$

Diese Gleichung ist für jeden, nur an die Relation

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

gebundenen Werth der l, m, n nur erfüllbar, wenn

$$a_1 = a_2 + b = \frac{K}{8\pi} \quad \text{ist.}$$

Es ist, da nach der oben gemachten Festsetzung a_1, a_2, b in keiner Weise von den elektrischen Kräften abhängen sollen, leicht einzusehen, dass die eben hergeleitete Gleichung, obwohl sie direct nur an den Conductorflächen hergeleitet ist, bei der völlig willkürlichen Lage, die diese einnehmen können, die Zahlen a_1, a_2, b durchaus verbindet.

Wir erhalten so

$$a_1 = \frac{K}{8\pi}; \quad a_2 = p \cdot \frac{K}{8\pi}; \quad b = (1-p)\frac{K}{8\pi}.$$

Hierin kann p entweder eine für die einzelnen Punkte des Dielektricums characteristische reine Zahl sein, oder, und diese Annahme werden wir in Hinkunft festhalten, eine willkürliche, ein für allemal festsetzbare, reine Zahl.

Sonach ergeben sich als Spannungsvertheilungen, die alle oben aufgestellten Forderungen erfüllen, also einen die fernwirkenden elektrostatischen Kräfte ersetzenden Zwangszustand darstellen, jene, deren auf die Flächeneinheit bezogenen Zugscomponenten durch folgenden Gleichungscomplex definirt sind:

$$\left.\begin{aligned}
A_x &= \frac{K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + p\left[\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]\right\} \\
B_y &= \frac{K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + p\left[\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]\right\} \\
C_z &= \frac{K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + p\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right]\right\} \\
C_y &= \frac{K}{8\pi}(1-p)\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y} = B_z \\
A_z &= \frac{K}{8\pi}(1-p)\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z} = C_x \\
B_x &= \frac{K}{8\pi}(1-p)\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x} = A_y
\end{aligned}\right\} \quad \text{IV)}$$

Hierin ist K die Dielektricitätsconstante im betrachteten Punkte, und, wenn wir nur diese eine für das Dielektricum characteristische Zahl eintreten lassen wollen, p eine ganz willkürliche, positive oder negative, doch für alle Punkte ein für allemal festgesetzte, reine Zahl.

Diese unendliche Reihe von Zwangszuständen, deren jeder, wie ja leicht nach der durchgeführten Methode nach rückwärts verificirt werden kann,[1] in der oben gestellten Fassung der Frage die fernwirkenden elektrostatischen Kräfte ersetzt, ist von ganz specieller Natur. Führt man die Untersuchung derselben nach der von Maxwell[2] angegebenen und in meiner früheren Arbeit auch durchgeführten Methode, indem man den Zwang für zwei specielle Lagen eines Flächenelementes berechnet, deren erste man in eine Niveaufläche fallen lässt, deren zweite man senkrecht zu einer solchen wählt, so ergibt sich folgendes Resultat:

Für alle in dieser unendlichen Reihe enthaltenen Spannungsvertheilungen ist die Richtung der Kraftlinien eine Hauptaxe des Zwanges und die Grösse des Zuges, die in Richtung der Kraftlinien resultirt, ergibt für jeden dieser Zwangszustände denselben Werth: $\frac{K}{8\pi} R^2$, bezogen auf die Flächeneinheit.

Ferner ist für jeden aus dieser unendlichen Reihe herausgegriffenen Zwangszustand jede zur Richtung der elektrischen Kraftintensität senkrechte Richtung gleichfalls eine Hauptaxe des Zwanges, und zwar besteht für jede zur Kraftlinie senkrechte Richtung eine Spannung, deren auf die Flächeneinheit bezogener Betrag

$$p \cdot \frac{K}{8\pi} R^2$$

ist, daher nach der oben festgesetzten Bezeichnungsweise für einen zu einem negativen p gehörigen Zwangszustand ein Druck in dieser Richtung resultirt.

[Ich will hier folgende Bemerkung anfügen: Würde der in diesem Paragraphe durchgeführten Herleitung der Zwangszustände statt des Werthes

---

[1] Siehe oben S. 1086.

[2] L. c. §. 106.

$$F = \frac{K}{8\pi} R^2 \qquad \text{III)}$$

für die mechanische Kraftwirkung an den im elektrostatischen Felde befindlichen Conductoren der unter Berücksichtigung einer eventuellen Änderung der Dielektricitätsconstanten mit der Dichtigkeit, σ, $\frac{\partial K}{\partial \log \sigma} = \theta$ giltige v. Helmholtz'sche

$$F' = \left(\frac{K}{8\pi} + \frac{\theta}{2}\right) R^2 \qquad \text{III}^a)$$

speciell in der Gleichung III_1') zu Grunde gelegt, so ergäbe sich als Gleichung zwischen a_1, a_2, b:

$$a_1 = \frac{K}{8\pi} + \frac{\theta}{2},\; a_2 + b = \frac{K}{8\pi} + \frac{\theta}{2};$$

Da dieser Gleichung auf unendlich viele Arten genügt werden kann, so ist auch in diesem Falle die Existenz unendlich vieler Zwangszustände erwiesen.

Genügt man dieser Relation durch

$$a_1 = \frac{K}{8\pi} + \frac{\theta}{2},\; b = \frac{K}{4\pi},\; a_2 = \frac{\theta}{2} - \frac{K}{8\pi},$$

so ergibt sich jene Spannungsvertheilung, die von v. Helmholtz[1] aufgestellt worden ist. Wird ihr genügt durch

$$a_1 = a_2 = \frac{K}{8\pi} + \frac{\theta}{2},\; b = 0,$$

ergibt sich ein Zwangszustand, welcher in einer nach allen Richtungen gleicher Spannung vom Betrage $\left(\frac{K}{8\pi} + \frac{\theta}{2}\right) R^2$ besteht.]

3.

Es soll untersucht werden, welche Kräfte aus der Annahme der im vorigen Paragraph aufgestellten Zwangszustände für das Innere der das elektrostatische Feld erfüllenden Dielektrica resultiren.

[1] L. c. Seite 400, 4 e.

Da die sämmtlichen oben aufgestellten Spannungsvertheilungen durch jedes Dielektricum hindurch, so lange die Dielektricitätsconstante stetig sich ändert, stetig sind, so ist irgend eine, — etwa A, die X — Componente der auf die Volumeinheit bezogenen in einem Punkte des Dielektricums wirksamen Kraft

$$A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Da blos eine, das Dielektricum characterisirende Zahl, die Dielektricitätsconstante K zugelassen war, so ist im Gleichungscomplex (IV) p als eine ein für allemal festsetzbare reine Zahl zu betrachten, und es ergibt sich für die auf die Volumseinheit bezogene Kraftcomponente

$$A = \frac{K}{8\pi}\left[2\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} + 2p\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z} + \right.$$

$$\left. + (1-p)\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} + (1-p)\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x}(1-p)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + p\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + p\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial y}(1-p)\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial z}(1-p)\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z} =$$

$$= \frac{K}{8\pi}\left[2\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (p+1)\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} + (p+1)\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}\right] +$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + p\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] +$$

$$+ (1-p)\cdot\frac{1}{8\pi}\frac{\partial V}{\partial x}\left[K\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + K\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right].$$

Der letzte Posten ist aber nach der für das Innere der Dielektrica geltenden Differentialgleichung I[a])

$$-(1-p)\cdot\frac{1}{8\pi}\frac{\partial V}{\partial x}\left[4\pi\,\varepsilon + K\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\right],$$

wo ε die Raumdichte der in den betrachteten Punkt von aussen eingeleiteten Elektricität ist.

Sonach ergibt sich

$$A = \frac{K}{8\pi}(p+1)\left[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}\right]$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial x}p\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{p-1}{2}\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= \frac{K}{8\pi}\frac{p+1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial x}p\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{p-1}{2}\cdot\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} \qquad \text{V)}$$

und ganz analoge Ausdrücke für die Y-Componente B und die Z-Componente C.

Es ist höchst bemerkenswerth, dass die auf die Volumseinheit bezogene Kraft, welche eine beliebig aus der aufgestellten unendlichen Reihe IV) von Zwangszuständen herausgegriffene Spannungsvertheilung für das Innere der das elektrostatische Feld bildenden Dielektrica hervorbringt, sich als dieselbe (lineare) Function — von Zahlenfactoren abgesehen — derselben Grössen ergibt, wie sie von v. Helmholtz [1] und Kirchhoff [2] unter Annahme der Proportionalität des geweckten elektrischen Momentes mit der elektrischen Kraft und unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Dielektricitätsconstante mit der Dichte hergeleitet worden ist.

4.

Es soll ferner untersucht werden, wie die Zugscomponenten IV) an den Grenzflächen zweier Dielektrica, wo ja die elektrische Kraftintensität unstetig wird, sich verhalten.

Nehmen wir an, dass in diese keine Elektricität von aussen eingeleitet worden ist, so ist der Sprung der elektrischen Kraftintensität gegeben durch

$$K_1\frac{\partial V}{\partial n_1} + K_2\frac{\partial V}{\partial n_2} = 0 \qquad \text{I}^q\text{)}$$

[1] L. c. S. 398.

[2] L. c. S. 146. Beim Vergleich mit letzterer Formel ist zu beachten, dass für unseren Fall die eine eventuelle Anisotropie berücksichtigende Constante k'' zu setzen ist.

woraus, wenn mit l_1, m_1, n_1 die Richtungscosinus der nach dem Innern des ersten Dielektricums mit der Dielektricitätsconstante K_1 gezogenen Normale bezeichnen, für die Sprünge der elektrischen Kraftcomponenten sich ergibt:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 + \frac{K_1 - K_2}{K_2}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 l_1$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_2 = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_1 + \frac{K_1 - K_2}{K_2}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 m_1$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_2 = \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1 + \frac{K_1 - K_2}{K_2}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 n_1$$

Für die X-Componente der auf die Flächeneinheit bezogenen Spannungen zu beiden Seiten der Grenzfläche ergibt sich:

$$A_{n_1} = l_1 (A_x)_1 + m_1 (A_y)_1 + n_1 (A_z)_1$$

$$A_{n_2} = l_2 (A_x)_2 + m_2 (A_y)_2 + n_2 (A_z)_2$$

Es ist aber

$$A_{n_1} = \frac{K_1}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1^2 \cdot l_1 + p\left[\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1^2\right] l_1 + (1-p)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 \left[\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_1 m_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1 n_1\right]\right\}$$

$$= \frac{K_1}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 \left[l_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 + m_1\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_1 + n_1\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1\right] + p l_1 \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1^2\right] - p\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)\left[l_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 + m_1\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_1 + n_1\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1\right]\right\}$$

$$A_{n_1} = \frac{K_1}{8\pi}\left[(1-p)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 + p R_1^2 l_1\right]$$

$$A_{n_2} = \frac{K_2}{8\pi}\left[(1-p)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_2 \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2 - p R_2^2 l_1\right]$$

$$= \frac{K_2}{8\pi}\left\{(1-p)\left[-\frac{K_1}{K_2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 - \frac{K_1 - K_2}{K_2^2} K_1 \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1^2 l_1\right] - p l_1 \left[R_1^2 + 2\frac{K_1 - K_2}{K_2}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1^2 + \frac{(K_1 - K_2)^2}{K_2^2}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left\{(p-1)K_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 - p K_2 l_1 R_1^2\right.$$

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1^2 l_1 (K_1-K_2)\left[\frac{K_1}{K_2}-p\frac{K_1}{K_2}+2p+p\frac{K_1-K_2}{K_2}\right]\Bigg\}$$

$$A_{n_2}=\frac{1}{8\pi}\left[(p-1)K_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1-pK_2R_1^2l_1\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1^2 l_1\frac{K_1-K_2}{K_2}(K_1+pK_2)\right].$$

Hieraus ergibt sich für den Stetigkeitssprung der X-Componente der Spannung, bezogen auf die Flächeneinheit:

$$\overline{A}=A_{n_1}+A_{n_2}=\frac{K_1-K_2}{8\pi}\left[p.R_1^2l_1-\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1^2 l_1\left(\frac{K_1}{K_2}+p\right)\right] \quad \text{VI)}$$

Vergleicht man den hier erhaltenen Ausdruck für den Stetigkeitssprung der Spannungscomponenten an der Grenzfläche zweier Dielektrica mit dem von Kirchhoff[1] für die Trennungsfläche von Eisen und Luft (für die $K_2=1$ ist) für das analoge Problem hergeleiten, und berücksicht, dass für unseren Fall die richtungsbevorzugende Constante k'' verschwindet, so ist ersichtlich, dass auch dieser, wie vorhin für die auf das Innere der Dielektrica wirksame Kraft ausgesprochen werden konnte, dieselbe Function derselben Grössen ist, von reinen Zahlenfactoren abgesehen, wie er unter den oben skizzirten Voraussetzungen von Kirch-hoff berechnet worden ist.

5.

Das Resultat der vorliegenden Untersuchung lässt sich also folgendermassen zusammenfassen:

Es lässt sich eine unendliche Reihe von Spannungsvertheilungen durch die das elektrostatische Feld beliebig erfüllenden Dielektrica angeben, blos unterschieden von einander durch das Verhältnis, p, zwischen der Spannung parallel und senkrecht den Kraftlinien, deren jede überall endlich und mit der elektrischen Kraftintensität stetig bleibt und eindeutig bestimmt ist durch die gegebene Vertheilung der von aussen eingeleiteten Elektricität und der das elektrostatische Feld erfüllenden Dielektrica.

---

[1] Lc. S. 148.

Jede dieser Spannungsvertheilungen ergibt ferner denselben Werth für die mechanische Kraftwirkung — der Grösse und Richtung nach — an geladenen Conductorsflächen im elektrostatischen Felde, wie er aus der Annahme der Fernwirkung resultiren würde und ersetzt also — nach der zu Grunde gelegten Formulirung der Frage — diese vollständig.

Jeder dieser Zwangszustände ergibt ferner für das Innere der das elektrostatische Feld bildenden — polarisirten — Dielektrica Kräfte und für ihre Grenzflächen Druckkräfte, welche in genau derselben Weise von denselben Grössen abhängen — von eintretenden Zahlenfactoren abgesehen — wie sie von v. Helmholtz und Kirchhoff unter Zugrundelegung der Annahme, dass im polarisirten Dielektricum ein den elektrischen Kräften proportionales elektrisches Moment geweckt wird und unter Berücksichtigung der Abhängigkeit der Dielektricitäts constante von der Dichte hergeleitet worden sind.

Dieser letztere Umstand ist unter Anderem auch insofern sehr wichtig, als aus ihm hervorgeht, dass die Möglichkeit, dass irgend einer der aus der unendlichen Reihe IV) herausgegriffenen Zwangszustände sich erhalte, im Allgemeinen dieselbe sein wird, als für den v. Helmholtz und Kirchhoff angegebenen Zwangszustand.

6.

Aus der unendlichen Reihe IV) von Zwangszuständen mögen jene zwei einer näheren Betrachtung unterzogen werden, welche für die Specialisirung des Zahlenwerthes p, $p = -1$ und $p = 1$ sich ergeben.

Der Zwangszustand, der für die Specialisirung $p = -1$ sich ergibt, ist der auf den Fall eines heterogenen Dielektricums ausgedehnte Maxwell'sche. Er besteht in einer Spannung vom Betrage $\frac{K}{8\pi} R^2$ in Richtung der Kraftlinien und in einem Drucke von gleichem Betrage senkrecht zu ihnen.

Die auf die Volumseinheit bezogene Kraft für das Innere der im elektrostatischen Felde befindlichen Dielektrica ergibt sich durch Specialisirung des oben allgemein hergeleiteten Ausdruckes V)

$$A = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] - \varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} \qquad V_1)$$

wo ε die Raumdichte der in den betrachteten Punkt von aussen eingeleiteten Elektricität bedeutet, ein Ausdruck, der bis auf den Unterschied in der Bezeichnungsweise mit dem von v. Helmholtz angegebenen übereinstimmt, wenn man die die Veränderlichkeit der Dielektricitätsconstante mit der Dichte berücksichtigende Constante θ gleich Null setzt.

Ein Vorzug dieses Zwangszustandes besteht darin, dass aus ihm für die Theilchen eines homogenen Dielektricums, soweit sie von eingeleiteter Elektricität frei sind, keine Kraftwirkung resultirt.

Für heterogene Dielektrica fällt wohl dieser Vorzug; aber der für diesen Fall giltige Ausdruck V_1) für die auf das Innere wirkende Kraft hat den Vorzug, dass in ihm eine Trennung des von der reinen Fernwirkung herrührenden Theiles von dem durch die Reactionen des polarisirten Mediums explicite vollziehbar ist, was dann von Vortheil ist, wenn man die zweierlei Ursachen neben einander bestehen lassen will. [1]

Vorzüge anderer Art, und insbesondere gerade beim consequenten Verlassen der Fernwirkungstheorie bietet jener Zwangszustand dar, der für $p = 1$ sich ergibt.

Die ihn characterisirenden Zugscomponenten sind:

$$\begin{aligned} A_x = B_y = C_z &= \frac{K}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] \\ A_y = B_x = A_z &= C_x = B_z = C_y = 0. \end{aligned} \qquad IV_2)$$

Er besteht also, übereinstimmend mit der physikalischen Natur der Flüssigkeiten und vereinbar mit ihrem Gleichgewichte, in einer in den einzelnen Punkten nach allen Richtungen gleichmässigen Spannung, deren auf die Flächeneinheit bezogener Betrag

$$\frac{K}{8\pi}R^2$$

[1] Siehe hierüber v. Helmholtz l. c. S. 405.

identisch ist mit dem auf die Volumseinheit bezogenen der elektrostatischen Energie im selben Punkte.

Aus seiner Annahme resultirt ferner für die auf die Volumseinheit wirkende Kraft im selben Punkte des Dielektricums — für die X-Componente

$$A = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{8\pi} R^2\right) \qquad \text{V}_2)$$

Es hat also diese, und zwar gleichgiltig, ob der Punkt mit eingeleiteter Elektricität geladen ist oder nicht, eine Kräftefunction, deren Betrag übereinstimmt mit dem auf die Volumseinheit bezogenen Werthe der elektrostatischen Energie im selben Punkte.

Ausser diesen Vorzügen des vorliegenden Zwangszustandes, die elektrostatischen Erscheinungen mit grosser analytischer Einfachheit zu beschreiben und mit der physikalischen Natur der Flüssigkeiten im Einklange zu stehen, scheinen auch wesentliche Ergebnisse der Quincke'schen experimentellen Untersuchung „Über elektrische Ausdehnung“, [1] wenn dies Erscheinungsgebiet als elektrostatisches aufgefasst werden darf, diesen Zwangszustand zu unterstützen.

Insbesondere ist in dieser Hinsicht hervorzuheben das durch die Versuche mit dem Glasfadencondensator [2] unzweideutig erwiesene Bestreben des Dielektricums, sich quer gegen die Kraftlinien zu dehnen; [3] ferner der Umstand, dass an allen Stellen gleichen elektrischen Kräften ausgesetztes Glas eben so wenig wie gleichförmig erwärmtes Glas Doppelbrechung zeigt, [4] während eine solche bei Supposition des Maxwell'schen Zwangszustandes zu erwarten wäre.

---

[1] Quincke, Wiedemanns Annalen. X. Band, S. 161 — 202, S. 374 — 414, S. 513 — 553.

[2] l. c. S. 374 — 414.

[3] Siehe hierüber v. Helmholtz, Wied. Ann. Band XIII. S. 386 und insbesondere S. 405.

[4] Quincke, l. c. §. 34 und §. 35, und Resultate 14 und 15 S. 553. Siehe ferner §. 38, S. 547 und 549 und Resultat 10, S. 552.

Über das Verhalten der Haloïdverbindungen des Silbers gegen das Sonnenspectrum und die Steigerung der Empfindlichkeit derselben gegen einzelne Theile des Spectrums durch Farbstoffe und andere Substanzen.

Von Prof. Dr. **Joseph Maria Eder.**

(Chemisches Laboratorium der Staatsgewerbeschule, I., Annagasse.)

(Mit 14 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. December 1884.)

Die Wirkung des Sonnenspectrums auf Silbersalze studirten zuerst Scheele 1777[1], dann Senebier 1782[2] beim Chlorsilber, worauf 1801 die Entdeckung der chemisch wirkenden ultravioletten Strahlen durch Ritter[3] und fast gleichzeitig durch Wollaston[4] ebenfalls mittelst Chlorsilber geschah. Herschel[5] untersuchte genauer das Verhalten verschiedener Silber- und Eisensalze, Blumenfarbstoffe etc. im Spectrum (1840), ohne dass

---

[1] Scheele, „Aeris atque ignis examen chemicum". Upsala 1777, pag. 62; Deutsche: „Chemische Abhandlung von der Luft und dem Feuer." 1. Aufl. 1777; 2. Aufl. 1782.

[2] Senebier: „Mémoires physico-chimiques sur l'influence de la lumière solaire pour modifier les êtres des trois règnes de la nature." Genève 1782.

[3] Zuerst am 22. Februar 1801 in dem „Intelligenzblatt der Erlanger Literatur-Zeitung" veröffentlicht.

[4] Philosophical Transact. 1802, pag. 379. — Gilbert's Annalen, Bd. XXI, pag. 416 und Bd. XXXIX, pag. 291. — Diese und die oben erwähnten Abhandlungen sind in Eder's „Geschichte der Photochemie" (Photographische Correspondenz 1881 u. ff.) im Auszuge mitgetheilt.

[5] Philosophical Transact. 1840 und 1841 und Lond. Edinb. and Dubl. Philos. Jour. 1843, Art. XIX, pag. 44.

er Fraunhofer'sche Linien erhalten hätte. Diese photographirte zuerst Becquerel[1] im Jahre 1842 und 1843. Becquerel sowie Draper (1843)[2] arbeiteten hauptsächlich mit Daguerreotypplatten, mittelst welcher Letzterer auch die infrarothen Strahlen entdeckte.

Crookes[3] untersuchte zuerst 1853 und 1854 die Einwirkung des Sonnenspectrums auf Jodsilber und Bromsilber im nassen Collodionverfahren mit saurer Pyrogallol- und Eisenvitriol-Hervorrufung. Ihm folgten J. Müller (1856)[4], Helmholtz (1857)[5], sowie in neuerer Zeit Rutherfurd, Mascart, H. C. Vogel, Cornu u. A.

Während die Genannten in der Regel die möglichst vollständige Darstellung der Linien im Sonnenspectrum bezweckten, wendeten Schultz-Sellak[6], H. W. Vogel[7] und Abney[8] ihr Augenmerk auf die Empfindlichkeit verschiedener Silberverbindungen beim nassen und trockenen Collodionprocess gegen das Spectrum und die beiden letzteren, sowie Schumann[9], dehnten ihre Beobachtungen auch auf Bromsilbergelatine-Emulsionen aus. Da jedoch Widersprüche in den Angaben der drei Letztgenannten vorkommen und die Silberemulsionen in Gelatine („Gelatinetrockenplatten“) in vielen Beziehungen noch wenig studirt sind, so stellte ich nähere Untersuchungen darüber an.

Bei diesen Untersuchungen, welche die Empfindlichkeit verschiedener Silberverbindungen gegen Strahlen von ver-

[1] Biblioth. univers. de Genève 1842, Bd. 40. Auch Becquerel. „La Lumière“. 1867, Bd. 1, pag. 138.

[2] Philosoph. Magaz. (3). Bd. 22, pag. 360.

[3] Journ. Photograph. Society. London 1853. Bd. 1, pag. 77 und 98; 1854. Bd. 2, pag. 293; Poggend. Annal. Bd. 97. pag. 616.

[4] Poggend. Annal. Bd. 97, pag. 135.

[5] Verhandlungen natur. Versamml. Rheinl. 1859, S. 17; nach Kreutzer's Jahresbericht. Photogr. 1857, pag. 328.

[6] Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. Bd. 4, pag. 210 u. ff.

[7] Poggend. Annal. Bd. 153, pag. 223 und die späteren Jahrgänge; ferner Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. 1874 u. ff. Bd.

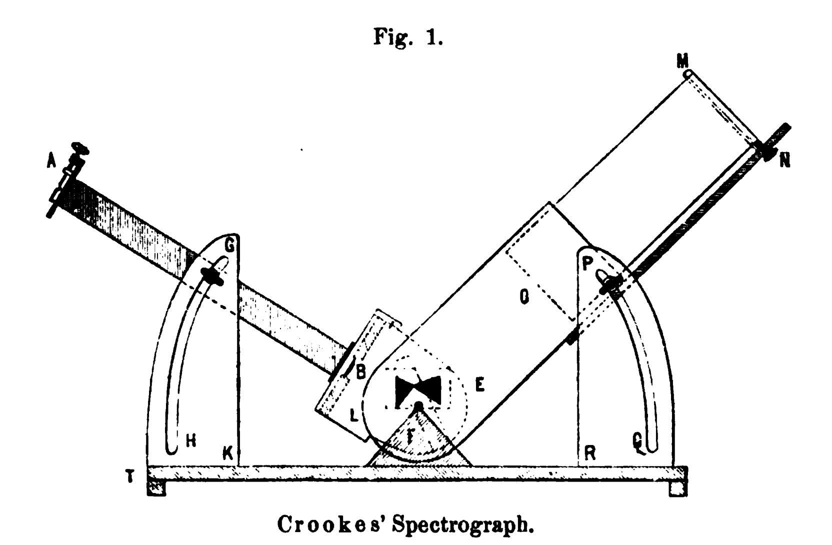
[8] Photographic News. 1882. pag. 181 u. ff. nach London Royal Society. Proc.

[9] Photograph. Wochenblatt. 1882. 1883 u. ff. Bd

schiedener Wellenlänge und Bestimmung der Maximalwirkung zum Zwecke haben, ist die Beschaffenheit des Spectrographen von grosser Bedeutung. Je nach der Durchlässigkeit der Prismen und Linsen verschiebt sich das Maximum der Wirkung bedeutend, sowie die Ausdehnung gegen Ultraviolett.

Da Stokes schon um das Jahr 1852 gefunden hatte (mittelst fluorescirender Substanzen), dass Quarz am meisten Ultraviolett durchlässt, bediente sich Crookes bereits 1854 desselben zu seinen Arbeiten (a. a. O.). Er wendete zwei Bergkrystallprismen mit einem brechenden Winkel von 55° an, welche in der Weise geschnitten waren, dass die Strahlen den Bergkrystall in der Stellung auf das Minimum der Ablenkung parallel zur optischen Axe durchdrangen, d. h. sie waren senkrecht zur Axe geschnitten. Fig. 1 zeigt die Skizze des Crookes'schen Apparates. *A* ist ein

Fig. 1.



Crookes' Spectrograph.

verstellbarer Spalt; *B* die Collimatorlinse, *L* und *E* die bei *F* verschiebbaren Prismen, *O* die photographische Camera. Bei *MN* befand sich die lichtempfindliche Platte. Bei *GKT*, sowie *PQR* sind die einzelnen Theile verschiebbar.

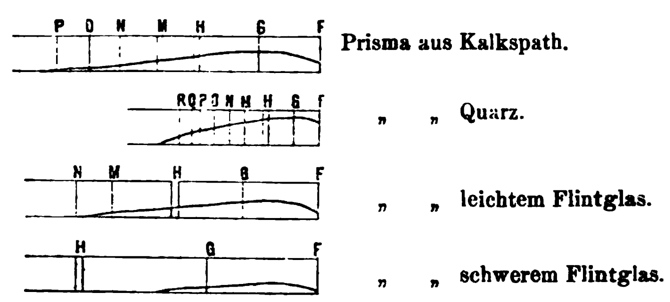
Als sehr durchlässig für Ultraviolett gilt auch Kalkspath (isländischer Spath), dessen sich Mascart bediente, als er mittelst eines Norbert'schen Beugungsgitters unter Anwendung

von Kalkspathprismen das Sonnenspectrum bis zu *T* photographirte.[1] Hughins photographirte mittelst eines Kalkspathprismas und zweier Quarzlinsen die Spectra der Sterne[2]; Cornu hatte Anfangs einen ähnlichen Apparat, entwarf aber seine Tafel über das ultraviolette Sonnenspectrum nach Aufnahmen mit Quarzprismen, welche aus zwei Hälften von rechts und links drehendem Quarz mit einem brechenden Winkel von je 40° zusammengekittet waren.[3]

Der Einfluss der Substanz des Prismas auf die Ausdehnung des Spectrums sowie die Lage des Maximums der Wirkung auf Bromsilbergelatineplatten geht aus Fig. 2 deutlich hervor. Dieselbe zeichnete ich nach den von Herrn Ingenieur Schumann in Leipzig mit grosser Sorgfalt hergestellten und noch nicht veröffentlichten vergleichenden Aufnahmen mittelst eines Spectrographen mit Quarz-Kalkspath-Linsen und verschiedenen Prismen von 60°.

Fig. 2.

Quarz-Kalkspath-Objective.



Wirkung des mittelst verschiedener Prismen erzeugten Sonnenspectrums auf Bromsilbergelatine.

---

[1] Compt. rend. 1864. Bd. 58, S. 111; Annal. Scient. de l'école norm. 1864; Becquerel, „La Lumière“ 1868, Bd. I, S. 140; Schellen, Spectralanalyse“. 1883, S. 426.

[2] Compt. rend. Bd. 91, S. 70.

[3] Cornu: „Sur le spectre normale du soleil, partie ultraviolette. 1882. (Ganthiers-Villars, Paris), worin die Apparate genau beschrieben sind. Ferner s. Cornu's Abhandlungen: Annal. de l'école norm. 1874 (2). Bd. 3, S. 421; Arch. des sc. phys. et nat. (2), Bd. 53 (1876), S. 50; Compt. rend. 1878, S. 101; Beibl. zu d. Annal. Phys. Chem. 1878, 8. 339.

Die Länge der Spectren und der Abstand der Fraunhofer'schen Linien in Fig. 2 zeigt die Verschiedenheit der Dispersion von Prismen aus Quarz, Kalkspath, Schwerflint- und Leichtflintglas. Die Erhebung der Curve repräsentirt die Intensität des photographischen Bildes und die Lage der Maximalwirkung auf Bromsilbergelatine.

Mittelst des Quarzprismas[1] erhält man ein Spectrum bis über *R* ein Ultraviolett (nach Cornu's Benennung); mit Kalkspath[2] erstreckt sich bei gleicher Belichtung die Wirkung nicht so weit ins Ultraviolett, nämlich bis über *P*; mit Schwerflintglas reicht die Wirkung nicht einmal bis zur Grenze des sichtbaren Violett, nämlich bis zur Hälfte der Distanz von *H* bis *G*; mit Leichtflintglas dagegen bis gegen *N* in Ultraviolett. Das Maximum der Wirkung lag bei Quarz und Kalkspath weiter gegen *G*, bei Glas mehr gegen *F* zu.

Flussspath, welchen Cornu mit Quarz zu achromatisirten Linsen zur Photographie des ultravioletten Spectrums benützte,

---

[1] Ein einfaches senkrecht zur Axe geschnittenes Quarzprisma gab bei Herrn Schumann's Untersuchungen die Linien des Spectrums doppelt, trotzdem die Strahlen den theoretisch richtigen Gang hatten, wie oben bei Crookes' Apparat erwähnt wurde. Das Übel, welches eine Folge der Doppelbrechung ist, kann nicht nur nach Cornu's Methode durch Zusammenkitten eines rechts- und eines linksdrehenden Prismas beseitigt werden, sondern auch nach Schumann's Mittheilung durch zwei getrennte Quarzprismen von je 60°, wovon das eine aus rechtsdrehendem und das andere aus linksdrehendem Quarz senkrecht zur Axe geschnitten ist. Die Dispersion ist dann ungefähr dieselbe, wie bei einem Kalkspathprisma, aber die Ausdehnung nach der brechbareren Seite grösser. Schumann fand keinen Unterschied zwischen biconvexen und plancovexen Linsen im Spectrographen, während Cornu planconvexe vorschreibt. Die Linsen aus Quarz verlangen eine ganz bedeutende Schiefstellung der Platte zur Rohraxe der Camera, nämlich 22 bis 24°. Es gelang jedoch Schumann, dies durch Blenden von 2 bis 3 Decimeter zu beseitigen; in diesem Falle kann die Platte senkrecht zur Rohraxe stehen, aber der Lichtverlust ist bedeutend.

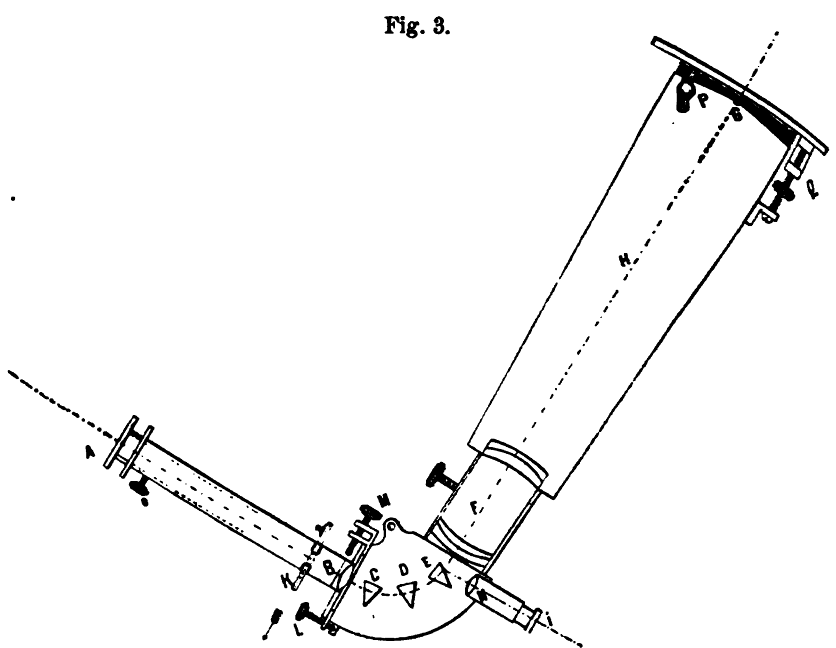
[2] Das Spectrum mit einem Kalkspathprisma (senkrecht zur Axe geschnitten) zeigte bei Herrn Schumann's photographischen Aufnahmen die Frauenhofer'schen Linien völlig scharf; mit zwei oder mehreren konnte er trotz aller Sorgfalt keine klaren Spectra erhalten. Die schönen Liniengruppen im Ultraviolett sahen dann theilweise wie gewundene Säulenschäfte aus.

fand Schumann gleichfalls sehr durchlässig für Ultraviolett, scheint jedoch von Quarz übertroffen zu werden.

Herr Schumann theilt mir jedoch auf Grund seiner eingehenden Versuche mit, dass er einfache Quarzlinsen an Stelle von achromatischen Quarz-Kalkspath-Linsen zur Photographie des Spectrums dort vorzieht, wo es sich um klare Definition von Linien handelt. Die Linsen sollen für solche Zwecke nicht verkittet sein, weil Canadabalsam Ultraviolett verschluckt.

Wie schädlich auch ganz dünne Glasgefässe für das Studium des ultravioletten Spectrums sind, geht aus den Versuchen Herrn Schumann's hervor, bei welchem eine Deckglasplatte aus Glas von 0·125 Mm. Dicke schon ein Drittel der äusseren ultravioletten Strahlen des Magnesiumfunkens (über $\lambda = 277$) verschluckt; dieses Ergebniss ist für die Photographie der Glasspectra durch geeignete Geissler'sche Röhren von Belang.

Fig. 3.



Grosser Steinheil'scher Spectrograph.

Bei meinen spectrographischen Versuchen stand mir ein „grosser Spectrograph" von Dr. Steinheil in München zu Gebote, sowie ein kleiner Spectrograph mit Prismen à vision

directe gleichfalls von Steinheil. Beide Instrumente waren durch die Wiener Photographische Gesellschaft aus einer ihr verliehenen Ministerialsubvention angekauft worden und bei der Anfertigung nach meinen Angaben vorgegangen worden. Die optische Construction war durch Herrn Dr. Steinheil auf Grund seiner neueren Erfahrungen ausgeführt worden.

In Fig. 3 ist der grosse Spectrograph im Durchschnitt abgebildet. Das Licht, welches zunächst den bei *O* verstellbaren Spaltschlitten *A* im Brennpunkte des Objectives *B* passirt, fällt auf die drei Prismen *C*, *D* und *E*, welche alle aus einem leichten Flintglase bestehen und einen brechenden Winkel von 50° besitzen. Das dadurch entstehende Spectrum wird von einem photographischen Objective *F* auf die Ebene *G* am Ende der Camera *H* geworfen, wo dasselbe photographirt werden kann.

Das Objectiv des Spaltschlitten-Fernrohres hat 34 Mm. Öffnung und 325 Mm. Brennweite, während das photographische aplanatische Objectiv *F* 54 Mm. Öffnung und 600 Mm. Brennweite besitzt. Die Linsen sind aus solchen Glassorten zusammengesetzt, die möglichst wenig blaue bis ultraviolette Strahlen absorbiren, wesshalb eine grosse Helligkeit im blauen und violetten Theil erlangt wird.

Das Brechungsvermögen der Prismen ist für die Linien:

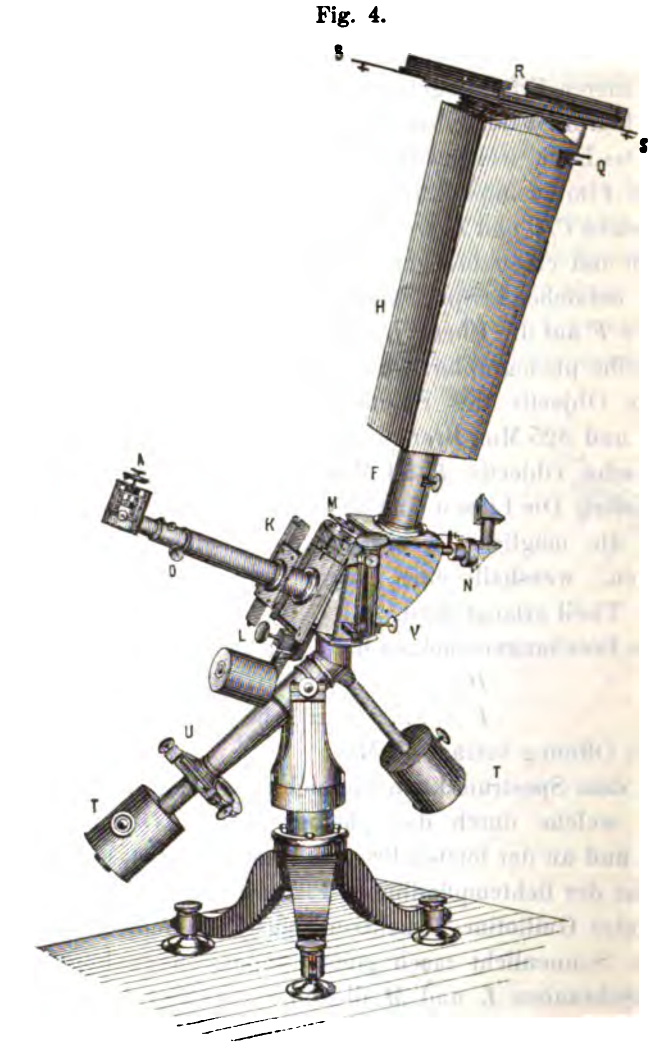
$$D \ldots\ldots n = 1\cdot57852$$
$$F \ldots\ldots n = 1\cdot58829.$$

Ihre Öffnung beträgt 47 Mm.

Mit dem Spectrum kann zugleich eine Scala *J* photographirt werden, welche durch das photographische Objectiv *N* vergrössert und an der letzten Prismenfläche reflectirt, ebenfalls auf die Ebene der lichtempfindlichen Platte geworfen wird. *K* ist ein sogenannter Guillotine-Momentverschluss, um beim Arbeiten mit directem Sonnenlicht rasch genug exponiren zu können. Die beiden Schrauben *L* und *M* dienen zur Verstellung des Spaltschlitten-Fernrohres, um bei der Photographie specieller Theile im Spectrum dieselben in die Mitte der Platte und auf das Minimum der Prismenablenkung zu bringen. Bei *P* und *Q* kann die Ebene der lichtempfindlichen Platte geneigt werden. Zu bemerken ist noch, dass der Spaltschlitten meines Apparates eine genaue Einstellung der Spaltöffnung auf $^1/_{1000}$ Mm. gestattet; die

Schneiden der Spaltränder sind von Platin und eine Mikrometerschraube vermittelt deren Bewegung.[1] Eine Spaltöffnung von 0·02 Mm. gab sehr gute Schärfe der Fraunhofer'schen Linien;

Fig. 4.



Steinheil's grosser Spectrograph.

seltener arbeitete ich mit einer Spaltöffnung von 0·04 bis 0·1 Mm. womit die Linien schon viel Schärfe verlieren.

---

[1] Der beschriebene Spaltschlitten ist in Deutschland patentirt (Deutsches Reichspatent Nr. 17092).

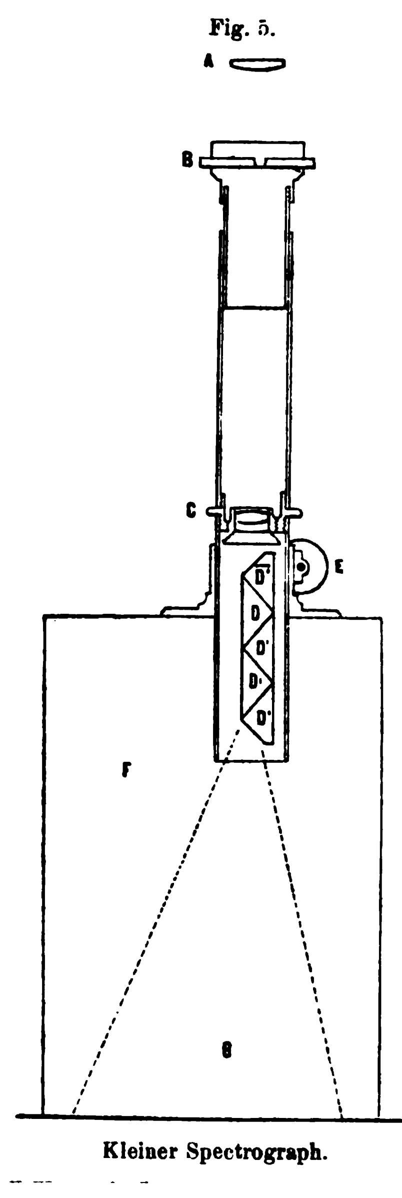
Fig. 4 zeigt die Aussenansicht des Spectrographen. Bei *A* ist der Spalt, welcher der Linse *B* mittelst des Triebes *O* genähert oder von ihr entfernt werden kann. Der Schieber *K* (Guillotine-Momentverschluss) hat im Innern eine runde Öffnung und kann durch eine Spiralfeder rasch vorbeigezogen werden, so dass momentane Belichtung stattfindet; jedoch kann der Schieber mittelst einer Sperrvorrichtung auch beliebig lange offen erhalten werden. *L* und *M* gestatten die Verschiebung des Spaltschlittenfernrohres und die Änderung der Neigung desselben zu den Prismen. Innerhalb des Messingkörpers befinden sich drei Prismen. *N* enthält die Vergleichscala; *F* ist das photographische Objectiv; *H* die Holzcamera. Bei *R* wird die Cassette mit der empfindlichen Platte eingeführt; auf der in einer solchen Cassette befindlichen Platte von 12 und 16 Ctm. Seitenlänge können durch Verschiebung drei Spectren hintereinander aufgenommen werden. *SS* sind Blenden (Schieber aus geschwärztem Messing), welche bestimmt sind, das blaue oder rothe Ende des Spectrums nach Bedarf abzuschneiden. Das ganze Instrument ist mittelst der Gewichte *TT* ausbalancirt und kann mittelst der Schrauben *U* und *V* ohne Erschütterung nach der Sonne gedreht werden. Die Anwendung eines Heliostaten, welcher immer Änderungen in der Qualität des Sonnenlichtes bewirkt,[1] ist dadurch umgangen.

Die Länge des Spectrums, welches dieser Apparat gibt, beträgt von der Fraunhofer'schen Linie *A* bis *N* 12 Ctm.; über *N* hinaus konnte das Ultraviolett nicht mehr gut photographirt werden, weil die Absorption der Strahlen, deren Wellenlänge unter 350 Mm. liegt, zu gross war. Die Linien des Spectrums sind sehr scharf und gut definirt. Die Dauer der Belichtung schwankt natürlich bedeutend mit der Empfindlichkeit der Präparate. Auf Bromsilbergelatineplatten wurde gegen das directe Sonnenlicht und eine Spaltöffnung von 0·04 Mm. „momentan" (d. i. circa $^1/_{10}$ bis $^1/_{20}$ Secunde) bis 1 Secunde belichtet; mit Eosinfarben gefärbte Platten brauchten eine 2- bis 4mal, mit Cyanin

---

[1] Silberspiegel reflectiren nur die weniger brechbaren Strahlen, löschen aber die ultravioletten aus; Platin gibt dagegen in Schichten, welche noch vollkommen durchsichtig sind, einen ausgezeichneten Spiegel für Ultraviolett (De Chardonnet, Cornu).

Fig. 5.



Kleiner Spectrograph.

eine etwas längere, mit Jodgrün, Methylviolett etc. gefärbte Platten sogar eine 10 bis 160mal längere Belichtung, sobald die Lichtwirkung im rothen (resp. gelben) Theile hervortreten sollte.[1]

Richtet man den Spectralapparat auf den blauen Himmel oder Wolken, so erhält man niemals so scharfe Linien als im Sonnenlicht; sehr gute optische Sensibilisatoren äussern zwar dann auch noch ganz deutlich ihre Wirkung (z. B. Eosin), schwache (z. B. die meisten grünen Farbstoffe) aber zeigen häufig so geringe Wirkung, dass man dieselbe leicht übersehen kann.

Der kleine Spectrograph war mit einigen Änderungen nach H. W. Vogel's Angaben[2] construirt; es ist ein Spectroskop à vision directe vor eine Camera befestigt und das Spectrumbild wird (ohne Hilfe eines photographischen Objectives) auf der nassen Scheibe entworfen.

In Fig. 5 ist mein kleiner Spectrograph (von Dr. Steinheil) abgebildet. Vor dem

[1] Z. B. brauchen Eosinplatten 1 bis 5 Secunden Exposition, Jodgrünplatten 1 bis 3 Minuten.

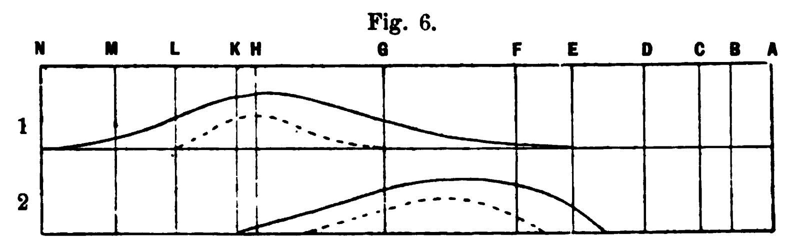
[2] Die genaue Beschreibung s. Eder's „Ausführliches Handbuch der Photographie". Halle 1884, Bd. 1, S. 42; ferner Schellen, „Spectralanalyse. 1883, S. 440.

Spalt *B* ist eine Cylinder-Sammellinse *A* angebracht, welche das Licht auf den Spalt concentrirt. Das Objectiv *C* des Spaltschlitten-Fernrohres hat 81 Mm. Brennweite. Der Prismensatz à vision directe besteht aus 3 Crownglasprismen *D'* von 100° 20′0″ brechendem Winkel[1] und 2 Flintglasprismen *D* von 105° 0′0″ brechendem Winkel[2]; die Zerstreuung von *D*—*F* ist gleich 4° 6′40″, also für das ganze Spectrum *A*—*H* circa 15°. Das Spectrum wird in der Camera *F* photographirt: bei *G* befindet sich die empfindliche Platte, welche in einer Schiebercassette fünfmal verschoben werden kann. Die Schraube *E* ermöglicht das Verschieben des Spectroskopes zum Scharfeinstellen der Linien.

Ein solches Instrument gibt fast gar kein Spectrum von Ultraviolett, sondern wenig über *H* hinaus; es ist leichter zu handhaben als der grosse Spectrograph, gibt aber weniger klare Spectra.

Der Einfluss beider Instrumente auf die Vertheilung der chemischen Wirkung des Sonnenspectrums ist ein sehr bedeutender. Die im Spectroskop à vision directe combinirten Crown-Flintglasprismen schwächen schon das sichtbare Violett sehr, wie aus Fig. 2 hervorgeht; dadurch sinkt die Wirkung des damit erhaltenen Sonnenspectrums auf Bromsilber- und Chlorsilber-

Fig. 6.



Curve 1. Spectrumbild auf Chlorsilbergelatine mit dem grossen Spectrographen. — Curve 2. Dasselbe mit dem kleinen Spectrographen à vision directe.

Gelatineemulsion an Violett auffallend. Am stärksten tritt dies bei Chlorsilbergelatine (mit Eisencitrat-Entwickler) hervor, welche

---

[1] Das Brechungsvermögen des Flintglases der Prismen ist für

$$n_D = 1{\cdot}6533$$
$$n_F = 1{\cdot}6669.$$

[2] Das Brechungsvermögen des Croweglases der Prismen ist für

$$n_D = 1{\cdot}5107$$
$$n_F = 1{\cdot}5168.$$

im grossen Spectrographen mit Flintglasprismen das Maximum der Wirkung bei *H* am Beginne des Ultraviolett zeigt (Fig. 6 Curve 1; die punktirte Linie deutet das Resultat bei kürzerer Belichtung an), während im kleinen Spectrographen (à vision directe) das Maximum zwischen *G* und *F* liegt (Fig. 6, Curve 2). Die Verschiedenheit der beiden Curven, wie sie Fig. 6 zeigt, sind so gross, dass man kaum glaubt dasselbe Silbersalz vor sich zu haben.

In meinem grossen Spectralappara verschiebt sich sogar das Maximum der Wirkung in bemerkbarer Weise, je nachdem das äussere Violett oder Blaugrün in die Mitte des Gesichtsfeldes gebracht wird. Es ist somit die Beurtheilung verschiedener Modificationen des Brom- und Chlorsilbers nach dem Maximum der Empfindlichkeit eine unsichere und nur von relativem Werth.[1]

Um so auffallender ist es, dass die Maxima der sensibilisirenden Wirkung von Farbstoffen im Roth, Gelb und Grün so energisch auftreten, dass sie (soweit meine Beobachtungen reichen) in jedem Apparat an derselben Stelle auftreten, allerdings je nach der Lichtvertheilung mehr oder weniger intensiv.

Meine nachstehenden Versuche wurden mit dem grossen Steinheil'schen Spectrographen ausgeführt und sind somit sämmtlich untereinander vergleichbar.

A. Bromsilber in Form von Gelatineemulsion.

Mischt man Silbernitratlösung mit überschüssigem Bromammonium bei Gegenwart von Gelatine (in rothem Licht), so bildet sich „feinzertheiltes pulveriges Bromsilber“[2], welches in der Durchsicht roth erscheint. Mit dieser Emulsion[3] überzogene und

---

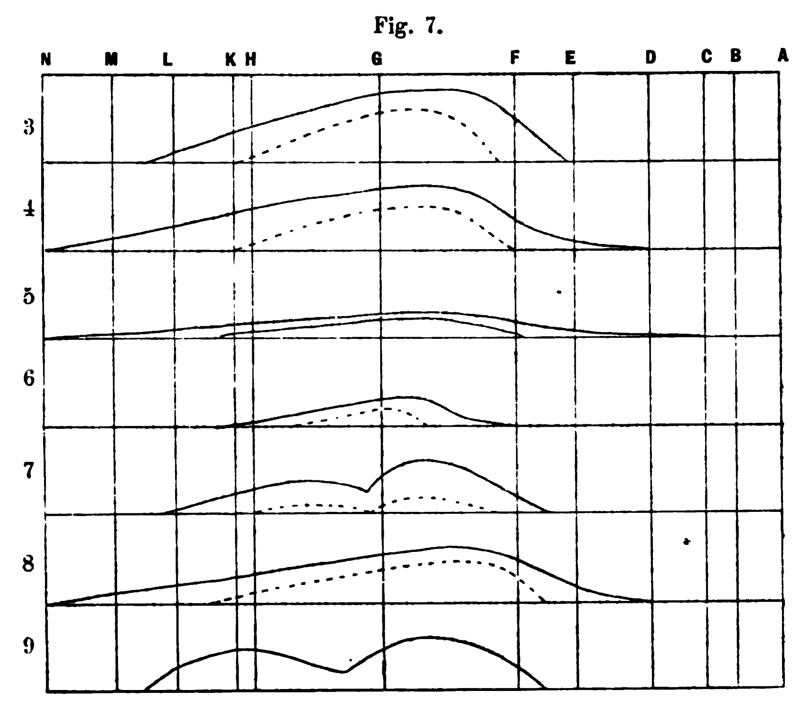
[1] Z. B. die Eintheilung des Bromsilbers nach Prof. H. W. Vogel in blauempfindliches und indigoempfindliches (Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. 1881, Bd. 14, S. 1024), welche übrigens aus den Arbeiten Abney's nicht hervorgeht (Proced. Royal. Soc. 1881, S. 217; Photographic News. 1882).

[2] S. meine Abhandlung „Photochemie des Bromsilbers“ (LXXXI. Bd. der Sitzb. der Wiener Akad. der Wissensch. II. Abth. Aprilheft 1880; auch Monatshefte für Chemie 1880).

[3] Folgender Vorgang zur Herstellung solcher Emulsion erweist sich als praktisch: 30 Grm. Silbernitrat wurden in 250 CC. Wasser gelöst und soviel Ammoniak zugesetzt, bis der Anfangs entstandene Niederschlag sich wieder klar auflöst. Anderseits werden 20 Grm. Bromammonium und 30

getrocknete Platten zeigen nach kurzer Exposition an das Sonnenspectrum und Entwicklung mit Eisenoxalat [1] oder alkalischem

Fig. 7.



3—5. Spectrumbild auf verschiedenen Modificationen des Bromsilbers. — 6 auf Jodsilbergelatine. — 7 auf gemischter Jodsilbergelatine+Bromsilbergelatine. — 8 auf zusammendigerirtem Jodbromsilber. — 9 auf gemischten Jodsilber+Chlorsilbergelatine.

---

bis 45 Grm. Gelatine („harte Gelatine für Emulsionen" von der Gelatinefabrik in Winterthur) in der Wärme gelöst und hierauf beide Lösungen bei 30 bis 35° C. gemischt, indem man die Silberlösung in kleinen Portionen in die Bromsalzlösung einträgt und heftig schüttelt. Die Emulsion wird dann in eine flache Schale (welche in kaltem Wasser steht) gegossen, nach dem Erstarren in kleine Stücke zerschnitten und mit Wasser gewaschen. — Weitere Handgriffe und Details s. Eder's „Theorie und Praxis der Photographie mit Bromsilbergelatine". Wien 1881, sowie dessen Ausführliches Handbuch der Photographie (8. Heft: „Die Photographie mit Bromsilbergelatine").

[1] 1 Vol. kalt gesättigte Eisenvitriollösung, 4 Vol. kalt gesättigte neutrale Kaliumoxalatlösung. (Nähere Angaben s. Eder's Photogr. mit Bromsilbergelatine a. a. O.)

Pyrogallol[1] eine Wirkung von Violett bis Blaugrün (*H* bis nahe zu *F*) mit dem Maximum der Wirkung von $G\,{}^1/_3 F$[2]. Bei längerer Belichtung schreitet die Wirkung beiderseits (bis *M* und *E*) vor. Die Curve 3, Fig. 7 gibt ein Bild von den Intensitätsverhältnissen der Wirkung des Spectrums, bezogen auf die Fraunhofer'schen Linien (die punktirte Linie die Schwärzung nach kurzer, die voll ausgezogene nach langer Belichtung).

Digerirt man die oben erwähnte ammoniakalische Emulsion bei 30 bis 40° C. durch eine halbe Stunde, oder kocht sie, falls man das Ammoniak wegliess und die Reaction sauer war, eine halbe Stunde, so geht das Bromsilber in die „feinzertheilte-körnige Modification" über; das Korn des Bromsilbers vergrössert sich hiebei, lässt in dünner Schicht blaues Licht durch und die Gesammtempfindlichkeit gegen weisses Licht steigt, was in meiner früheren Abhandlung a. a. O. beschrieben wurde. Zugleich rückt die Empfindlichkeit gegen Violett und Grün im Spectrum vor; das Maximum der Empfindlichkeit geht etwas weiter gegen *F*. ($G\,{}^1/_2 F$). Die Wirkung erscheint aber zwischen G und *F* nicht mehr so intensiv; die Curve der Spectralwirkung verflacht sich und erstreckt sich bei längerer Exposition einerseits bis *N* anderseits bis *D* und darüber hinaus (Curve 4 mit kurzer und längerer Exposition.)

---

[1] Als guter Entwickler ist der Glycerin-Pyrogallol-Entwickler zu empfehlen: Man bereitet zwei Vorrathslösungen: *A*. 10 Grm. Pyrogallol, 10 Grm. Glycerin werden in 100 CC. starken Alkohol gelöst; die Mischung hält sich einige Monate. *B*. 20 CC. Ammoniak ($d = 0{\cdot}91$), 10 Grm. Glycerin 6 Grm. Bromammonium und 100 CC. Wasser werden gemischt. Unmittelbar vor dem Gebrauche mischt man 100 CC. Wasser, 3 bis 4 CC. der Lösung *A*, 3 bis 4 CC. der Lösung *B*. Wünscht man mehr Klarheit und Contraste, so kann man noch 1 CC. Bromammonium (1:10) zusetzen; die Intensität des Bildes steigt, wenn man in obiger Vorschrift nur die Hälfte Wasser nimmt.

Sehr gut entspricht auch der Potaschen-Entwickler: *A*. 90 Grm. reines Kaliumcarbonat und 25 Grm. neutrales Natriumsulfit werden in 200 CC. Wasser gelöst; *B*. 12 Grm. Pyrogallol, 1 Grm. Citronensäure, 25 Grm. Natriumsulfit werden in 100 CC. Wasser gelöst. Vor dem Gebrauche mischt man 100 CC. Wasser, 2 bis 3 CC. der Lösung *A* und 2 bis 3 CC. der Lösung *B*. — Vor dem Fixiren ist es zweckmässig, die Platten in concentrirter Alaunlösung einige Minuten zu baden, wodurch die gelbliche Färbung der Matrizen verschwindet.

[2] Das heisst ein Drittel der Distanz von *G* nach *F*.

Bei einer 3 bis 10mal längeren Digestion als zur Erzielung des erwähnten Resultates nothwendig ist, nähert sich das Bromsilber der Zersetzung; zugleich ändert sich die Curve der Spectralwirkung. Sie verflacht sich immer mehr, liefert kein scharf erkennbares Maximum [1]; dem photographischen Bilde mangelt die Intensität. Es steigt die Empfindlichkeit gegen weisses Licht, sowie gegen die weniger brechbaren Strahlen (Curve 5).

Curve 5 entsteht bei längerer Digestion der soeben erwähnten Emulsion, aber noch sicherer, wenn man den Gelatinegehalt der Flüssigkeit während der Digestion sehr vermindert, z. B. auf $^1/_2$ Proc. von der Flüssigkeit. Dazu kann die in der vorigen Note gegebene Emulsionsvorschrift benützt werden, indem man während der $^1/_2$ oder $^3/_4$stündigen Digestion nur 2 Grm. Gelatine nimmt und den Rest erst nachher (unmittelbar vor dem Erstarren) zusetzt. Ähnliche Resultate liefert auch die unter dem Namen „Henderson's kalte Emulsion" bekannte Darstellungsmethode. [2] Die Gesammtempfindlichkeit solcher Emulsionen ist sehr gross, die Wiedergabe der Details in den schwach erleuchteten Stellen gut, dagegen verschwimmen die hellen Lichter; bei der Photographie von Metallspectren wird sie indessen gute Dienste leisten.

---

1 Photometrische Versuche in einem Scalenphotometer (s. Eder's Ausführliches Handbuch der Photographie. 1883. Bd. I, S. 183) zeigen, dass solche Bromsilbergelatineschichten schon nach sehr kurzer Belichtung ein photographisches entwicklungsfähiges Bild geben, jedoch steigt die Intensität des Bildes nicht proportional mit der Lichtwirkung, sondern erreicht bald ein Maximum, welches bei stärkerer Lichtwirkung nicht überschritten werden kann. Es mangelt deshalb solchen Bildern die Plastik in den hell erleuchteten Partien.

1 Man löst 1 Grm. Gelatine, 2 Grm. kohlensaures Ammoniak, 15 Grm. Bromammonium, 0·2 Grm. Jodkalium in 50 CC. Wasser in der Wärme auf und setzt dann 5 CC. Ammoniak ($d = 0·91$) und 140 Ctm. Alkohol zu. Hierauf wird eine Lösung von 20 Grm. Silbernitrat in 100 CC. Wasser unter Schütteln allmälig eingetragen und 10 bis 12 Stunden (unter öfteren Schütteln) bei gewöhnlicher Zimmertemperatur in einem finstern Raum stehen gelassen. Dann werden 30 Grm. harte Gelatine durch eine halbe Stunde im Wasser quellen gelassen, geschmolzen, zur Emulsion gegeben und das Gemisch in $^1/_2$ bis 1 Liter Alkohol gegossen, worin sich die Bromsilbergelatine unlöslich ausscheidet. Man zerkleinert sie, wäscht 24 bis 48 Stunden in fliessendem Wasser, oder noch länger in stehendem Wasser, und verwendet sie zum Überziehen von Platten.

Nach längeren Versuchen gelang es mir, mit Sicherheit diese Wirkungscurven durch geänderte Darstellungsweisen der Emulsion zu erzielen.

Curve 3 tritt am sichersten auf, wenn das Bromsilber in dicker Flüssigkeit (bei Gegenwart von viel Gelatine z. B. 5 Perc. von der Flüssigkeit) und etwas Ammoniak nur kurz digerirt wird (Vorschrift s. o.).

Curve 4 ergibt sich aus 3 bei längerer Digestion. Die meisten Gelatineemulsion-Trockenplatten des Handels, welche in der praktischen Photographie verwendet werden, geben ähnliche Spectrumbilder. Emulsionen, welche solche Curven geben, eignen sich im Allgemeinen am besten zu Spectraluntersuchungen, wie die vorliegenden. Deshalb sei hier meine erprobte Methode mitgetheilt.[1]

Diese Fälle zeigen deutlich, dass sich das spectrale Verhalten des Bromsilbers mit seiner molecularen Structur ändert, je nachdem es aus dick- oder dünnflüssigen Lösungen gefällt ist.

B. Jodsilber in Form von Gelatineemulsion

mit überschüssigem Jodkalium gefällt, ist viele hundert Mal weniger lichtempfindlich als Bromsilber. Bei sehr langer Belichtung erhält man nach dem Hervorrufen mit alkalischen Pyrogallol ein schwaches Bild bei *G*, welches sich noch bei längerer Belichtung bis gegen *H* und gegen *F* ausdehnt und ein Maximum bei *G* $^1/_3$ *F* oder *G* $^1/_2$ *F* hat (Curve 6).

---

[1] 30 Grm. Silbernitrat werden in 250 CC. Wasser gelöst und soviel Ammoniak zugesetzt, bis der entstandene Niederschlag sich wieder auflöst. Anderseits löst man 20 bis 22 Grm. Bromammonium, 0·2 bis 0·3 Grm. Jodkalium und 40 Grm. harte Winterthur-Gelatine in 250 CC. warmem Wasser. Man giesst unter Schütteln allmälig die Silberlösung in die Gelatinelösung, wobei die Temperatur beider Lösungen 30° C. nicht übersteigen soll, digerirt eine halbe Stunde, giesst in eine flache Schale und lässt völlig erstarren. Nach 6 bis 12 Stunden wird zerkleinert, 10 Stunden in fliessenden Wasser gewaschen und dann werden die Glasplatten mit der geschmolzenen Emulsion überzogen. Legt man die gewaschene Emulsion in viel Alkohol, so wird sie entwässert und hält sich im Finstern monatelang. — Der geringe Jodgehalt macht die Bilder klarer und verhindert das Zusammenwachsen der Spectrallinien, ohne sonst schädlich zu wirken. Bei ersten Versuchen über die Wirkung von Farbstoffen ist indessen das Arbeiten mit reiner Bromemulsion gerathen, um das Resultat nicht zu verwirren.

Wird fertige gewaschene Bromsilbergelatine mit 10 bis 50 Proc. gewaschener Jodsilbergelatine gemischt, so sinkt die Empfindlichkeit des Gemisches um etwas gegen weisses Licht und die Intensität des Bildes vermindert sich meistens stark, dagegen wächst die Klarheit und die Platten neigen weniger zur Bildung von Lichthöfen. Im Spectrum erscheinen dann zwei Maxima: Eines zwischen *G* und *H*, worauf ein Minimum folgt,[1] und ein anderes Maximum (meistens stärkeres) zwischen *G* und *F*, welch' letzteres durch das Jodsilber bewirkt wird. Dadurch wird eine aus Jodsilber- und Bromsilbergelatine gemischte Emulsion quantitativ empfindlicher im Blau als reine gereifte Bromsilbergelatine, deren Spectrumbild in Curve 4 und 5 repräsentirt wird. Curve 7 (Fig. 7) kommt dem fertigen gemischten Jodsilber + Bromsilber in Form von Gelatineemulsion zu; die Ausdehnung der Curve nach Ultraviolett und Grün liegt gewöhnlich zwischen Curve 3 und 4.

Während dieses von Abney gefundene Verhalten von gemischtem Jodsilber und Bromsilber übereinstimmend anerkannt wurde und auch bei meinen Versuchen, wie erwähnt, deutlich zum Vorschein kam, blieb die Frage zu entscheiden, ob bei langer Digestion solcher Emulsion diese beiden Maxima aufrecht erhalten bleiben oder in einander übergehen, wie Schumann angegeben hatte, was von anderer Seite angezweifelt wurde.

Bei meinen Versuchen gingen thatsächlich die getrennten Maxima von Brom+Jodsilber bei $^1/_2$ bis 1stündigem Erwärmen in ein einziges über, desgleichen, wenn Silbernitrat zu einem Gemische von Jodkalium und Bromkalium gegeben wurde, so dass die Fällung und nachfolgende Digestion von Jod- und Bromsilber gleichzeitig erfolgte. Die Empfindlichkeit einer solchen Emulsion gegen die weniger brechbaren Strahlen war grösser als die von reiner Bromsilberemulsion und das Maximum der Wirkung war etwas gegen *F* vorgeschoben. Die Curve 8 zeigt das Verhalten von Jodbromsilber. Am günstigsten wirkte ein Gemisch von 1 Mol. Jodsilber auf 8 bis 20 Mol. Bromsilber.

---

[1] Dieses Minimum tritt auch auf, wenn man zu reiner Bromsilbergelatine etwas Jodkalium hinzufügt und damit Platten übergiesst, ohne lange zu digeriren, wie auch Schumann fand.

Wenn auch die jodsilberreicheren Emulsionen empfindlicher gegen Grün sind, so geben doch die jodsilberärmeren kräftigere hübschere Bilder, z. B. sobald das Bromsilber 5 Proc. Jodsilber enthält.

Das photographische Verhalten von Jodbromsilberemulsionen drängt die Vermuthung auf, dass sich eine Art Doppelverbindung von Jod- und Bromsilber bildet, was nicht unmöglich erscheint, da ja auch ein Gemisch von Chlor und Jodsilber zu gleichen Mol. eine auffallende Erniedrigung des Schmelzpunktes zeigt (nach Kohlrausch[1] ist der Schmelzpunkt von Chlorjodsilber 260°), im Vergleich zu Jodsilber (Schmelzpunkt 540°) und Chlorsilber (Schmelzpunkt 485°). Es deutet also nicht nur das Verhalten gegen Licht, sondern auch gegen Wärme auf eine Wechselwirkung der Haloïdsalze des Silbers hin. Auch das krystallisirte Bromchlorsilber, welches mineralogisch als Embolit vorkommt, wäre hier in Betracht zu ziehen.

C. Chlorsilber in Form von Gelatineemulsion

(mit Ferrocitratentwickler oder Ferrooxalat und Bromkalium entwickelt) ist weniger empfindlich gegen weisses Licht als Bromsilber. Das Maximum der Empfindlichkeit liegt weiter gegen Violett, resp. Ultraviolett, als bei Jod- und Bromsilber. Fig. 6, Curve 1 zeigt das Spectrumbild auf Chlorsilbergelatine im grossen Steinheil'schen Spectrographen. Das Maximum liegt an der Grenze des sichtbaren Violett und des Ultraviolett bei *KH*; die Wirkung reicht bis *N* und *F* (bei kurzer Belichtung nur bis *L* und *G*). Chlorsilber- und 10 bis 30 Proc. Jodsilber-Gelatineemulsion geben zwei getrennt erkennbare Maxima: Eines bei *H* (dem Chlorsilber angehörig), das andere bei *G* $^1/_3$ *F* (dem Jodsilber angehörig), wie Curve 9 (Fig. 7) zeigt. Beim Digeriren oder Kochen solcher Emulsion gleichen sich die beiden Maxima ähnlich wie beim Jodbromsilber aus, allerdings schwieriger und nicht in allen Fällen. Chlorjodemulsion verträgt stärkere Entwickler ohne verschleierte Bilder zu geben, als Chlorsilberemulsion und die Lichtempfindlichkeit nähert sich mehr jener des Bromsilbers, ohne das letztere zu erreichen.

---

[1] Annal. Physik. Chemie 1882, Bd. 253, pag. 642.

Einwirkung von Farbstoffen als optische Sensibilisatoren auf Bromsilbergelatine bezüglich der Steigerung der Lichtempfindlichkeit gegenüber grünen, gelben und rothen Strahlen.

Obwohl Bromsilber bei langer Belichtung eine Wirkung in Spectralgelb und darüber hinaus zeigt, ist sie doch so gering, dass die damit erhaltenen Bilder dünn und verschwommen sind. Prof. H. W. Vogel entdeckte im Jahre 1873 die Thatsache, dass beigemengte Farbstoffe das Bromsilbercollodion für grüne, gelbe und rothe Lichtstrahlen empfindlich machen (sensibilisiren), wenn sie selbe absorbiren.[1] Das Verhalten von Brom-, Chlor- und Jodsilber in Collodion gegen solche „optische Sensibilisatoren" wurde von ihm, sowie Waterhouse, Becquerel u. A. weiter verfolgt[2] und von Ducos du Hauron[3] und Cros[4] praktisch verwerthet.

Mittlerweile erlitt die Photographie durch Einführung des Bromsilbergelatineverfahrens eine völlige Umwälzung. Es mussten neue Darstellungs- und Entwicklungsmethoden gefunden werden und die „optischen Sensibilisatoren", mit denen man Bromsilbergelatine färbte, erwiesen sich anfangs von so zweifelhafter Wirkung, dass Prof. Vogel die Trägheit der Bromsilbergelatine gegen optische Sensibilisatoren als Merkmal dieser „Modification" des Bromsilbers ansah[5], obschon ihm die schwache sensibilisirende Wirkung z. B. von Anilinroth bekannt war. Da traten die Firma Attout (genannt Tailfer) und Clayton mit einem französischen Patente hervor (Brevet 152645 vom 13. December 1882, resp. 29. März 1883), nach welchem Bromsilbergelatine durch Eosin stark gelbempfindlich gemacht wird; sie nannten

---

[1] Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. 1873, pag. 1305 u. ff. Jahrgänge. Photographische Mittheilungen, Bd. 9, S. 236 u. ff.

[2] Eine vollständige Übersicht, s. Eder's Ausführliches Handbuch der Photographie 1884, Bd. I, pag. 50 und Bd. II, pag. 14.

[3] Photogr. Correspond., Bd. 16, pag. 193 u. 229. Auch Eder's Handb. d. Photogr. 7. Heft.

[4] Photogr. Correspond., Bd. 16, pag. 107. Auch Eder's Handb. d. Photogr. 7. Heft.

[5] Photographic. News. 1883. pag. 426.

diese Platten „isochromatisch“ [1] und verwendeten sie zum Photographiren von farbigen Geweben etc.

Die günstige Wirkung von Eosin bestätigte später Schumann, und Prof. Vogel brachte Platten, welche mit einem nicht näher bekannten und nicht am Markte vorkommenden Farbstoff „Azalin“ gefärbt sind, in den Handel.

Ich griff diese Sache auf und unterzog über 140 Farbstoffe der Untersuchung auf ihre sensibilisirende Wirkung, und zwar in theoretischer und praktischer Hinsicht.

Über die Art, Bromsilbergelatine zu färben.

Dies kann in zweifacher Weise geschehen: entweder durch Zusetzen von Farbstoff zur flüssigen Emulsion oder Baden der fertigen trockenen Platte in der wässerigen oder auch alkoholischen Lösung.

Quantität des zugesetzten Farbstoffes.

Die richtige Concentration des Farbstoffes ist das erste Erforderniss des Gelingens, was ich als bekannt voraussetze. Zuviel drückt die Gesammtempfindlichkeit herab, indem allzu dicke Farbstoffschichten über dem Bromsilber den Zutritt des Lichtes zu sehr hemmen; oft verwischen sich dann die Maximalwirkungen. Zu wenig Farbstoff lässt die Wirkung des optischen Sensibilisators zu sehr hinter die Eigenempfindlichkeit des Bromsilbers zurücktreten.

Die beste Concentration ist bei verschiedenen Farbstoffen verschieden. Man versuche am besten zuerst einen Zusatz von 2 bis 4 Mg. pro 100 CC. Emulsion oder dieselbe Menge gelöst in Wasser, welche Lösung man dann als Bad für die getrockneten Platten (durch 2 bis 5 Minuten) anwendet. Farbstoffe von starkem Tingirungsvermögen muss man verdünnter, andere zehnmal concentrirter anwenden. Von Eosin genügt z. B. schon $^1/_{10000}$ Procent, um die Emulsion bemerklich im Gelbgrün mit dem charakteristischen Streifen zu sensibilisiren, obschon das Auge keine röthliche Färbung wahrnimmt. Der Farbstoff kann aus solchen Gelatine-Emulsionen durch viele Stunden hindurch scheinbar ganz ausgewaschen werden und trotzdem ist seine sensibilisirende Wirkung im Spectrographen deutlich nachweisbar.

[1] Photogr. Correspond. 1884. pag. 63.

Wirkung verschiedener Farbstoffe auf Bromsilbergelatine.

Von der grossen Anzahl der untersuchten Farbstoffe erwies sich nur ein Theil als optische Sensibilisatoren für Bromsilbergelatine. Bei der Wirkung derselben muss man unterscheiden:

1. Den Einfluss auf die Gesammtempfindlichkeit der gefärbten Bromsilbergelatineplatte. Oft wird nämlich die Lichtempfindlichkeit für den blauen und violetten Theil des Spectrums herabgedrückt, so dass sie nur z. B. ein Zehntel der ursprünglichen besitzt (die meisten der von mir untersuchten violetten und grünen und viele andere Farbstoffe zeigen diese Eigenschaft).

2. Den Einfluss auf die relative Empfindlichkeit für Gelb, Orange etc. Unabhängig davon, ob die Empfindlichkeit der gefärbten Bromsilbergelatine für den blauen Theil des Spectrums sinkt oder nicht, steigt dieselbe oft in Folge der Wirkung des Farbstoffes für Gelb, Orange etc. Z. B. sinkt bei Bromsilbergelatineplatten durch den Zusatz von Rose bengal die Empfindlichkeit für Blau auf $^1/_3$ oder $^1/_6$, während die Empfindlichkeit für Gelbgrün (in der Nähe der Linie *D*) viel grösser wird als bei ungefärbten Platten (Vergl. auch beim Cyanin.). Hier sinkt die Gesammtempfindlichkeit und steigt die relative Gelbgrün-Empfindlichkeit; so dass solche gefärbte Platten z. B. drei- bis sechsmal länger belichtet werden müssen, um ein photographisches Bild im Tageslicht zu geben, wobei dann allerdings gelbgrüne Pigmente kräftiger, blaue dagegen gleich kräftig wie bei ungefärbten erschienen sind.

Soll eine photographische Platte die Farben mit demselben Helligkeitseffect reproduciren, wie sie dem menschlichen Auge erscheint, so soll das Orange (bei *C*) und Hellblau (bei *F*) im Spectrum ungefähr gleich wirken, Gelb (bei *D*) achtmal und Gelbgrün (bei *D*) ungefähr zehnmal, Grün (bei *E*) etwa dreimal stärker als Hellblau wirken, Violett aber nur den zehnten Theil der Wirkung des letzteren haben. Bis jetzt ist kein Verfahren beschrieben worden, welches diesen Anforderungen entspricht; wohl aber gelingt es durch Einschalten von gelben Gläsern das Blau soweit abzuschwächen, dass dann auf

gefärbten Bromsilberplatten[1] das Gelbgrün viel kräftiger als Blau und Violett auf der Platte erscheint, wie dies z. B. Curve 17 (Eosinplatten belichtet durch gelbes Glas) zeigt. Hier fehlt jedoch noch die Wirkung im Roth oder Orange. Für solche Platten, welche durch optische oder chemische Hilfsmittel alle Farben mit demselben Helligkeitseffect (Helligkeitswerth), welchen diese für das Auge haben, photographisch wiedergeben, schlage ich den Namen „orthochromatische Platten" vor. Bekanntlich geben die jetzt gebräuchlichen photographischen Platten das Orange und Gelb viel dunkler (fast schwarz) als das Dunkelblau und Violett, welche fast wie Weiss wirken.

Hofmann's Violett, sowie verschiedene Handelssorten dieser Farbe, wie Dahlia, Primula, Jodviolett[2], bewirken eine gesteigerte Empfindlichkeit der Bromsilbergelatine für Orange, Gelb und Grün, sowohl bei den in Wasser als in Alkohol löslichen Sorten. Die Gesammtempfindlichkeit sinkt, die gesteigerte Orangeempfindlichkeit hat das Maximum zwischen *D* und *C* (etwas näher zu *D*). Bei kurzer Belichtung tritt dieses Maximum in der Lage von Curve 10 auf; bei längerer Belichtung erstreckt sich die Wirkung bis über *C* gegen Roth und ist durch das Grün — mit einem Minimum zwischen *D* und *E* — zu verfolgen. Sehr ähnlich wirkt auch das Methylviolett, Violett de Paris und namentlich das Benzylrosanilinviolett (Methylviolett 6 *B*), Gentianaviolett *B*, Gentianaviolett *BR*, sowie das Säureviolett. Die Steigerung der Empfindlichkeit im Orange erfolgt bei allen diesen Farbstoffen an ziemlich derselben Stelle; nur tritt mitunter das Maximum steil und kräftig hervor (Curve 10), in anderen Fällen (bei geänderter Concentration und längerer Belichtung) verläuft aber die Curve der Wirkung allmählig zu einem schwachen Maximum zwischen *D* und *C* anwachsend, sehr flach im Orange bis gegen Roth bei *B*. Die Intensität der Wirkung im

---

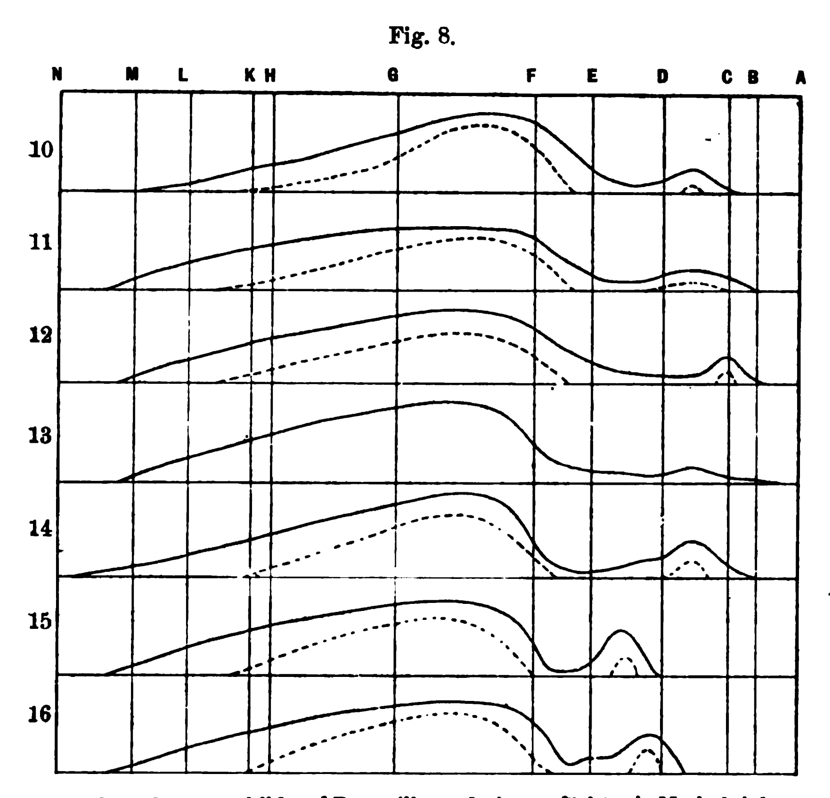
[1] Die Gelb- und Rothempfindlichkeit gewöhnlicher ungefärbter Bromsilbergelatine ist so gering, dass man trotz vorgeschobener gelber Gläser ein Gemälde nicht correct im richtigen Helligkeitswerth der Pigmente photographiren kann.

[2] Als Bad in 30—40procentigen Alkohol angewendet; ebenso die anderen „alkohollöslichen" Violette.

Blau auf derartig gefärbte Bromsilbergelatine ist grösser als im Orange.

Von den grünen Farbstoffen: Säuregrün, Bittermandelölgrün (in den Handelssorten Solidgrün, Malachitgrün, Neugrün, Benzalgrün), ferner Äthylgrün (Solidgrün J,

Fig. 8.



10. und 11. Spectrumbild auf Bromsilbergelatine gefärbt mit Methylviolett, Violett de Paris, Benzylrosanilinviolett, Jodviolett, Dahlia, Gentianaviolett, Säureviolett. — 12. Dasselbe mit Säuregrün, Solidgrün, Methylgrün, Brillantgrün. — 13. Mit Jodgrün. — 14. Mit Cyanin. — 15. Mit Brom-Eosin. — 16. Mit Rose bengal + Ammoniak.

Brillantgrün) und Methylgrün zeigen ziemlich übereinstimmend das Maximum der Rothempfindlichkeit bei *C*. Bei kurzer Belichtung beschränkt sich die Wirkung der wenig brechbaren Strahlen auf dieses mehr oder weniger deutlich ausgedrückte Maximum (Curve 12); bei längerer Belichtung aber ist

eine Wirkung bis gegen *B* im Roth bemerkbar, sowie im schwachen Grade über Gelb und Grün; dagegen entsteht ein viel kräftigeres Bild im Blau bis Ultraviolett. Diese Sensibilisirung der genannten grünen Farbstoffe für Roth ist nur bei starkem directen Sonnenlichte und richtig gewählter Concentration nachweisbar; sie ist also nicht immer mit Sicherheit zu erkennen. Dasselbe gilt von Aldehydgrün und Chlorophyll [1], welches bei meinen Versuchen aber sehr selten eine bedeutende Rothempfindlichkeit der Bromsilbergelatine bewirkte.

Jodgrün zeigte bei einer Sorte des Maximum der Wirkung zwischen *D* und *C* im Orange (Curve 13) und war gegen Roth bis nahe zu *A* empfindlich; bei anderen Sorten (welche weniger blaugrün erschienen) lag das Maximum weiter gegen *C* im Roth. Abgesehen von der verminderten Gesammtempfindlichkeit der mit Jodgrün gefärbten Platten zeigten dieselben von allen die beste Empfindlichkeit gegen das äussere Roth. Die Versuche gelangen bei bedeutender Verdünnung sowie auch bei grösserer Concentration.

Cyanin ist ein bei Bromsilbergelatine sehr guter Sensibilisator für Orange und Roth, wie ich gleichzeitig mit Schumann fand. Diess gilt in erster Linie vom Jodcyanin, das ist das gewöhnliche Cyanin (Chinolinjodcyanin [2]). Bei kurzer Exposition erhält man neben der kräftigen Blauwirkung auch eine weniger starke Wirkung zwischen *D* und *C* ($D^1/_3$ *C* bis $D^1/_2$ *C*), während im Grün und Gelb nur wenig von einer Schwärzung bemerkbar ist (Curve 14). Bei längerer Belichtung erstreckt sich die Wirkung vom blauen Theil continuirlich bis nach *B* im Roth. Dabei tritt ein Minimum der Wirkung vor *E* auf ($F^2/_3$ *E*); dann folgt ein schwaches nicht immer leicht erkennbares Maximum vor *D* ($E^3/_4$ *D*) und das erwähnte stärkere bei $D^1/_2$ *C*. Die überwiegende Hauptwirkung erfolgt aber, falls man kein gelbes Glas vorschiebt, im Blau (Curve 14). Ganz ähnlich verhält sich Chlor-Cyanin, Sulfat-Cyanin und Nitrat-Cyanin, jedoch wirkt das Jod-Cyanin betreffs der Empfindlichkeit der damit gefärbten

---

[1] Chlorophyll sensibilisirt Bromsilbercollodion gut für Roth und Orange (Becquerel, Ives u. A. s. Eder's Handb. d. Photogr. 7. Heft).

[2] Neues Handwörterbuch der Chemie. Bd. 2, pag. 553.

Platten am günstigsten; bei allen vier Cyaninarten liegt das Maximum der Orangeempfindlichkeit an derselben Stelle. Die Gesammtempfindlichkeit der Cyaninplatten gegen weisses Licht ist geringer als die von ungefärbten Platten (vielleicht $^1/_{10}$ oder $^1/_5$), die relative Orangeempfindlichkeit jedoch mehr als hundertmal grösser. Man muss beim Arbeiten damit stets gedämpftes dunkelrothes Licht anwenden und möglichst im Schatten arbeiten. Schumann empfiehlt, das rothe Licht durch braunes Papier zu dämpfen, was auch ich praktisch fand.

Mischt man den Cyanin, mit welchem man die Emulsion färbt, etwas Ammoniak bei, [1] so treten die Maxima der Wirkung kräftiger hervor.

Eosin und die von ihm abstammenden Eosinfarben sind sämmtlich sehr gute Sensibilisatoren für Grün, Gelbgrün und eventuell für Gelb. Mit diesen Farbstoffen ist die Wirkung der optischen Sensibilisatoren nicht schwer zu studiren und selbst bei zerstreutem Tageslichte nachzuweisen.

Brom-Eosin versuchte ich in den Handelssorten: Eosin gelbstichig oder Eosin J, Pyrosin J, Erythrosin gelblich. Alle gaben bei kurzer Belichtung neben dem gewöhnlichen Bromsilberspectrum ein Maximum der Farbstoffwirkung zwischen E und D ($E^1/_2 D$), während zwischen E und F keine Wirkung bemerkbar ist (Curve 15). Bei längerer Belichtung wächst das Maximum im Gelbgrün an, die Wirkung erstreckt sich steil abfallend bis D; anderseits fällt die Curve auch gegen E und erreicht zwischen F und E ($E^1/_2 F$) ein Minimum (Curve 15). Zusatz von Ammoniak in den oben angegebenen Mengen steigert die Wirkung im Gelbgrün; das Maximum tritt intensiver auf und die Wirkung ist auch rechts und links vom Maximum etwas stärker sichtbar. Zugleich tritt ein zweites schwaches Maximum der Farbstoffwirkung bei E — welches sonst kaum erkennbar ist — ein wenig deutlicher auf; es ist in Curve 15 angedeutet.

Die bläulichen Nuancen von Eosinfarben haben ein Absorptionsband weiter im Gelb. Dem entsprechend liegt auch das Band der optischen Sensibilisirung näher der Linie D. Dies gilt

[1] Gut ist auch ein Bad von 100 CC. Wasser, 2 CC. alkoholische Cyaninlösung (1 : 400) und ein wenig Ammoniak.

vom blaustichigem Eosin (Eosin *B*) und dem bläulichsten aller Eosine: Bengalrosa[1], deren Wirkung ich zuerst im April 1884 in einer vorläufigen Mittheilung[2] bekannt machte. Das Spectrum mit bengal-rosahältiger Bromsilbergelatine zeigt Curve 16 mit kurzer und langer Belichtung.

Bei Gegenwart von Ammoniak tritt das Maximum bei *D* bedeutend kräftiger hervor; die Wirkung erstreckt sich dann — reichliche Belichtung vorausgesetzt — weiter gegen die weniger brechbaren Strahlen. Zwischen der Hauptwirkung im Blau und dem schwächeren Maximum bei *D* tritt noch ein weniger deutliches bei *E* auf, welches den Übergang der Wirkung im Gelb und Blau vermittelt.

Auch die anderen Eosinfarben erwiesen sich als optische Sensibilisatoren für Gelbgrün und Gelb, nämlich: Methyleosin (Methylerythrin), Äthyleosin, Phloxin (Kalisalz des Tetrabrom-Dichlorfluoresceïn), Cyanosin (Methyläther des Phloxin), Aureosin (Chlorfluoresceïn) und Safrosin (Bromnitrofluoresceïn). Das Band der Sensibilisirung liegt zwischen jenem von Eosin und Rose bengal, je nach der Lage des Absorptionsstreifens. Die erzielbare Lichtempfindlichkeit ist jedoch nicht bei allen gleich, sondern z. B. bei Cyanosin und Phloxin kleiner als bei Eosin.

Lässt man das Sonnenlicht durch gelbes Glas oder eine Lösung von Kaliumbichromat (1 : 1000) fallen, bevor es in den Spalt des Spectralapparates eintritt, so wird das Ultraviolett, der grösste Theil des Violett und das Blau bedeutend geschwächt. Dadurch steigt die relative Helligkeit des Spectrums im Gelbgrün, Gelb und Orange. Durch Eosin in richtiger Weise gefärbte Bromsilbergelatine gibt dann ein Spectrumbild, in welchem die Schwärzung im Gelbgrün, diejenige im Blau etc. weitaus überwiegt. Curve 17 stellt diese Wirkung dar. Platten, welche in dieser Weise die Farben wiedergeben, sind gut zur Photographie von gelben und blauen Farben zu verwenden, weil ja auch dem menschlichen Auge das Gelb ungefähr in demselben Masse heller als Blau und Violett erscheint.

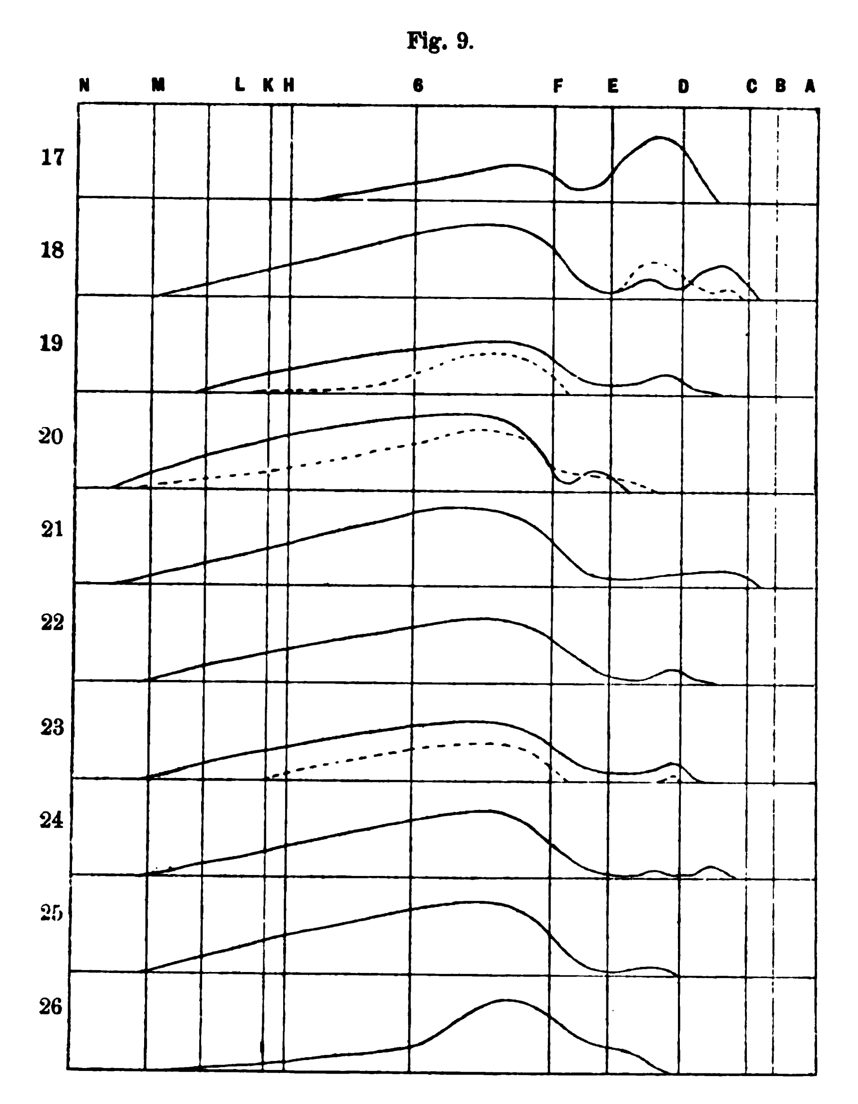
---

[1] Natronsalz des Tetrajod-Dichlorfluorescein.

[2] Photogr. Correspondenz. 1884. pag. 95.

Die Rothempfindlichkeit der Eosinfarben ist aber ungenügend und die Grünempfindlichkeit verhältnissmässig zu gross.

Fig. 9.



17. Spectrumbild auf Bromsilbergelatine gefärbt mit Eosin (durch gelbes Glas. — 18. Dasselbe mit Cyanin+Eosin. — 19. Anilinroth. — 20. Fluorsceïn+Ammoniak (ausgezogene Curve: nass; punktirte Curve: trocken). — 21). Resorcinblau. — 22. Rothes Corallin. — 23. Naphtalinroth. — 24. Bleu Coupier. — 25. Safranin. — 26. Chrysanilin.

Curve 18 zeigt das Spectrumbild auf einer Bromsilbergelatineplatte, welche mit einem Gemische von Eosin und Cyanin gefärbt ist. Die punktirte Curve 18 entspricht einem Überschuss von Eosin, die ausgezogene einem Überschuss von Cyanin.

Diese Farbstoffgemische zeigen jedoch im Spectrographen nicht die reine Wirkung eines jeden einzelnen. Der eine beeinträchtigt die Wirkung des anderen. Mit Cyanin + Eosin gefärbte Emulsion besitzt eine geringere Rothempfindlichkeit als die mit Cyanin allein gefärbte; in dem Gemisch der beiden ist die Empfindlichkeit für Gelbgrün gleichfalls geringer geworden. Trotzdem kann durch Mischung von Farben die relative Empfindlichkeit für die weniger brechbaren Strahlen auf eine grössere Anzahl verschiedener Farben des Spectrums ausgedehnt werden, indem man das Minimum der Wirkung des einen Farbstoffes durch Zusatz eines anderen Farbstoffes zum Verschwinden bringt, der daselbst sein Maximum hat. Meine Versuche berechtigen zu der Hoffnung, dass man auf diese Weise eine gleichmässige Empfindlichkeit des Bromsilbers für das ganze Spectrum erreichen könne, ohne dass einzelne Maxima und Minima hervortreten.

Anilinroth sensibilisirt für Gelb und Grüngelb. Ich versuchte salzsaures und essigsaures Rosanilin, sowie Coupier's Toluolroth[1] mit gleichem Erfolge. Das Maximum der optischen Sensibilisirung liegt bei $E^2/_3D$; die Wirkung erstreckt sich schwach bis über D und verläuft andererseits mit einem Minimum bei E bis Blau, Violett und Ultraviolett. (Curve 19, Fig. 9). Bei kurzer Belichtung — noch bevor die Wirkung im Gelb auftritt — zeigt sich auf den mit Anilinroth gefärbten Platten die Wirkung im Violett und Ultraviolett geschwächt und eine starke Blauempfindlichkeit tritt zwischen G und F hervor (punktirte Curve 19). Auffallend erscheint mir, dass Säurefuchsin (Rosanilinsulfosaures Natrium) bei meinen Präparaten nicht dieselbe Sensibilisirung im Gelb wie Anilinroth, aber gleichfalls eine Schwächung im Violett verursachte.

Mit Fluoresceïn und Ammoniak erhielt ich auf trockenen Bromsilbergelatineplatten eine Sensibilisirung für Grün bis in

[1] D. i. Anilinroth aus Anilin und Nitrotoluol, s. Neues Handwörterbuch d. Chemie. Bd. 1. pag. 620, auch M. Vogel: Die Entwicklung der Anilin-Industrie 1870, pag. 177.

die Nähe von *D* ohne ein daselbst hervortretendes Maximum zu beobachten (punktirte Curve 20), dagegen nass (nach langer Belichtung) tritt ein Maximum der Wirkung im Grün auf, nämlich ein Band mit erkennbarem Maximum in der Nähe von *E* (ausgezogene Curve 20); in Folge der langen Belichtung erscheint das Bild sehr intensiv. Eine ähnliche Wirkung, wie trockenes Fluoresceïn zeigt Chrysolin (Bensylfluoresceïn) auf Bromsilbergelatine, nur ist die Wirkung im Grün intensiver und erstreckt sich auch weiter ins Gelb (bis über *D*). Beide Farbstoffe schädigen die Gesammtempfindlichkeit wenig.

Auch mit Resorcinblau (Bleu fluorescent [1]) erhielt ich nur auf nassen mit der Farbstofflösung getränkten Platten eine (wenn auch geringe) Sensibilisirung, welche sich bis zu *C* erstreckte (Curve 21). Bei kurzer Belichtung tritt ähnlich wie beim Anilinroth die Wirkung im Blau dadurch besonders stark hervor, weil die Wirkung des Ultraviolett und Violett vermindert wird.

Corallin gab mir nicht immer sichere Resultate, ausgenommen in der Sorte „Rothes Corallin". Dieselbe bewirkte sowohl für sich als bei Gegenwart von Ammoniak eine mässige Steigerung der Empfindlichkeit im Gelb bei *D*. Die Wirkung erstreckte sich ins Orange gegen *C* und ging, indem ein Minimum bei $E^1/_2D$ auftrat, allmählig zur intensiven Wirkung im Blau über (Curve 22, Fig. 9). Säuren vermindern die Wirkung.

Naphtalinroth (Magdalaroth) gibt ein kräftiges Maximum der Gelbwirkung bei *D*. Bei kurzer Exposition steht dieses Maximum getrennt, dann beginnt erst wieder die Wirkung im Blaugrün, die sich bis ins Ultraviolett erstreckt (punktirte Curve 23). Bei längerer Belichtung reicht die Wirkung bis ins Orange und verläuft mit schwacher Grünempfindlichkeit gegen das brechbare Ende des Spectrums zu (Curve 23).

Bleu-Coupier (Sulfosäure des nach dem Nitrobenzolverfahren gewonnenen Violanilin) bewirkt eine Sensibilisirung für die weniger brechbaren Strahlen, welche dadurch bemerkenswerth ist, dass sich (neben dem gewöhnlichen Maximum für Bromsilbergelatine im Blau) zwei Maxima geltend machen:

---

[1] Benedikt: „Die künstlichen Farbstoffe 1883, pag. 171.

Eines im Grün ($E^2/_3D$), das andere im Orange ($D^1/_2C$), wie Curve 24 darstellt. Es erscheint möglich, dass das mir vorliegende Bleu Coupier kein reiner Farbstoff, sondern ein Gemisch zweier verschiedener Farbstoffe ist.

Safranin ist ein guter Sensibilisator für Grün. Seine Wirkung erstreckt sich bei genügend langer Belichtung bis etwas über *D*. Die Wirkung im Grün stieg bei meinen Versuchen zu keinem starken Maximum an, sondern verläuft bis *E*, wonach die Curve der Wirkung gegen Blau rasch aufsteigt (Curve 25). Auch gewisse Arten von Ponceau bewirken einen ähnlichen Effect, z. B. Ponceau 3 *R*, Phenolponceau Biebericher Scharlach[1] (die letzteren wohl nur in geringem Grade), sowie Grenadin (ein Abfallsproduct bei der Anilinroth-Erzeugung), welches bei kurzer Belichtung das Spectrumbild an beiden Enden verkürzt und kräftiger macht, bei längerer aber bis *D* sensibilisirt.

Chrysanilin ist ein guter Sensibilisator für Grün. Seine Wirkung in ammoniakalischer Lösung in diesem Sinne erwähnte Dr. Lohse[2]. Ich fand diesen Farbstoff auch in neutraler wässeriger Lösung wirksam. Er veränderte die Wirkung des Sonnenspectrums auf damit gefärbte Bromsilbergelatine in merkwürdiger Weise:

Die Wirkung des Violett und Ultraviolett sinkt, im Blau (bei $G^2/_3F$) zeigt sich eine intensive Schwärzung, welche gegen *E* allmälig abnimmt, durch das Grün fortläuft und vor *D* verschwindet (Curve 26, Fig. 9). Dadurch erscheint die Curve, verglichen

---

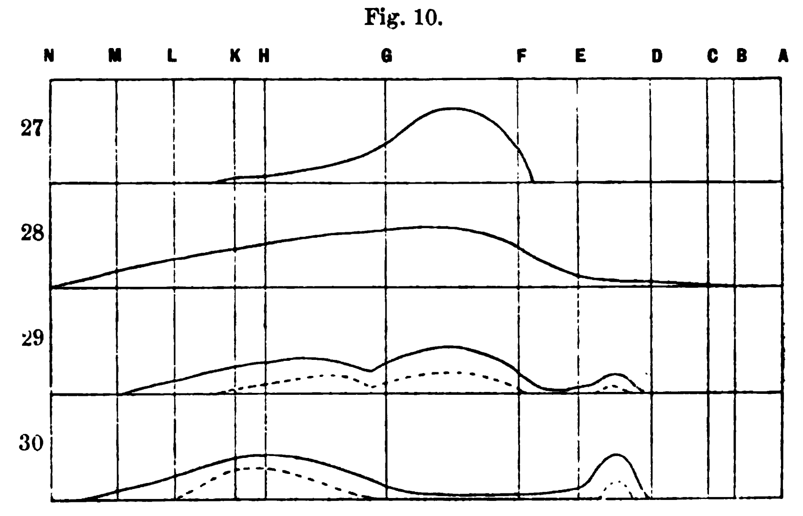
[1] Vergl. Neues Handwörterbuch der Chemie. Bd. 4, unter „Naphtalin-“ und „Naphtalfarbstoffe“.

[2] Dr. Lohse fand in einer Concentration von 0·004 Grm. Farbstoff, 2 CC. Ammoniak und 100 CC. Wasser als Sensibilisatoren für Gelbgrün und Grün: Chrysanilin, salpetersaures Chrysanilin, salzsaures Diamidoazobenzol. Dagegen nicht oder wenig wirksam folgende gelbe Farbstoffe: Orthonitrophenol, Orthonitroanilin, Paranitroanilin, Metanitroanilin, Thymochinon, Phenanthrochinon, Chrysophansäure, Tropaeolin OO, Quercitrin, Gelbholzextract, Aloe, Diamidobenzol, Amidoazobenzol, Nitrosodimethylanilin, Nitrosodimethylanilin, Picraminsäure, Martiusgelb, Diamantgelb, Tropaeolin J (Photograph. Archiv 1884, pag. 221; auch Photograph. Mittheilungen, Bd. 21, pag. 130).

mit jener der ungefärbten Bromsilbergelatine weiter nach Grün verschoben. Die Schwärzung zufolge der Sensibilisirung des Chrysanilins im Grün schliesst sich so eng an das normale Spectrum auf Bromsilber an, dass keinerlei Unterbrechung zu gewahren ist, was übrigens auch bei Chrysolin der Fall ist.

Viele Farbstoffe geben auf Bromsilbergelatine kein deutliches Sensibilisirungsmaximum im Grün, Gelb oder Roth, aber beeinflussen das Spectrumbild auf Bromsilber im blauen und violetten Theil. Z. B. Wird durch Säurefuchsin, trockenes Resorcinblau, Anilinroth (bei kurzer Belichtung), Corallin (bei kurzer Belichtung) und viele andere, sowohl gelbe, rothe, als violette und blaue Farbstoffe das Ultraviolett und Violett geschwächt, wodurch das Blau dadurch relativ stärker erscheint und die allgemeine Empfindlichkeit sinkt (Curve 27, Fig. 10). Auf diese Weise erscheint es möglich, gewisse Theile des Spectrums zu unterdrücken.

Fig. 10.



27. Spectrumbild auf Bromsilbergelatine, gefärbt mit Säurefuchsin, Resorcinblau etc. bei kurzer Belichtung. — 28. Dasselbe mit Hämatoxylin, löslichen Berliner Blau etc. — 29. Jodsilber + Bromsilber gefärbt mit Eosin. — 30. Chlorsilbergelatine mit Eosin.

Andere Farbstoffe sensibilisiren Bromsilbergelatine ohne deutliches Maximum, für die weniger brechbaren Strahlen. Bei Bromsilbergelatineplatten, welche mit schwach ammoniakalischem

Hämatoxylin, ammoniakalischer Curcumatinctur, löslichem Berliner Blau, salzsaurem Monophenylrosanilin u. A. gefärbt sind, lässt sich die Wirkung des Sonnenspectrums ins Gelb und weiter bis ins Roth verfolgen (Curve 28). Jedoch erhielt ich nie jene Deutlichkeit in der Photographie der Fraunhofer'schen Linien, wie bei Anwendung von Farbstoffen mit starkem Maximum der Sensibilisirung, sondern zumeist ist das Bild verschwommen und schleierig, als ob es zu lange belichtet worden wäre.

Jodbromsilbergelatine und Farbstoffe.

Gemische von fertiger Jodsilbergelatine und Bromsilbergelatine geben, wie oben erwähnt wurde, ein Spectrumbild, welches zwei (durch ein Minimum getrennte) Maxima zeigt; nämlich das eine im Violett, das andere im Blau. Färbt man solche Schichten mit Eosin oder einem anderen Farbstoff, so kommt noch ein drittes Maximum im Gelbgrün oder an der für die optische Sensibilisirung charakteristischen Stelle dazu. Curve 29 (Fig. 10) zeigt das Spectrumbild auf Jodsilber + Bromsilber gefärbt mit Eosin. Das Maximum der Eosinwirkung liegt zwischen *E* und *D*, genau an jener Stelle, wo es bei reiner Bromsilbergelatine sich befindet, und zwar ist nur ein einziges Band, welches nirgends durch ein Minimum unterbrochen ist, an der Stelle der optischen Sensibilisirung vorhanden; daneben tritt das charakteristische Spectrumbild auf Jodsilber + Bromsilber im blauen Theil auf, so dass im Ganzen 3 Maxima vorhanden sind. Ähnlich verhalten sich die anderen Farbstoffe.

Jodbromsilbergelatine, bei welcher durch Digestion die beiden Maxima ineinander übergegangen sind (s. o. Curve 7 und 8, Fig. 7), haben das Maximum der durch Farbstoffe bewirkten optischen Sensibilisirung gleichfalls an derselben Stelle als Bromsilbergelatine. Bei einem Gehalt des Bromsilbers von 1—3 Procent Jodsilber wird die Wirkung der Farbstoffe nicht merklich modificirt. Steigt aber der Jodsilbergehalt auf 10 bis 30 Procent, so sensibilisiren die Farbstoffe, so weit ich sie untersuchte, nicht mehr so kräftig für die weniger brechbaren Strahlen.

Schumann beobachtete, dass reine Jodsilbergelatine[1] durch Eosin überhaupt nicht für Gelbgrün sensibilisirt werden kann, was bei Bromsilber so leicht gelingt; dieses Verhalten des Jodsilbers erklärt die oben erwähnte Erscheinung.

Chlorsilbergelatine wird durch Eosin, Cyanin und andere beim Bromsilber wirkende Farbstoffe kräftig sensibilisirt. Auch in diesem Falle liegt das Maximum der Farbstoffwirkung an derselben Stelle wie bei Bromsilbergelatine. Daneben kommt das Spectrum im violetten Theil in der für Chlorsilber charakteristischen Weise zur Wirkung. Curve 30 (Fig. 10) zeigt Chlorsilbergelatine mit Eosin gefärbt. Bei kurzer Belichtung (punktirte Curve 30) erscheint ein Maximum bei H am Beginne des Ultraviolett; im Blau und Grün ist keine Wirkung bemerklich, dagegen tritt bei $E^1/_2 D$ die Eosinwirkung kräftig auf. Bei längerer Belichtung läuft eine schwache Wirkung durch Blau und Grün bis zum Gelb, wo mitunter ein Maximum erscheint, welches jenes im Violett übertrifft.

Gemische von Jodsilber- mit Chlorsilbergelatine, sowie Bromsilber- mit Chlorsilbergelatine verhalten sich gegen Farbstoffe in analoger Weise wie Jodsilber mit Bromsilber gemischt. Chlorsilber mit 10—20 Procent Jodsilber gibt nach Eosinzusatz klare und kräftige Bilder mit sehr starker relativer Empfindlichkeit im Gelbgrün, welche meistens das gefärbte Bromsilber übertrifft.

Einfluss ungefärbter Substanzen auf die Farbenempfindlichkeit der Bromsilbergelatine.

Badet man gewöhnliche Bromsilbergelatineplatten in ganz schwacher, am besten etwas angesäuerter alkoholischer Silbernitratlösung[2] und trocknet sie, so steigt ihre Empfindlichkeit gegen weisses Licht um das Zwei- bis Dreifache[3]. Im Sonnenspectrum tritt zuerst diese Wirkung als Vermehrung der

---

[1] Das Jodsilber wurde mit überschüssigem Jodkalium gefällt und die fertige Emulsion mit alkalischem Pyrogallol hervorgerufen.

[2] 100 CC. Alkohol und 0·1—0·5 CC. einer 10%igen wässerigen Silbernitratlösung.

[3] Unter Anwendung der gebräuchlichen Entwickler.

Gesammtempfindlichkeit hervor, bei genauerer Betrachtung aber, dass auch die relative Empfindlichkeit gegen die weniger brechbaren Strahlen etwas gestiegen ist. Ebenso wirken ammoniakalische Silberlösungen, welche das Bild aber kräftiger machen. Solche Platten sind jedoch nur einen Tag lang haltbar und kommen den gefärbten Platten an Farbenempfindlichkeit nicht entfernt gleich.

Wird eine mit Eosin gefärbte Bromsilbergelatineplatte in einer schwachen (am besten alkoholischen) Silbernitrat-Lösung gebadet, so bildet sich Eosinsilber[1] neben überschüssigem Silbernitrat, solche Platten sind dann im Allgemeinen empfindlicher gegen weisses Licht, als auch relativ mehr empfindlich für Gelbgrün[2]. Ähnlich verhalten sich auch andere Farbstoffe.

Badet man Bromsilbergelatineplatten durch einige Minuten in verdünntem Ammoniak[3] und trocknet sie, so erscheinen sie ungefähr zweimal empfindlicher gegen weisses Licht und geben viel intensivere Bilder.

Gegen das Sonnenspectrum erweisen sich solche Platten im selben Verhältniss allgemein empfindlicher, ohne dass eine Vermehrung der Empfindlichkeit gegen weniger brechbare Strahlen besonders hervortreten würde. Die Schwärzung aber wird viel intensiver im ganzen Spectrumbild. Setzt man dem verdünnten Ammoniak sensibilisirende Farbstoffe zu, so erscheint auch das Sensibilisirungsband kräftiger.

Die Wirkung des Ammoniaks, welches sich während des Trocknens wieder gänzlich verflüchtigt, kann nur auf eine molekulare Änderung des Bromsilbers zurückzuführen sein, welche im hohen Grade die Lichtempfindlichkeit desselben beeinflusst, wie ich schon in meiner früheren Abhandlung gezeigt habe. (A. a. O.)

---

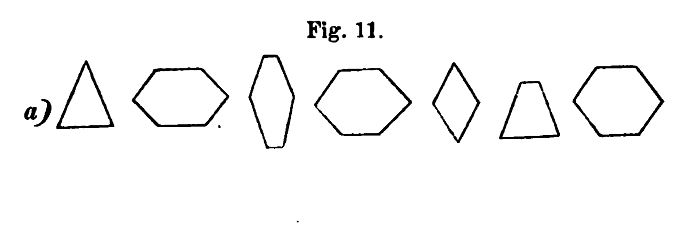
[1] Eosinsilber für sich allein ist nach H. W. Vogel gelbempfindlich (bei *D* gegen Grün zu); dieses Verhalten machte zuerst Robert Amory im Jänner 1878 in der amerikanischen Akademie bekannt (Journal Photogr. Society Great Britain. Juni 1884).

[2] Die Bilder lassen sich im Pyragallol als Eisenoxalat klar entwickeln und copiren gut.

[3] 1—10 CC. Salmiakgeist und 100 CC. Wasser.

Die Lösung des Bromsilbers in Ammoniak hinterlässt in der That beim Verdunsten mikroskopische Kryställchen, wie Elsden[1] gezeigt hat; auch bei der Fällung von Bromsilber in Anwesenheit von viel Ammoniak bilden sie sich. Sie haben je nach der Concentration der Lösung die Form von Fig. 11 *a*[2] oder Fig. 11 *b*[3]

Fig. 11.





Krystallisation von Bromsilber mit Ammoniak im Mikroskop.

eine Grösse von 0·02 bis 0·2 Mm. und eine Dicke von ungefähr 0·001 Mm. So grosse Krystalle bilden sich beim Baden von Bromsilbergelatine in verdünntem Ammoniak nicht; allein beim Verdunsten des Ammoniaks aus der feuchten Platte wird das Bromsilber ohne Zweifel krystallinisch und dies mag die gesteigerte quantitative Lichtempfindlichkeit verursachen.

Auch Ätzkali und Alkalicarbonate erhöhen die Empfindlichkeit, wobei sie als bromabsorbirende Mittel wirken dürften.

Versuche über die chemische Beschaffenheit des Bromsilbers, welches mit Farbstoffen und Gelatine gemischt ist.

Für die Beurtheilung der Phänomene, welche Bromsilber im gefärbten oder nicht gefärbten Zustande im Sonnenspectrum zeigt, sowie über die Rolle, welche Gelatine hiebei spielt, ist die Entscheidung der Frage von Wichtigkeit: Vereinigt sich Bomsilber mit den genannten Substanzen oder nicht? Dabei sind die-

---

[1] Photographic News. 1881. p. 174.

[2] Beim Verdunsten der concentrirten ammoniakalischen Bromsilberlösung nach dem Verdünnen mit der fünffachen Menge Wasser.

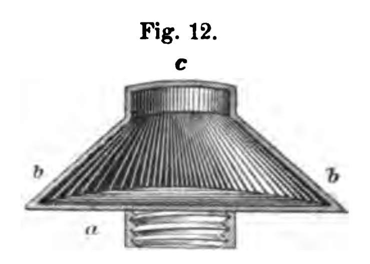
[3] Wie die vorige, nach dem Verdünnen mit der gleichen Menge Wasser.

selben Versuchsbedingungen einzuhalten, wie bei der Darstellung einer lichtempfindlichen Bromsilberemulsion.

Wird Bromsilbergelatine-Emulsion nach dem gewöhnlichen Processe dargestellt, gewaschen und dann im flüssigen Zustande in einer Centrifugalmaschine ausgeschleudert, so kann man das Bromsilber von der Gelatine trennen.

Herr J. Plener hat eine Maschine zur Reinigung des photographisch zu verwendenden Bromsilbers construirt, welche er mir freundlichst zu diesen Versuchen zur Verfügung stellte. Fig. 12 zeigt das verwendete Gefäss aus Kanonenbronce, welches innen gut vergoldet ist. Bei *a* wird da er mit der flüssigen Emulsion beschickte und dann bei *c* verschlossene Behälter auf eine verticale Axe befestigt, welche dann mit einer Geschwindigkeit von 4000 bis 6000 Umdrehungen pro Minute gedreht wird. Durch die Centrifugalkraft wird alles Bromsilber an die Wände des Gefässes bei *bb* geschleudert und bildet daselbst eine zusammenhängende Masse, so dass die Gelatinelösung klar abgegossen und das Bromsilber mit Wasser gewaschen werden kann. Auf diese Weise kann man das Bromsilber vollständig reinigen und waschen.[1]

Fig. 12.



Centrifugalapparat zum Ausschleudern von Bromsilber aus Emulsionen.

Bromsilber, welches mittelst der Centrifugalmaschine durch wiederholtes Aufschleudern und Waschen mit heissem Wasser von allen löslichen Substanzen befreit wurde, enthielt nach meiner Analyse nach dem Trocknen bei 140° C. — wobei viel hygroskopisches Wasser entwich — noch organische Substanzen, welche durch Glühen und Überführen des entstandenen Silbers in Bromsilber (mit Brom) quantitativ bestimmt wurde.

100 Gewichtstheile Bromsilber enthielten in einem Falle 0·45 Theile, in einem anderen Falle 0.52 Theile Gelatine.

---

[1] Es vertheilt sich in einer frischen Gelatinelösung augenblicklich zu einer feinen Emulsion von vortrefflichen photographischen Eigenschaften.

Daraus geht hervor, dass das Bromsilber während seiner Präcipitation bei Gegenwart von Gelatine diese letztere aufnimmt und so hartnäckig festhält, dass man sie durch Waschen mit heissem Wasser und Auscentrifugiren nicht entfernen kann.

Wird einer Gelatineemulsion Eosin oder Cyanin zugesetzt, dieselbe dann gewaschen, so kann man den Farbstoff nicht mehr so vollständig entfernen, dass die Gelbempfindlichkeit im Spectrographen nicht hervortreten würde. Als aber das Bromsilber aus eosinhältiger Bromsilbergelatine auscentrifugirt und gewaschen wurde, ferner das Centrifugiren und Waschen dreimal wiederholt worden war, ging anfangs rothgefärbte Gelatine ab, später aber waren die Waschwässer farblos. Trotzdem blieb das Bromsilber bei Anwendung von grösseren Farbstoffmengen schwach röthlich oder erschien bei Benützung von weniger Eosin kaum kenntlich gefärbt, in allen Fällen aber trat das für Eosin charakteristische Sensibilirungs-Maximum in der Nähe von *D* auf.

Dies beweist, dass der Farbstoff dem Bromsilberkorn selbst fest anhaftet, sei es dem Bromsilber als solchem oder der vom Bromsilberkorn eingeschlossenen Gelatine.[1]

Diese Thatsache erscheint für die Erklärungsversuche der „optischen Sensibilisirung“ von Belang.

Beziehungen zwischen der Absorption der Farbstoffe und deren sensibilisirender Wirkung für Bromsilber.

Für die Beurtheilung des Zusammenhanges der Absorption der Farbstoffe und deren sensibilisirende Wirkung, auf welche schon H. W. Vogel in allgemeinen Umrissen hingewiesen hat, wählte sich gefärbte trockene Gelatinefolien[2] und verglich die Absorption mit den Spectrum-Photographien auf den ebenso gefärbten Bromsilbergelatineplatten. In allen von mir beobachteten

[1] Es würde dann die Gelatine das Anhaften des Farbstoffes am Bromsilber in ähnlicher Weise vermitteln, wie dies alle Proteïnkörper beim Färben der Baumwolle thun.

[2] Farbstofflösungen geben ganz andere Absorptionsspectra als trockene Farbstoffe. Am besten hätten wohl gefärbte Bromsilberblättchen entsprochen; da jedoch solche schwierig herzustellen sind, begnüge ich mich mit gefärbten Gelatinefolien.

Fällen entsprach die Lage des Absorptionsspectrums der trockenen gefärbten Folie dem Sensibilisirungsmaximum auf gefärbtem Bromsilber, wobei jedoch eine Verschiebung des letzteren nach Roth zu im Vergleich mit dem ersteren auftrat. Diese Verschiebung ist jedoch nicht immer sehr bedeutend; bei Eosinfarben differirt das Maximum der Absorption der Gelatinefolie und jenes der Sensibilisirung auf Bromsilber im Gelbgrün um 16 bis 20 $\mu\mu$.[1]

In Fig. 12 sind die Resultate einiger meiner Versuche abgebildet. Spectrum 1 ist das Facsimile des Spectrumbildes auf Bromsilbergelatine, welche mit bläulichem Eosin gefärbt war, erhalten im directen Sonnenlichte (ähnliche Spectrumbilder auf gelblichem Eosin, sowie Rose bengal sind schon oben als Curven dargestellt worden). In 2 ist das Absorptionsspectrum einer mit demselben Eosin gefärbten trockenen Gelatinefolie (mit Benützung einer photographischen Aufnahme desselben auf Cyanin-Bromsilberplatten) abgebildet: Das Maximum der sensibilisirenden Wirkung des Eosins auf Bromsilbergelatine liegt weiter gegen Roth zu als das Maximum der Absorption in der gefärbten Gelatine.

Dasselbe gilt von Anilinroth, wie die Bilder 3 und 4 in Fig. 13 zeigen, sowie von den anderen Farbstoffen.

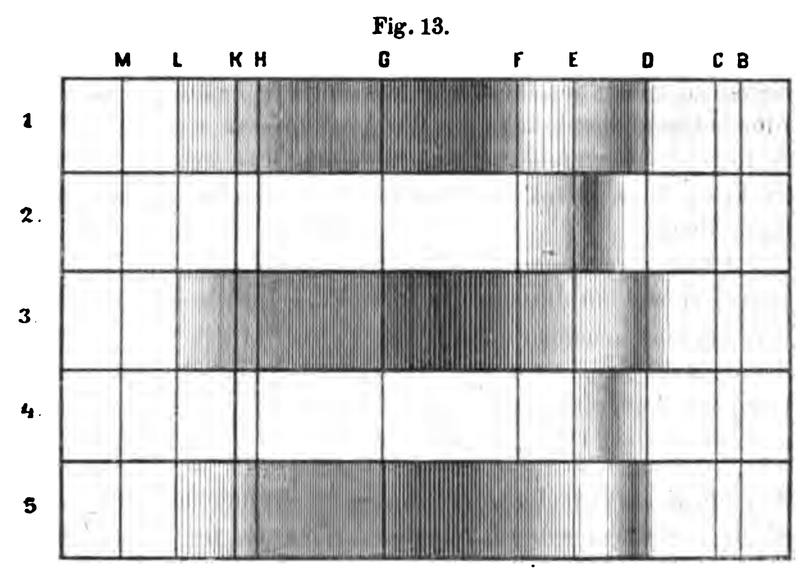
Durch die gefärbte Gelatine gehen somit noch viele Strahlen an dem weniger brechbaren Ende des Spectrums durch, welche noch äusserst kräftig auf ebenso gefärbtes Bromsilber wirken. Lässt man das Sonnenspectrum durch eine mit Eosin gefärbte trockene Gelatinefolie fallen, so sollte auf Eosin-Bromsilbergelatine kein photographisches Bild im Gelbgrün entstehen, wenn die in ersterer absorbirten Strahlen die Lichtempfindlichkeit der letzteren erregen würden, wie man von anderer Seite annahm. Ich erhielt aber unter diesen Umständen neben dem gewöhnlichen Spectrumbild im Blau auch ein intensives Bild im Gelb bei *D*, welches dem Maximum der optischen Sensibilisirung auf Eosin-Brombilder entspricht und daneben ein Minimum (eine völlig leere Stelle), welche dem Maximum der Absorption der Eosingelatine entspricht (Curve 5 in Fig. 13).

---

[1] Nach dem Vorschlage Kayser's (Lehrbuch der Spectralanalyse. 1883. p. 11) bezeichne ich die Wellenlängen in Milliontel Mm. = $\mu\mu$.

Dadurch ist bewiesen, dass das Maximum der Sensibilisirung bei gefärbten Bromsilbergelatineplatten mit dem Maximum der Absorption in gefärbter Gelatine nicht identisch ist, sondern dass man die Färbung des Bromsilbers selbst in Betracht ziehen muss.

Fig. 13.



1. Spectrumbild auf Bromsilbergelatine + Eosin. — 2. Absorptionsspectrum einer mit Eosin gefärbten Gelatinefolie. — 3. Spectrumbild auf Bromsilbergelatine + Anilinroth. — 4. Absorptionsspectrum einer mit Anilinroth gefärbten Gelatinefolie. — 5. Absorptionspectrum einer mit Eosin gefärbten Gelatinefolie, photographirt auf einer mit Eosin gefärbten Bromsilbergelatine.

Dass das Bromsilbermolekel thatsächlich gefärbt wird, habe ich experimentell gezeigt (f. o.); zur Erklärung der grösseren Verschiebung des Maximums der mit Lichtabsorption verbundenen photographischen Sensibilisirung von Bromsilber kann das Kundt'sche Gesetz angeführt werden, nach welchem in den meisten Fällen mit der Zunahme des Brechungsvermögens des Mediums der Absorptionsstreifen des von ihm eingeschlossenen Farbstoffes gegen das rothe Ende hin verschoben wird. Auf einen analogen Fall hat Dr. E. Albert[1] bei gefärbten Collodionemulsionen aufmerksam gemacht.

[1] Photogr. Correspondenz. 1884. p. 137.

Durch diese Beobachtung glaube ich auch das Verhalten von Bromsilbergelatine, welche unter einer Farbstofflösung noch nass exponirt wird, erklären zu können. Die Farbstofflösung wirkt dann wie ein farbiger Schirm. Z. B. Ähnelt das Spectrumbild auf einer mit wässeriger Eosinlösung bedeckten Bromsilbergelatineplatte mehr dem Bilde 5 in Fig. 13 als dem Bilde 1 in derselben Figur: Der bei *E* liegende Absorptionsstreifen der wässerigen Eosinlösung hält das Licht von dem darunter befindlichen Bromsilber ab und beschränkt die Wirkung auf das weiter gegen *D* zu liegende Maximum der Sensibilisirung, welches letztere für trockenes oder nasses gefärbtes Bromsilber nahezu an derselben Stelle liegt.

Färbt man Bromsilbergelatine mit Farbstoffgemischen, so schädigen sich oft dieselben in ihren Wirkungen und nicht selten wird der eine scheinbar unterdrückt. Dieser Fall scheint besonders dann einzutreten, wenn der Absorptionsstreifen der mit einem Componenten gefärbten Gelatine über das Sensibilisirungsmaximum des andern Componenten fällt.

Beziehungen zwischen der anormalen Dispersion der Farbstoffe und deren sensibilisirender Wirkung für Bromsilber.

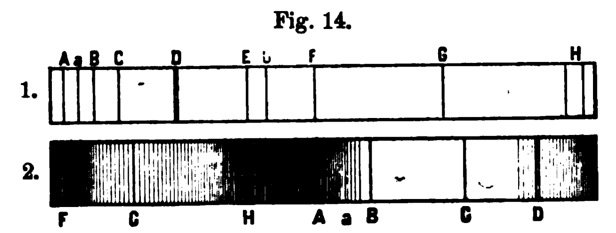
Von den auf Bromsilber eine sensibilisirende Wirkung äussernden Farbstoffen ist der Mehrzahl nach anormale Dispersion nachgewiesen und Dr. E. Albert stellte die Annahme auf (a. a. O.), dass die normale Dispersion im Zusammenhang mit der Sensibilisirung steht: „Bromsilber wird hauptsächlich durch kleinwellige (blaue und violette) Farbstoffe afficirt. Durch die anormale Dispersion werden nun Strahlen von kleiner Wellenlänge an das rothe Ende des Spectrums (neben dem Absorptionsstreifen) gebracht, welche auf Bromsilber stark wirken.“ So würde sich, sagt Albert, die Verschiebung des Maximums der chemischen Wirkung nach dem rothen Ende des Spectrums in ungezwungener Weise erklären; er sprach jedoch nur die Vermuthung ohne experimentelle weitere Untersuchung aus.

Zu meinen Auseinandersetzungen benutze ich Fig. 14 aus Schellen's Spectralanalyse (1883).

Im normalen Spectrum (1) folgen von links nach rechts der Reihe nach Strahlen von immer kleinerer Wellenlänge. Im

anormalen Spectrum einer als Prisma wirkenden concentrirten Anilinrothlösung liegt der Absorptionsstreifen bei *E* und beiderseits erscheinen die Hälften des normalen Spectrums gegen einander verschoben. Rechts liegen die Strahlen von grösserer Wellenlänge (Roth, Orange, Gelb und Gelbgrün); links vom Absorptionsstreifen aber die Strahlen von kleinerer Wellenlänge (Violett bis Blaugrün). Es haben also im anormalen Spectrum des Fuchsins in der That die Lichtstrahlen *C* bis $D^1/_2\,E$ gerade die Wellenlänge, wie im normalen Spectrum die Strahlen *G—H*, welche auf Silbersalze am kräftigsten wirken.

Fig. 14.



1. Normales Sonnenspectrum. — 2. Anormales Spectrum durch Anilinroth.

Es ist nun schwer einzusehen, wie in einem normal erzeugten reinen Sonnenspectrum ein Farbstoff anormale Dispersion hervorrufen sollte; und man stösst bei näherer Betrachtung noch auf andere Widersprüche.

Zunächst erscheint es auffallend, dass Farbstoffe ein schmales intensives Band der Sensibilisirung im Gelb etc. geben, während sie oft im normalen blauen und violetten Theil des Sonnenspectrums einen langgestreckten Streifen ohne deutlich begrenztes Maximum zeigen. Mit kurzen Worten, es müsste die Sensibilisationswirkung im Gelb oder Roth ein ähnliches Bild hervorbringen, wie im blauen Theil. Es müsste namentlich an Jod-Bromsilbergelatine, oder Jod-Chlorsilbergelatine, welche im blauen Ende des normalen Spectrums zwei Maxima in Wirkung zeigen, auch im gelben Ende durch das anormale Spectrum zwei Maxima im Sensibilisirungsband bemerkbar sein; was ich niemals beobachtete, wenn der Farbstoff nur Ein Absorptionsband aufwies.

Ferner müsste, wenn der Farbstoff ein Band von kleinwelligen Strahlen an einer gewissen Stelle des Spectrums erzeugen würde, das Maximum der Sensibilisirung durch einen

Farbstoff bei Bromsilber- und Chlorsilbergelatine verschieden sein, weil Chlorsilber die grösste Zersetzung bei *H*, Bromsilber bei *G* bis *F* erleidet. Demzufolge müsste das Maximum der Sensibilisirung bei Chlorsilber wesentlich weniger weit gegen Roth liegen als bei Bromsilber. Versuche mit Eosin und Cyanin ergaben mir aber negative Resultate: Das Maximum der normalen Spectralwirkung gefärbter Chlor-, Brom-, Jodbrom- und Jodchlorsilbergelatine im blauem Theil des Spectrums schwankt je nach der Natur des Silbersalzes (s. o.), die Lage des Maximums der Sensibilisirung durch Farbstoffe im rothen Ende aber ist constant.[1]

Die anormale Dispersion reicht also nicht zur Erklärung der sensibilisirenden Wirkung von Farbstoffen auf Bromsilber etc. hin.

Mit der Fluorescenz der Farbstoffe hängt deren sensibilisirende Wirkung auf Bromsilber nach den Angaben anderer Forscher nicht zusammen und ich kann dies auf Grund meiner Versuche bestätigen. Es sind nämlich Farbstoffe, welche roth fluoresciren (Naphtalinroth), ebenso Sensibilisatoren, wie solche, welche gelb (gewisse Eosinfarben) oder grün fluoresciren (Fenoresceïn); dagegen wirken manche nicht fluorescirende Farbstoffe (Cyanin, Anilinroth) sensibilisirend; kurz es findet keine Regelmässigkeit in dieser Richtung statt.

Beziehungen zwischen den chemischen und physikalischen Eigenschaften der Substanzen zu ihrer Lichtempfindlichkeit.

Nicht alle Farbstoffe bewirken eine relative Steigerung der Lichtempfindlichkeit der Silberhaloïdsalze gegen die weniger brechbaren Strahlen im gleichen Grade, viele sogar überhaupt nicht.

Ich habe über 140 Farbstoffe auf Bromsilbergelatine in zwei bis drei verschiedenen Concentrationen sowie mindestens drei verschieden langen (um das 100- bis 300fache variablen) Belichtungszeiten versucht und konnte nur bei einem Bruchtheil sensibilisirende Eigenschaften auffinden. Wenn auch die Zahl der von mir entdeckten Sensibilisatoren eine namhafte ist, so wirken sie doch nur zum kleinerem Theile intensiv.

[1] Ich sehe hiebei von kleinen unregelmässigen Schwankungen ab, welche ich dem Einfluss der Atmosphäre auf die Qualität des Lichtes zuschreibe.

In sehr engen Grenzen treten wohl mit ähnlicher chemischer Constitution auch homologe Absorptionsspectra und sensibilisirende Wirkungen auf, z. B. beim Jod-, Chlor-, Sulfat- und Nitrat-Cyanin, bei verschiedenen Salzen des Rosanilins etc. Doch will dies nicht viel sagen. Den Derivaten des Fluoresceïns scheint die besagte Eigenschaft allgemeiner zuzukommen, z. B. ist Fluoresceïn und Benzylfluoresceïn (Chrysolin) ein Sensibilisator für Grün, die bromirten, chlorirten und jodirten Fluoresceïne (Eosine) für Gelbgrün bis Gelb, dagegen ist diese Regelmässigkeit durch die verschwindend kleine Wirkung des Nitroderivates gestört.

Da das Fluoresceïn ein Phtalsäurederivat ist, nämlich Resorcinphtaleïn, so versuchte ich Phenolphtaleïn (mit Alkalien roth) und Orcinphtaleïn (roth) sowie die Bromirungs- und Nitrirungsproducte des letzteren; jedoch ohne bemerkenswerthen Erfolg.

Rosanilinsalze sensibilisiren für Gelb und Orange; Rosanilinsulfosäure (roth) nicht, wogegen die Sulfosäuren des Bittermandelölgrün (d. i. Säuregrün) und das Bittermandelölgrün selbst sensibilisiren. Trimethylrosanilin, sowie Triaethylrosanilinsalze (Hofmann's Violett etc.) sensibilisiren für Orange bis Roth, Phenylrosanilin- und deren sulfosaure Salze (Anilinblau) aber nicht bemerkenswerth.

Regelmässige Beziehungen zwischen chemischer Constitution und sensibilisirender Wirkung der Farbstoffe konnte ich nicht auffinden.

Besser gelang dies mit der Lage des Maximums der Absorption des farbigen Lichtes des Farbstoffes und jenes seiner sensibilisirenden Wirkung auf Bromsilbergelatine. Aus dem ersteren kann man auf die letztere schliessen, und man wird im Vorhinein bestimmen können, ob der Farbstoff das Bromsilber im Grün, Gelb oder Roth sensibilisirt. Man wird das Absorptionsspectrum gefärbter Gelatinefolien betrachten und die oben erwähnte Verschiebung des Sensibilisirungsstreifen nach Roth berüchsichtigen. Dies gilt für alle Farbstoffe, welche Sensibilisatoren für Bromsilbergelatine sind.

So drängt sich nun weiter die Frage auf: Welche Farbstoffe sind Sensibilisatoren? Ich weiss kein anderes sicheres Mittel, als sich durch das photographische Experiment darüber Aufschluss zu verschaffen. Nach den mir bis jetzt vorliegenden Beobachtungen

müssen die auf Silberhaloïdsalze sensibilisirend wirkenden Farbstoffe folgenden Anforderungen entsprechen:

1. Sie müssen das Bromsilberkorn färben. Die Farbstoffe, welche kräftig sensibilisiren, sind auch alle sogenannte „substantive Farbstoffe".

2. Sie müssen im trockenen Zustande — auf gefärbter Gelatine oder wohl richtiger auf gefärbtem Bromsilber — auch in bedeutender Verdünnung ein intensives Band im Absorptionsspectrum zeigen, wenn sie eine intensive Schwärzung des Bromsilbers bewirken sollen. Ein schmales Band der Absorption gibt auch ein eben solches bei der Sensibilisirung.

Ich habe oben erwähnt, dass weder Fluorescenzerscheinungen noch anormale Dispersion der Farbstoffe ihre sensibilisirende Wirkung auf Bromsilber für die weniger brechbaren Strahlen genügend erklären.

Die Annahme, dass an Stelle des Absorptionsstreifens die Moleküle des Farbstoffes in energische Schwingung versetzt werden und damit auch das benachbarte Bromsilber, ist unhaltbar, wie Dr. E. Albert zeigte. Abgesehen von der anormalen Dispersion schwingen die Farbstoffmoleküle an der Stelle der Absorption nicht, sondern es werden Schwingungen vernichtet und dafür Wärme oder chemische Zersetzung des Farbstoffes erzeugt.

Man könnte nun eine chemische Zersetzung des Farbstoffes annehmen, dessen Zersetzungsproducte erst secundär auf das Bromsilber reducirend wirken.[1] Diese Ansicht wurde aber schon von Prof. H. W. Vogel als nicht allgemein giltig erkannt.[2]

Es steigert sich nach meiner Ansicht vielmehr die Wirkung des Bromsilbers und des Farbstoffes gegenseitig, und zwar unabhängig von der Lichtempfindlichkeit des Farbstoffes für sich.

---

[1] Diese Ansicht sprach Abney, gestützt auf seine Experimente mit Cyanin, aus. Cyanin zersetzt sich für sich allein im Gelb. Überzieht man eine Glasplatte mit Rohcollodion, welches mit Cyanin gefärbt ist und exponirt dem Spectrum, überzieht mit Bromsilbercollodion und entwickelt ohne nochmals zu belichten, so kommt ein Bild an den von dem gelben Licht getroffenen Stellen zum Vorschein, dort wo das Cyanblau den Absorptionsstreifen zeigt. Directer Farbenzusatz und nachheriges Exponiren gab dasselbe Resultat (Vergl. mein „Ausführliches Handbuch der Photographie". 1883. VI. Heft. Bd. 2. p. 17.).

[2] Photogr. Mittheilungen. Bd. 15. p. 91.

Das Bromsilber verbindet sich mit dem Farbstoff durch Molekular-Attraction[1] und wird gefärbt. Der beigemengte Farbstoff würde für sich allein an der Stelle des Absorptionsstreifens Licht stark absorbiren und zum grössten Theil in Wärme, aber nur zum kleineren Theil (weil die meisten sensibilisirenden Farben ziemlich lichtecht sind) in chemische Arbeit (Oxydation) umgewandelt werden. Den Lichtverlust im ersteren Falle schlage ich vor „phototbermische Extinction", jenen im letzteren Fall „photochemische Extinction" zu nennen.[2] Bromsilber etc. innig gemischt oder verbunden mit einem geeigneten Farbstoff, bewirkt, dass ein grosser Theil des nunmehr vom Farbstoff absorbirten Lichtes in chemische Arbeit umgesetzt wird, wobei das Bromsilber mit in den Process gezogen wird. Die Neigung des Farbstoffes sich im Lichte zu oxydiren,[3] wird durch die Eigenschaft des Bromsilbers, im Lichte das desoxydirende Brom abzugeben, unterstützt.

Kommt bei färbigen Substanzen mit starker electiver Absorption zu der Umsetzung des Lichtes in Wärme noch ein photochemischer Process, so treten auch bei letzterem die Lichtstrahlen von jener Wellenlänge in Action, welche erstere verursachen. Die Lage des Absorptionsstreifens des Farbstoffes bleibt unverändert, da gleichartige Lichtstrahlen bald mehr in Wärme, bald mehr in chemische Arbeit umgewandelt werden; in quantitativer Beziehung muss sich dann die Absorption ändern, indem zur „photothermischen Extinction" die „photochemische" hinzukommt, wie dies Bunsen bei dem Gemische von Chlor und Wasserstoff (chemische und optische Extinction) und Marchand bei Eisenchlorid und Oxalsäure zeigten. In allen diesen Fällen richtet sich das Maximum der photochemischen Zersetzung im Spectrum hauptsächlich nach der Lage des Absorptionsstreifens des farbigen Bestandtheiles.

---

[1] Nimmt man an, das Färben von Fasern (Wolle etc.) geschieht durch chemische Verbindung mit dem Farbstoff, so kann auch hier dasselbe vorausgesetzt werden; im entgegengesetzten Falle: Molekular-Attraction.

[2] Hiezu kommt noch in consequenter Weise die „photoelektrische Extinction" bei gewissen durch das Licht bewirkten elektrischen Processen. Obige Bezeichnung erscheint mir allgemeiner anwendbar und präciser als die Bunsen'sche Theilung in „optische" und „chemische Extinction".

[3] Beziehungsweise sich zu bromiren.

Nach den angeführten Thatsachen glaube ich berechtigt zu sein, Nachstehendes als ein Gesetz für photochemische Zersetzungen zu formuliren:

Die photochemische Extinction eines Gemisches wird in vielen Fällen durch die photothermische Extinction eines Bestandtheiles bestimmt.

Wird das Gemisch (oder die Verbindung) eines farbigen Körpers von starkem electiven Absorptionsvermögen mit einem anderen im Lichte zersetzt, so treten bei der photochemischen Zersetzung hauptsächlich Lichtstrahlen von jener Wellenlänge in Wirkung, welche von ersterem mit photothermischer Extinction absorbirt werden; dadurch wird ein Maximum der photochemischen Zersetzung im Spectrum durch den farbigen Körper bestimmt. Besitzt der Körper von geringerem electiven Absorptionsvermögen für sich selbst eine namhafte Lichtempfindlichkeit, so kommt diese Zersetzung im Lichte mehr oder weniger charakteristisch neben der durch den stark absorbirenden Farbstoff bedingten zum Vorschein.

Durch Zusatz von Farbstoffen zu gewissen Silbersalzen (besonders Brom- und Chlorsilber) kann deren Empfindlichkeit für die weniger brechbaren Strahlen, entsprechend der Vogel'schen Beobachtung, gesteigert werden, so dass das Gemisch für diese Strahlen lichtempfindlicher ist, als jede der einzelnen Componenten, wobei sich das Maximum der Farbstoffwirkung nach dem oben erwähnten Gesetz richtet.

Anwendung der gefärbten Bromsilbergelatineplatten und orthochromatischen Platten.

Bromsilbergelatineplatten, welche durch den Zusatz der oben erwähnten Farbstoffe für irgend einen Theil des Spectrums sensibilisirt sind, können mannigfache Anwendung finden. Nämlich zum Studium der Spectralerscheinungen selbst, welche bis jetzt nur vom ultravioletten bis zum grünen Theil auf Bromsilbergelatine photographirt werden konnten, nunmehr aber mit Leichtigkeit bis über *C* im Roth (z. B. mit Cyanin oder Jodgrün), wobei mit unvergleichlich grösserer Sicherheit gearbeitet werden kann, als mit sogenannten „rothempfindlichen Collodionemulsionen".

Ferner sind Gemälde, Teppiche, Stickereien mit dem richtigen Helligkeitswerth von Blau und Violett einerseits, Gelb und Roth anderseits zu reproduciren, ohne dass die ersteren hell, die letzteren dunkel erscheinen, was der grösste Fehler der gewöhnlichen photographischen Präparate ist. Solches erzielte ich mit Bromsilbergelatineplatten, welche mit Eosin, Cyanin, Rose bengal, Anilinviolettsorten (s. o.), Naphtalinroth gefärbt waren, wobei allerdings ein gelbes Glas vor das Objectiv zum Abschwächen der blauen Strahlen angebracht wurde.

Solche orthochromatische Photographien habe ich schon Ende August 1884 dargestellt, ohne von der noch jetzt unbekannten Darstellungsweise von Prof. Vogel's Azalinplatten Kenntniss zu haben; eine ganze Collection von sehr schwierig zu reproducirenden Aquarellen, Stickereien, namentlich aber von alten vergilbten Ölgemälden, welche bis jetzt dem Photographen fast unüberwindliche Schwierigkeiten boten, legte ich beim Stiftungsfeste des Vereines zur Pflege der Photographie in Frankfurt a. M. am 11. September 1884 vor. Die erste Anwendung zum Studium der Absorptionsspectra ist in der vorliegenden Abhandlung beschrieben worden.

Schliesslich spreche ich noch meinen Dank jenen Herren aus, welche durch Übermittlung von Farbstoffproben meine Arbeiten förderten, insbesondere dem Herrn Prof. Pohl, Dr. Benedikt und Herrn Hecht in Wien, Herrn Dr. König in Höchst a. M., Herrn Dr. Schuchardt in Goerlitz, sowie dem Herrn Regierungsrath Dr. E. Hornig in Wien, welcher meinen Untersuchungen in mehrfacher Weise Vorschub leistete.

Über das Morin. II.

Von Rudolf Benedikt und Carl Hazura.

(Aus dem chemischen Laboratorium der technischen Hochschule in Wien.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. December 1884.)

Wir haben in unserer ersten Mittheilung[1] über das Morin gezeigt, dass sich die bei der Analyse desselben gefundenen Zahlen ebenso gut auf $C_{13}H_8O_6$ wie auf die zuerst von Löwe[2] aufgestellte Formel $C_{15}H_{10}O_7$ beziehen lassen. Um eine Entscheidung zu treffen, haben wir einige Substitutionsproducte des Morins dargestellt, welche bei der Analyse Resultate gaben, die weit besser mit der Formel $C_{15}H_{10}O_7$ in Einklang zu bringen sind, so dass wir dieselbe nunmehr für die weitaus wahrscheinlichere halten.

Bromderivate des Morins.

Hlasiwetz und Pfaundler[3] erhielten durch Zusammenreiben von Morin und Brom und Umkrystallisiren des Productes aus Alkohol einen Körper, den sie als Tribrommorin ansprachen.

Eine Wiederholung dieses Versuches gab uns kein befriedigendes Resultat. Der nach dem Vertreiben des Bromwasserstoffes verbleibende Rückstand löste sich nur zum kleinsten Theile in Alkohol, die Hauptmenge blieb auch bei anhaltendem Kochen ungelöst.

Besseren Erfolg hatte die Bromirung in alkoholischer Lösung.

50 Grm. Morin wurden in 500 CC. Alkohol gelöst und unter zeitweisem Kühlen tropfenweise mit 90 Grm. Brom versetzt. Die

---

[1] Monatshefte für Chemie V. 165.

[2] Zeitschrift für analyt. Chemie 14·112.

[3] Sitzungsberichte der kais. Akademie 50. II. 13.

Flüssigkeit wurde in Wasser eingegossen, wobei sich das Bromproduct als wenig gefärbter voluminöser Niederschlag abschied. In Lösung blieb nur eine geringe Menge eines durch Äther extrahirbaren Körpers, der nach dem Umkrystallisiren aus verdünntem Alkohol leicht als Tribromphloroglucin erkannt werden konnte. Er gibt die charakteristische Reaction mit concentrirter Salpetersäure[1] und schmilzt bei 143° C.

	Gefunden	Berechnet für $C_6Br_3H_3O_3$
Br	66·14	66·12

Der Niederschlag kann durch wiederholtes Umkrystallisiren aus Chloroform gereinigt werden. Man kommt jedoch rascher nach dem folgenden Verfahren zum Ziele, welches wir einschlugen, nachdem wir uns überzeugt hatten, dass die neue Verbindung durch verdünnte Kalilauge nicht verändert wird.

Man löst in verdünnter Kalilauge, filtrirt von einer geringen Menge schleimiger Verunreinigungen ab und fügt verdünnte Schwefelsäure im Überschuss hinzu. Der flockige Niederschlag wird nach 24stündigem Stehen körnig-krystallinisch. Man löst ihn in Alkohol und versetzt nach dem Erkalten mit Wasser bis zur beginnenden Trübung. Nach einiger Zeit beginnt dann die Abscheidung grosser farbloser, compacter Krystalle. Die Mutterlaugen geben bei weiterem successiven Wasserzusatz weitere Krystallisationen. Die Ausbeute betrug 67 Grm. aus 50 Grm. Morin oder 134 Percent vom angewandten Morin.

Versetzt man die heisse alkoholische Lösung mit heissem Wasser, so scheidet sich die Verbindung als Öl ab, welches nach einigen Tagen zum grössten Theil krystallinisch erstarrt.

Durch neuerliches Umkrystallisiren in der erst beschriebenen Weise erhält man den Körper vollständig rein.

Wir halten ihn für einen Monoäthyläther des Tetrabrommorins von der Zusammensetzung $C_{15}H_5Br_4O_7.C_2H_5 + 4H_2O$.

Zur Analyse wurde die Substanz im Vacuum über Schwefelsäure getrocknet, beim Erwärmen auf 100° tritt schon Bräunung

[1] Benedikt, Sitzungsber. d. kais. Akademie d. Wiss. 73. II. 657.

ein. Bei 135° findet Schmelzung unter theilweiser Zersetzung und Gasentwicklung statt.

Beim Stehen über Schwefelsäure werden 2 Mol. H_2O abgegeben:

	Gefunden			Berechnet für Abgabe von 2 Mol. H_2O aus $C_{15}H_5Br_4O_7 \cdot C_2H_5 + 3H_2O$
H_2O	4·97	4·76	4·83	5·01

Die getrocknete Substanz gab bei der Elementaranalyse folgende Zahlen:

	Gefunden			Berechnet
	I.	II.	III.	für $C_{17}H_{10}Br_4O_7 + 2H_2O$
C	30·31	30·04	30·33	29·91
H	1·77	1·79	1·75	2·05
Br	46·61	46·65	—	46·92
O	—	—	—	21·12

Wir gründen unsere Ansicht, dass diese Verbindung ein Äthyläther des Brommorins und nicht etwa Brommorin sei, vornehmlich darauf, dass ihre Lösung in verdünnten Alkalien ungefärbt ist, und dass sie beim Erhitzen mit concentrirter Salzsäure, leichter noch mit Zinnchlorür und Salzsäure in Tetrabrommorin übergeführt werden kann.

50 Grm. des Brommorinäthers wurden mit 50 CC. concentrirter Zinnchlorürlösung angerührt, sodann in einem Kolben mit 100 CC. rauchender Salzsäure versetzt und auf dem Wasserbade erwärmt. Die Masse erstarrt bald durch die Umwandlung des körnigen Brommorinäthers in die sehr voluminösen, ausserordentlich feinen Nadeln des freien Brommorins. Man setzt von Zeit zu Zeit Salzsäure hinzu, um die Mischung dickflüssig zu erhalten, wozu noch 250 CC. Salzsäure verbraucht wurden.

Nach dem Verdünnen mit Wasser wird abfiltrirt, gut gewaschen, getrocknet und in siedendem Alkohol gelöst. Dann versetzt man mit heissem Wasser bis zur beginnenden Trübung. Beim Erkalten scheidet sich das Tetrabrommorin in feinen Nadeln aus. Nach dem Umkrystallisiren und Trocknen ist es nur schwach gelb gefärbt. Sein Schmelzpunkt wurde bei 258° gefunden.

Aus den nachfolgenden Zahlen wurde für das Tetrabrommorin die Formel $C_{15}H_6Br_4O_7 + 2^1/_2 H_2O$ berechnet.

Beim Trocknen bei 110° entweicht das Krystallwasser:

	Gefunden				Berechnet für $C_{15}H_6Br_4O_7+2^1/_2H_2O$
H_2O	6·09	6·20	6·70	6·72	6·79

Die getrocknete Substanz gab bei der Elementaranalyse

	Gefunden			Berechnet für $C_{15}H_6Br_4O_7$
	I.	II.	III.	
C	28·95	28·74	—	29·13
H	1·13	1·25	—	0·97
Br	51·46	51·28	51·59	51·78
O	—	—	—	18·12

Das Tetrabrommorin löst sich in Alkalien mit intensiv gelber Farbe.

Gegen Fasern verhält es sich insoferne anders als Morin, als es Seide und Wolle aus schwach sauren Bädern auch ohne Anwendung von Beizen sehr schön und vollkommen echt gelb färbt.

Erhitzt man den Tetrabrommorinäther mit rauchender Salzsäure im zugeschmolzenen Rohre andauernd auf 100°, so wird er ebenfalls in Tetrabrommorin übergeführt.

Morinsulfosäure.

10 Grm. bei 100° getrockneten Morins werden mit 11 CC. englischer Schwefelsäure in einer Eprouvette eine Stunde im Wasserbade erhitzt, dann giesst man in Wasser ein und setzt partienweise so lange aufgeschlämmten kohlensaurenBaryt hinzu, bis in einer abfiltrirten Probe Baryt nachgewiesen werden kann. Dann filtrirt man ab, bringt die Flüssigkeit auf ein bestimmtes Volumen und bestimmt in einem kleinen abgemessenen Theil den in Lösung gegangenen Baryt. Man fällt nun den ganzen Baryt mit der genau berechneten Menge titrirter Schwefelsäure, filtrirt und dampft auf dem Wasserbade ein. Bei genügender Concentration scheidet sich die Morinmonosulfosäure als scheinbar gallertige Masse aus, unter dem Mikroskope erkennt man jedoch, dass sie aus unendlich feinen, langen, zu Knäueln verwickelten Fäden besteht.

Wendet man statt der englischen Schwefelsäure Vitriolöl an, so verläuft der Process nicht so glatt, indem in der Mutterlauge eine zweite, nicht krystallisirbare Säure verbleibt, vielleicht eine Disulfosäure.

Die durch Umkrystallisiren gereinigte Sulfosäure erscheint in der Flüssigkeit hellgelb, nach dem Trocknen im Vacuum und Zerreiben stellt sie ein bräunlich gelbes Pulver dar.

Die so vorbereitete Substanz gab bei der Analyse:

	Gefunden	Berechnet für $C_{15}H_9O_7.SO_3H+2H_2O$
C	43·18	43·06
H	3·02	3·35
S	8·13	7·66
O	—	45·93

Beim Erwärmen auf 100° entweicht das Krystallwasser:

	Gefunden	Berechnet für $C_{15}H_9O_7.SO_3H+2H_2O$
H_2O	8·04	8·61

Die bei 100° getrocknete Substanz hatte folgende Zusammensetzung:

	Gefunden	Berechnet für $C_{15}H_9O_7.SO_3H$
C	46·83	47·12
H	3·05	2·62
S	—	8·38
O	—	41·88

Die Morinsulfosäure ist ziemlich schwer löslich in kaltem, leicht in warmem Wasser, löslich in Alkohol und Eisessig, unlöslich in Äther. Die wässerige Lösung ist gelb gefärbt, die Farbe ist nach Zusatz von Alkali bedeutend intensiver. Beim Erhitzen hinterbleibt eine schwer verbrennliche Kohle. Seide und Wolle werden von Morinsulfosäure substantiv gefärbt.

Kalisalz. $C_{15}H_8KO_7.SO_3K+{}^1/_2H_2O$. Eine concentrirte Lösung der Sulfosäure wird mit kohlensaurem Kali so lange versetzt, bis kein Aufbrausen mehr stattfindet und zur Krystallisation eingedampft. Nach zwei- bis dreimaligem Umkrystallisiren aus

Wasser erhält man schwefelgelbe Nadeln, welche sich in Wasser mit schwacher grüner Fluorescenz leicht lösen. In Alkohol sind sie schwer löslich.

Beim Trocknen auf 100° entweicht Krystallwasser:

	Gefunden		Berechnet für $C_{15}H_8KO_7.SO_3K + {}^1/_2 H_2O$
H_2O . . 2·33	2·20	2·15	1·96

Die getrocknete Substanz gab bei der Analyse:

	Gefunden		Berechnet für $C_{15}H_8KO_7.SO_3K$
K	16·61	17·05	17·05
S	6·99	6·87	6·97

Barytsalze. Die Lösung der Morinsulfosäure wird mit überschüssigem kohlensaurem Baryt gekocht und abfiltrirt. Dabei geht nur ein Theil des sehr schwer löslichen Barytsalzes in Lösung, der andere wird dem Rückstand durch Kochen mit viel heissem Wasser entzogen. Kocht man aber mit wenig Wasser aus, so wird das Salz nahezu unlöslich und kann dann auch mit grossen Wassermengen nicht mehr in Lösung gebracht werden. Ein ähnliches Verhalten zeigt auch das umkrystallisirte Salz. Aus den Filtraten fällt das Barytsalz in gelben Flocken aus. Das bei 100° getrocknete Product hat die Formel $C_{15}H_8SO_{10}Ba$.

	Gefunden			Berechnet für $C_{15}H_8SO_{10}Ba$
Ba	26·56	26·39	26·83	26·50
S	5·78	—	—	6·19

Versetzt man eine Lösung der Morinmonosulfosäure mit Ätzbaryt bis zur schwach alkalischen Reaction, so fällt ein basisches Salz in gelben Flocken aus, welche sich an der Luft bräunen. Der bei der Analyse gefundene Barytgehalt nähert sich dem für die Formel $C_{15}H_6SO_{10}Ba_2$ berechneten.

	Gefunden	Berechnet für $C_{15}H_6SO_{10}Ba_2$
Ba	43·00	42·03

Die Morinsulfosäure gibt Tribromphloroglucin, wenn man ihre heisse wässerige Lösung mit überschüssigem Brom

versetzt. Das Product krystallisirt beim Erkalten aus und wird durch Umkrystallisiren gereinigt.

Das Barytsalz der Morinsulfosäure gab beim Nitriren Trinitrophloroglucin.[1] Dasselbe schmolz bei 159—160°, war leicht löslich in Wasser und Alkohol und zeigte unter dem Mikroskope hexagonale Krystallform. Die wässerige Lösung gab mit Barythydrat einen aus mikroskopischen Nädelchen bestehenden Niederschlag, dessen Barytgehalt bestimmt wurde.

	Gefunden	Berechnet für $[C_6(NO_2)_3O_3]_2Ba_3$
Ba	44·04	44·34

[1] Benedikt, Sitzungsber. d. kais. Akademie d. Wiss. 77. II. 253.

Die Deformation der Lichtwellenfläche im magnetischen Felde.

(Mit 2 Holzschnitten.)

Von Dr. **Ernst v. Fleischl,**
Professor der Physiologie an der Wiener Universität.

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. December 1884.)

Durch Aufstellung der Gleichung der Wellenoberfläche in einem Medium zeigt die Theorie an, dass sie sich der, in diesem Medium auftretenden, optischen Phänomene völlig bemächtigt, und ihr analytisches Verständniss erledigt hat. Aber auch das anschauliche Verständniss ist kein vollkommenes, und fühlt sich nicht beruhigt, wenn ihm nicht als Basis für seine Constructionen die Vorstellung von der Gestalt und den räumlichen Eigenschaften der betreffenden Wellenoberfläche zu Gebote steht.

Die Gruppe merkwürdiger optischer Eigenschaften, welche viele, an und für sich isotrope, feste und flüssige Substanzen während ihres Aufenthaltes in einem magnetischen oder elektrischen Felde zeigen, ist unserem analytischen und anschaulichen Verständnisse noch nicht erschlossen, da weder die mathematische Behandlung, noch auch — so viel mir bekannt ist — eine andere Art der Überlegung zur Construction einer Wellenoberfläche geführt hat, aus deren Gestalt die durch das Experiment festgestellten Thatsachen sich erklären.

Wenn nun in der folgenden Darstellung jene Literatur, welche sich mit der theoretischen Behandlung der Lichtbewegung im magnetischen Felde beschäftigt, ganz und gar unberücksichtigt bleibt, so erklärt sich das, und erscheint selbstverständlich durch den Mangel jeglicher Beziehung zwischen dem, was man in der Optik „Theorie" nennt, und dem, was hier vorgebracht wird. Es handelt sich weder um den Versuch einer Theorie, noch überhaupt um das Bestreben, das Ziel der Theorie auf einem der

bisher betretenen, oder auf einem anderen Wege zu erreichen, sondern einzig und allein um die Mittheilung einer Muthmassung über die Gestalt der Wellenoberfläche des Lichtes im magnetischen Felde, und um die Darlegung der Gründe, welche die gemuthmaasste Gestalt als wahrscheinlich — ja sogar sie oder eine ihr sehr ähnliche Gestalt als die einzig mögliche erscheinen lassen. Ich denke, es versteht sich von selbst, dass durch einen solchen Nachweis, selbst wenn er gelingt, eine Theorie der betreffenden Lichtbewegung weder dargeboten noch überflüssig gemacht ist, dass vielmehr ein solcher Nachweis nicht den mindesten Zusammenhang mit einer Theorie, keinerlei Beziehung zu einer solchen besitzt. Für ein anschauliches Verständniss der so eigenthümlichen Phänomene im magnetischen Felde, und für die Beseitigung des Zweifels, ob diese Erscheinungen auf Grund derselben Principien erklärbar seien, wie die übrigen optischen Phänomene, mag jedoch die von mir ersonnene Muthmassung einigen Werth besitzen, und ihre ausführlichere Mittheilung glaube ich auch durch eine überraschende Übereinstimmung rechtfertigen zu dürfen, welche sich zwischen einer, aus meiner Conjectur durch Rechnung abgeleiteten Function, und den Resultaten früherer, von Verdet angestellter Messungen ergeben hat — eine Übereinstimmung, welche wesentlich weiter geht, als die, zwischen jenen Messungen, und der von Verdet selbst aus ihnen abstrahirten Function.

Bekanntlich besteht die charakteristische Eigenthümlichkeit der Lichtbewegung im magnetischen Felde, durch welche sie geradezu im Gegensatz zu der unter allen übrigen Bedingungen stattfindenden Lichtbewegung, und somit ganz isolirt ist, darin, dass in einem magnetischen Felde, in welchem die Verbindungslinie der Magnetpole sich von Nord nach Süd erstreckt, ein linear polarisirter Lichtstrahl, welcher das Feld in dieser Richtung durchzieht, und in dem z. B. die Schwingungsebene anfänglich vertical ist, ob er nun von Nord nach Süd, oder ob er von Süd nach Nord geht, in beiden Fällen in solcher Weise eine Drehung der Polarisationsebene erleidet, als würden die Schwingungsbahnen durch einen nur deren obere Hälften treffenden Wind der von Ost nach West streicht, um den Strahl als Axe zur Seite gedreht, so dass nach der üblichen Ausdrucksweise dieses Feld,

wenn es von Süd nach Nord durchstrahlt wird, gleich einer linksdrehenden Substanz wirkt, aber wenn es von Nord nach Süd vom Strahl durchschritten wird, so wirkt, wie eine ebenso stark rechtsdrehende Substanz. Diese Eigenschaft, und ihre unmittelbare Consequenz: eine Verdopplung der Drehung beim Hin- und Rückgang eines Strahles durch ein magnetisches Feld, statt der bei allen, an und für sich drehenden Mitteln in diesem Falle erfolgenden Aufhebung der Drehung — sind zu bekannt, als dass länger bei ihnen zu verweilen nöthig wäre.

Bei dem innigen, durch die Fresnel'sche Theorie etablirten Zusammenhang zwischen Drehung der Polarisationsebene, und Doppelbrechung, frägt es sich nun, erstens ob die aus der Drehung im magnetischen Felde folgende Doppelbrechung in der üblichen Weise durch eine Wellenoberfläche darstellbar sei, und zweitens, wenn diess der Fall ist, welche Gestalt diese Wellenfläche hat.

Die Beantwortung dieser beiden Fragen ist das Ziel der vorliegenden Schrift. Dass es, wenn die magnetische Drehung der Lichtschwingungen auf Doppelbrechung beruht, einen geometrischen Ort geben muss, an dem die Bewegung zu einer gegebenen Zeit nach der Störung des Gleichgewichtes des Lichtäthers in einem Punkte des magnetischen Feldes anlangt, — darüber kann gar kein Zweifel bestehen. So lange eine Gestalt im Raume nicht angebbar ist, welche der Bedingung dieses geometrischen Ortes entspricht, kann man etwa vermuthen, dass die magnetische Drehung anders zu Stande komme, als die in circular doppelbrechenden Substanzen. Geht man aber von der Voraussetzung einer magnetischen Doppelbrechung als Grundlage der magnetischen Drehung aus, dann kann man nur mehr fragen, wie die Wellenfläche aussieht, aber nicht, ob sie existirt. Von dieser Voraussetzung aber gehe ich in Folgendem aus.

Um die Gestalt der Wellenfläche im magnetischen Felde zu entwickeln, nehmen wir an, ihr Mittelpunkt, also der Ort, an welchem die Störung im Gleichgewichte des Lichtäthers stattfindet, liege auf der Verbindungslinie zweier punktförmiger Magnetpole (oder — um einen, den wirklichen Verhältnissen entsprechenden Fall zu betrachten, an einer solchen Stelle eines magnetischen Feldes, an welcher die Kraftlinien untereinander

merklich parallel verlaufen). — Die Verbindungslinie der Pole wählen wir zur X-Axe eines rechtwinkligen Raumcoordinatensystemes, dessen Nullpunkt mit dem Punkte, an welchem die Störung stattfindet, zusammenfällt. Vorderhand sei das Feld noch nicht magnetisch, also etwa der, den Elektromagneten erregende Strom noch nicht geschlossen. Das Licht, dessen Fortpflanzungsweise wir untersuchen, sei linear polarisirtes. Dann ist seine Wellenoberfläche im isotropen Medium natürlich eine Kugeloberfläche, oder, wenn wir, einer allgemein bekannten Vorstellungsweise uns bedienend, statt des einen linear polarisirten, zwei circular und einander entgegengesetzt polarisirte Strahlen annehmen, treten an die Stelle jener einen Kugelfläche zwei aufeinanderfallende, identische solche Flächen.

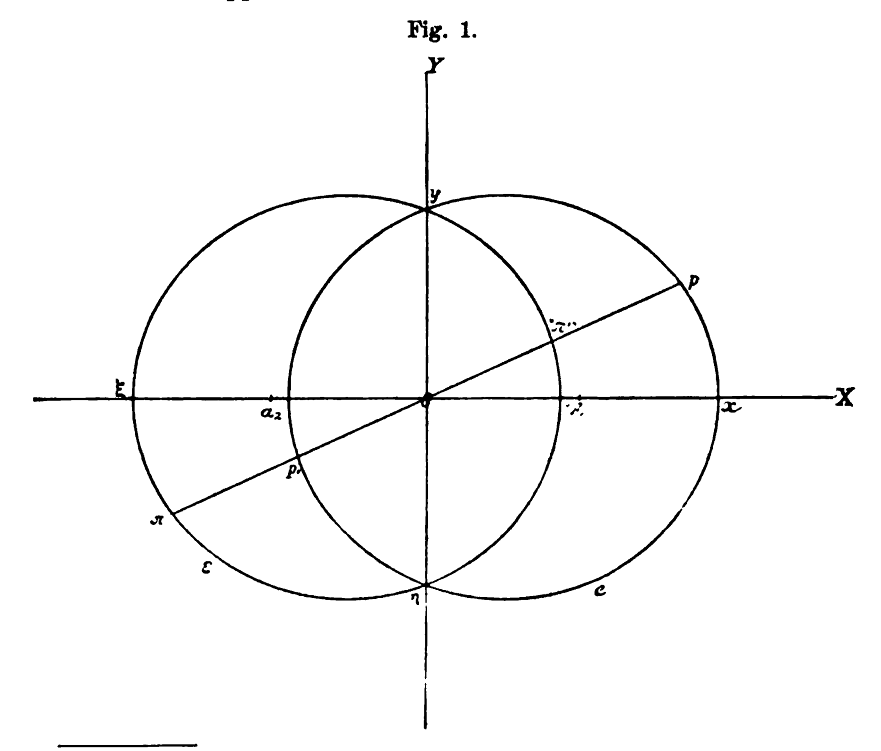
Nun stelle man sich vor, diese beiden Kugeloberflächen erleiden eine und dieselbe homogene lineare Deformation längs der X-Axe; das Maass der Deformation sei: n. — Hiedurch bleiben alle Entfernungen zwischen je zwei Punkten, die in einer der zur X-Axe normalen Ebenen liegen, unverändert; alle Entfernungen zwischen Punkten, die in einer der Geraden liegen, welche zur X-Axe parallel sind, werden mit n multiplicirt — kurz: es werden aus den beiden identischen Kugeln: zwei identische Rotationsellipsoide, deren gemeinsamer Mittelpunkt der der früheren Kugeln ist. Wir müssen uns das Maass der Deformation, n, als eine Zahl denken, die nur um sehr Weniges grösser ist als 1, so dass die Excentricität der Ellipsoide eine äusserst geringe ist, und ihre Brennpunkte (α, β) zu beiden Seiten von O, sehr nahe an O liegen. Nun denke man sich ferner das eine der beiden Ellipsoide längs der X-Axe um ein ganz kleines Stück aus seiner Anfangslage verschoben; und das zweite Ellipsoid um ein ebenso grosses Stück nach der entgegengesetzten Richtung auf der X-Axe verschoben, so dass die Mittelpunkte der beiden Ellipsoide zu beiden Seiten des O-Punktes gleich weit von ihm entfernt liegen. Man kann noch, um einen möglichst einfachen analytischen Ausdruck für diese Flächen zu bekommen, eine Beziehung etabliren zwischen der Grösse der Deformation, und der Grösse der Verschiebung auf der X-Axe; und zwar folgende: Man schiebe das Ellipsoid e so weit, bis sein einer Brennpunkt (α_1) mit dem O-Punkt zusammenfällt, und das Ellip-

soid ε so, dass sein Brennpunkt (β_2) auf den O-Punkt fällt. Der analytische Ausdruck der Doppelfläche, welche durch die, zum Theile in einander liegenden Oberflächen beider Ellipsoide gebildet wird, enthält dann, ausser dem Halbmesser r der zu Anfang vorhandenen Kugeln, und ausser dem linearen Maasse n, der Deformation, welche diese erlitten haben, keine benannten Constanten; er lautet:

$$\frac{n^2x^2+y^2+z^2}{r^2n^2} \pm \frac{2x\sqrt{n^2-1}}{r} = \frac{n^2+1}{n^2} - n^2 \qquad \text{I)}$$

Ich will nun zeigen, dass die hier entwickelte Doppelfläche alle Eigenschaften der Wellenoberfläche im magnetischen Felde hat, und mich hiezu der Figur 1 bedienen, welche den Durchschnitt der Doppelfläche mit der XY-Ebene darstellt.[1]

Fig. 1.



[1] Der Deutlichkeit halber ist in dieser Figur die Excentricität der Ellipsen, ebenso wie ihre Verschiebung auf der X-Axe, im Vergleiche mit den wirklich stattfindenden Verhältnissen, sehr stark übertrieben.

Die mit Cursivbuchstaben (x, p, y, p') bezeichnete Ellipse gehört dem Ellipsoide e an, und ist der Theil der Wellenfläche, welcher sich auf die rechts circular schwingenden Strahlen bezieht, das heisst: Strahlen rechts circular polarisirten Lichtes erreichen, gleichzeitig von O ausgehend, gleichzeitig die Punkte der Oberfläche des Ellipsoides e; Strahlen links circular polarisirten Lichtes derselben Farbe, welche gleichzeitig mit den anderen von O ausgehen, erreichen in der gleichen Zeit die Punkte der Oberfläche des Ellipsoides ε, dem in der Ebene der Zeichnung die mit griechischen Buchstaben (ξ, π, η, π') versehene Ellipse entspricht.

Zunächst ist ersichtlich, dass in der YZ-Ebene, in welcher die Ellipsoide einander schneiden, liegende Strahlen (zum Beispiele die in der Y-Axe selbst liegenden Strahlen Oy, $O\eta$), mögen sie rechts oder links circular schwingendem Lichte angehören, die gleiche Geschwindigkeit haben, indem für diese Strahlen die Punkte beider Wellenflächen paarweise zusammenfallen. In Wirklichkeit bleibt die Polarisationsebene von Strahlen linear polarisirten Lichtes, welche in der angegebenen Richtung das magnetische Feld durchsetzen, unverändert.

Ferner geht unmittelbar aus der Figur hervor, dass für Strahlen, welche von O in der Richtung Op ausgehen, die Geschwindigkeit eine verschieden grosse ist, je nachdem sie rechts oder links circular polarisirt sind; erstere gelangen in derselben Zeit bis p, in welcher letztere nur bis π' gelangen. Diese Differenz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden, entgegengesetzt schwingenden Hälften des, von O aus in der Richtung nach p gehenden, linear polarisirten Lichtes drückt sich in der Beobachtung (durch einen Analyseur) als Drehung der Polarisationsebene aus; in unserem Falle, als Drehung „nach rechts". Der Betrag dieser Drehung hängt von der Grösse der Differenz, also von der Länge $\pi' p$ ab, ist also ein und derselbe für alle Strahlen, die von O aus nach irgend einem Punkte desjenigen Parallelkreises (auf dem Rotationsellipsoid e) hin gehen, auf dem der Punkt p selbst liegt. — Derselbe, durch die Länge $\pi'p = -p'\pi$ gemessene Unterschied der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten rechts und links circularen Lichtes wird für Strahlen bestehen, welche von O nach π gehen, oder von O nach einem Punkte des Parallel-

kreises, auf dem π liegt; nur pflanzen sich in dieser Richtung die links circularen Strahlen um ebenso viel schneller fort, wie im ersten Falle die rechts circularen.

Nehmen wir nun etwa an, die lineare Bahn des Äthertheilchens in O stände senkrecht auf der Zeichnungsebene (liege in der Z-Axe), und werde durch den Punkt O halbirt, so dass die eine Hälfte dieser Bahn vor der Ebene der Zeichnung liegt. Stelle ich mich nun in diese Schwingungsbahn, und blicke dem von O nach p gehenden Strahle nach, so werden, nach dem früher Gesagten, die oberen (vor der Zeichnung liegenden) Hälften der Schwingungsbahnen mir um so stärker nach rechts sich zu neigen scheinen, je weiter gegen p zu das Licht fortschreitet. Bleibe ich nun zwar in O stehen, drehe mich aber um, und blicke dem von O aus nach π fortschreitenden Strahle nach, so werden mir, dem oben Gesagten zufolge, die Schwingungsbahnen der Äthermoleküle mit ihren oberen, vor der Zeichnungsebene gelegenen Hälften sich um so stärker nach links zu neigen scheinen, je weiter sie sich von mir entfernen. Für einen Beobachter jedoch, der nicht, wie ich, im Mittelpunkte der Welle steht, und der sich nicht, wie ich, zwischen den beiden Beobachtungen umdreht, sondern der den ganzen Vorgang von einem irgendwo ausserhalb der Wellenfläche gelegenen Standpunkte aus betrachtet, wird die Drehung der Schwingungsbahnen dem Sinne nach dieselbe sein, beim Fortschreiten des Lichtes von O nach p, wie beim Fortschreiten von O nach π — und wegen der Gleichheit der Längen $\pi' p$ und $p' \pi$, wird auch der Betrag der Drehung sich in beiden Fällen als der gleiche zeigen.

Aus der Voraussetzung dieser Gestalt der Wellenfläche folgt also unmittelbar jene Unabhängigkeit der Drehungsrichtung der Polarisationsebene von dem Vorzeichen der Richtung des Fortschreitens des Lichtes, welche die charakteristische optische Eigenschaft des magnetischen Feldes ist, da sie die Einwirkung des magnetischen Feldes auf die Schwingungsrichtung des Lichtes in einen Gegensatz bringt zur Einwirkung auf die Schwingungsrichtung des Lichtes von Seiten aller anisotropen Substanzen.

Man sieht leicht ein, dass die Wellenoberfläche, aus deren Voraussetzung diese eben besprochene charakteristische Eigenthümlichkeit folgt, nicht gerade nur die eine Gestalt haben muss,

welche der obigen Auseinandersetzung zu Grunde gelegt wurde, sondern dass vielmehr alle geschlossenen Doppelflächen diess leisten, welche aus der Rotation zweier, einander in der *YZ*-Ebene schneidender Curven um die *X*-Axe hervorgehen, wenn nur jede der beiden erzeugenden Curven das Spiegelbild der anderen bezüglich der *YZ*-Ebene ist, und wenn nur jeder ausserhalb der *YZ*-Ebene liegende Centralstrahl die Doppelfläche 4mal schneidet.

Aber nicht bloss dieser Verallgemeinerung unterliegt die oben geschilderte Wellenform, wenn sie keiner anderen, als der soeben ausführlich besprochenen Bedingung zu genügen hat, sondern sie lässt auch noch eine Specialisirung und zugleich Vereinfachung zu; indem eine Deformation der, unserer Entwicklung zu Grunde liegenden, identischen Kugelflächen überhaupt nicht nothwendig ist, sondern eine (kleine) Verschiebung der beiden Kugeln in entgegengesetzten Richtungen auf der *X*-Axe die gestellte Bedingung ebenfalls erfüllt. Der analytische Ausdruck dieser Doppelfläche:

$$(x \pm \xi)^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad \text{II)}$$

kann aus der Gleichung, welche oben für die aus Ellipsoiden bestehende Wellenfläche gegeben wurde, nicht abgeleitet werden, da in Gleichung I) ein Zusammenhang zwischen der Grösse der Deformation, und der Grösse der Schiebung vorausgesetzt ist, durch welchen beide gleichzeitig verschwinden, so dass Gleichung I), wenn man in ihr $n = 1$ setzt, direct in die Mittelpunktsgleichung einer Kugel übergeht, während unsere Fläche (II.) aus der früher besprochenen, durch Verschwinden der Deformation allein hervorgeht. —

Auf die Frage, welche von allen, der bewussten Bedingung genügenden Doppelflächen nun die, der Lichtbewegung im magnetischen Felde wirklich entsprechende sei; und aus welchen Gründen ich die durch Gleichung I) dargestellte dafür halte, habe ich Folgendes zu antworten:

Die Wellenfläche, welche der Lichtbewegung im magnetischen Felde entspricht, muss folgende Eigenschaften besitzen.

1. Sie muss durch einen Vorgang von stetiger Natur aus der Kugel ableitbar sein, wegen des Ganges der Erscheinungen bei stetig von Null aus wachsender Intensität des Magnetismus.

2. Sie muss die YZ-Ebene nur in einer Curve schneiden, und zwar in einer Kreislinie; also müssen ihre beiden Theile einander ebenfalls in dieser Weise schneiden (oder berühren).

3. Sie muss durch Rotation einer ebenen Figur um die X-Axe entstehen.

4. Es darf nicht, wie bei einaxigen Krystallen, der eine Theil ganz innerhalb des anderen liegen, sondern jeder Theil muss ein ebenso grosses Stück des anderen einschliessen, als von ihm selbst durch den anderen Theil eingeschlossen wird, so dass um die YZ-Ebene nur eine geometrische, aber keine optische Symmetrie besteht. —

Durch die Erinnerung an die Rolle, welche das Rotations-Ellipsoid bei der einaxigen Doppelbrechung spielt, und durch die so nahe liegende Vorstellung, dass Kräfte, die ausschliesslich parallel einer geraden Linie wirken, auch nur Veränderungen an der Gestalt der einfachen Wellenfläche hervorrufen werden, welche durch Bewegungen ihrer einzelnen Punkte in der Richtung dieser Geraden entstehen, wie die lineare Deformation, endlich weil die, aus einer solchen Deformation der Kugel hervorgehende Gestalt, nächst dieser selbst, überhaupt die einfachste ist, wurde ich auf die oben vorgetragene Muthmassung geführt. Warum ich aber, nachdem ich schon dem — so zu sagen unerlaubten — Argumente der „Einfachheit“ einen Platz in meiner Betrachtung eingeräumt habe, bei der aus zwei Ellipsoiden bestehenden Wellenfläche stehen geblieben bin; wesshalb ich überhaupt mit einiger Bestimmtheit diese als die wirklich vorhandene Wellenfläche bezeichne, das wird sich aus dem nun Folgenden ergeben.

Es existirt nämlich noch eine, bisher von uns nicht in Betracht genommene Erfahrungsthatsache in diesem Gebiete von Erscheinungen, welche, so wie sie in der theoretischen Behandlung desselben einen der Hauptausgangs- und Anhaltspunkte der Rechnung bildet, so auch für die hier angestellten Betrachtungen dadurch von grosser Bedeutung ist, dass sie eine Wahl unter den verschiedenen möglichen Gestalten der Wellenfläche ermöglicht; indem sich aus jeder Wellenfläche, welche durch ihre Gleichung ausgedrückt ist, eine Beziehung zwischen zwei Variablen durch Rechnung ableiten lässt, welche mit der, aus messenden Beobach-

tungen folgenden, analogen Beziehung derselben Variablen unmittelbar verglichen werden kann.

Bekanntlich hat M. Verdet in zwei kleinen Abhandlungen[1] Versuche mitgetheilt, die er angestellt hatte, um zu prüfen, in welcher Weise die Grösse der Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Felde abhängt von dem Winkel zwischen der Richtung der magnetischen Kraft, und der Richtung der Lichtstrahlen.

Für diese Untersuchung war natürlich die übliche Methode,[2] welche angewendet wird, wenn beide Richtungen zusammenfallen, nicht brauchbar. Verdet beobachtete also an einem Apparate, welcher aus einem fixen, optischen Theile, und einem beweglichen, elektromagnetischen Theile bestand. Letzterer wurde von einem kräftigen Elektromagneten mit verticalen Schenkeln gebildet, auf denen Polschuhe aus weichem Eisen, die einander genähert werden konnten, befestigt waren. Der Magnet war um eine verticale, mitten zwischen den Schenkeln durchgehende Axe drehbar, und seine Drehungen wurden mittelst Nonius und Alhidade abgelesen. Bei der Beobachtung wurde durch die, zwischen den Polschuhen befindliche Substanz in einer Horizontalebene durchgesehen, welche der oberen Begrenzungsebene der Polschuhe parallel und möglichst nahe war. Damit die Forderung eines homogenen Feldes, in dem die Substanz liegen soll, möglichst erfüllt werde, mussten die Polschuhe bestimmte Formen und Dimensionen erhalten, und ich verweile bei der Beschreibung der Verdet'schen Versuchsanordnung absichtlich so lange, um auf eine, offenbar auf einem Lapsus calami beruhende, irrthümliche Angabe Verdet's aufmerksam zu machen, die einen so wesentlichen Punkt betrifft, dass ihre ausdrückliche Richtigstellung gewiss

---

[1] Recherches sur les propriétés optiques des corps transparents soumis à l'action du magnétisme (deuxième partie); par M. Verdet. — Comptes rendus hebd. des séances de l'Académie des sciences, etc. Tome trente-neuvième, Paris 1854. — Séance du 18. Sept. 1854, pgg. 548, 549.

Recherches sur les propriétés optiques dévelopées dans les corps transparents par l'action du magnétisme; par M. Verdet. — Deuxième partie (1). — Annales de chimie et de physique. etc. — Troisième série. — Tome XLIII. Paris, 1855. pgg. 37—44.

[2] Durchbohrung der Pole oder Polschuhe.

nicht überflüssig ist. Wenn nämlich solche Messungen, wie Verdet sie vorgenommen hat, einen Werth besitzen sollen, so muss dafür gesorgt sein, dass bei allen Lagen des magnetischen Feldes gegen die Substanz, diese sich in einem Systeme merklich paralleler Kraftlinien befindet. Dafür hat Verdet durch eine passende Wahl der Länge der einander zugekehrten Polflächen, im Vergleich zu der Länge ihres Abstandes von einander, und auch zu der Länge des durchstrahlten Cylinders oder Prismas der untersuchten Substanz, Sorge getragen, und diess auch in seinen beiden Mittheilungen erwähnt, und zwar in der ganz kurzen Mittheilung in den Comptes rendus in richtiger Weise; in dem ausführlichen Aufsatz aber in den Annales de Chimie et de Physique, in welchem er seinen Apparat sehr genau, und mit Angabe aller Dimensionen beschreibt, ist die Rede von „deux lames en fer doux, de $0^m,016$ de longueur sur $0^m,04$ de largeur et $0^m,005$ d'épaisseur";[1] während die Länge, wie aus der beigegebenen Figur, und aus der entsprechenden Stelle der anderen Abhandlung ganz unzweifelhaft hervorgeht, nicht 16 Mm., sondern 16 Cm. betrug. — Der Abstand der inneren Flächen der Polschuhe von einander war gleich 8 Cm., und die geprüften Substanzen wurden in ungefähr 4 Cm. dicker Schichte von den Lichtstrahlen durchsetzt.

Verdet gibt an, dass er mehrere Reihen von Messungen gemacht hat, an fünf verschiedenen Körpern: An einer Sorte von Flintglas, an Schwefelkohlenstoff, und an drei verschiedenen Proben des schweren Faraday'schen Glases. In dem kurzen Aufsatz in den Comptes rendus theilt er jedoch die unmittelbaren Ergebnisse seiner Messungen gar nicht mit, sondern spricht nur das aus ihnen abstrahirte, bekannte Gesetz aus, dass die Drehung der Polarisationsebene dem Cosinus des Winkels zwischen der Richtung der magnetischen Kraft, und der Richtung der Lichtstrahlen proportional sei; aber auch in der ausführlicheren Abhandlung theilt Verdet leider nur zwei Messungsreihen mit, und sagt, die übrigen seien diesen beiden ähnlich gewesen. Die Übereinstimmung der direct abgelesenen Drehungen mit den, aus

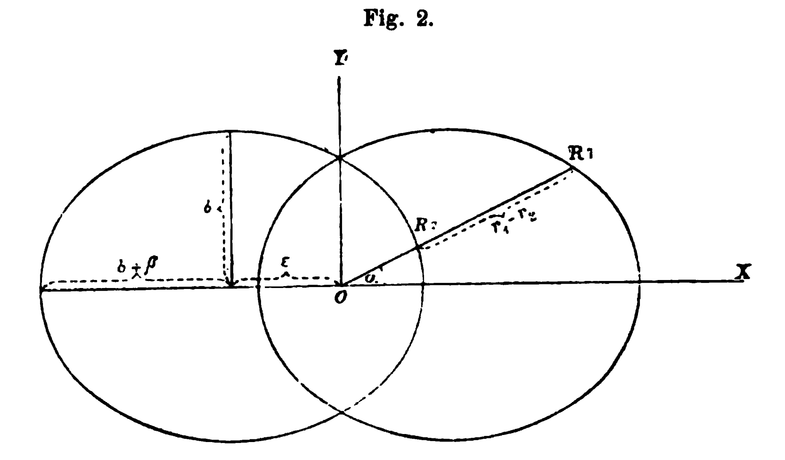
---

[1] L. c. pag. 39.

dem Cosinusgesetze berechneten ist in beiden Reihen bekanntlich eine allgemein als hinreichend angesehene.

Die Wichtigkeit solcher Messungen für die Kritik der von mir vorgeschlagenen Wellenflächen ist nun unmittelbar ersichtlich Da die letzteren durch ihre Gleichungen gegeben sind, so lässt sich aus diesen leicht für jede solche Wellenfläche berechnen, welches Gesetz sie für die Abhängigkeit der Drehung vom Winkel zwischen Kraftrichtung und Lichtstrahl bedingt. Bei der Berechnung dieses Gesetzes für die aus zwei Rotationsellipsoiden bestehende Wellenfläche habe ich die Annahme, welche der Gleichung I) zu Grunde liegt, dass nämlich die Verschiebung mit der Deformation in bestimmter Weise zusammenhängt, nicht gemacht; ferner konnte ich mich auf die Betrachtung des Durchschnittes der Wellenfläche mit der *XY*-Ebene beschränken.

Fig. 2.



Bezeichnet man die kleine Axe der Ellipsen (Fig. 2)[1] mit $2b$, ihre grosse Axe mit $2(b+\beta)$, die Entfernung ihres Mittelpunktes von O mit ε, so ist die Gleichung beider Ellipsen:

$$\frac{(x \pm \varepsilon)^2}{(b+\beta)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad 1)$$

[1] Auch in dieser Figur sind, wie in der ersten, die Excentricität der Ellipsen, und ihre Verschiebung auf der *X*-Axe, sehr stark übertrieben dargestellt.

Um zu dem Gesetze, welches wir suchen, zu gelangen, ist zu bemerken, dass der Betrag der Drehung der Polarisationsebene von der Grösse des Unterschiedes der Geschwindigkeit des rechts circularen und des links circularen Strahles abhängt. Diese Geschwindigkeiten werden durch die, in gleichen Zeiten zurückgelegten Wege OR_1 und OR_2 für den Strahl, welcher den Winkel α mit der X-Axe einschliesst, gemessen.

Es ist also zu berechnen, wie sich — wenn wir allgemein OR_1 mit r_1, und OR_2 mit r_2 bezeichnen — die Differenz $r_1 - r_2$ mit dem Winkel α ändert. —

Die durch Transformation der Gleichung 1) auf Polarcoordinaten gewonnene Gleichung:

$$\frac{(r\cos\alpha \pm \varepsilon)^2}{(b+\beta)^2} + \frac{r^2\sin^2\alpha}{b^2} = 1 \tag{2}$$

lässt sich leicht auf die Form einer, nach fallenden Potenzen von r geordneten, quadratischen Gleichung bringen:

$$r^2\{b^2\cos^2\alpha + (b+\beta)^2\sin^2\alpha\} \pm r.2\varepsilon\cos\alpha b^2 + b^2\{\varepsilon^2 - (b+\beta)^2\} = 0 \tag{3}$$

Bei der Auflösung dieser Gleichungen nach r braucht man für unseren Zweck bloss das eine Vorzeichen der Wurzelgrösse zu berücksichtigen; ferner setzen wir der Kürze wegen: $b = 1$, und $b+\beta = a$.

Wir erhalten dann:

$$r = \frac{a\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha(a^2 - \varepsilon^2)}}{\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha} \pm \frac{\varepsilon\cos\alpha}{\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha} \tag{4}$$

Nennen wir den ersten Theil des Ausdruckes, rechts vom Gleichheitszeichen: A, den zweiten Theil: B, so haben wir:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= A + B \\ r_2 &= A - B \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Für die, von uns gesuchte Differenz der Geschwindigkeiten erhalten wir:

$$r_1 - r_2 = 2B$$

somit:

$$r_1 - r_2 = \frac{2\varepsilon\cos\alpha}{\cos^2\alpha + (1+\beta)^2\sin^2\alpha} \tag{6}$$

und, durch Reduction im Nenner:

$$r_1 - r_2 = \frac{2\varepsilon \cos\alpha}{1+2\beta \sin^2\alpha + \beta^2 \sin^2\alpha} \qquad 7)$$

Aus Gleichung 7)[1] geht schon hervor, dass für die, aus zwei Kugeln bestehende Wellenfläche, für welche (wegen $\beta = 0$) das gesuchte Gesetz durch die Gleichung $r_1 - r_2 = 2\varepsilon \cos\alpha$ ausgedrückt wird, aus unserer Annahme dieselbe Proportionalität mit dem Cosinus von α folgt, welche von Verdet aus seinen Erfahrungen abstrahirt wurde.

Um zu dem entsprechenden Gesetze für die aus Ellipsoiden bestehende Wellenfläche zu gelangen, muss man die Anfangsglieder der Reihe entwickeln, welche aus der in 7) angezeigten Division hervorgeht, und da erhält man:

$$[2\varepsilon \cos\alpha] : [1+2\beta \sin^2\alpha + \beta^2 \sin^2\alpha] = 2\varepsilon \cos\alpha - 4\varepsilon\beta \cos\alpha \sin^2\alpha + \\ + 2\varepsilon\beta^2 \sin^2\alpha \cos\alpha (4 \sin^2\alpha - 1) - \ldots \qquad 8)$$

Die Grösse 2ε, durch welche natürlich die ganze Reihe theilbar sein muss, hängt unmittelbar mit der Verschiebung der beiden Theile der Doppelfläche auf der X-Axe, vom O Punkte nach beiden Seiten hin, zusammen. Die Grösse β, welche ein Maass der Excentricität der Ellipsoide darstellt, wird, der Erfahrung gemäss, ebenso wie ε, klein gedacht werden müssen neben der Einheit, und da die späteren Glieder der oscillirenden Reihe immer höhere Potenzen von β enthalten, neben rasch wachsenden Potenzen der echt gebrochenen trigonometrischen Functionen von α, so wird uns zunächst der Einfluss des zweiten Gliedes der Reihe auf den Gang der Function interessiren, mit welchem wir uns sofort beschäftigen wollen.[2] Betrachten wir also nur die beiden ersten Glieder der Reihe 8), so erhalten wir:

$$r_1 - r_2 = 2\varepsilon \cos\alpha - 4\varepsilon\beta \cos\alpha \sin^2\alpha = 2\varepsilon(\cos\alpha - \beta \sin\alpha \sin 2\alpha) \qquad 9)$$

---

[1] Der Betrag dieser Differenz wäre eigentlich streng genommen nicht — wie hier geschehen ist — an der Wellenoberfläche selbst, sondern an der, aus ihr abzuleitenden Hamilton'schen „surface of wave slowness" zu berechnen; jedoch kommt der Unterschied zwischen beiden Resultaten für unseren Fall absolut nicht in Betracht. —

[2] Ein besonderer Beweis für die Convergenz dieser Reihe ist nicht nöthig, nachdem oben auf den Umstand hingewiesen ist, aus dem sich ihre Convergenz von selbst ergibt: dass sie gleichzeitig fällt und oscillirt.

Wie schon oben aus Gleichung 7), so lässt sich auch aus Gleichung 9) das von Verdet aufgefundene Cosinusgesetz ableiten, wenn man $\beta = 0$ setzt, also die Wellenfläche als aus zwei Kugeln bestehend, ansieht.

Wenn man aber den Einfluss näher betrachtet, welchen das zweite Glied in der Klammer von 9) auf den Gang der Function nimmt, unter der Voraussetzung, dass β ein kleiner, echter Bruch sei, so bemerkt man, dass, während α von Null bis 90° wächst, das zweite Glied in der Klammer zwar wegen des Factors $\sin\alpha$ stets wachsen würde, wegen des Factors $\sin 2\alpha$ aber nicht nur für $\alpha = 0$, den Werth Null hat, sondern auch für $\alpha = 90°$ der Null gleich wird; so dass, wenn man dieses zweite Glied berücksichtigt, nicht die von Verdet angenommene einfache Cosinusfunction, sondern eine, von der Cosinusfunction bei $\alpha = 0$ und $\alpha = 90°$ gar nicht, zwischen diesen beiden Werthen aber dadurch von ihr verschiedene Function herauskommt, dass von den Werthen, welche nach Verdet's Gesetz zu erwarten wären, noch etwas abgezogen werden muss, um auf die wahren Werthe zu kommen. Die gefundenen Grössen der Drehung müssen also, verglichen mit den, aus Verdet's Gesetz berechneten, von $\alpha = 0$ bei wachsendem α zu klein werden; und erst wenn α sich 90° nähert, wieder mit dem Cosinusgesetz übereinzustimmen beginnen.

Betrachten wir nun die, von Verdet durch Messung gefundenen Werthe. Verdet selbst hat sie mit den, von dem Cosinusgesetz geforderten verglichen, indem er, nebst dem Winkel der Drehung der Polarisationsebene, bei jeder Position den Quotienten aus diesem Werthe, dividirt durch den Cosinus des Positionswinkels, angibt. Seine eine Versuchsreihe, bei welcher das Licht durch eine 44 Mm. dicke Schichte Schwefelkohlenstoff ging, lautet:[1]

α	Drehung	$\frac{\text{Drehung}}{\cos\alpha}$
0°	5° 58' 0'	358·0
15	5 45 45	357·25
30	5 7 45	355·25
45	4 9 0	352·0
60	2 58 45	357·50

[1] Verdet, Annales de Chim. et de Phys., l. c. pag. 43.

Man sieht, dass der Gang der Abweichungen der Beobachtungen Verdet's von seinem Gesetze ganz der Voraussetzung entspricht, dass in Gleichung 9) β einen von Null verschiedenen Werth hat, dass also die Wellenfläche nicht aus zwei Kugeln, sondern aus zwei Ellipsoiden besteht; wenn auch die Excentricität derselben nicht gross ist, so reicht sie offenbar aus dafür, dass sich die, durch sie bedingten Unterschiede in der Beobachtung deutlich bemerkbar machen.

Auch die zweite von Verdet mitgetheilte Reihe von Messungen, welche an einer 40 Mm. dicken Schichte schweren Faraday'schen Glases angestellt wurden, entspricht dieser Voraussetzung. Sie lautet: [1]

$\alpha =$	0°	15°	30°	45°	60°	75°
$\frac{\text{Drehung}}{\cos\alpha} =$	535·75	527·25	531·25	537·50	537·50	539·00

Ich sage: sie entspricht der Voraussetzung, weil der Gang der Abweichungen mit dem, von unserer Function geforderten insoferne übereinstimmt, als die Werthe des Quotienten: $\frac{\text{Drehung}}{\cos\alpha}$ von einem, zwischen den Enden des Viertelkreisbogens gelegenen Punkte, an welchem dieser Werth ein Minimum ist, nach beiden Enden zu stetig wachsen.

Eine viel weiter gehende Übereinstimmung ist wohl nicht zu erwarten, erstens wegen der nothwendigen Beobachtungsfehler, und dann auch, weil Verdet, wenn er schon aus seinen sämmtlichen Messungsreihen blos zwei zur Bestätigung seines Gesetzes mittheilt, gewiss diejenigen, welche am besten mit diesem Gesetze stimmen, gewählt haben wird. Besonders wenn man diesen Umstand berücksichtigt, wird man wohl nicht geneigt sein, die in beiden Beispielen hervortretende Übereinstimmung der Abweichungen mit den von meiner Formel geforderten, für einen blossen Zufall, für das Resultat von Beobachtungsfehlern zu halten. Es wäre doch zu wunderbar, wenn die Beobachtungs-

---

[1] L. c.

fehler allesammt gerade in dem Sinne meiner Formel, und in solcher Regelmässigkeit ihr entsprechend, sich durch blossen Zufall eingefunden hätten.

Nach allem diesem glaube ich wohl sagen zu dürfen:

1. Dass die Lichtwellenoberfläche im magnetischen Felde sicher im Allgemeinen die von mir beschriebene Gestalt zweier einander schneidender Rotationsflächen hat,
2. dass diese beiden Flächen jedenfalls zwar nur äusserst wenig von der Kugelgestalt abweichen, dass aber dessen ungeachtet
3. die aus Verdet's Cosinus-Gesetz abzuleitende, und mit diesem Gesetz allen bisherigen theoretischen Forschungen unbewusst zu Grunde gelegte Kugelgestalt beider Theile der Doppelfläche wahrscheinlich nur eine erste Annäherung an die wirkliche Gestalt ist, und
4. dass die Gestalt der Lichtwellenoberfläche im magnetischen Felde eine aus zwei Rotationsellipsoiden, die in der Richtung ihrer grossen Axe so gegeneinander verschoben sind, dass sie grösstentheils ineinander liegen, bestehende Doppelfläche ist.

Über Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitte.

Von **Karl Bobek,**
Privatdocent für Mathematik.

Zweite Mittheilung.

(Mit 2 Holzschnitten.)

In der Sitzung vom 11. d. M. hatte ich die Ehre, der hohen Akademie eine Arbeit über die constructive Theorie der Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitte vorzulegen und erlaube mir heute eine kurze Ergänzung derselben beizufügen. Dieselbe behandelt die Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitte und mit Doppelpunkten auf Grund derselben Principien, wie die erstere die allgemeinen Flächen. Speciell wurde auf die Ausartung der Kegelschnittsschaaren der allgemeinen Fläche bei diesen Flächen Rücksicht genommen.

Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt und Doppelpunkten.

Durch die projectivische Beziehung der beiden Flächenbüschel zweiter Ordnung (B^2) und ($\mathfrak{B}^2$), deren Basis aus (a^2b^2) und ($a^2\mathfrak{b}^2$) bestand, gelangten wir zur Construction einer Fläche zweiter Ordnung H^2, welche zu Φ^4 in enger Beziehung steht. Die Flächen des durch a^2 und σ festgelegten Gebüsches, deren Pole auf H^2 liegen, treffen Φ^4 in je einem Kegelschnittpaare, welches wir den zwei Geraden von H^2 entsprechend bezeichneten, die sich in dem betreffenden Punkte von H^2 schneiden. Nun bilden die Flächen des Gebüsches, deren Pole für A auf einer beliebigen Geraden g liegen, einen Büschel, dessen Basis aus a^2 und einem Kegelschnitte g^2 besteht, dessen Ebene durch σ geht. Denn seien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$ zwei Punkte von g, welche für P^2 und P_1^2 Pole von A sind,

dann bestimmen P^2 und P_1^2, welche sich noch in einem Kegelschnitte g^2 treffen, einen Büschel von Flächen zweiter Ordnung, deren Pole für A auf $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1}$, d. h. g liegen.

Hieraus folgt aber: Nehmen wir H^2 beliebig an, so entspricht dieser Fläche in der früher festgesetzten Verwandtschaft immer eine Fläche vierter Ordnung, welche a^2 zum Doppelkegelschnitte hat. Denn seien g und g_1 irgend zwei Gerade von H^2, die derselben Schaar angehören, so werden diesen die beiden Büschel durch (a^2g^2) und $(a^2g_1^2)$ zugeordnet sein. Die Geraden der anderen Schaar treffen g, g_1 in projectivischen Punktereihen und lässt man daher in den Flächenbüscheln (a^2g^2), $(a^2g_1^2)$ diejenigen Flächen einander entsprechen, deren Pole für A entsprechende Punkte auf g und g_1 sind, so sind die Flächenbüschel projectivisch auf einander bezogen und erzeugen die Fläche vierter Ordnung Φ^4.

Wir wollen nun untersuchen, welchen Einfluss auf Φ^4 specielle Lagen von H^2 gegen Σ^2 ausüben.

I. Berührt H^2 die Fläche Σ^2 in einem Punkte $\mathfrak{d}$, so ist dieser Punkt für die Fläche vierter Ordnung Φ_1^4 ein Doppelpunkt; denn jede Curve von Φ_1^4, welche durch $\mathfrak{d}$ geht, hat daselbst einen Doppelpunkt. Es sei c^2 ein beliebiger durch $\mathfrak{d}$ gehender Kegelschnitt von H^2, dessen Pol $\mathfrak{p}$ in der Tangentialebene $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{d}$ für H^2 liegen muss. Da nun $\mathfrak{D}$ auch Tangentialebene von Σ^2 ist, so wird die Fläche des Gebüsches, deren Pol $\mathfrak{p}$ für A ist und die also c^4 auf Φ_1^4 ausschneidet, den Kegel zweiter Ordnung, welcher aus σ die Curve c^4 von Φ_1^4 projicirt, in $\mathfrak{d}$ berühren und c^4 daher in diesem Punkte einen Doppelpunkt besitzen. Jeder Curve, die aber c^2 in $\mathfrak{d}$ berührt, wird aus demselben Grunde auf Φ_1^4 eine Curve mit einem Doppelpunkt in $\mathfrak{d}$ entsprechen.

Die H^2 und Σ^2 gemeinschaftlich umschriebene Developpable D besitzt $\mathfrak{D}$ zur Doppelebene und berührt H^2 längs einer Curve h^4 und Σ^2 längs r^4. Beide Curven haben in $\mathfrak{d}$ einen Doppelpunkt. Die Tangentialebenen des Kegels zweiter Ordnung, welcher h^4 aus $\mathfrak{d}$ projicirt, enthalten Kegelschnitte, die h^4 ausserhalb $\mathfrak{d}$ berühren und denen daher zerfallende Curven c^4 entsprechen. Die Ebenen der Kegelschnitte, in welche diese c^4 zerfallen müssen, umhüllen einen Kegel $\mathfrak{K}_3^2$, dessen Spitze $\mathfrak{d}$ ist.

h^4 wird noch aus zwei Punkten σ_1, σ_2, die in $\mathfrak{D}$ liegen, durch Kegel zweiter Ordnung projicirt. Die Ebenen, welche dieselben

berühren, enthalten Kegelschnitte von H^2, denen auf Φ_1^4 Kegelschnittpaare entsprechen. Die Ebenen der letzteren hüllen Kegel $\mathfrak{K}_1^2$ und $\mathfrak{K}_2^2$ mit den Spitzen in σ_1 und σ_2 ein.

Es existiren daher auf Φ_1^4 nur drei Doppelschaaren von Kegelschnitten, deren Ebenen in zwei Punkten die Φ^4 eigentlich berühren. Dieselben hüllen die Kegel $\mathfrak{K}^2$, $\mathfrak{K}_1^2$, $\mathfrak{K}_2^2$ ein, deren Spitzen σ, σ_1, σ_2 sind. Die Tangentialebenen von $\mathfrak{K}_3^2$ enthalten auch Kegelschnittpaare, berühren Φ_1^4 aber eigentlich nur in dem ausserhalb $\mathfrak{d}$ liegenden Schnittpunkte derselben.

Von dem beiden Flächen H^2 und Σ^2 gemeinschaftlich conjugirten Tetraëder sind in $\mathfrak{d}$ zwei Punkte zusammengefallen.

In $\mathfrak{D}$ liegen die Geraden c, c' von H^2 und s, s' von Σ^2. Die Strahlen $\overline{\mathfrak{d}\sigma_1}$ und $\overline{\mathfrak{d}\sigma_2}$ trennen beide Geradenpaare harmonisch. Es sei Q^2 der Kegel, welcher a^2 aus $\mathfrak{d}$ projicirt, also durch s, s' geht. Dieser gehört dem Gebüsche an und $\sigma\mathfrak{d}$ ist daher Polargerade von $\mathfrak{D}$ für denselben. Sind $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ die Schnittpunkte von c und c' mit A, so schneiden ihre Polarebenen für Σ^2 den Kegel Q^2 in den Geraden c_1, c_2 und c_1', c_2', welche auf Φ^4 liegen und durch $\mathfrak{d}$ gehen. Die Tracen dieser Polarebenen auf $\mathfrak{D}$ werden auch durch $\overline{\mathfrak{d}\sigma_1}$ und $\overline{\mathfrak{d}\sigma_2}$ harmonisch getrennt. Die Ebenen durch $(c_1 c_2)$ und $(c_1' c_2')$ schneiden einander in $\overline{\sigma\mathfrak{d}}$ und daher schneiden einander die Ebenen $(c_1 c_1')(c_2 c_2')$, sowie $(c_1 c_2')(c_1' c_2)$ in zwei Geraden, welche in der Polarebene von $\overline{\sigma\mathfrak{d}}$ für Q^2 liegen und daselbst von den Erzeugenden von Q^2 harmonisch getrennt werden, sowie von den Tracen der Ebenen $(c_1 c_2)$ und $(c_1' c_2')$, d. h. diese Geraden sind $\overline{\mathfrak{d}\sigma_1}$ und $\overline{\mathfrak{d}\sigma_2}$ oder mit anderen Worten: Durch $\mathfrak{d}$ gehen vier Gerade c_1, c_2, c_1', c_2' der Fläche vierter Ordnung Φ_1^4; die Diagonalebenen des durch sie gebildeten Vierkantes gehen paarweise durch σ, σ_1, σ_2 und zwar gehen die Ebenen

$$
\begin{array}{lll}
(c_1 c_2)(c_1' c_2') & \text{durch} & \sigma \\
(c_1 c_1')(c_2 c_2') & \text{„} & \sigma_1 \\
(c_1 c_2')(c_1' c_2) & \text{„} & \sigma_2 .
\end{array}
$$

Ausser diesen Geraden besitzt Φ_1^4 nur noch acht Gerade, indem jede Gerade c_1, c_2, c_1', c_2' eigentlich zwei Gerade vertritt, da die Geraden c, c', welche durch $\mathfrak{d}$ gehen, jede zwei Gerade der einen Schaar vertritt, welche h^4 berühren, so lange h^4 keinen

Doppelpunkt besitzt, wie aus der geometrischen Betrachtung des Entstehens des Doppelpunktes von h^4 ohne weiters hervorgeht

Die Curve h^4 wird nur noch von zwei Erzeugenden a, b der Schaar S und zwei anderen a', b' der Schaar S' von H^2 berührt, und diesen entsprechen auf Φ_1^4 die vier Geradenpaare $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $a'_1 a'_2$, $b'_1 b'_2$, deren Scheitel auf r^4 liegen. Diese acht Geraden bilden eine einzige Doppelvier. Nimmt man nämlich eine von ihnen, l, heraus, so wird sie nur von dreien derselben m', n', o' geschnitten, die mit ihr in den Ebenen durch $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ liegen. Von diesen werden je zwei noch von einer geschnitten, nämlich m', n' von o; n', o' von m und m', o' von n. Dann bleibt nur eine einzige Gerade übrig, welche die drei Geraden m, n, o treffen muss und

$$\begin{matrix} l & m & n & o \\ l' & m' & n' & o' \end{matrix}$$

ist daher die Doppelvier, die einzige, die existirt. Wir schreiben sie mit den Geraden der Fläche in der Form:

$$\begin{matrix} a_1 & b_2 & a'_2 & b'_1 \\ b_1 & a_2 & b'_2 & a'_1 \end{matrix}$$

und haben hiedurch die Vertheilung der acht Geraden auf Φ_1^4 vollständig charakterisirt.

Wie man ohne weiters sieht, existiren auf Φ_1^4 nur sechs windschiefe Vierseite:

$$\begin{matrix} a_1 b_2 & a_1 b'_1 & a_1 a'_2 \\ b'_2 a'_1 & a_2 b'_2 & a_2 a'_1 \\ \\ a_2 b_1 & a'_1 b_1 & b'_2 b_1 \\ a'_2 b'_1 & a'_2 b_2 & b_1 b'_2 \end{matrix}$$

Je zwei unter einander stehende senden ihre Diagonalen durch dieselben zwei Punkte σ, σ_1, σ_2 und werden aus dem dritten in einander projicirt. Und zwar die ersten aus σ, die zweiten aus σ_1, die dritten aus σ_2.

Jede der Geraden c_1, c_2, c'_1, c'_2 trifft zwei von den acht Geraden a_1, b_1, a_2, b_2, a'_1, b'_1, a'_2, b'_2 und bestimmt mit ihnen Tangentialebenen des Kegels $\mathfrak{K}_3^2$. Die Ebenen, welche die Geraden

c_1, c_2, c'_1, c'_2 zu zweien verbinden, sind Tangentialebenen der Kegel $\mathfrak{K}^2$, $\mathfrak{K}^2_1$, $\mathfrak{K}^2_3$, desjenigen nämlich, durch dessen Spitze sie gehen.

II. H^2 berühre Σ^2 in zwei Punkten. Dabei können zwei Fälle eintreten. H^2 und Σ^2 schneiden einander in einer Geraden und einer Raumcurve dritter Ordnung, oder H^2 und Σ^2 schneiden einander in zwei Kegelschnitten. Wir wollen den ersten Fall zuerst behandeln.

Die Berührungspunkte $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ liegen auf der Erzeugenden d von H^2 und Σ^2 ihre Tangentialebenen seien $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, sie gehen durch d. Das H^2 und Σ^2 gemeinschaftlich conjugirte Quadrupel von Punkten besteht aus den Punkten $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$.

Die Punkte $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ werden Doppelpunkte der Fläche Ψ^4 die H^2 entspricht. Die Gerade d liegt, wie man sieht, auf Ψ^4. Die Curven h^4 und r^4, längs welcher H^2 und Σ^2 von der gemeinschaftlich umschriebenen Developpablen D, die jetzt dritter Classe wird, berührt werden, zerfallen in d und die Raumcuren dritter Ordnung h^3 und r^3. Die Ebene, welche durch σ und d geht, berührt Ψ^4 längs der Geraden d. Ausserdem wird der Kegel dritter Ordnung der r^3 aus σ projicirt die Ψ^4 berühren, und der Kegel $\mathfrak{K}^2$, dessen Tangentialebenen die Doppelschaar von Kegelschnitten ausschneiden, berührt Ψ^4 doppelt, seine Spitze ist σ.

Die Curve h^3 wird aus $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ durch Kegel zweiter Ordnung projicirt, ihre Tangentialebenen enthalten Kegelschnitte von H^2, die h^3 berühren, und denen also auf Ψ^4 Kegelschnittpaare entsprechen, deren Ebenen durch $\mathfrak{d}_1$, respective $\mathfrak{d}_2$ gehen. Die Ebenen dieser Kegelschnitte, enthalten jede zwei und berühren Ψ^4 eigentlich nur in dem Schnittpunkte beider, der nicht in $\mathfrak{d}_1$, respective $\mathfrak{d}_2$, liegt. Die Kegel $\mathfrak{K}^2_1$ und $\mathfrak{K}^2_2$ berühren Ψ^4 ausserhalb $\mathfrak{d}_1$, respective $\mathfrak{d}_2$ blos in einem Punkte. Die Ebene $\overline{\sigma d}$ enthält nur einen Kegelschnitt g'^2 von Ψ^4, der der Geraden g' von H^2 entspricht, welche d auf A schneidet. Dieser Kegelschnitt g'^2 muss d in dem Punkte $\mathfrak{g}$ berühren, durch den die zweite in der Ebene (dg) enthaltene Erzeugende von Σ^2 geht, $\overline{\sigma \mathfrak{g}}$ ist dass Erzeugende von $\mathfrak{K}^2$.

Überhaupt wird die Gerade d von allen Kegelschnitten der Schaar $\mathfrak{S}'$, die den Geraden der Schaar S' von H^2 angehören, zu der d nicht gehört, in zwei zusammenfallenden Punkten geschnitten. Denn ist g' eine beliebige Gerade von S', welche mit d eine Ebene bestimmt, die Σ^2 in c berührt, so muss der g' entsprechende Kegelschnitt in c die Ebene $\overline{\sigma d}$ berühren.

Durch $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ gehen die Erzeugenden a' und b' von H^2, welche in den Ebenen $\mathfrak{D}_1$, resp. $\mathfrak{D}_2$ liegen und daher Σ^2 berühren. Ihnen entsprechen auf Ψ^4 die Geradenpaare $a'_1 a'_2$ und $b'_1 b'_2$, deren Ebenen durch σ gehen. Das eine Paar ist gegen das andere windschief. Jede dieser Geraden zählt als zwei zusammengefallene, während d als vier solche Gerade im Vergleiche zu der allgemeinen Fläche vierter Ordnung zählt.

Die Curve h^3 wird nur von zwei Geraden a, b der Schaar S, zu der auch d gehört, noch berührt. Diesen entsprechen die Geradenpaare $a_1 a_2$; $b_1 b_2$ von Ψ^4, deren Ebenen durch σ gehen. Auch diese Geradenpaare sind gegeneinander windschief. Sie schneiden aber die früher erwähnten durch $\mathfrak{d}_1$, respective $\mathfrak{d}_2$ gehenden. Und zwar wird jede Gerade von zwei der anderen Gruppe geschnitten. Es existiren nur vier Vierseite:

$$\begin{matrix} a'_1 a'_2 & a'_1 a'_2 & b'_2 b'_1 & b'_1 b'_2 \\ a_1 a_2 & b_2 b_1 & a_1 a_2 & b_1 b_2 \end{matrix}$$

Die unter und neben einander stehenden Paare sollen einander schneiden.

III. Die Flächen Σ^2 und H^2 berühren einander in $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ und schneiden einander in zwei Kegelschnitten. Die gemeinschaftlichen Tangentialebenen mögen einander in d der conjugirten Geraden zu $\overline{\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2} = d'$ schneiden. Das beiden Flächen gemeinsam conjugirte Tetraëder artet hier in zwei durch d gehende Ebene Σ_1 und Σ_2, welche d in σ_1 und σ_2 treffen mögen und in den Ebenenbüschel durch d aus, indem jede Ebene durch d für beide Flächen denselben Pol (auf $\overline{\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2}$ gelegen) besitzt.

Die Σ^2 und H^2 gemeinschaftlich umschriebene Developpable artet nun in zwei Kegel zweiter Klasse aus, welche H^2 längs der beiden Kegelschnitte h_1^2 und h_2^2 und Σ^2 längs r_1^2, r_2^2 berühren. Der durch h_1^2 und r_1^2 gehende Kegel möge H^2 und Σ^2 umschrieben

sein. Die Kegelschnitte h_1^2 und h_2^2, sowie r_1^2 und r_2 werden aus σ_1 und σ_2 durch Kegel zweiter Ordnung projicirt und die Tangentialebenen dieser Kegel enthalten Kegelschnitte, welche h_1^2 und h_2^2 je in einem Punkte berühren, denen also auf der Fläche vierter Ordnung Φ_2^4 Kegelschnittpaare entsprechen, deren Ebenen durch σ_1, respective σ_2 gehen und die Kegel $\mathfrak{K}_1^2$, $\mathfrak{K}_2^2$ einhüllen, welche Φ_2^4 doppelt umschrieben sind.

Auf der Fläche vierter Ordnung Φ_2^4 mit den beiden Doppelpunkten $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, deren Verbindungslinie $\overline{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}$ den Doppelkegelschnitt a^2 nicht trifft, existiren also drei Doppelschaaren von Kegelschnitten, deren Ebenen Bitangentialebenen von Φ_2^4 sind und drei Kegel mit den Spitzen σ, σ_1, σ_2 einhüllen.

Legt man durch d' eine beliebige Ebene, so schneidet dieselbe H^2 in einem durch $\overline{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}$ gehenden und Σ^2 doppelt berührenden Kegelschnitt, diesem entspricht also auch eine in zwei Kegelschnitte zerfallende Curve vierter Ordnung auf Φ_2^4. Die Ebenen dieser Kegelschnitte gehen auch durch $\overline{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}$ und die Kegelschnitte treffen einander ausser auf a^2 nur in $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$.

Wir sahen früher, dass den Kegelschnitten von H^2, welche in Σ_1, respective Σ_2 liegen, die Curven r_1^4 und r_2^4 vierter Ordnung entsprechen, in welchen die durch σ_1, respective σ_2 gehenden Tangentialebenen einfach berühren. Da für unseren vorliegenden Fall Σ_1 und Σ_2 durch $\overline{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}$ gehen, so werden obige Curven in zwei Kegelschnitte zerfallen, und wir erhalten daher:

Die Fläche Φ_2^4 wird aus drei Punkten des Raumes σ, σ_1 und σ_2 projicirt je drei Kegel zweiter Ordnung als Projectionskegel liefern, wovon je zwei die Fläche einfach einer doppelt berührt. Die letzteren sind die Kegel $\mathfrak{K}^2$, $\mathfrak{K}_1^2$, $\mathfrak{K}_2^2$, die ersteren die, welche die beiden Kegelschnitte projiciren, in welche je die Curven r^4, r_1^4, r_2^4 zerfallen.

Jede Fläche zweiter Ordnung, welche durch a^2, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ geht, muss Φ_2^4 in zwei Kegelschnitten treffen, deren Ebenen durch $\overline{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}$ gehen. Die Pole der Ebene A für alle durch a^2, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ gehende Flächen, die ein Netz bilden, liegen in der Ebene T, welche Polarebene von $\mathfrak{t}$, dem Schnittpunkte $\overline{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}$ mit A, für Σ^2 ist. Denn T ist Polarebene von $\mathfrak{t}$ für alle Flächen des Netzes, da sie durch die Polare t von $\mathfrak{t}$ für a^2 und den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{r}$

zu t, in Bezug auf $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, geht. Durch Annahme des Poles $\mathfrak{p}$ in T ist auch die Fläche P^2 des Netzes vollständig bestimmt. T geht durch $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$, denn sie geht als Polarebene von t für Σ^2 durch d.

Da T auch Polarebene von t für H^2 sein muss, so ist t Polare von t für k^2, der Trace von H^2 auf A, d. h. t und t sind ein Paar gemeinschaftlicher Pol und Polare für a^2 und k^2. Daher liegen t_1, t_2 auf t, wenn t, t_1, t_2 das k^2 und a^2 gemeinschaftlich conjugirte Tripel ist. Die Φ_2^4 längs a^2 umschriebene Developable Δ hat daher in der Ebene $\mathfrak{a} t_1 t_2$ die mit T identisch ist, [1] einen Doppelkegelschnitt δ^2 liegen. Die Flächen zweiter Ordnung P^2, deren Pol $\mathfrak{p}$ auf δ^2 liegt, müssen Φ_2^4 nach Früherem in Curven vierter Ordnung schneiden, die A in zwei Punkten berühren, da aber die Curven für unsere Φ_2^4 in Kegelschnitte zerfallen müssen, so sehen wir, dass beide Bedingungen nur dadurch erfüllt werden können, wenn die Curve vierter Ordnung in einen doppelt zu zählenden Kegelschnitt degenerirt, d. h., wenn P^2 die Φ_2^4 nach einem Kegelschnitt p^2 berührt. Wir haben daher:

Die Fläche vierter Ordnung Φ_2^4 mit zwei Doppelpunkten ist die Enveloppe eines Systems von Flächen zweiter Ordnung, deren Pole für den Doppelkegelschnitt a^2 der Fläche Φ_2^4 auf einem Kegelschnitt δ^2 liegen. Die Charakteristiken sind Kegelschnitte, welche durch die Doppelpunkte hindurch gehen.

Lassen wir den Pol $\mathfrak{p}$ einer Fläche P^2 des Netzes für A auf einer Tangente g von δ^2 laufen, so beschreiben die P^2 einen Büschel von Flächen zweiter Ordnung, dessen Basis ausser aus a^2 noch aus dem Kegelschnitte p^2 von Φ_2^4 besteht, in welchem die Fläche des Netzes, deren Pol der Berührungspunkt von g auf δ^2 ist, Φ_2^4 berührt. Gelangt $\mathfrak{p}$ in den Schnittpunkt $\mathfrak{g}$ von g mit A, d. h. auf t, so muss die Fläche des Netzes in A zerfallen und eine durch $\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2$ gehende Ebene $\mathfrak{G}$, welche t in $\mathfrak{g}'$ trifft, dem zu $\mathfrak{g}$ in Bezug auf a^2 conjugirten Punkte. Da durch $\mathfrak{g}$ noch eine zweite Tangente an δ^2 geht, so liegt in $\mathfrak{G}$ noch ein zweiter Kegelschnitt, welcher die Basis für den Büschel, der der zweiten Tangente zugehört, ist.

---

[1] Da $\mathfrak{a}$ der Pol von A für H^2 jedenfalls in T liegt, denn A geht durch den Pol t von T für H^2.

Der Kegelschnitt δ^2 trifft A in den zwei Punkten $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$, denen zerfallende Flächen des Netzes entsprechen, die aus A und den Ebenen $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ (durch $\overline{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}$) bestehen. $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ müssen nach Früherem Φ_2^4 längs je eines Kegelschnittes q_1^2 und q_2^2 berühren, sind daher singuläre Tangentialebenen. Wir sehen also, dass an Stelle der Kegel $\mathfrak{K}_3^2, \mathfrak{K}_4^2$, welche bei der allgemeinen Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt ausser $\mathfrak{K}^2$, $\mathfrak{K}_1^2$, $\mathfrak{K}_2^2$ derselben doppelt umschrieben sind, für Φ_2^4 die Ebenen $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ treten, welche Φ_2^4 je längs eines Kegelschnittes berühren.

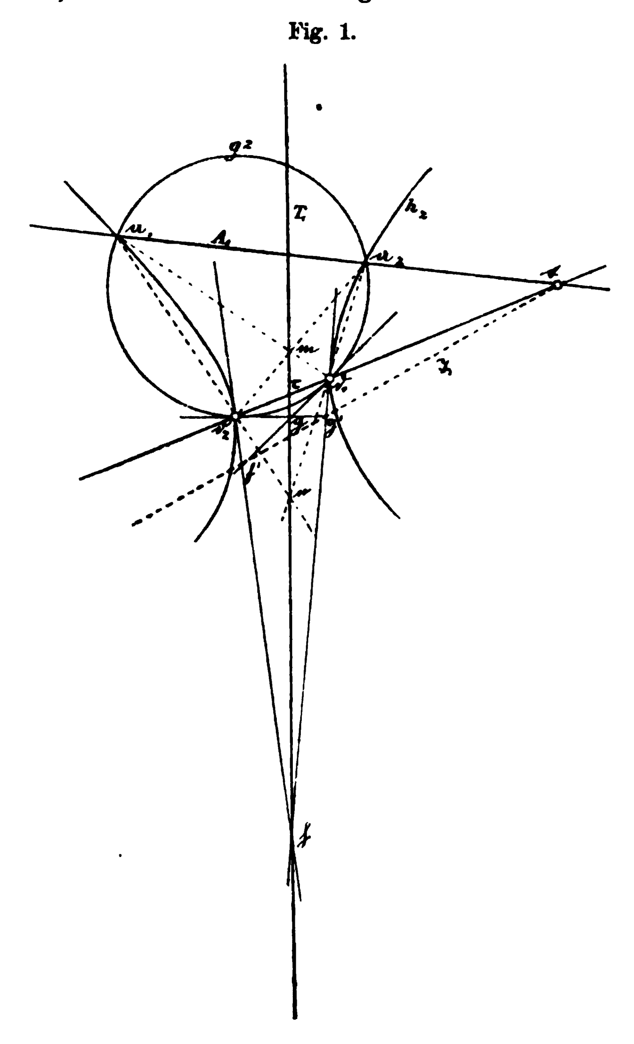
Es seien g und g_1 zwei beliebige Tangenten von δ^2, welche von der variablen Tangente h von δ^2 in $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$, also in zu einander projectivischen Punktereihen geschnitten werden. Die Flächen P^2 und P_1^2 des Netzes, deren Pole für A die Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ sind, beschreiben daher zu einander projectivische Büschel. Je zwei dieser Flächen schneiden einander in einem Kegelschnitte h^2, welcher dem Berührungspunkte von h auf δ^2 als Charakteristik von Φ_2^4 zugeordnet ist, denn dieselben gehören dem Büschel an, dessen Pole von A auf $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1}$, d. h. h liegen. Wir sehen hieraus, dass die Flächen zweiter Ordnung, welche durch einen festen Kegelschnitt g^2, respective g_1^2 von Φ_2^4 gehen und den variablen Kegelschnitt h^2 enthalten, zwei zu einander projectivische Büschel beschreiben; dass umgekehrt zwei projectivische Büschel von Flächen zweiter Ordnung, deren Basiskegelschnitte in $\mathfrak{d}_1$ $\mathfrak{d}_2$ sich schneiden, eine solche Fläche Φ_2^4 erzeugen, ist leicht ersichtlich.

Ist b die Tangente von g^2 in $\mathfrak{d}_1$ und b_1 die von g_1^2 in $\mathfrak{d}_1$, so werden die Tangentialebenen der Flächen des Netzes, welche durch g^2, respective g_1^2 und einen variablen Kegelschnitt h^2 von Φ_2^4 gehen, in b und b_1 zwei zu einander projectivische Büschel bilden, deren entsprechende Ebenen sich in der Tangente von h^2 schneiden. Diese Tangenten, welche Φ_2^4 in $\mathfrak{d}_1$ in drei Punkten treffen, liegen daher auf einem Kegel D_1^2 zweiter Ordnung. Ähnlich liegen die in $\mathfrak{d}_2$ dreipunktig schneidenden Geraden von Φ_2^4 auf dem Kegel D_2^2.

Es seien g^2 und h^2 (Fig. 1) irgend zwei in einer durch $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ gehenden Ebene C liegende Kegelschnitte von Φ_2^4. A_1 und T_1 seien die Tracen von A und T auf C, dann ist T_1 Polare für g^2 und h^2 von $\mathfrak{t}$ und daher schneiden einander die Tangenten von

g^2 und h^2 in $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ auf T_1 in den Punkten $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ und D_1^2, D_2^2 treffen mithin T in einem und demselben Kegelschnitte d^2. Die beiden Kegel schneiden einander daher noch in einem Kegelschnitte $\mathfrak{d}^2$, dessen Ebene $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{t}$ geht und von dem die Schnitt-

Fig. 1.



punkte $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}'$ der Geraden $\overline{\mathfrak{d}_2\mathfrak{g}}.\overline{\mathfrak{d}_1\mathfrak{h}}$ und $\overline{\mathfrak{d}_1\mathfrak{g}}.\overline{\mathfrak{d}_2\mathfrak{h}}$ zwei Punkte sind. Fallen in den Ebenen $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ die Kegelschnitte g^2, h^2 in q_1^2, respective q_2^2 zusammen, so fallen auch die Punkte $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ zusammen in die Punkte $\mathfrak{g}_1$, respective $\mathfrak{g}_2$, in denen sich die Tangenten von q_1^2,

respective q_2^2 in $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ schneiden. Die Ebenen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ berühren daher die Kegel D_1^2 und D_2^2 längs der Kanten $\overline{\mathfrak{d}_1\mathfrak{g}_1}$, $\overline{\mathfrak{d}_1\mathfrak{g}_2}$ und $\overline{\mathfrak{d}_2\mathfrak{g}_1}$, $\overline{\mathfrak{d}_2\mathfrak{g}_2}$. Die Tracen von $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ auf T berühren also d^2 in $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ und es ist daher τ der Pol der Schnittlinie $T\mathfrak{T}$ für d^2. Dies folgt auch aus der Figur 1, auf Grund harmonischer Eigenschaften des Viereckes $\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{g}'\mathfrak{h}'$.

Projicirt man die Punkte $\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{a}_2$, in denen C den Kegelschnitt a^2 trifft, aus $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$, so schneiden sich die Geraden paarweise in $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ auf T_1 und die Punkte liegen auf dem Kegelschnitt σ^2 der Ebene T, in welchem sich die beiden Kegel treffen, die a^2 aus $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ projiciren.[1] Da, wie man sieht, τ durch $\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}$ von der Geraden A_1 harmonisch getrennt ist, so ist τ der Pol der Schnittlinie t von A und T für σ^2. Dieser Kegelschnitt σ^2 trifft t in denselben Punkten wie a^2, er besitzt daher auf t dieselbe Involution conjugirter Pole wie a^2. Sei r eine beliebige Tangente von σ^2 (Fig. 2), welche in $\mathfrak{r}$ berührt und in $\mathfrak{f}$ die Gerade t trifft. Die Flächen des Netzes, deren Pole für A auf r liegen, bilden ein Büschel, dessen Basis aus a^2 und einem zweiten Kegelschnitt r^2 besteht, dessen Ebene durch $\overline{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}$ geht und t in $\mathfrak{f}'$ trifft, dem conjugirten Punkt zu $\mathfrak{f}$ für a^2, d. h. die Trace der Ebene dieses Kegelschnittes geht durch τ und $\mathfrak{f}'$, also auch durch $\mathfrak{r}$, da $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ conjugirte Punkte auch für σ^2 sind. Die Ebene nun, welche durch $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2$ und $\overline{\tau\mathfrak{f}'\mathfrak{r}}$ geht, bestimmt mit einer Fläche des Büschels den Kegelschnitt r^2. Nehmen wir den Punkt $\mathfrak{r}$ als Pol von A_1, so wird die Fläche, der Kegel, welcher aus $\mathfrak{r}$ den Kegelschnitt a^2 projicirt, d. h. r^2 besteht aus den zwei Geraden, welche von $\mathfrak{r}$ nach den Schnittpunkten der Ebene $\overline{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2\mathfrak{f}'}$ mit a^2 gehen.

Den Tangenten des Kegelschnittes σ^2 entsprechen daher Büschel von Flächen zweiter Ordnung, deren Basis aus a^2 und einem Geradenpaar besteht.

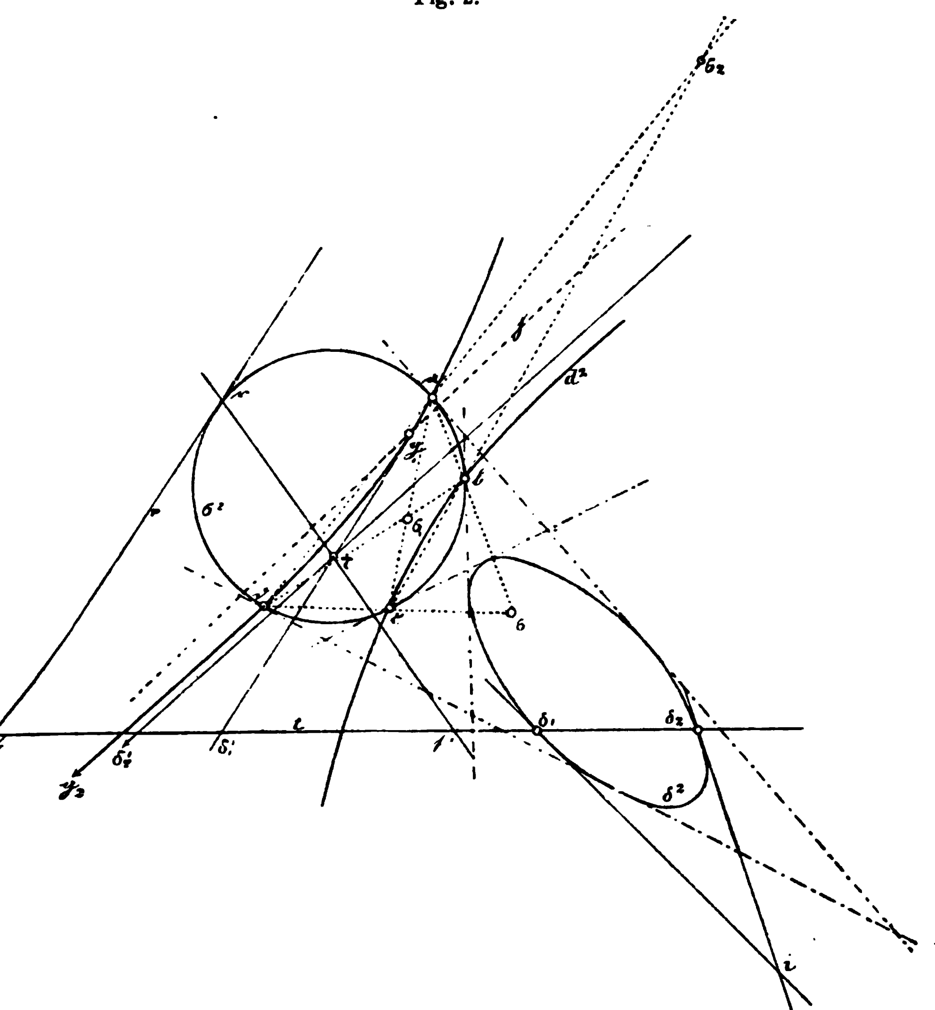
Sind daher $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die Berührungspunkte der σ^2 und δ^2 gemeinschaftlichen Tangenten, so werden diesen Tangenten von δ^2 Geradenpaare auf Φ_2^4 entsprechen, die sich in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ treffen, d. h. die acht Geraden von Φ_2^4 treffen einander paarweise auf T. Es mögen einander

[1] Der Kegelschnitt σ^2 vertritt die Rolle von Σ^2 für das Netz der Flächen zweiter Ordnung, indem er der Ort der Kegelspitzen ist, der im Netze enthaltenen Kegel.

$a_1 b'_1$	$a_2 b'_2$	$a'_1 b_1$	$a'_2 b_2$	in
$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	

treffen. Die vier Geraden a_1, a_2, a'_1, a'_2 liegen auf D_1^2 und b_1, b_2, b'_1, b'_2 auf D_2^2 und die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ liegen also auf d^2.

Fig. 2.



Es schneiden die Ebenen $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ die Ebene T in den Polaren von δ_1, δ_2 in Bezug auf σ^2, wie sich in Fig. 2 daraus ergibt, dass δ'_1, δ'_2 die zu δ_1, δ_2 conjugirten Punkte für a^2 also auch σ^2 sind. $\tau\delta'_1$

und $\overline{\tau\delta'_2}$ sind nach Früherem Tangenten von d^2 in $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$. Suchen wir nun die Polarfigur von δ^2 in Bezug auf σ^2, so erkennen wir, dass sie durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ gehen muss und $\overline{\tau\delta'_1}$ sowie $\overline{\tau\delta'_2}$ die Polaren von δ_1 und δ_2 berührt, d. h. dass sie mit d^2 identisch ist.

Die Kegel D_1^2 und D_2^2 treffen daher die Ebene T in einem Kegelschnitte d^2, welcher die Polarfigur von δ^2 in Bezug auf σ^2 ist.

Schneiden sich die Tangenten von δ^2 in δ_1 und δ_2 in $\mathfrak{i}$, dem Pol von t für δ^2, so ist die Polare $\mathfrak{j}$ von $\mathfrak{i}$ in Bezug auf σ^2 die Gerade, in der T und $\mathfrak{T}$ einander schneiden, und die die Punkte $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ von d^2 enthält.

Eine specielle Fläche dieser Art erhält man als Enveloppe der Kugeln, deren Mittelpunkte auf einem Kegelschnitte δ^2 liegen und die durch einen, daher noch einen zweiten festen Punkt gehen. Beide Punkte können reell oder imaginär sein. Da der Doppelkegelschnitt dieser Fläche der imaginäre Kugelkreis in der reellen, unendlich fernen Ebene ist, so sind die acht Geraden stets imaginär. Trifft δ^2 die unendlich ferne Ebene in reellen Punkten, so sind die singulären Tangentialebenen $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ reell. Ist δ^2 aber eine Ellipse, so sind sie conjugirt imaginär.

Die Spitzen $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ der Φ_2^4 doppelt umschriebenen Kegel $\mathfrak{K}^2, \mathfrak{K}_1^2, \mathfrak{K}_2^2$ liegen, wie wir sahen, in T und sind das den drei Kegelschnitten σ^2, δ^2 und d^2 gemeinschaftlich conjugirte Dreieck, da, wie früher gezeigt,[1] die Ebenen durch die Geraden von Φ_2^4 in $\mathfrak{d}_1$ sich paarweise in den durch σ, σ_1, σ_2 gehenden Geraden schneiden. Und zwar, da die Ebenen

$$\left.\begin{matrix}(a_1 a_2)\\(a'_1 a'_2)\end{matrix}\right\}\text{ durch }\sigma\qquad\left.\begin{matrix}(a_1 a'_1)\\(a_2 a'_2)\end{matrix}\right\}\text{ durch }\sigma_1\qquad\left.\begin{matrix}(a_1 a'_2)\\(a_2 a'_1)\end{matrix}\right\}\text{ durch }\sigma_2$$

gehen, so gehen die Geraden (Fig. 2)

$$\left.\begin{matrix}\overline{\mathfrak{ab}}\\\overline{\mathfrak{cd}}\end{matrix}\right\}\text{ durch }\sigma\qquad\left.\begin{matrix}\overline{\mathfrak{ac}}\\\overline{\mathfrak{bd}}\end{matrix}\right\}\text{ durch }\sigma_1\qquad\left.\begin{matrix}\overline{\mathfrak{ad}}\\\overline{\mathfrak{bc}}\end{matrix}\right\}\text{ durch }\sigma_2$$

Die Ebene T schneidet Φ_2^4 in einer Curve vierter Ordnung t^4 mit zwei Doppelpunkten. Der dieselbe aus $\mathfrak{t}$ projicirende Kegel

[1] Auf pag. 3 [1170] sub I: Wir haben nur aa' hier für cc' dort zu setzen.

berührte Φ_2^4 längs derselben, da die in den Ebenen durch $\overline{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}$ liegenden Kegelschnitte $\mathfrak{t}$ zum Pol für die Schnittlinie mit T besitzen. Für diese t^4 sind τ, σ, σ_1, σ_2 Schnittpunkte der Doppeltangenten, welche die Schnittlinien von $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ und $\mathfrak{K}^2$, $\mathfrak{K}_1^2$, $\mathfrak{K}_2^2$ mit T sind.

Die t^4 entspricht dem Keselschnitte, in dem H^2 die Ebene T schneidet, in einer bestimmten quadratischen Verwandtschaft der Ebene T, in welcher jeder Geraden g derselben die beiden Pole in Bezug auf die aus $\sigma^2 t$ bestehende Curve dritter Ordnung zugeordnet werden. (Siehe K. Küpper, „Beiträge zur Theorie der Curven dritter und vierter Ordnung", Abhandlungen der kgl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, 5. Band, VI. Folge.)

IV. Die Flächen H^2 und Σ^2 können einander in vier Punkten berühren, wenn sie beide durch das windschiefe Vierseit, welches die vier Punkte bestimmen, gehen. Es seien $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$, $\mathfrak{d}_4$ die vier Berührungspunkte, a, a', b, b' die vier beiden Flächen gemeinschaftlichen Geraden und zwar mögen sich

aa'	bb'	ab'	$a'b$	in
$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_2$	$\mathfrak{d}_3$	$\mathfrak{d}_4$	

treffen. Die Verbindungslinien $\overline{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2} = d'$ und $\overline{\mathfrak{d}_3\mathfrak{d}_4} = d$ liegen dann nicht auf den Flächen und sind einander conjugirt in Bezug auf beide Flächen H^2, Σ^2.

Auf Φ_4^4, welche Fläche H^2 entsprechen soll, existirt nur eine einzige Doppelschaar von Kegelschnitten, deren Ebenen Φ_4^4 doppelt berühren, diejenige Schaar nämlich, welche den Geraden von H^2 entspricht. Φ_4^4 vereinigt in gewisser Weise die Eigenschaften von Ψ_1^4 und Φ_2^4, letztere in doppelter Art. Die Ebenen nämlich, welche die auf Φ_4^4 liegenden Geraden a, a', b, b' aus σ projiciren, berühren Φ_4^4 längs dieser Geraden. Alle Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}$ berühren die Ebenen $\overline{\sigma a'}$, $\overline{\sigma b'}$ in den Schnittpunkten mit a', b' und die Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}'$ berühren die Ebenen $\overline{\sigma a}$, $\overline{\sigma b}$ auf a und b.

Die Ebenen durch d' und d enthalten Kegelschnittpaare; unter diesen treten je zwei $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ durch d' und $\mathfrak{O}_3$, $\mathfrak{O}_4$ durch d gehende auf, welche Φ_4^4 längs eines Kegelschnittes berühren.

Trifft d' und d die Ebene A in $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$, so werden die Polarebenen T_1, T_2 dieser Punkte für Σ^2 und H^2 identisch und enthalten die Doppelkegelschnitte δ_1^2, δ_2^2 der Φ_4^4 längs a^2 umschriebenen Developpablen Δ. Man kann Φ_4^4 in zweifacher Weise als Enveloppe von Flächen eines Netzes ansehen. Das eine Netz ist durch a^2 und $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, das andere durch a^2 und $\mathfrak{d}_3$, $\mathfrak{d}_4$ bestimmt und die Pole der Flächen, welche Φ_4^4 längs Kegelschnitten berühren, liegen für's erste Netz auf δ_1^2, für's zweite auf δ_2^2. Die Kegel zweiter Ordnung, welche in $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$, $\mathfrak{d}_4$ der Fläche sich anschmiegen, gehen durch die zwei in jedem Punkte zusammentreffenden Geraden von Φ_4^4 und berühren die Ebene, welche diese Gerade mit σ verbindet. Die in den Ebenen T_1 und T_2 auftretenden Kegelschnitte σ_1^2 und σ_2^2 sind mit δ_1^2 und δ_2^2 in doppelter Berührung, in den Punkten $\mathfrak{d}_3$, $\mathfrak{d}_4$, respective $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$.

Eine specielle Fläche dieser Art tritt als Enveloppe von den Kugeln auf, deren Mittelpunkte auf einem Kegelschnitte liegen, und die noch durch zwei feste Punkte gehen, deren Verbindungslinie im Mittelpunkte des Kegelschnittes senkrecht auf seiner Ebene steht oder auch, welche von den Kugeln enveloppirt wird, die durch zwei feste Punkte gehen und eine Ebene berühren. Die speciellste Fläche dieser Art ist die, welche durch Rotation eines Kreises um eine in seiner Ebene gelegene Gerade, die nicht durch den Mittelpunkt geht, entsteht. Bei diesen Flächen sind natürlich die Geraden imaginär, da der Doppelkegelschnitt in reeller Ebene imaginär ist.

V. Berührt H^2 die Fläche Σ^2 längs eines Kegelschnittes h^2, so sieht man leicht, dass die Fläche vierter Ordnung in zwei Flächen zweiter Ordnung, die durch a^2 und h^2 gehen, zerfallen muss.

VI. Berührt die Fläche H^2 die Ebene A in $\mathfrak{a}$, so zerfällt die Fläche vierter Ordnung in A und eine durch a^2 und die Polare a von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf a^2 gehende Fläche dritter Ordnung Φ^3. Denn seien g und g_1 irgend zwei Gerade der einen Schaar von H^2, denen die Kegelschnitte g^2 und g_1^2 entsprechen. Die Geraden g'

der anderen Schaar treffen g und g_1 in $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$, welche Punkte projectivische Punktreihen durchlaufen. Die ihnen entsprechenden Flächen P^2 und P_1^2 des Gebüsches beschreiben zu einander projectivische Flächenbüschel, deren Basis (a^2g^2) und $(a^2g_1^2)$ ist. Gelangt $\mathfrak{p}$ auf g in Schnittpunkt $\mathfrak{p}$ mit A, so muss auch $\mathfrak{p}_1$ auf g_1 nach $\mathfrak{g}_1$ auf A gelangen, da $\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1} = h'$ eine Gerade von H^2 ist. Also entsprechen in den Büscheln die Flächen zweiter Ordnung einander, die in die Ebene A und je eine zweite Ebene zerfallen; A gehört also mit zum Erzeugniss.

Bezieht man umgekehrt die Büschel (B^2) und $(\mathfrak{B}^2)$, die wir zu Anfang festlegten, so projectivisch auf einander, dass die in (AB) zerfallende Fläche von (B^2) der in $(A\mathfrak{B})$ zerfallenden Fläche von $(\mathfrak{B}^2)$ entspricht, dann ist A ein Theil des Erzeugnisses und die beiden Büschel erzeugen nur noch eine Fläche dritter Ordnung Φ^3. Die auftretende Fläche H^2, welche die Geraden enthält, die die Pole von B^2, respective $\mathfrak{B}^2$ für a^2 verbinden, muss in A eine Erzeugende g' haben, da die den Flächen (AB) und $(A\mathfrak{B})$ zukommenden Pole auf A liegen.

Es kann auch, wie man sieht, jede Fläche dritter Ordnung auf diese Art erzeugt werden.

Da der Kegelschnitt k^2 aus den beiden Geraden h', h von H^2 in A besteht, so wird auch seine Polarfigur $\mathfrak{K}^2$ für Σ^2 in zwei Ebenenbüschel zerfallen, deren Axen b', b conjugirte Gerade zu h', h sind. Den Geraden g der Schaar $\mathfrak{S}$ von H^2 entsprechen Kegelschnitte g^2, deren Ebenen durch b' gehen und den Geraden g' Kegelschnitte g'^2, deren Ebenen durch b gehen. Die Geraden bb' liegen selbst auf Φ^3, ebenso die Gerade a, in welcher die Ebene durch bb' die Ebene A trifft und die die Polare von $\mathfrak{a}$ für a^2 ist. Es entspricht nämlich den Geraden h' von H^2 der in b' und a zerfallende Kegelschnitt von Φ^3 und der Geraden h der Kegelschnitt (ba).

Aber auch die anderen Kegel $\mathfrak{K}_1^2$, $\mathfrak{K}_2^2$, $\mathfrak{K}_3^2$, $\mathfrak{K}_4^2$ zerfallen e in zwei Ebenenbüschel

$$b_1 b_1',\quad b_2 b_2',\quad b_3 b_3',\quad b_4 b_4' \quad \text{deren Axen sich in}$$
$$\sigma_1 \qquad \sigma_2 \qquad \sigma_3 \qquad \sigma_4$$

respective schneiden und welche sämmtlich die Gerade a treffen.

Es seien h^4 und r^4 die Berührungscurven der H^2 und Σ^2 gemeinschaftlich umschriebenen Developpablen D, welche aus $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ durch Kegel zweiter Ordnung projicirt wird. Den Kegelscheitten, deren Ebenen durch $\mathfrak{a}$ gehen und die also A berühren, entsprechen auf Φ^3 ebene Curven dritter Ordnung, die durch σ gehen. Legt man nun von $\mathfrak{a}$ an einen der h^4 doppelt-projicirenden Kegel die Tangentialebene, so muss die Curve dritter Ordnung zwei Doppelpunkte erhalten, also in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen.

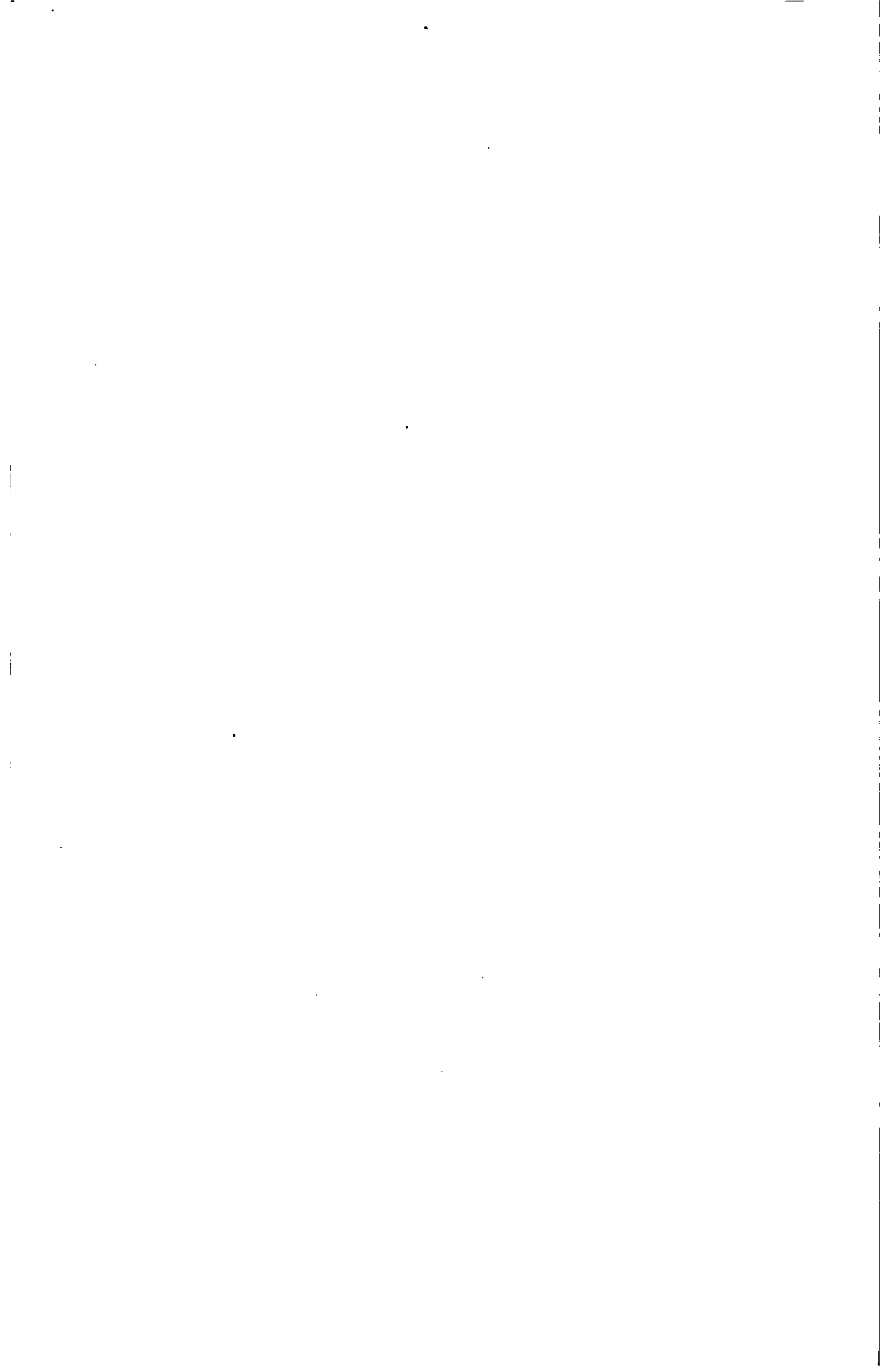
Berührt die Ebene zum Beispiel in $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1$ und geht $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1}$ durch σ_1 und sind die Punkte $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1$ auf r^4 die Berührungspunkte auf Σ^2 der Tangentialebenen in $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1$ von H^2, so muss die Ebene der erwähnten Curve dritter Ordnung durch $\overline{\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1}$ gehen und $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1$ sind die Doppelpunkte. Es ist daher die Gerade $\overline{\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1}$ ein Theil der Curve und der andere Theil, ein Kegelschnitt, geht durch σ. $\overline{\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1}$ als Erzeugende des r^4 aus σ_1 projicirenden Kegels wird a^2 im Allgemeinen nicht schneiden und muss daher a treffen. Daher: Die acht Geraden, in denen die Ebenen durch a und σ_1, $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ die r^4 doppelt projicirenden Kegel treffen, liegen auf Φ^3. a wird also von zehn Geraden, die fünf Geradenpaare bilden, getroffen, die Scheitel der Geradenpaare sind $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$.

Sei $\mathfrak{k}^2$ der Kegelschnitt von H^2, welcher durch $\mathfrak{a}$ geht und h^4 doppelt berührt, dem also auf Φ^3 die Gerade b_1 und der Kegelschnitt g^2 in der Ebene $(\overline{b_1\sigma})$ entsprechen soll. Ein beliebig variabler Kegelschnitt h^2 von H^2, welcher h^4 doppelt berührt und dessen Ebene durch σ_1 geht, trifft $\mathfrak{k}^2$ in zwei Punkten $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1$. Jedem derselben entsprechen zwei Punkte $\mathfrak{g}', \mathfrak{g}''$ und $\mathfrak{g}_1', \mathfrak{g}_1''$ auf der aus $(b_1 g^2)$ bestehenden Curve dritter Ordnung, von denen einer auf b_1 und einer auf g^2 liegen muss, denn sowohl g^2 als $\overline{\mathfrak{g}'\mathfrak{g}''}$ oder $\overline{\mathfrak{g}_1'\mathfrak{g}_1''}$ gehen durch σ. Da nun dem Kegelschnitte h^2 auf Φ^3 zwei Kegelschnitte h_1^2 und h_2^2 entsprechen müssen, deren Ebenen durch σ_1 gehen, so muss einer dieser Kegelschnitte, zum Beispiel h_1^2 mit b_1 in einer Ebene liegen und h_2^2 daher mit b_2'. Hieraus ersieht man, dass der Kegel $\mathfrak{K}_1^2$ in die Ebenenbüschel durch b_1 und b_1' zerfällt.

Ausser den eben angegebenen elf Geraden liegen auf Φ^3 noch 16 Gerade, welche genau so gegeneinander sich verhalten,

wie die 16 Geraden von Φ^4. Sie entsprechen paarweise den acht Geraden der beiden Schaaren von H^2, welche h^4 berühren. Man ersieht leicht, dass von den 27 Geraden der Φ^3 jede von zehn anderen geschnitten wird, die fünf sich schneidende Geradenpaare bilden. Doch soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

Bemerkt sei noch, dass, wenn H^2, ausser A zu berühren, noch eine der in I—IV erwähnten speciellen Lagen zu Σ^2 hat, man dann Flächen dritter Ordnung mit Doppelpunkten erhält. Die Reduction der Anzahl von Geraden dieser speciellen Flächen dritter Ordnung ist auch leicht zu übersehen.



Preis des ganzen Heftes: 3 fl. 50 kr. = 7 RMk.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden drei gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften" herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.



